

ФОНТАНИРУЮЩАЯ ЦЕПЬ

А.К.Беляев, А.А.Суханов, А.И.Цветков

Институт проблем машиноведения РАН
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Рассматривается задача падения цепочки из стакана, расположенного на высоте H . При этом наблюдается парадоксальный на первый взгляд подъем цепочки над стаканом. Для объяснения подобного эффекта выдвигаются откровенные гипотезы и приводится соответствующая теория, на базе которой получены оценочные расчеты установившихся параметров падения цепочки.

Весной 2014 года в Интернете [1] появился ролик с левитирующей над стаканом цепочкой длиной 50 м из 8000 металлических шариков. На рис.1 приведена фотография фонтанирующей из стакана цепи, которая, преодолевая силу тяжести, прежде чем упасть на пол, устремляется вверх, поднимаясь над стаканом на приличную высоту.

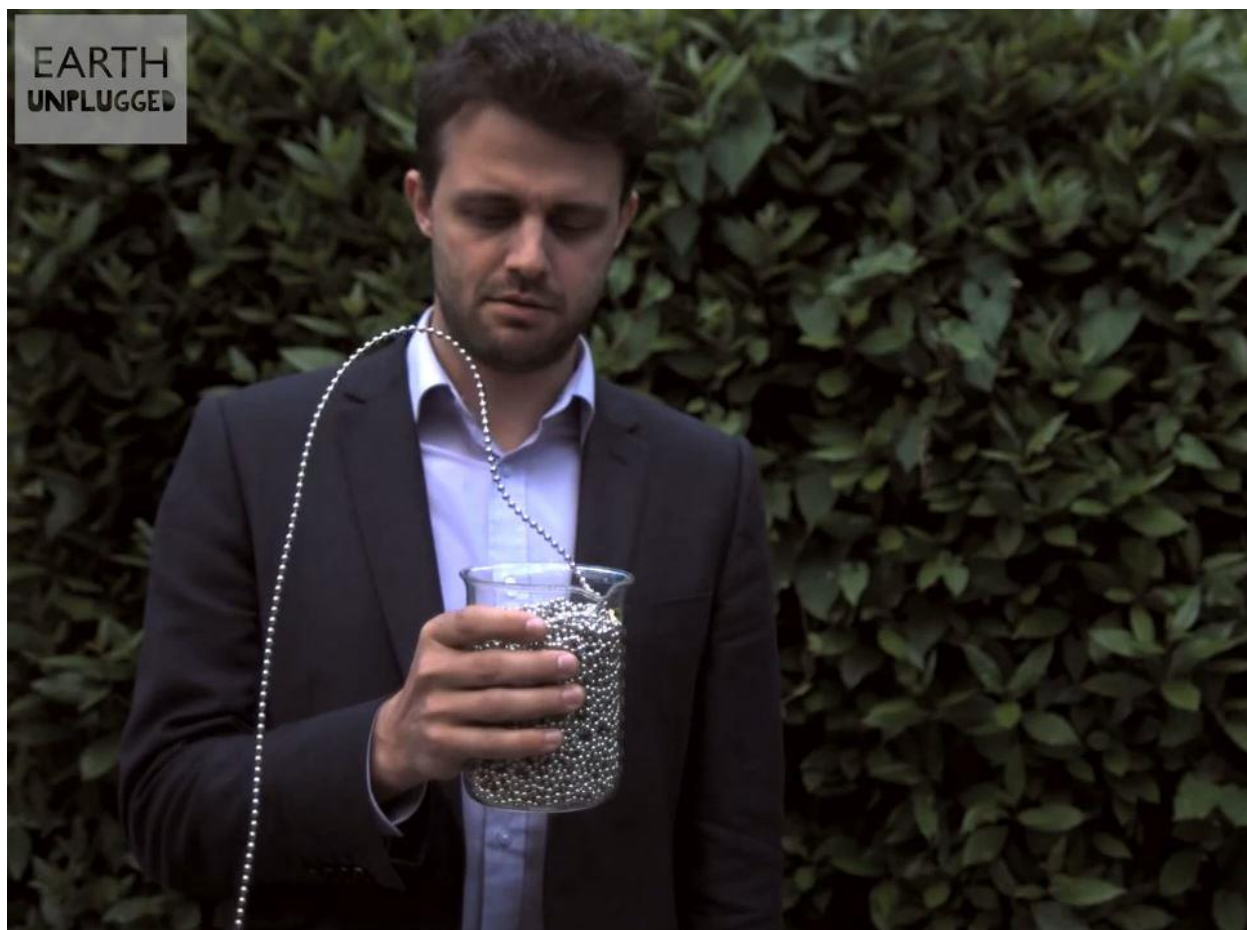


Рис.1. Фонтанирующая цепь

Данный ролик в Интернете сразу стал широко обсуждаться. При этом объяснения этого феномена приводятся самые разнообразные и невероятные: от накопленной энергии в клубке цепочки, которая «вырывается» при его разматывании, до банального обвинения в жульничестве и фальсификации!

Авторы настоящего исследования, сотрудники кафедры «Механика и процессы управления» СПбГПУ и ИПМ РАН провели собственный эксперимент с брелочной цепочкой длиной 20 м. Подъем цепочки над стаканом на некоторую высоту h

подтвердился, причем этот подъем оказался прямо пропорциональным перепаду высот H между стаканом и полом. В наших экспериментах (см. схему рис.2) имела место следующая примерная зависимость

$$h_1 = h + R = aH \approx 0.1H. \quad (1)$$

Для объяснения подобного эффекта рассмотрим модельные задачи, выдвинем отправные гипотезы, произведем оценочные расчеты и сравним их с результатами натурных экспериментов.

1. Постановка задачи

Будем полагать, что в установившемся режиме цепь из клубка, расположенного на столе на высоте H , через мыслимый безынерционный блок с радиусом R , свободно парящий над столом на высоте h , устремляется на пол с постоянной скоростью V (рис.2).

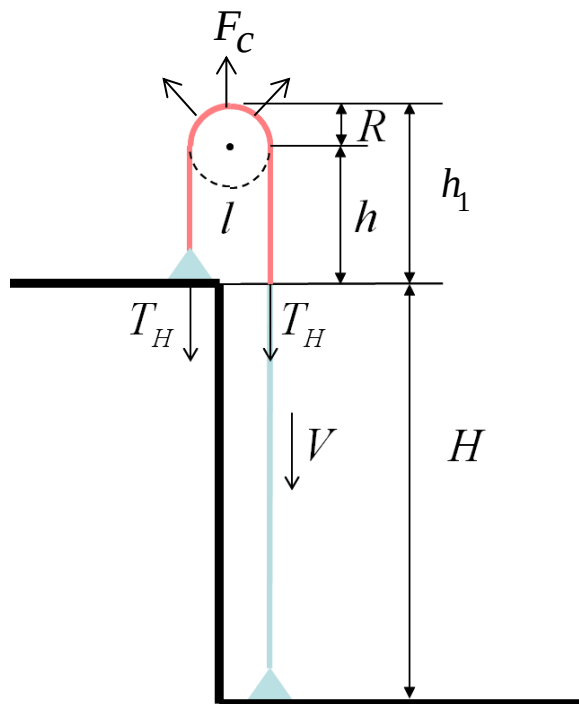


Рис.2. Установившийся режим

Здесь $l = 2h + \pi R$ - длина верхней части цепи (выделенной красным цветом), поднимающейся над клубком, в дальнейшем именуемой петлей.

Требуется найти силу, поднимающую цепь над столом, и оценить величину этого подъема h или h_1 .

Выдвинем **основную гипотезу**, что подъемными силами являются центробежные силы инерции F_c , действующие на окружную часть цепи (рис.2). Тогда для определения их результирующей надо найти скорость движения цепи, чем мы и займемся в первую очередь.

2. Нестационарная задача падения цепи до касания пола

Решим вначале более сложную, но модельную нестационарную задачу в предположении, что ось мыслимого блока закреплена, т.е. длина поднимающейся части цепи (петли) постоянна и равна всегда l (рис.3).

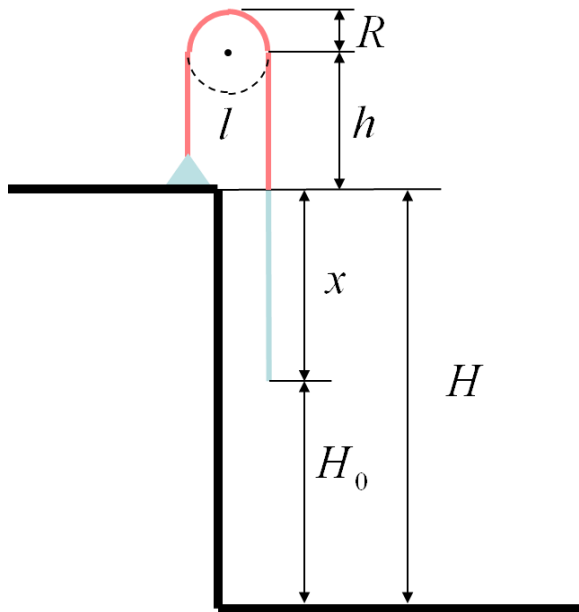


Рис.3. Нестационарная задача падения цепи до касания пола

Здесь x - свешиваемая со стола часть цепи, H_0 - начальная высота цепи над полом при нулевой скорости.

Рассматриваемая задача представляет собой более общий случай классической задачи Кэйли (1857) для системы с переменной массой [2]. На рис.4 представлена задача Кэйли и ниже для последующего сравнения приведено ее решение [2].

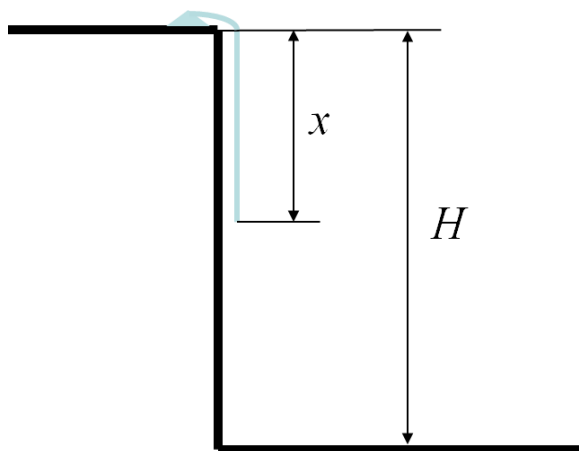


Рис.4. Нестационарная задача Кэйли (1857)

Уравнение движения

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 = gx, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (2)$$

где $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ - ускорение свободного падения.

Решение (2) записывается в виде

$$x(t) = \frac{1}{6}gt^2, \quad \ddot{x} = \frac{1}{3}g. \quad (3)$$

Решим теперь более общую задачу рис.3, но представленную в виде эквивалентной задачи с отнесенным клубком от края стола на расстояние l (рис.5).

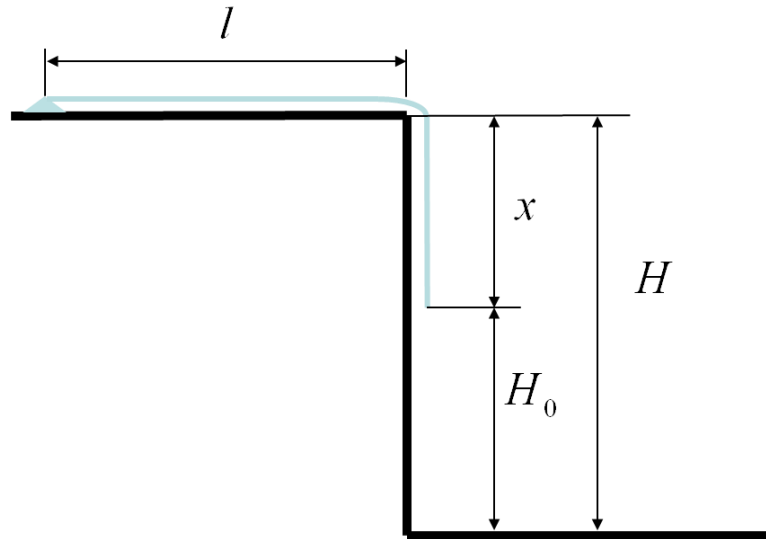


Рис.5. Обобщенная задача Кэйли

Эквивалентность задач на рис.3 и рис.5 обеспечивается компенсацией центробежных сил инерции: по горизонтали – левой и правой четвертей дуги блока и по вертикали – весом поднятой над столом части цепи.

Это также система с переменной массой, поэтому для получения уравнений движения необходимо использовать теорему количества движения

$$\frac{dQ}{dt} = F, \quad Q = \dot{a} \, m_i V_i, \quad F = \dot{a} \, F_i,$$

которая приводит к уравнению Мещерского

$$m \frac{dV}{dt} = F + \Phi, \quad (4)$$

где $\Phi = \frac{dm}{dt}(\mathbf{U} - \mathbf{V})$ – реактивная сила, $\mathbf{V}$ – скорость системы с массой m , $\mathbf{U}$ – скорость присоединяемой или отсоединяемой массы dm .

Запишем уравнение Мещерского (4) для размотанной части цепи длиной $l + x$

$$m\ddot{x} = \rho g x - \frac{dm}{dt} \dot{x}, \quad m = \rho(l + x), \quad \frac{dm}{dt} = \rho \dot{x},$$

где ρ – линейная плотность цепи. Подставляя выражения для массы и скорости изменения массы, получим уравнение

$$(l + x)\ddot{x} + \dot{x}^2 = gx, \quad (5)$$

совпадающее в частном случае $l = 0$ с уравнением Кэйли (2).

Решить это уравнение (5) в общем виде (или даже при нулевых начальных условиях) можно только через эллиптические интегралы [3]. Поэтому, опираясь на решение задачи Кэйли, подберем частное решение в виде

$$x(t) = at^2 + b. \quad (6)$$

После подстановки (6) в (5) получим

$$x(t) = \frac{1}{6}gt^2 + \frac{1}{2}l, \quad x(0) = \frac{1}{2}l, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, начало движения цепи происходит при спущенной со стола части цепи длиной $l/2$, что даже естественнее.

Найдем скорость цепи в момент касания пола t_0 . Из (7) имеем

$$x(t_0) = \frac{1}{6}gt_0^2 + \frac{1}{2}l = H,$$

Откуда

$$t_0 = \sqrt{\frac{6}{g} \left(H - \frac{1}{2}l \right)} = \sqrt{\frac{6}{g} H_0}$$

и

$$V_0 = \dot{x}(t_0) = \frac{1}{3}gt_0 = \sqrt{\frac{2}{3}g \left(H - \frac{1}{2}l \right)} = \sqrt{\frac{2}{3}gH_0} < \sqrt{\frac{2}{3}gH} = 0.82V_\infty. \quad (8)$$

Здесь $V_\infty = \sqrt{gH}$ - установившаяся скорость падения цепи (см. ниже).

Таким образом, скорость падения цепи будет нарастать и после касания пола с V_0 до V_∞ , что далеко неочевидно.

3. Нестационарная задача движения цепи после касания пола

Найдем теперь изменение скорости падения цепи после касания пола. В этом случае внешняя сила тяжести, действующая на движущуюся часть цепи, и масса этой части цепи будут постоянными:

$$F = \rho gH = \text{Const}, \quad m = \rho(l + H) = \text{Const}.$$

И уравнение Мещерского относительно скорости цепи примет вид

$$(l + H)\dot{V} + V^2 = gH. \quad (9)$$

Отсюда, в частности, следует, что установившаяся скорость падения равна

$$V_\infty = \sqrt{gH}. \quad (10)$$

Получили известный результат установившейся скорости падения цепочки, перекинутой через блок (см., например, [3]). Отметим, что скорость падения тела с постоянной массой с высоты H составляет

$$V_H = \sqrt{2gH}.$$

Далее, преобразовав (9) в уравнение в полных дифференциалах

$$(l+H) \frac{dV}{dt} = V_{\infty}^2 - V^2$$

и решая его при начальных условиях $V(t_0) = V_0$, получим

$$t = t_0 + \frac{l+H}{2V_{\infty}} \ln \left(\frac{1 + \frac{V}{V_{\infty}}}{1 - \frac{V}{V_{\infty}}} \cdot \frac{1 - \frac{V_0}{V_{\infty}}}{1 + \frac{V_0}{V_{\infty}}} \right).$$

Найдем время переходного процесса из условия 5 % допуска

$$V(t_1) = V_1 = 0.95V_{\infty}.$$

Тогда при $l \ll H$

$$\Delta t = t_1 - t_0 \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{H}{g}} \ln \left(\frac{1.95}{0.05} \cdot \frac{0.18}{1.82} \right) = 0.28 t_0,$$

т.е. время установления скорости после касания цепи пола довольно существенно и сравнимо со временем падения до пола t_0 , что и подтверждалось в экспериментах.

4. Нагрев цепи при нестационарном и стационарном движениях

Обратим внимание на так называемый энергетический парадокс, о котором упоминал П.А.Жилин [4]. После касания цепи пола кинетическая энергия нижних звеньев, которые абсолютно неупруго соударяются с полом, переходит в тепло и баланса механической энергии не происходит. Это очевидно. Однако баланса механической энергии нет и до касания цепи пола! Сравним механические энергии цепи в начале движения и в момент первого касания цепи пола.

В начальный момент полная механическая энергия цепи

$$E_1 = \Pi_1 = m_0 g H + \Pi_0 + \rho g \frac{l}{2} \left(H - \frac{l}{4} \right),$$

где m_0 - начальная масса клубка на столе, Π_0 - потенциальная энергия петли длиной l над столом. В момент первого касания цепи пола имеем

$$E_2 = \Pi_2 + T_2 = \left[m_0 g - \rho g \left(H - \frac{l}{2} \right) \right] H + \Pi_0 + \rho g H \frac{H}{2} + \frac{1}{2} \rho (l+H) V_0^2.$$

Откуда видим, что механическая энергия цепи при движении до соударения с полом уменьшилась на величину

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{1}{6} \rho g \left(H - \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{6} \rho g H_0^2 > 0.$$

При $l = 0$ (задача Кэйли) величина ΔE совпадает с уменьшением энергии, полученным П.А.Жилиным [4]. Он указывает, что эта энергия рассеивается в виде тепла, но не говорит где и по какой причине...

Разберемся с этим тепловым «парадоксом». В клубке цепи, лежащем на столе, при разматывании цепи также происходят абсолютно неупругие удары звеньев, испытывающих бесконечные ускорения (в предположении отсутствия податливости звеньев) при мгновенном изменении скорости от 0 до текущего значения (начинающее движение звено ударяется о следующее, еще лежащее на столе). При этом и происходит выделение тепла. Таким образом, процессы тепловыделения на полу и столе имеют одинаковую по сути природу. Более того, в установившемся режиме мощности тепловыделения на столе и полу абсолютно одинаковы. Покажем это.

Механическая энергия цепи за время dt уменьшается на величину

$$d\Pi = \rho g V_{\infty} dt H .$$

Часть этой энергии переходит на полу в тепло вследствие неупругого соударения нижних звеньев

$$dQ_2 = dT = \frac{1}{2} \rho V_{\infty} dt V_{\infty}^2 = \frac{1}{2} \rho V_{\infty} dt g H = \frac{1}{2} d\Pi = dQ_1 .$$

Следовательно, на столе за время dt выделяется ровно столько же энергии, что и на полу! Т.е. процессы тепловыделения полностью симметричны!

Суммарная мощность тепловыделения в установившемся режиме принимает простой и изящный вид

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d\Pi}{dt} = \rho g V_{\infty} H = \rho V_{\infty}^3 .$$

5. Подъемная сила и подъем цепи

Вернемся к проблеме подъема цепи. Найдем вертикальную составляющую центробежных сил. На элемент цепи dm , расположенный на полуокружности под углом ϕ , действует радиальная сила

$$dF_c = dm \frac{V^2}{R} = \rho R d\phi \frac{V^2}{R} = \rho V^2 d\phi .$$

Отметим любопытный факт сокращения радиуса петли R . Вертикальная составляющая центробежных сил определяется соответствующим интегрированием

$$F_y = \int_0^{\pi} \sin \phi dF_c = \rho V^2 \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi = 2 \rho V^2 = 2 \rho g H . \quad (11)$$

При равномерном движении силы натяжения двух частей цепи на уровне $y = H$ будут одинаковы и равны (см. рис.2)

$$T_H = \rho g H . \quad (12)$$

Следовательно, вертикальная составляющая центробежных сил (11) сможет уравновесить только часть цепи ниже стола и такую же реактивную силу со стороны клубка на столе:

$$F_y = 2T_H .$$

Таким образом, центробежная сила НЕ может уравновесить поднявшуюся над столом петлю!!! И надо «копать» глубже...

В поисках дополнительной подъемной силы выдвинем **вторую гипотезу**, оказавшуюся при внимательном рассмотрении непреложным фактом: любая цепь (именно цепь, а не однородная нерастяжимая нить) при изгибе увеличивает свою погонную плотность.

Поясним только что сделанный вывод на примере нашей цепочки, состоящей из шарнирно соединенных шариков. На рис.6 представлены прямая и изогнутая цепочки.

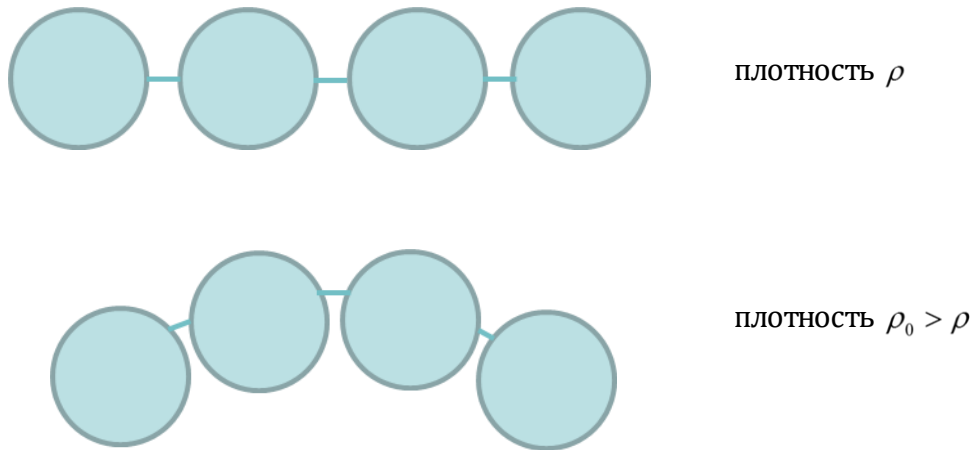


Рис.6. Прямая и изогнутая цепочки

Из рисунка достаточно хорошо видно, что при изгибе такой цепочки ее погонная плотность ρ несколько увеличивается до значения $\rho_0 > \rho$. В нашей брелочной цепочке соединение шариков допускает некоторый осевой люфт, что дополнительно увеличивает разницу между ρ_0 и ρ .

Тогда подъемная центробежная сила увеличится вследствие увеличения плотности полуокружности цепи мыслимого блока и примет новое значение (см. (11))

$$F_y = 2\rho_0 gH .$$

Эта сила должна уравновесить в стационарном режиме двойное натяжение цепи (12) и вес поднятой над столом части цепи (петли). При этом условие динамического равновесия всей цепи с учетом увеличения плотности дуги записывается в виде

$$F_y = 2\rho_0 gH = 2\rho gh + \pi\rho_0 gR + 2\rho gH ,$$

откуда

$$h_0 = h + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\pi}{2} R = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) H , \quad (13)$$

где h_0 - половина длины выпрямленной петли (примерная высота петли).

Главный вывод: Подъем цепи над столом прямо пропорционален перепаду высот H . Именно это и наблюдалось во всех экспериментах.

Несложные замеры длин участков исследуемой цепи в сжатом и растянутом состояниях показывают, что средние плотности соотносятся как

$$\frac{\rho_0}{\rho} \approx 1.1. \quad (14)$$

Таким образом, в соответствии с (13) и (14) мы должны иметь

$$h_0 \approx 1.1H,$$

что достаточно точно соответствует результатам экспериментов (см. также (1)).

Используемая в ролике [1] цепочка примерно такой же структуры, что и у нас. Найдем относительное изменение погонной плотности ее в верхней и нижней частях по мгновенной фотографии, представленной на рис.7.



Рис.7. Измерение относительной разности погонной плотности цепи

На рис.7 выделены участки цепи одинаковой длины l в верхней части (дуге петли) и в нижней спрямленной части. В верхней части на длине l уложились ровно 5 звеньев цепи, в то время как в нижней части – только 4.5. Тогда отношение плотностей составит

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{5}{4.5} = 1.11,$$

что очень близко к полученному нами значению для нашей цепочки (14). Следовательно, и высота подъема цепи в ролике [1] должна быть примерно на таком же уровне, что и в наших экспериментах. И действительно, рис.1 и рис.7 наглядно свидетельствуют, что подъем цепи над стаканом в ролике [1] примерно соответствует нашим экспериментам (1).

6. Эксперимент с нерастяжимой гибкой нитью (тесьмой)

Для подтверждения справедливости выдвинутой гипотезы об увеличении погонной плотности цепи в верхней части образующейся петли был проведен альтернативный эксперимент с нерастяжимой гибкой нитью (тесьмой). Поскольку абсолютная плотность цепи не входит в формулы, то подъем легкой матерчатой тесьмы и тяжелой металлической цепи должны быть одинаковыми, если их погонные плотности одинаково изменяются при изгибе. Однако, если при изгибе погонная плотность остается неизменной, то в соответствии с (13) подъема не должно быть. В качестве такой испытуемой цепи была выбрана шелковая тонкая тесьма, очень прочная на растяжение и мягкая на изгиб. На рис.8 приведена схема соответствующего эксперимента с тесьмой.

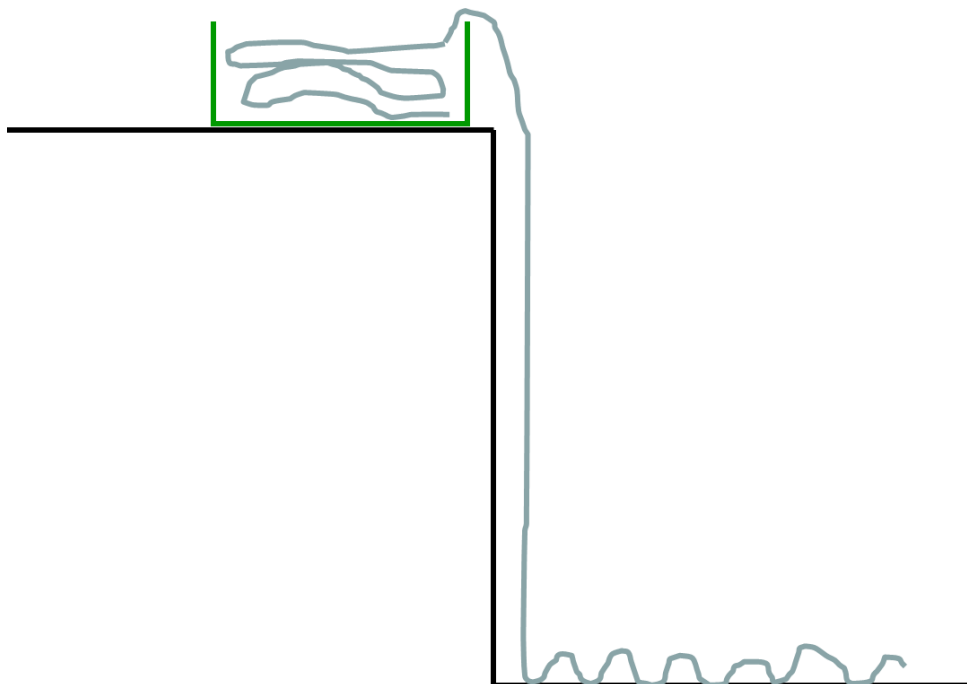


Рис.8. Эксперимент с нерастяжимой гибкой тесьмой

И действительно, никакого подъема тесьмы над краем кюветы мы не наблюдали, что в точности соответствует формуле (13)! Справедливости ради надо отметить, что иногда имели место небольшие миллиметровые отрывы тесьмы от края кюветы, обусловленные вставанием тесьмы на ребро из-за случайного характера укладки ее в кювете, что, конечно же, не противоречит основному тезису.

7. Сравнение экспериментальных и теоретических результатов

В наших экспериментах использовалась брелочная цепочка с круглыми латунными полыми шариками диаметром 3 мм.

Экспериментальные результаты одного из опытов

Длина цепи $L = 20\text{ м}$

Перепад высот $H = 1.8\text{ м}$

Время движения $t = 4.8\text{ с}$

Скорость движения $V = \frac{L}{t} = \frac{20}{4.8} = 4.17\text{ м/с}$

Высота подъема $h_0 = 16 - 20\text{ см}$

Теория

Установившаяся скорость движения $V_{\infty} = \sqrt{gH} = \sqrt{9.81 \cdot 1.8} = 4.20 \text{ м/с}$

Высота подъема $h_0 = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) H \approx 0.1H = 18 \text{ см}$

Как видно, совпадение экспериментальных результатов с теоретическими расчетами весьма неплохое, что подтверждает справедливость и адекватность выдвинутых гипотез и полученных на их основе динамических моделей движения цепи с объяснением всех происходящих процессов.

8. Заключение

Авторы выражают глубокую благодарность член-корреспонденту РАН Д.А.Индееву и профессору А.К.Беляеву за вовлечение в эту интереснейшую проблему, а также коллектив ИПМ РАН и семинар академика Н.Ф.Морозова за бурное и плодотворное обсуждение экспериментов и теоретических изысканий.

Хорошие совпадения экспериментальных результатов с теоретическими расчетами дают основания надеяться на раскрытие механизмов такого удивительного явления как преодоление цепочкой силы тяжести и подъем ее над стаканом в виде цепного фонтана!

Дополнительным подтверждением основной расчетной формулы (13), выражающей линейную зависимость подъема цепи от перепада высот, является проведенный авторами в гидробашне СПбГПУ эксперимент с цепью длиной 40 м, сбрасываемой с высоты 7 м. При этом цепной фонтан составил 60 см! Некоторое уменьшение по сравнению с теоретическим значением 70 см для такой высоты объясняется слишком короткой цепью и незавершенностью переходного процесса. Но и это, хоть и кратковременное, зрелище было впечатляющим!

Мечтой авторов и еще одним подтверждением выявленных механизмов «невероятного» самостоятельного фонтанирования металлической цепочки было бы проведение эксперимента с длинной цепью, сброшенной с высоты балкона четвертого этажа ИПМ РАН (примерно 15 м). Расчетный подъем цепи над стаканом (ведерным...) в этом случае должен составить 1.5 м (можно только представить, какое это будет захватывающее зрелище), что, несомненно, убедило бы всех возможных скептиков в торжестве науки! Однако для успеха подобного мегаэксперимента необходима цепь длиной порядка 200 м! Учитывая достаточно большую стоимость такой цепи (более 100 руб за погонный метр), данная мечта представляется не менее фантастичной, нежели и само явление фонтанирования...

ЛИТЕРАТУРА

1. <http://www.factroom.ru/facts/36628>
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2-х томах. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.
3. Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
4. Жилин П.А. Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 584 с.