

# РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЦИЛИНДРА И ПЛАСТИНЫ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

А.С. Кухарева

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I,

Санкт-Петербург, Россия

e-mail: kukhareva\_as@mail.ru

**Аннотация.** Решены полностью связанные термомеханические краевые задачи для цилиндра и пластины из сплава с памятью формы, нагруженных внешней силой и охлаждаемых или нагреваемых с поверхности. Свойства материала описываются с помощью микроструктурной модели. Показано, что даже при малой скорости охлаждения, поля температур, напряжений и распределение объемной доли мартенсита по ширине образца неоднородны. Отмечается, что величина эффекта пластичности превращения уменьшается при увеличении скорости охлаждения.

## 1. Введение

Сплавы с памятью формы (СПФ) способны накапливать или возвращать значительные неупругие деформации при различных термосиловых воздействиях. Благодаря необычному деформационному поведению они находят широкое применение в различных отраслях техники и медицины. Из СПФ изготавливают термочувствительные и исполнительные элементы в термомеханических соединениях, прессах, мартенситных двигателях, приводах, предохранительных и регулирующих устройствах. Для решения широкого круга технических проблем необходимо разработать методы расчета напряженно-деформированного состояния в телах из СПФ различных форм и размеров.

Основной особенностью материалов с памятью формы является то, что в них происходят термоупругие мартенситные превращения, которые могут инициироваться как изменением температуры, так и изменением напряжения. Многие физические и механические свойства существенно меняются в результате мартенситного перехода. Кроме того, мартенситные превращения сопровождаются выделением или поглощением тепла. Задача расчета деформаций и напряжений тесно связана с задачей нахождения поля температур. Все эти обстоятельства сильно осложняют решение краевых задач для тел из СПФ. Классические методы инженерной механики не применимы для расчетов сложных режимов функционирования элементов из СПФ, поскольку напряженно-деформированное состояние в каждой точке тела в каждый момент времени определяется не только краевыми и начальными условиями, но и всей историей термосилового нагружения. Очень важно учитывать, что вариации температуры и напряжения могут вызывать изменение неупругой деформации и структурно-фазового состояния, что в свою очередь влечет за собой изменение напряжения и температуры.

В настоящее время получен ряд решений краевых задач для тел простой формы из СПФ [1-3], в которых задачи механики и теплопроводности решаются в постановке с

различным характером связности, а свойства СПФ описываются с позиций макроскопической или микроструктурной модели.

## 2. Постановка и решение начально-краевой задачи

Поскольку свойства СПФ сильно зависят от температуры решение задачи о нахождении напряжений и деформаций в общем случае необходимо проводить совместно с решением задачи теплопроводности. Систему уравнений замыкают определяющие уравнения, позволяющие рассчитать изменения неупругой деформации, мощности источников тепла и внутренних параметров. Таким образом, получается полностью связанная термомеханическая задача, т.к. неупругая деформация, входящая в уравнения равновесия, зависит от температуры, а мощность источников тепла в уравнении теплопроводности зависит от напряжений, возникающих в теле:

*Уравнения равновесия с граничными условиями и закон Гука:*

$$\nabla \cdot \sigma + F = 0,$$

$$n \cdot \sigma = f_0 \text{ на } S_f, \quad u = u_0 \text{ на } S_u,$$

$$\sigma = C : (\varepsilon - e),$$

*Уравнение теплопроводности с граничными условиями:*

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + W, \quad W = q_0 \dot{\Phi}_M,$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = H(T|_S - T_{amb}), \quad T|_{r=r_0} = T_0(x),$$

*Определяющие соотношения:*

$$\dot{e} = F_1(T, \dot{T}, \sigma, \dot{\sigma}, X), \quad \dot{X} = F_2(T, \dot{T}, \sigma, \dot{\sigma}, X),$$

$$X = (\Phi_1(1), \dots, \Phi_N(1), \dots, \Phi_1(N_{Gr}), \dots, \Phi_N(N_{Gr})),$$

$$\Phi_M = \frac{1}{N_{Gr}} \sum_{\omega=1}^{N_{Gr}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_i(\omega),$$

где  $\sigma$  – тензор напряжений,  $F$  – вектор объемных сил,  $n$  – единичная внешняя нормаль к поверхности тела  $S = S_f \cup S_u$ ,  $f_0$  и  $u_0$  – векторы усилия и перемещения, заданные соответственно на частях  $S_f$  и  $S_u$  поверхности  $S$ ,  $C$  – тензор упругих модулей,  $e$  – тензор неупругой деформации, который складывается из деформации теплового расширения – сжатия ( $e^{Te}$ ), фазового превращения ( $e^\Phi$ ) и микропластической деформации ( $e^{MP}$ ),  $\varepsilon = \varepsilon^e + e = \varepsilon^e + e^{Te} + e^\Phi + e^{MP}$  – тензор полной деформации,  $\varepsilon^e$  – упругая деформация.  $T$  – температура;  $c$  – удельная теплоемкость;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\rho$  – плотность;  $W$  – удельная мощность источников тепла внутри тела;  $H$  – коэффициент теплообмена со средой;  $T_{amb}$  – температура окружающей среды;  $x$  – координаты точки тела;  $q_0$  – удельная скрытая теплота превращения;  $\Phi_M$  – объемная доля мартенсита;  $X$  – внутренние параметры;  $N$  – количество вариантов мартенсита;  $N_{Gr}$  – количество зерен;  $\Phi_i(\omega)$  – количество мартенсита  $i$ -го варианта в зерне  $\omega$ ;  $F_1, F_2$  – функции, определенные микроструктурной моделью; точкой обозначена производная по времени.

Сформулированная задача решалась численно с использованием итерационной процедуры с переменным итерационным параметром. Для этого она разделялась на три подзадачи. Первая – задача механики – нахождение напряжений и деформаций в предположении, что неупругие деформации известны. Вторая – определение поля температур при известном источнике тепла. Третья – нахождение неупругих

деформаций и тепловыделения при известных напряжениях и изменении температуры. Решение проводилось по шагам, на каждом из которых задавались приращения внешних воздействий и времени. Рассчитывались изменения температур и напряжений, затем находились изменение неупругих деформаций и тепловыделение. Производился пересчет температур и напряжений с учетом новых данных. Итерации повторялись, пока не выполнялось условие окончания итерационного процесса, означающее, что конечные значения изменений температуры, напряжения, неупругих деформаций и тепловыделения найдены с заданной точностью. Для решения задачи о нахождении поля температур при известном источнике тепла применяли метод сеток с неявной схемой. Для описания свойств СПФ использовалась микроструктурная модель [4], учитывающая его строение и основные физические закономерности развития фазовой и пластической деформации.

В расчетах в качестве модельного рассматривали материал со следующими характеристиками, типичными для никелида титана: характеристические температуры  $A_f = 365$  К,  $A_s = 350$  К,  $M_s = 315$  К,  $M_f = 300$  К; модуль Юнга  $E = 78$  ГПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0.33$ ; коэффициент теплопроводности  $\lambda = 10$  Вт  $\cdot$  (м  $\cdot$  К) $^{-1}$ ; удельная теплота превращения  $q_0 = -150$  МДж  $\cdot$  м $^{-3}$ ; плотность  $\rho = 6.5 \cdot 10^3$  кг  $\cdot$  м $^{-3}$ ; удельная теплоемкость  $c = 4.7 \cdot 10^2$  Дж  $\cdot$  кг $^{-1}$   $\cdot$  К $^{-1}$ ; коэффициенты теплового расширения аустенита и мартенсита  $\alpha_A = 14 \cdot 10^{-6}$  К $^{-1}$ ,  $\alpha_M = 6 \cdot 10^{-6}$  К $^{-1}$ ; коэффициент теплообмена со средой  $H = 10^4$  Вт  $\cdot$  м $^{-2}$   $\cdot$  К $^{-1}$ . Точность расчета деформации  $10^{-8}$ , тепловыделения –  $10^3$  Дж/м $^3$ с.

### 3. Результаты численного моделирования

Разработанный алгоритм численного решения связанной термомеханической задачи был применен для расчета напряженно-деформированного состояния в цилиндре и пластине из СПФ (Рис. 1).

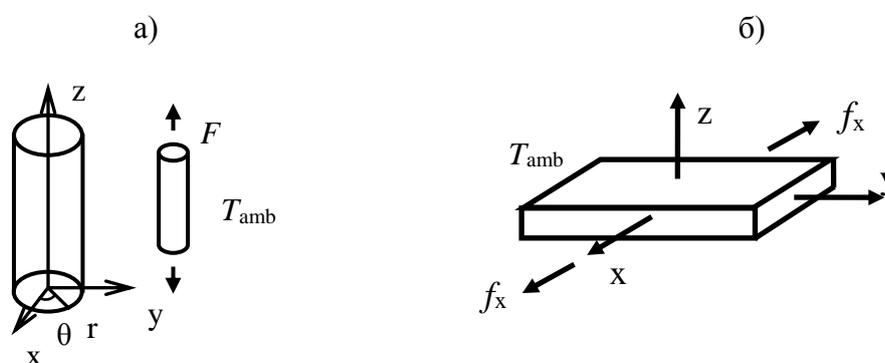
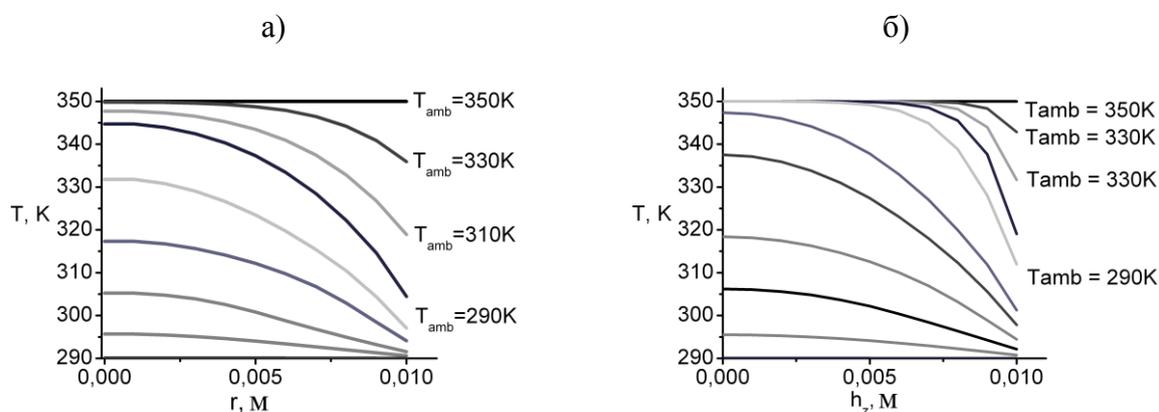


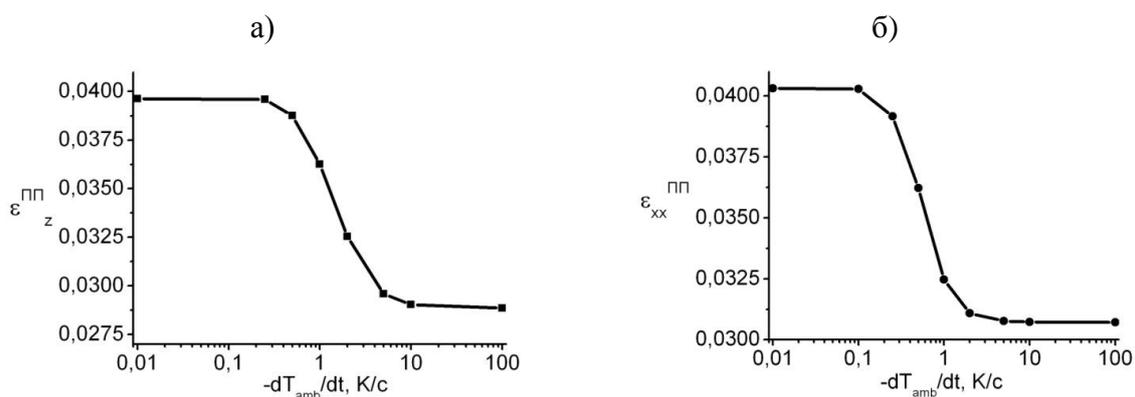
Рис. 1. Схема нагружения цилиндра и пластины.

Рассматривали цилиндр радиусом 10 мм и пластину толщиной 20 мм, моделировали нагружение продольной растягивающей силой в направлении оси Oz для цилиндра и Ox для пластины, соответствующей начальному напряжению 100 МПа, при температуре 350 К (аустенитное состояние) и последующее охлаждение через интервал прямого мартенситного превращения при постоянной силе. Для исследования влияния скорости изменения температуры окружающей среды на величину эффекта пластичности превращения при охлаждении задавали изменение температуры окружающей среды от 350 К до 290 К с различными скоростями: 0.01, 0.25, 0.5, 1, 2, 5, 10 и 100 К/с, и выдержку при 290 К до выравнивания температуры по толщине пластины. Следили за накоплением деформации в направлении действия силы и изменением распределений по толщине температуры, объемной доли мартенсита и напряжений.

Результаты вычислений показали, что даже при малой скорости изменения температуры окружающей среды наблюдается неоднородное распределение температур по сечению образца (Рис. 2), что приводит к неоднородному распределению объемной доли мартенсита, напряжений и деформаций. Вследствие чего, величина эффекта пластичности превращения уменьшается при увеличении скорости охлаждения (Рис. 3).



**Рис. 2.** Распределение температур по радиусу цилиндра (а) и толщине пластины (б) при охлаждении со скоростью изменения температуры окружающей среды  $-10$  К/с. Справа указана температура окружающей среды.



**Рис. 3.** Зависимость величины эффекта пластичности превращения ( $\epsilon^{\text{ПП}}$ ) от скорости охлаждения для цилиндра (а) и пластины (б).

### Литература

- [1] Ю.Б. Какулия, А.М. Шарыгин // *Журнал функциональных материалов* **8** (2007) 303.
- [2] Р.Х. Орлов, Н.П. Тютюнников // *Механика композиционных материалов и конструкций* **13(1)** (2007) 131.
- [3] V.A. Likhachev, A.I. Razov, A.E. Volkov, In: *Proceedings of the Second International Conference on SMST* (1997), p.335.
- [4] А.Е. Волков // *Известия Академии Наук. Серия физическая* **66(9)** (2002) 1290.

## THE SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS FOR SHAPE MEMORY ALLOY CYLINDER AND PLATE

**A.S. Kukhareva**

Petersburg State Transport University, St. Petersburg, Russia

e-mail: kukhareva\_as@mail.ru

**Abstract.** A connected thermomechanical boundary problems for TiNi cylinder and plate, loaded by an external force and subjected to cooling or heating from the surface, has been solved. The constitutive relations are given by the microstructural model. Even for a low cooling rate, the temperature, stress, and martensite volume fraction are inhomogeneous, and the transformation-induced strain in the force direction decreases with an increase in the temperature rate.

### References

- [1] Yu.B. Kakulia, A.M. Sharygin // *Journal of Functional Materials* **8** (2007) 303. (In Russian).
- [2] R.H. Orlov, N.P. Tyutyunnikov // *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii* **13(1)** (2007) 131.
- [3] V.A. Likhachev, A.I. Razov, A.E. Volkov, In: *Proceedings of the Second International Conference on SMST* (1997), p. 335.
- [4] A.E. Volkov // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics* **66(9)** (2002) 1290.