Труды СПбГТУ 443 (1992) 9–17

К теории сред с микроструктурой

А. М. Кривцов

1 Введение

При получении уравнений нелинейной механики сплошной среды основная сложность состоит в написании определяющих уравнений. Поэтому большую помощь может оказать некая физическая модель, для которой эти уравнения могут быть получены точно, исходя из микроскопических представлений. Одной из таких моделей является идеальный монокристалл [1–4]. Итак, мы будем рассматривать множество частиц (атомов), взаимодействующих между собой парными центральными упругими силами. В равновесии частицы образуют идеальную простую трехмерную кристаллическую решетку. Каждая частица взаимодействует с ограниченным числом соседей. Существенной особенностью данной работы является то, что рассматриваются нелинейные силы и деформации. Результаты, вообще говоря, получены для упругого деформирования, но их применение возможно за пределами упругости. Для получения микроскопических уравнений будет использоваться длинноволновое приближение, т. е. рассматриваться функции, мало меняющиеся на расстояниях, сравнимых с длинами основных векторов решетки. Тепловое движение и термодинамические эффекты учитываться не будут. Следует особо отметить использование в работе аппарата прямого тензорного исчисления [5, 6].

Автор приносит глубокую благодарность П. А. Жилину, влияние которого во многом определило исследование автора в этой области.

2 Обозначения.

В качестве отсчетной конфигурации будем использовать недеформированный кристалл. Радиус-вектор произвольной точки отсчетной конфигурации, проведенной из некоторого единого начала отсчета обозначим $\underline{r}$. Радиус-векторы узлов решетки, проведенные из некоторого фиксированного узла, обозначим $\underline{a}_\alpha$. Нумерация производится таким образом, что $\underline{a}_{-\alpha} = -\underline{a}_\alpha$. В актуальной конфигурации векторам $\underline{r}$ и $\underline{a}_\alpha$ отвечают, соответственно, $\underline{R}$ и $\underline{A}_\alpha$. Объем элементарной ячейки в отсчетной и актуальной конфигурациях обозначим соответственно v_* и V_*. Иногда величины, отвечающие отсчетной конфигурации, будут помечаться ноликом, например, $\overset{\circ}{\nabla}$ и ∇ — набла-операторы, соответственно, отсчетной и актуальной конфигурации.

Диадное произведение двух векторов $\underline{a}$ и $\underline{b}$ будет обозначаться $\underline{a}\underline{b}$, единичный тензор — $\underline{\underline{E}}$. Тогда тензоры градиентов места имеют вид

$$\overset{\circ}{\nabla}\underline{R}\,, \qquad \nabla\underline{r}\,; \qquad (\underline{R}\overset{\circ}{\nabla}) = (\overset{\circ}{\nabla}\underline{R})^T\,, \qquad (\underline{r}\nabla) = (\nabla\underline{r})^T.$$

Формулы, связывающие конфигурации:

$$(\overset{\circ}{\nabla}\underline{R})\cdot(\nabla\underline{r}) = \underline{\underline{E}}\,, \qquad \nabla = (\nabla\underline{r})\cdot\overset{\circ}{\nabla}\,, \qquad \underline{A}_\alpha = (\underline{R}\overset{\circ}{\nabla})\cdot\underline{a}_\alpha.$$

3 Уравнение статики в форме Пиола.

Запишем уравнение баланса сил для некоторого атома решетки:

$$\sum_\alpha \underline{F}_\alpha + \underline{f} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь $\underline{F}_\alpha$, $\underline{f}$ — силы, с которыми действуют на рассматриваемый атом соответственно атом под номером α и внешние поля. Из-за симметрии решетки формула (3.1) может быть преобразована к виду

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha(\underline{F}_\alpha + \underline{F}_{-\alpha}) + \underline{f} = 0 \tag{3.2}$$

Рассмотрим материальное представление действующих на атом сил, т. е. будем считать их функциями $\underline{r}$. Тогда

$$\underline{F}_{-\alpha}(\underline{r}) = -\underline{F}_\alpha(\underline{r} - \underline{a}_\alpha) \approx -\underline{F}_\alpha(\underline{r}) + \underline{a}_\alpha\cdot\overset{\circ}{\nabla}\underline{F}_\alpha(\underline{r}) \tag{3.3}$$

Используя (3.3) и учитывая, что $\overset{\circ}{\nabla} \cdot \underline{a} = 0$, получим из формулы (3.2)

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \underline{a}_{\alpha} \underline{F}_{\alpha} + \underline{f} = 0 \tag{3.4}$$

Обозначим (здесь m — масса частицы)

$$\frac{1}{v_*} \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \underline{a}_{\alpha} \underline{F}_{\alpha} = \underline{\underline{P}}\,, \qquad \frac{1}{m} \underline{f} = \underline{k}\,, \qquad \frac{m}{v_*} = \rho_0. \tag{3.5}$$

Тогда в новых обозначениях уравнение (3.4) примет вид

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \underline{\underline{P}} + \rho_0 \underline{k} = 0 \tag{3.6}$$

Несложно показать, что ρ_0 имеет смысл макроскопической плотности, $\underline{k}$ — вектора массовых сил. Тогда уравнение в точности совпадает с уравнением статики сплошной среды в том случае, если $\underline{\underline{P}}$ — это тензор напряжений Пиола.

4 Уравнение статики в форме Коши.

Преобразуем теперь (3.2) пользуясь пространственным представлением, т. е., считая силы функциями $\underline{R}$. Получим

$$\underline{F}_{-\alpha}(\underline{R}) = -\underline{F}_{\alpha}(\underline{R} + \underline{A}_{-\alpha}) \approx -\underline{F}_{\alpha}(\underline{R}) + \underline{A}_{\alpha} \cdot \nabla \underline{F}_{\alpha}(\underline{R}).$$

Соотношение (3.2) примет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \underline{A}_{\alpha} \cdot \nabla \underline{F}_{\alpha} + \underline{f} = 0. \tag{4.1}$$

Обозначим

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{V_*} \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \underline{A}_{\alpha} \underline{F}_{\alpha}. \tag{4.2}$$

Тогда:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} = \frac{1}{V_*} \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \underline{A}_{\alpha} \cdot \nabla \underline{F}_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(\nabla \cdot \frac{1}{V_*} \underline{A}_{\alpha} \right) \underline{F}_{\alpha} \tag{4.3}$$

Согласно тождеству Пиола

$$\nabla \cdot \frac{v_*}{V_*} (\underline{R} \overset{\circ}{\nabla}) \equiv 0$$

вторая сумма в (4.3) тождественно равна нулю, а следовательно, (4.1) может быть представлена в виде:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} + \rho \underline{k} = 0 \tag{4.4}$$

Здесь $\rho = m/V_*$ — макроскопическая плотность после деформации. Формула (4.4) совпадает с уравнением статики сплошной среды в форме Коши, если $\underline{\underline{T}}$ — тензор напряжений Коши. Убедиться, что это действительно так, можно, доказав, что $\underline{\underline{T}}$ удовлятворяет формуле Коши, то есть определяет макроскопические напряжения. Вырезав в кристалле некоторую площадку и просуммировав действующие на нее силы, получим формулу (4.2) для тензора Коши.

Сравним теперь формулы (3.6) и (4.2). Легко видеть, что тензор $\underline{\underline{P}}$ может быть выражен через тензор $\underline{\underline{T}}$ по формуле

$$\underline{\underline{P}} = \frac{\rho_0}{\rho}\,(\underline{r}\,\overset{\circ}{\nabla})\cdot\underline{\underline{T}},$$

а следовательно, является тензором Пиола.

5 Различные формы тензоров напряжений.

Так как $\underline{F}_\alpha \parallel \underline{A}_\alpha$, то $\underline{F}_\alpha$ можно представить в виде

$$\underline{F}_\alpha = \varPhi_\alpha \underline{A}_\alpha$$

Запишем теперь формулы для наиболее часто употребляющихся в литературе тензоров напряжений [5]:

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} = \tfrac{1}{v_*}\tfrac{1}{2}\sum_\alpha \varPhi_\alpha \underline{A}_\alpha \underline{A}_\alpha \quad \text{— тензор Коши;}$$

$$\underline{\underline{T}}_{(0)} = \tfrac{1}{v_*}\tfrac{1}{2}\sum_\alpha \varPhi_\alpha \underline{A}_\alpha \underline{A}_\alpha \quad \text{— (Гамель, Каппус, Треффтц);}$$

$$\underline{\underline{P}} = \tfrac{1}{v_*}\tfrac{1}{2}\sum_\alpha \varPhi_\alpha \underline{a}_\alpha \underline{A}_\alpha \quad \text{— тензор Пиола;}$$

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} = \tfrac{1}{v_*}\tfrac{1}{2}\sum_\alpha \varPhi_\alpha \underline{a}_\alpha \underline{a}_\alpha \quad \text{— энергетический тензор;}$$

$$\underline{\underline{T}}^* = \tfrac{1}{v_*}\tfrac{1}{2}\sum_\alpha \varPhi_\alpha \underline{a}_\alpha \underline{a}_\alpha \quad \text{— 2-й тензор Пиола-Кирхгоффа}$$

Формулы объясняют микроскопический смысл этих тензоров.

Нам в дальнейшем будет удобно ввести еще один тензор, который мы назовем тензором сил

$$\underline{\underline{\varPhi}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sum_\alpha \varPhi_\alpha \underline{a}_\alpha \underline{a}_\alpha.$$

Тогда тензор Коши

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{V_*}(\underline{R}\,\overset{\circ}{\nabla})\cdot\underline{\underline{\varPhi}}\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\,\underline{R}). \tag{5.1}$$

6 Определяющее уравнение.

Рассмотрим величины Φ_α. Они могут быть представлены в виде

$$\Phi_\alpha = \Phi\,(A_\alpha^2) = \Phi\,(\underline{a}_\alpha \cdot \underline{\underline{G}} \cdot \underline{a}_\alpha).$$

Здесь Φ — некоторая единая для всех α функция, равная отношению величины силы взаимодействия между двумя атомами к расстоянию между ними, $\underline{\underline{G}}$ — мера деформации Коши-Грина

$$\underline{\underline{G}} = (\overset{\circ}{\nabla}\underline{R}) \cdot (\underline{R}\,\overset{\circ}{\nabla}).$$

Так как $V_* = \sqrt{|\underline{\underline{G}}|}\,v_*$, то формула (5.1) нам даст определяющее уравнение

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{v_*\sqrt{|\underline{\underline{G}}|}}\,(\underline{R}\,\overset{\circ}{\nabla}) \cdot \underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{G}}) \cdot (\overset{\circ}{\nabla}\underline{R})\,, \qquad \underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{G}}) = \frac{1}{2}\sum_\alpha \Phi\,(\underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha \cdot\cdot\, \underline{\underline{G}})\;\underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha.$$

7 Линейное приближение.

Обозначим

$$\underline{A}_\alpha = \underline{a}_\alpha + \underline{\Delta}_\alpha\,, \qquad \underline{\Delta}_\alpha = \underline{u}\,(\underline{r} + \underline{a}_\alpha) - \underline{u}(\underline{r})\,, \qquad \underline{u} = \underline{R} - \underline{r}.$$

Раскладывая величины Φ_α, $\underline{\Delta}_\alpha$ в ряд по малым параметрам и сохранив первое приближение, получим

$$\Phi_\alpha = \mathcal{A}_\alpha + \mathcal{B}_\alpha\,\underline{a}_\alpha \cdot \underline{\Delta}_\alpha\,, \qquad \underline{\Delta}_\alpha = \underline{a}_\alpha \cdot (\nabla\underline{u})\,; \qquad \mathcal{A}_\alpha \overset{\text{def}}{=} \Phi\,(a_\alpha^2)\,, \qquad \mathcal{B}_\alpha \overset{\text{def}}{=} 2\Phi'\,(a_\alpha^2)\,.$$

Подставим полученные выражения в формулу (3.5) для тензора Пиола

$$v_*\,\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{\mathcal{A}}} + \underline{\underline{\mathcal{A}}} \cdot (\nabla\underline{u}) + {}^4\underline{\underline{\mathcal{B}}} \cdot\cdot\, (\nabla\underline{u})^S.$$

Здесь обозначено

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sum_\alpha \mathcal{A}_\alpha\,\underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha\,, \qquad {}^4\underline{\underline{\mathcal{B}}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sum_\alpha \mathcal{B}_\alpha\,\underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha. \tag{7.1}$$

Если исходное состояние является ненапряженным, то тензор Пиола становится неотличим от $\underline{\underline{\tau}}$ — линейного тензора напряжений Коши, и мы имеем

$$\underline{\underline{\tau}} = {}^4\underline{\underline{C}} \cdot\cdot\, \underline{\underline{\varepsilon}}\,, \qquad {}^4\underline{\underline{C}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{v_*}\,{}^4\underline{\underline{\mathcal{B}}} = \frac{1}{v_*}\,\frac{1}{2}\sum_\alpha \mathcal{B}_\alpha\,\underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha. \tag{7.2}$$

Здесь $\underline{\underline{\varepsilon}} = (\nabla \underline{u})^S$ — тензор малых деформаций. Таким образом, мы получим классический закон Гука. Отметим, что тензор ${}^4\underline{\underline{C}}$ — абсолютно симметричен, т. е. симметричен относительно любой перестановки входящих в него векторов. Это является следствием рассмотрения простой решетки.

Приведем случай, когда ${}^4\underline{\underline{C}}$ — изотропен

$$ {}^4\underline{\underline{C}} = C\,{}^4\underline{\underline{J}}\,, \qquad {}^4\underline{\underline{J}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{e}_k\underline{e}_k\underline{e}_n\underline{e}_n + \underline{e}_k\underline{e}_n\underline{e}_n\underline{e}_k + \underline{e}_k\underline{e}_n\underline{e}_k\underline{e}_n. \tag{7.3} $$

Здесь $\underline{e}_k$ — некоторый ортонормированный базис,

$$ C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{30}\sum_\alpha a_\alpha \mathcal{B}_\alpha. $$

В формуле (7.3) использовано суммирование по повторяющимся индексам. Тогда уравнение (7.2) примет вид:

$$ \underline{\underline{\tau}} = C(\vartheta\underline{\underline{E}} + 2\underline{\underline{\varepsilon}})\,; \qquad \vartheta \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}. \tag{7.4} $$

Отметим, что (7.4) соответствует коэффициенту Пуассона $\nu = \frac{1}{4}$.

8 Физически линейный материал.

Рассмотрим ситуацию, когда силы силы взаимодействия остаются линейными при не малых деформациях. Вообще, такой материал принято называть геометрически нелинейным, однако приведенное в заголовке название, по мнению автора, лучше отражает существо вопроса.

Введем тензор конечной деформации Коши-Грина:

$$ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\,(\underline{\underline{G}} - \underline{\underline{E}}) = (\overset{\circ}{\nabla}\underline{u})^S + \frac{1}{2}\,(\overset{\circ}{\nabla}\underline{u})\cdot(\underline{u}\overset{\circ}{\nabla}). $$

В линейном приближении тензор Коши-Грина превращается в обычный тензор малой деформации.

В силу физической линейности, $\varPhi_\alpha$ можно представить в виде:

$$ \varPhi_\alpha = \varPhi(A_\alpha^2) = \mathcal{A}_\alpha + \mathcal{B}_\alpha \underline{a}_\alpha \underline{a}_\alpha \cdot\cdot\, \underline{\underline{\varepsilon}}\,; \qquad \mathcal{A}_\alpha = \varPhi(a_\alpha^2)\,, \qquad \mathcal{B}_\alpha = 2\varPhi'(a_\alpha^2). $$

Используя теперь обозначения (7.1), получим

$$ \underline{\underline{\varPhi}} = \underline{\underline{\mathcal{A}}} + {}^4\underline{\underline{\mathcal{B}}} \cdot\cdot\, \underline{\underline{\varepsilon}}. $$

Если считать исходную конфигурацию ненапряженной, то $\underline{\underline{A}} = 0$, и из (5.1) получим:

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{\sqrt{|\underline{\underline{G}}|}}\,(\underline{R}\,\overset{\circ}{\nabla})\cdot({}^4\underline{\underline{C}}\cdot\cdot\,\underline{\underline{\varepsilon}})\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\underline{R})\,, \qquad {}^4\underline{\underline{C}} = \frac{1}{v_*}\frac{1}{2}\sum_\alpha \mathcal{B}_\alpha\, \underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha. \tag{8.1}$$

Здесь ${}^4\underline{\underline{C}}$ — тензор жесткости в линейной теории.

Соотношение упругости (8.1) можно записать в несколько ином виде

$$\underline{\underline{T}} = {}^4\underline{\underline{C}}'\cdot\cdot\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,, \qquad {}^4\underline{\underline{C}}' \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{V_*}\frac{1}{2}\sum_\alpha \mathcal{B}_\alpha\, \underline{A}_\alpha\underline{A}_\alpha\underline{a}_\alpha\underline{a}_\alpha.$$

Наряду с мерой деформации Коши-Грина вводится мера деформации Альманзи:

$$\underline{\underline{g}} = (\nabla\underline{r})\cdot(\underline{r}\nabla).$$

и соответствующий ему тензор деформации Альманзи:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \frac{1}{2}(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{g}}) = (\nabla\underline{u})^S - \frac{1}{2}(\nabla\underline{u})\cdot(\underline{u}\nabla) = (\nabla\underline{r})\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot(\underline{r}\nabla). \tag{8.2}$$

При использовании тензора Альманзи соотношения упругости примут вид

$$\underline{\underline{T}} = {}^4\underline{\underline{C}}''\cdot\cdot\,\underline{\underline{\varepsilon}}'\,, \qquad {}^4\underline{\underline{C}}'' \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{V_*}\frac{1}{2}\sum_\alpha \mathcal{B}_\alpha\, \underline{A}_\alpha\underline{A}_\alpha\underline{A}_\alpha\underline{A}_\alpha. \tag{8.3}$$

Тензор ${}^4\underline{\underline{C}}''$, как и ${}^4\underline{\underline{C}}$, абсолютно симметричен.

Рассмотрим теперь случай, когда материал изотропен, а стало быть ${}^4\underline{\underline{C}}$ определяется формулой (7.3). Тензор ${}^4\underline{\underline{C}}''$ при этом, вообще говоря, будет анизотропен. Тем не менее соотношения упругости допускают простую запись.

Введем в рассмотрение тензор:

$$\underline{\underline{F}} = (\underline{R}\,\overset{\circ}{\nabla})\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\underline{R}) = \underline{\underline{g}}^{-1}.$$

Отметим, что

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\mathcal{O}}}^T\cdot\underline{\underline{G}}\cdot\underline{\underline{\mathcal{O}}}. \tag{8.4}$$

Здесь $\underline{\underline{\mathcal{O}}}$ — тензор поворота среды при деформации. Он может быть получен, например, из полярного разложения $\overset{\circ}{\nabla}\underline{R}$

$$\overset{\circ}{\nabla}\underline{R} = \underline{\underline{U}}\cdot\underline{\underline{\mathcal{O}}}\,, \qquad \underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{G}}. \tag{8.5}$$

Из (8.5), в частноти, следует, что инварианты тензоров $\underline{\underline{F}}$ и $\underline{\underline{G}}$ совпадают. Кроме того, обозначим

$$\underline{\underline{\varphi}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{E}}\right) = \underline{\underline{O}}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{O}}.$$

Тогда формула (8.1) может быть приведена к виду

$$\underline{\underline{T}} = \frac{C}{\sqrt{|\underline{\underline{F}}|}}\ \underline{\underline{F}} \cdot \left(\vartheta \underline{\underline{E}} + 2\underline{\underline{\varphi}}\right), \qquad \vartheta \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr} \underline{\underline{\varphi}}.$$

9 Физически линейный материал при малых деформациях.

В этом пункте мы будем считать деформации малыми, в то время как перемещения и повороты остаются конечными. Рассмотрим (8.5)

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{E}} + 2\underline{\underline{\varepsilon}} \approx \underline{\underline{E}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{E}} \qquad \Rightarrow \qquad \overset{\circ}{\nabla} \underline{R} \approx \underline{\underline{O}}. \tag{9.1}$$

Тогда, учитывая, что $V_* \approx v_*$:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{O}}^T \cdot \left({}^4\underline{\underline{C}} \cdot\cdot\, \underline{\underline{\varepsilon}}\right) \cdot \underline{\underline{O}}.$$

Из (9.1) следует, что $\underline{A}_\alpha \approx \underline{a}_\alpha \cdot \underline{\underline{O}}$ т. е. вектор $\underline{A}_\alpha$ получают поворотом $\underline{a}_\alpha$. Следовательно, и тензор ${}^4\underline{\underline{C}}''$ может быть получен поворотом ${}^4\underline{\underline{C}}$. Отметим, кстати, что согласно (8.2), аналогично связаны и $\underline{\underline{\varepsilon}}$ с $\underline{\underline{\varepsilon}}'$.

Рассмотрим теперь случай изотропии. Так как ${}^4\underline{\underline{C}}$ изотропен, то ${}^4\underline{\underline{C}}''$, полученный из него поворотом, должен быть ему равен. Следовательно, соотношение (8.3) примет вид:

$$\underline{\underline{T}} = C\left(\vartheta \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}'\right), \qquad \vartheta \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}' = \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}. \tag{9.2}$$

Уравнение (9.2) соответствует материалу Сетха. Распространено мнение, что материал Сетха не является гиперупругим, то есть не существует потенциала, описывающего деформацию, а потому уравнением (9.2) пользоваться нельзя. Это не совсем так. Действительно, при конечных деформациях материал Сетха не будет гиперупругим. Однако при использовании (9.2) необходимо помнить о тех предположениях, при которых уравнение выводилось, а именно, о малости $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Тогда упругий потенциал будет существовать, так же, как он существует в линейной теории.

Литература

[1] Борн М., Кунь Х. Динамическая теория кристаллических решеток. ИЛ, 1959.

[2] Косевич А.М. Теория кристаллической решетки. Харьков: Вища школа, 1988.

[3] Кунин И.А. Теория сред с микроструктурой. Наука, 1975

[4] Лейбфрид Г., Людвиг В. Теория ангармонических эффектов в кристаллах. ИЛ, 1963.

[5] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.

[6] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.