

Министерство науки и высшего образования
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем машиноведения Российской академии наук
(ИПМаш РАН)



На правах рукописи

УДК 681.5

Гущин Павел Александрович

УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИЕЙ ЗАДАННОГО КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ В УСТАНОВИВШЕМСЯ И ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМАХ

Специальность 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка
информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора технических наук

Научный консультант:

доктор технических наук, профессор

Фуртат Игорь Борисович

Санкт-Петербург – 2023

Оглавление

Основные обозначения	7
Введение	9
1 Управление объектами с запаздыванием во входном сигнале в условиях возмущений	25
1.1 Постановка задачи	28
1.2 Предикторы регулируемой величины и возмущения	30
1.3 Уравнение замкнутой системы и основной результат	33
1.4 Субпредиктор регулируемой величины и субпредиктор возмущения	38
1.5 Задача слежения за эталонным сигналом	46
1.6 Управление сетевыми системами	47
1.7 Сетевые субпредикторы регулируемой величины и возмущения	49
1.8 Примеры	53
1.9 Заключение по главе 1	56
2 Управление при возмущениях и помехах в измерениях	58
2.1 Постановка задачи	61

2.2	Алгоритм оценки помехи	63
2.3	Синтез закона управления	64
2.4	Основной результат	67
2.4.1	Шаг 1. Уравнение по переменной x	67
2.4.2	Шаг 2. Уравнение по переменной e	69
2.4.3	Шаг 3. Уравнение замкнутой системы	69
2.5	Примеры моделирования	76
2.6	Управление по выходной переменной объекта	83
2.7	Алгоритм фильтрации высокочастотных помех измерения .	85
2.8	Алгоритм подавления возмущений	91
2.9	Пример управления с измеряемым выходным сигналом объекта	98
2.10	Заключение по главе 2	103
3	Управление с обеспечением выходного сигнала в заданном мно- жестве	105
3.1	Общая постановка задачи	109
3.2	Метод решения. Основной результат	110
3.3	Замена координат	114
3.3.1	Примеры	114
3.3.2	Обобщенная замена координат	115
3.4	Управление линейным объектом с известными параметрами и измеряемым вектором состояния	116
3.5	Управление объектом по выходу с секторной нелинейно- стью в условиях возмущений	123

3.6	Динамический регулятор для объектов с произвольной носителем степенью	133
3.6.1	Линейные объекты с известными параметрами	134
3.6.2	Нелинейные объекты с неизвестными параметрами .	136
3.7	Управление с заданными ограничениями на входные и вы- ходные сигналы	140
3.7.1	Постановка задачи	141
3.7.2	Метод решения	143
3.7.3	Управление по состоянию с ограничением на фазо- вые переменные и сигнал управления	147
3.7.4	Управление по выходу	157
3.8	Заключение по главе 3	166
4	Управление скалярными системами параболического и гипер- болического типов	168
4.1	Постановка задачи	170
4.2	Дискретный по пространственной переменной закон управ- ления	172
4.3	Основной результат для системы параболического типа . . .	176
4.4	Основной результат для системы гиперболического типа . .	180
4.5	Решение краевой задачи	183
4.5.1	Объекты параболического типа	183
4.5.2	Объекты гиперболического типа	184
4.6	Управление полулинейными системами	185
4.7	Пример управления распределенными системами	186

4.7.1	Моделирование системы управления	186
4.7.2	Результаты моделирования для системы параболического типа	187
4.7.3	Результаты моделирования для системы гиперболического типа	193
4.8	Заключение по главе 4	196
5	Дивергентные методы устойчивости	197
5.1	Постановка задачи	197
5.2	Условия устойчивости	198
5.3	Устойчивость линейных систем	211
5.4	Синтез закона управления	212
5.5	Неавтономные системы	215
5.6	Управление неавтономными системами	230
5.7	Заключение по главе 5	234
6	Управление электроэнергетической сетью	236
6.1	Модель электроэнергетической сети	238
6.2	Преобразование модели сети	241
6.3	Алгоритм фильтрации и закон управления	243
6.4	Пример управления в условиях помех измерения	244
6.5	Испытание схемы управления на «10-Machine New-England Power System IEEE benchmark»	249
6.6	Экспериментальное исследование	252
6.6.1	Описание экспериментального стенда	252
6.6.2	Результаты эксперимента	258

6.7 Заключение по главе 6	259
Заключение	260
Список литературы	265

Основные обозначения

- $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел
- $\mathbb{R}^n$ – пространство n -мерных вектор-столбцов с вещественными элементами: $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$
- $\mathbb{R}^{n \times m}$ – пространство матриц размера $n \times m$ с вещественными элементами
- x^T (A^T) – транспонирование вектора $x \in \mathbb{R}^n$ (матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$)
- $|x|$ ($\|A\|$) – евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$ (матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$)
- $p = d/dt$ – оператор дифференцирования
- $\deg R(s)$ – степень полинома $R(s)$
- $P = P^T > 0$ – симметрическая положительно определенная матрица
- I – единичная матрица
- $\lambda(A)$ – собственное значение матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $A > 0$ ($A \geq 0$) – матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ положительно (неотрицательно) определена
- $A < 0$ ($A \leq 0$) – матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ отрицательно (неположительно) определена

- $*$ – соответствующий блок в симметрической блочной матрице
- $V(x) > 0$ ($V(x) < 0$) – положительно определенная (отрицательно определенная) функция векторного аргумента
- $V(x) \geq 0$ ($V(x) \leq 0$) – знакопостоянная положительная (отрицательная) функция векторного аргумента
- $\text{grad}\{W(x, t)\} = \nabla\{W(x, t)\} = \left[\frac{\partial W}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right]^T$ – градиент скалярной функции $W(x)$
- $\text{div}\{h(x, t)\} = \nabla \cdot \{h(x, t)\} = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial h_n}{\partial x_n}$ – дивергенция векторного поля $h(x) = [h_1(x), \dots, h_n(x)]^T$
- Непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам будут обозначаться как функции класса C^1
- Нижние индексы обозначают частные производные $z_\xi = \frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $z_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$
- $L_2(0, l)$ – гильбертово пространство с квадратично интегрируемыми функциями $z(\xi)$, $\xi \in [0, l]$ с соответствующей нормой $\|z\|_{L_2}^2 = \int_0^l z^2(s) ds$
- $H_1(0, l)$ – пространство Соболева абсолютно непрерывных скалярных функций $z : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|z\|_{H_1}^2 = \int_0^l [z^2(s) + z_s^2(s)] ds$ и $z_\xi \in L_2(0, l)$
- $H_2(0, l)$ – пространство Соболева скалярных функций $z : [0, l] \in \mathbb{R}$ с абсолютно непрерывными производными z_ξ , нормой $\|z\|_{H_2}^2 = \int_0^l [z^2(s) + z_s^2(s) + z_{ss}^2(s)] ds$ и $z_{\xi\xi} \in L_2(0, l)$

Введение

Задачи управления в условиях запаздывания, возмущений, помех измерения, неопределенности параметров модели объекта – одни из самых сложных и в то же время актуальных задач современной кибернетики и робототехники. С появлением новых технологий, развитием теории и практики автоматического управления появляются все более сложные и актуальные задачи. Несмотря на большое количество литературы в данной области, существует ряд задач, решения которых могут быть улучшены, а для некоторых задач и вовсе отсутствуют решения.

Первые работы по управлению в условиях параметрической неопределенности и возмущений привели к созданию эффективных схем адаптивного управления (Б.Р. Андриевский, В.М. Глумов, В.Ю. Рутковский, В.М. Суханов, А.Л. Фрадков, А.М. Цыкунов, Я.З. Цыпкин, А. Annaswamy, К. Narendra, R. Ortega и др.). Дальнейшее развитие данных методов и создание новых было посвящено как упрощению реализации схем управления (уменьшение динамического порядка регулятора, уменьшение количества настраиваемых параметров, получение новых критериев по настройке параметров и т.д.), так и управлению новыми классами объектов, описываемых более сложными моделями. В работе рассмотрены некоторые типы моделей

объектов, которые являются актуальными на сегодняшний день.

К первому классу таких объектов относятся системы с существенным запаздыванием в канале управления. Такие задачи встречаются при управлении удаленными объектами, при управлении через цифровые каналы связи, при управлении сетевыми системами с наличием коммуникационного запаздывания между агентами сети и т.п. Для управления такими объектами предложен ряд решений с применением предиктора Смита и его модификаций (А.М. Цыкунов, Р. Albertos, O.J.M. Smith и др.), а также схемы управления, основанные на точном решении дифференциального уравнения исследуемой системы (А.А. Бобцов, Д.А. Герасимов, В.О. Никифоров, А.А. Пыркин, А.Л. Фрадков, И.Б. Фуртат, В.Л. Харитонов, М. Krstic, A. Manitius, V. Mischel, S. Mondie, A. Olbrot и др.). Однако в условиях больших по амплитуде возмущений предложенные решения могут терять свою эффективность. В работе предложен многошаговый метод прогнозирования регулируемой величины и возмущений с принципом компенсации возмущений, который позволяет улучшить качество регулирования в условиях больших по амплитуде возмущений.

Далее предложенный метод распространяется на объекты, которые подвержены не только возмущению, но и у которых присутствуют помехи (или ошибки) в измерениях. Для управления такими объектами существует ряд решений (А.Е. Барабанов, О.Н. Граничин, С.А. Краснова, Б.Т. Поляк, В.В. Путов, А.В. Уткин, В.А. Уткин, В.Н. Фомин, М.В. Хлебников, A. Isidori, H. Khalil, R. Marino, P. Tomei и др.), основанных на принципе подавления возмущений и помех измерения. В работе предложен новый метод компенсации возмущений и помех измерения, позволяющий улучшить качество

регулирования.

Результаты, полученные для систем с сосредоточенными параметрами, распространяются на распределенные системы параболического и гиперболического типов при наличии параметрической интервальной неопределенности и внешних ограниченных возмущений. Такие системы рассматривались в работах Б.Р. Андриевского, М.В. Долгополика, М. Крстича, Ю.В. Орлова, А.Л. Фрадкова, Э. Фридман и др., где распространенным считалось использование кусочно-постоянного закона управления. В работе предложено использовать нелинейный закон управления, который позволит реализовать локальные управления с меньшими затратами ресурсов на регулирование, что важно в инженерной практике.

Все вышеописанные методы гарантируют заданное качество регулирования только в установившемся режиме. Хорошо известно, что во многих практических задачах значение регулируемой переменной в переходных процессах может играть решающую роль в работоспособности системы. Например, при управлении электроэнергетическими сетями важно не допускать выход частоты тока и напряжения из заданных пределов для безопасной работы сети и потребителей в ней. Однако существующие регуляторы не гарантируют заданного качества регулирования в переходных режимах, что может привести к отключению участка сети при выходе величин из заданных значений, даже если система управления не теряла свою работоспособность. Для решения таких задач предложенные методы развиты для гарантии нахождения регулирующих и регулируемых переменных в заданных разработчиком множествах в любые моменты времени.

В работе предложены новые дивергентные методы исследования устой-

чивости динамических систем, которые позволяют анализировать устойчивость замкнутых систем, наряду с использованием метода функций Ляпунова и обобщающие работы В.П. Жукова и А. Rantzer. Подобные методы успешно применялись для исследования устойчивости динамических систем в работах В.П. Жукова, П.В. Пакшина, А. Rantzer, E. Rodgers и др.

Таким образом, в работе разработаны новые методы и алгоритмы управления сосредоточенными, сетевыми и распределенными системами с наличием запаздывания, возмущений, помех измерения и параметрической неопределенности с гарантией заданного качества регулирования в установившемся и переходном режимах. Некоторые разработанные методы применены для управления электроэнергетическими сетями.

Целью данной работы является разработка новых методов и алгоритмов управления, гарантирующих заданное качество регулирования в установившемся и переходном режимах в условиях неопределенности.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие крупные взаимосвязанные **задачи**:

1. Разработать методы управления, гарантирующие заданное качество регулирования в установившемся режиме.
2. Обобщить полученные методы на задачи управления с гарантией заданного качества регулирования в любой момент времени.
3. Разработать методы управления электроэнергетическими сетями.

Объектами исследования являются динамические системы с возможным наличием запаздывания во входном сигнале, параметрической интер-

вальной неопределенности, возмущений, помех измерения, а также сетевые, распределенные и нелинейные системы.

Предметом исследования является разработка новых методов и алгоритмов управления, гарантирующих заданное качество регулирования в установившемся и переходном режимах.

Методы исследования. Метод многошагового прогнозирования (субпредикторный метод), методы подавления возмущений, методы компенсации возмущений, методы функций Ляпунова и функционалов Ляпунова-Красовского, методы решений линейных матричных неравенств, методы линейной алгебры и матричного анализа, методы математического, функционального и векторного анализа.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Методы и алгоритмы управления на базе предикторов и субпредикторов для систем с запаздыванием в канале управления при наличии ограниченных возмущений.
2. Методы и алгоритмы управления системами, подверженными воздействию ограниченных возмущений и помех измерения.
3. Методы и алгоритмы управления с гарантией нахождения входных и выходных сигналов в заданном разработчиком множестве при наличии параметрической неопределенности и ограниченных возмущений.
4. Методы и алгоритмы управления скалярными системами параболиче-

ского и гиперболического типов в условиях параметрической неопределенности и ограниченных возмущений.

5. Методы и алгоритмы управления электроэнергетическими сетями при наличии параметрической неопределенности, ограниченных возмущений и ошибок измерений.

Научная новизна состоит в разработке методов и алгоритмов управления, гарантирующих заданное качество регулирования в условиях возмущений и параметрической неопределенности в установившемся и/или переходном режимах, а именно:

1. Предложены методы и алгоритмы управления на базе предикторов и субпредикторов для динамических систем с запаздыванием в канале управления при наличии ограниченных возмущений.
2. Разработаны методы и алгоритмы управления системами, подверженными воздействию ограниченных возмущений и помех измерения.
3. Получены методы и алгоритмы управления с гарантией входных и выходных сигналов в заданном разработчиком множестве при наличии параметрической неопределенности и ограниченных возмущений.
4. Предложены методы и алгоритмы управления скалярными системами параболического и гиперболического типов в условиях параметрической неопределенности и ограниченных возмущений.
5. Разработаны методы и алгоритмы управления электроэнергетическими сетями при наличии параметрической неопределенности, ограни-

ченных возмущений и ошибок измерений.

Обоснованность научных положений, выводов, теоретических и практических рекомендаций основана на доказательствах соответствующих утверждений и теорем. Применение полученных результатов продемонстрировано на численных исследованиях в Matlab и экспериментальных исследованиях на стенде по изучению алгоритмов управления электроэнергетическими сетями.

Научная значимость состоит в полученных новых методах и алгоритмах управления, гарантирующих заданное качество регулирования в условиях неопределенности для сложных моделей технических и технологических процессов, которые описываются линейными и некоторыми типами нелинейных систем, в том числе сетевыми и распределенными системами.

Практическая значимость состоит в возможности применения полученных методов и алгоритмов для разработки алгоритмического обеспечения для широкого круга технических и технологических задач, в том числе при управлении электроэнергетическими сетями, колебательными системами, электромеханическими системами, управления в нефтегазодобывающей промышленности и т.п.

результаты диссертации **получены при выполнении следующих научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ:**

- Грант РФФИ № 18-79-10104 «Управление сетевыми системами в условиях неопределенностей и запаздывания с применением к управлению электроэнергетическими сетями».

- Грант РФФИ № 19-08-00246 «Разработка методов и алгоритмов оптимального управления системами большой размерности в условиях неопределенностей с применением к управлению процессом ректификации».
- Грант РФФИ № 20-08-00610 «Методы управления через зашумленные каналы приема-передачи данных с неконтролируемой задержкой».
- Мегагрант (в рамках Постановления Правительства РФ от 9 апреля 2010 г. N 220), соглашение № 075-15-2021-573 от «31» мая 2021 г. «Теоретические основы цифровизации анализа и синтеза сложных механических систем, сетей и сред».
- Государственное задание в сфере науки «Адаптивное и интеллектуальное управление сетевыми и распределенными системами» (реализуемое в рамках национального проекта «Наука и университеты» и по результатам конкурса Минобрнауки России о создании молодежных лабораторий на базе НОЦ).
- Мегагрант (в рамках Постановления Правительства РФ от 9 апреля 2010 г. N 218), НИОКТР «Разработка типоразмерного ряда универсальных многофункциональных мехатронных модулей, обеспечивающих функционирование исполнительных систем трансформируемых конструкций объектов авиационно-космической техники» по договору № 000000S407521QM80002/РИМС-12-1130/ИПМаш от «10» июня 2022 г.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены на международных и российских конференциях:

- 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), 2017, November 6 - 8, Munich, Germany.
- IEEE 2019 International Conference on Control, Decision and Information Technologies, Paris, France, April 23-26, 2019.
- 16th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (INSTICC2019), Prague, Czech Republic, 29-31 July, 2019.
- XIII Всероссийское совещание по проблемам управления, 17-20 июня, 2019, Москва, Россия.
- 73-я Международная молодежная научная конференция «Нефть и газ -2019», 22 - 25 апреля, 2019, Москва, Россия.
- 21st International Federation on Automatic Control World Congress (WC IFAC 2020), Berlin, Germany, 12-17 July, 2020.
- 28th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), 15-18 September, 2020, Saint-Raphael, France.
- XIV Всероссийская мультikonференция по проблемам управления МКПУ-2021, 27 сентября - 02 октября 2021 г., с. Дивноморское, г. Геленджик, Краснодарский край, Россия.
- Baltic Forum: Neuroscience, Artificial Intelligent and Complex Systems (BF-NAICS 2022), 14-16 September, 2022, Kaliningrad, Russia.

- 30th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2022, June 28 - July 1, 2022, Athens, Greece.
- 22nd World Congress of the International Federation of Automatic Control (WC IFAC 2023), 9 July - 14 July, 2023, Yokohama, Japan.

Личный вклад. Положения, выносимые на защиту, разработаны автором лично. Автор принимал участие в разработке, доказательстве и апробации схем управления:

- основанных на использовании субпредикторов;
- в условиях возмущений и помех измерения;
- гарантирующих заданное качество в заданных множествах в любой момент времени по входным и выходным сигналам;
- скалярными системами параболического и гиперболического типов в условиях параметрической неопределенности и возмущений;
- с использованием дивергентных методов;
- электроэнергетическими сетями при наличии параметрической неопределенности, возмущений и ошибок измерений.

Подготовка основных публикаций проводилась совместно с соавторами, при этом вклад П.А. Гущина был основным.

Результаты первой главы опубликованы в работах [17, 67, 75, 78, 88, 134–138]. В них П.А. Гущиным предложены предикторные и субпредикторные

схемы управления, проведены доказательства всех утверждений и теорем. Совместно с соавторами осуществлено численное моделирование.

Результаты второй главы опубликованы в работах [21, 66, 71, 74, 78, 142, 143, 147, 148, 161]. В них П.А. Гущиным предложены алгоритмы компенсации возмущений и помех измерения, а также проведено доказательство их работоспособности. Совместно с соавторами проведены численные исследования.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [68, 69, 73, 77, 78, 140, 145, 152]. В них П.А. Гущиным предложен метод нелинейного управления с гарантией нахождения входных и выходных сигналов заданных множествах, проведены доказательства работоспособности предложенных алгоритмов управления. Совместно с соавторами проведены численные исследования.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [72, 76, 78, 80–82, 84, 85, 87, 91–93, 149]. В них П.А. Гущиным предложен дискретный по пространственной переменной нелинейный закон управления, проведены доказательства работоспособности предложенных алгоритмов управления. Совместно с соавторами проведены численные исследования.

Результаты пятой главы опубликованы в работах [78, 141, 144, 146, 153, 154], где П.А. Гущиным предложен метод дивергентного исследования устойчивости динамических систем и методы дивергентного управления, проведены доказательства утверждений и теорем. Совместно с соавторами проведены численные исследования.

Результаты шестой главы опубликованы в работах [70, 78, 83, 86, 89, 90, 139, 150, 151, 155]. В них П.А. Гущиным предложен метод управления элек-

троэнергетическими сетями в условиях возмущений, помех измерения и ограничений, проведены доказательства всех утверждений и теорем. Совместно с соавторами проведены численные исследования.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 50 печатных изданиях, 1 из которых монография, 11 – в журналах, рекомендованных ВАК, 19 – в журналах и докладах конференций, которые индексируются международными наукометрическими базами Scopus и Web of Science, 5 – в тезисах докладов. Зарегистрировано 14 программы для ЭВМ (получены свидетельства о государственной регистрации).

Во введении изложена актуальность темы исследования, определены цель и задачи, показаны научная новизна, практическая и научная значимость работы.

Глава 1 посвящена синтезу алгоритмов управления линейными объектами с запаздывающим входным сигналом при наличии внешних возмущений. Вначале для синтеза алгоритма используются предиктор регулируемой величины и предиктор возмущения. Далее на базе предложенных предикторов строятся соответствующие субпредикторы, использование которых позволяет управлять объектами с большим временем запаздывания и сократить время прогноза возмущения. Получены достаточные условия устойчивости замкнутой системы в виде разрешимости линейных матричных неравенств (ЛМН). Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие эффективность предложенной схемы по сравнению с некоторыми существующими.

В главе 2 предложен алгоритм стабилизации нелинейных систем со сни-

жением уровня влияния помех измерения, параметрической неопределенности и внешних возмущений. Рассматриваются помехи измерения, размерность которых совпадает с размерностью вектора состояния объекта. Параметрическая неопределенность и внешние возмущения могут присутствовать в любом уравнении модели объекта. Получены условия расчета параметров алгоритма в виде разрешимости линейного матричного неравенства. Численные примеры иллюстрируют эффективность предложенной схемы. В главе 2 также рассмотрено решение задачи робастной стабилизации линейных динамических объектов с неизвестными параметрами, принадлежащими известному компактному множеству, ограниченными внешними возмущениями и ограниченными высокочастотными помехами измерения. Синтез алгоритма управления разбивается на два этапа. На первом этапе синтезируется алгоритм фильтрации, позволяющий уменьшить влияние помехи измерения на выходную переменную объекта. Если помеху измерения можно представить в виде суммы синусоидальных сигналов, то предложены конструктивные условия выбора параметров в алгоритме фильтрации. На втором этапе синтезируется алгоритм управления с подавлением влияния параметрической неопределенности и внешних возмущений. Данный алгоритм базируется на использовании конечных разностей в непрерывном времени, что позволяет избежать использования динамических наблюдателей, увеличивающих размерность замкнутой системы. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие эффективность разработанного алгоритма по сравнению с некоторыми существующими аналогами. Сравнительный анализ с результатами Astolfi D., Marconi L., Isidori A. и др. показал, что используемый алгоритм управления, имея мень-

ший динамический порядок, гарантирует выше точность регулирования по выходному сигналу и его производным. Причем, в отличие от результатов Astolfi D., Marconi L., Isidori A. и др., в предложенном алгоритме настройка параметров алгоритма проще за счет независимой настройки фильтра и закона управления, тогда как настройка параметров в регуляторе Astolfi D., Marconi L., Isidori A. и др. осуществляется одновременно для всего алгоритма.

В главе 3 предложен метод управления динамическими системами, позволяющий гарантировать нахождение выходного сигнала объекта в заданном множестве в любой момент времени. Для решения задачи используется специальная замена координат, позволяющая свести исходную задачу с ограничениями к задаче исследования на устойчивость по вход-состоянию новой расширенной системы без ограничений. Приведены примеры замены координат и синтезированы алгоритмы управления линейными объектами и системами с секторной нелинейностью при наличии параметрической неопределенности и возмущений. Полученные результаты сопровождаются моделированием, иллюстрирующим эффективность предложенного метода и подтверждающим теоретические выводы.

В главе 4 предложен дискретный по пространственной переменной закон управления некоторым классом скалярных линейных дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типа с неизвестными параметрами и возмущениями. Доступно конечное множество дискретных измерений (по пространственной переменной) состояния объекта.

Закон управления зависит от функции, которая зависит от пространственной переменной и от конечного набора измерений состояния объекта.

Вид регулирующего сигнала зависит от данной функции. В частности, приведены примеры функций, которые позволяют реализовать управляющий сигнал лишь на отдельных интервалах пространственной переменной и обеспечивать меньшие затраты на управление по сравнению с некоторыми другими аналогами. Доказана экспоненциальная устойчивость замкнутой системы и робастность по отношению к интервально неопределенным параметрам объекта и внешним ограниченным возмущениям. Численные примеры моделирования подтвердили результаты расчетов и показали эффективность предложенного алгоритма по сравнению с некоторыми существующими аналогами.

В главе 5 предложен метод исследования устойчивости динамических систем с использованием свойств потока и дивергенции вектора фазовой скорости. Установлена связь между методом функций Ляпунова и предложенным методом. На базе полученных результатов приведен синтез закона управления с обратной связью по состоянию для стабилизации динамических систем, который сводится к решению дифференциального неравенства относительно искомой функции управления. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие применимость предложенного метода.

В главе 6 рассмотрена задача робастной синхронизации электроэнергетической сети с неизвестными параметрами. Измерению доступны углы нагрузки каждого генератора сети с наложенной аддитивной высокочастотной помехой. Синтезирован алгоритм, позволяющий уменьшить влияние помехи на сигналы измерения и обеспечить синхронизацию сети в нормальном режиме работы и аварийных ситуациях, связанных с внезапным изменением проводимости линий электропередач. Приведены резуль-

таты моделирования, иллюстрирующие эффективность разработанного алгоритма.

Глава 1 Управление объектами с запаздыванием во входном сигнале в условиях возмущений

Управление в условиях возмущений является одной из главных проблем в теории автоматического управления. Данная проблема усложняется наличием запаздывания во входном сигнале. Такие задачи являются типичными при дистанционном управлении, управлении в химической промышленности, управлении через цифровые каналы связи и т.д.

Впервые решение задачи управления в условии запаздывания предложено в [214] для устойчивых объектов без возмущения. Для неустойчивых объектов в [178] предложен статический закон управления с использованием пропорционально-интегрального предиктора, построенного на базе решения уравнения объекта. В [172, 179] рассмотрено использование схемы [178] для подавления ограниченных возмущений за счет соответствующего распределения собственных чисел замкнутой системы. Однако в [123, 183, 184, 223] было показано, что численная реализация предиктора [178] позволяет стабилизировать только определенный класс неустойчивых объектов с запаздыванием. Следовательно, принцип подавления возмущений [172, 179] не всегда гарантирует уменьшение влияния возмущений на качество переходных процессов. В [15, 52, 188, 199–203] для повышения качества переходных процессов предполагалось, что возмущение описывается конечной суммой синусоидальных сигналов. Однако структура алгоритма [15] и расчет настраиваемых параметров зависели от количества

синусоидальных слагаемых в возмущении, качество переходных процессов зависело от наличия несинусоидальной составляющей, а также использовался интегральный алгоритм [178] без его численной реализации.

В [210] предложен метод компенсации возмущений (ограниченных вместе с заданным количеством производных) для неустойчивых объектов с запаздыванием по управлению без использования численной реализации схемы [178]. Таким образом в отличие от [15], в [210] рассматривались возмущения, которые раскладываются в ряд Фурье с бесконечным числом слагаемых. Однако в [15] для прогноза возмущения использовались наблюдатели, что усложняло реализацию схемы и повышало ее чувствительность к помехам измерения. В [133], независимо от [15] (статьи [210] и [133] были поданы в журналы одновременно), предложена схема компенсации, ограниченных вместе с заданным количеством производных, возмущений на базе схемы [178]. В отличие от [210], в [133] рассмотрена численная реализация [178] и получены достаточные условия сходимости решений замкнутой системы. Дополнительно, в [133] для прогноза возмущения применялась теорема Лагранжа о среднем, что позволило избежать использования наблюдателей производных возмущения в отличие от [210], где для прогноза возмущения применялось разложение в ряд Тэйлора. В [133] также показано, что метод компенсации возмущений позволяет эффективно управлять объектами с запаздывающим входным сигналом в отличие от метода подавления возмущений [172, 178, 179]. Это связано с тем, что значение сигнала компенсации возмущений противоположно значению возмущений и сигнал компенсации возмущений не влияет на собственные числа замкнутой системы. Однако алгоритм [133] слишком трудоемкий в связи с численной

реализацией интегральной составляющей предиктора [178].

В [122] предложен новый предиктор, позволяющий проектировать алгоритмы управления неустойчивыми объектами. По сравнению с [178], предиктор [122] не требует численной реализации и, как следствие, гораздо проще в технической реализации и расчете параметров. В [186] на базе предиктора [122] предложен субпредиктор регулируемой переменной, применение которого позволяет управлять объектами с большим временем запаздывания, чем при использовании алгоритма на базе предиктора [122]. Однако результаты [122, 186] слишком чувствительны к возмущениям.

В данной главе будет предложено обобщение результатов [122, 186] на объекты с возмущениями. Дополнительно, в отличие от [133] будет разработан новый субпредиктор возмущения, позволяющий существенно сократить время прогноза. Также, в отличие от [210] будут предложены достаточные условия устойчивости замкнутой системы, представленные разрешимостью линейных матричных неравенств (ЛМН), размерность которых существенно меньше, чем в [133].

В настоящей главе, как и в работах [122, 133, 172, 178, 179, 186, 210], будет рассмотрен линейный объект с возмущением и запаздыванием по управлению. Доступен измерению вектор состояния. В разделе 1.2 будет предложена схема управления с использованием предикторов регулируемой переменной и возмущений. В разделе 1.4 будет рассмотрено обобщение предложенной схемы управления с использованием субпредикторов регулируемой величины и возмущения. Это позволит сохранить устойчивость замкнутой системы по отношению к большому запаздыванию в объекте и сократить время прогноза возмущения, в отличие от использования

схемы управления на базе предикторов. Достаточные условия устойчивости замкнутой системы в зависимости от параметров системы управления и запаздывания представлены в разделах 1.3 и 1.4 в виде разрешимости ЛМН. В разделе 1.8 будут приведены результаты расчетов, моделирования и сравнительный анализ предложенных схем управления с некоторыми существующими.

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим объект с запаздыванием в канале управления, который описывается следующим уравнением

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - h) + Bf(t), \\ t &\geq 0, \quad u(s) = 0, \quad s < 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – измеряемый вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – сигнал управления, $f(t) \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение с ограниченными $(r + 3)$ производными, $r \geq 0$ – параметр, который будет использоваться при синтезе алгоритма управления, $h > 0$ – известное время запаздывания, A и B – известные матрицы соответствующих размерностей, пара (A, B) управляема и выполнено условие $B^+B = I_m$, B^+ – псевдообратная матрица для матрицы B . Отметим, что объект управления (1.1) с приведенными допущениями рассматривался в [122, 133, 172, 178, 179, 186, 210].

Алгоритмы [122, 133, 172, 178, 179, 186, 210] обеспечивают устойчивость (1.1) по вход-состоянию (input-to-state stability) и выполнение условия

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq \delta, \quad (1.2)$$

где $\delta = O\left(\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |f(t)|\right)$, $O(\chi)$ для $\chi \in \mathbb{R}$ означает, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{O(\chi)}{\chi} = \text{const.}$ То есть точность регулирования в установившемся режиме в [122, 133, 172, 178, 179, 186, 210] зависит от сигнала возмущения.

В данной главе цель управления состоит в разработке алгоритма управления, который обеспечит $\delta = O\left(h^{r+1} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |f^{(r+1)}(t)|\right)$. То есть, в отличие от [122, 133, 172, 178, 179, 186, 210], предложенный алгоритм позволит компенсировать большие по амплитуде возмущения. Достаточное условие для обеспечения поставленной цели управления будет приведено в Теореме 1.1.

Опишем кратко схему синтеза алгоритма управления. Сигнал u представим в виде

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t). \quad (1.3)$$

С помощью сигнала u_1 будем обеспечивать устойчивость замкнутой системы, а с помощью сигнала u_2 компенсацию возмущения f . В разделе 1.2 формируется предиктор регулируемой величины для синтеза u_1 («Предиктор $x(t)$ » на рис. 1.1). Затем формируется оценка возмущения $\hat{f}$ с использованием вспомогательного контура и алгоритма оценки производной. Для прогноза оценки возмущения $\hat{f}$ используется предиктор возмущения («Предиктор $\hat{f}(t)$ » на рис. 1.1). После формируется сигнал компенсации возмущения u_2 .

В разделе 1.4 будет предложено обобщение результатов раздела 1.3 для управления объектами с большим временем запаздывания. Также новый алгоритм позволит существенно сократить время прогноза возмуще-

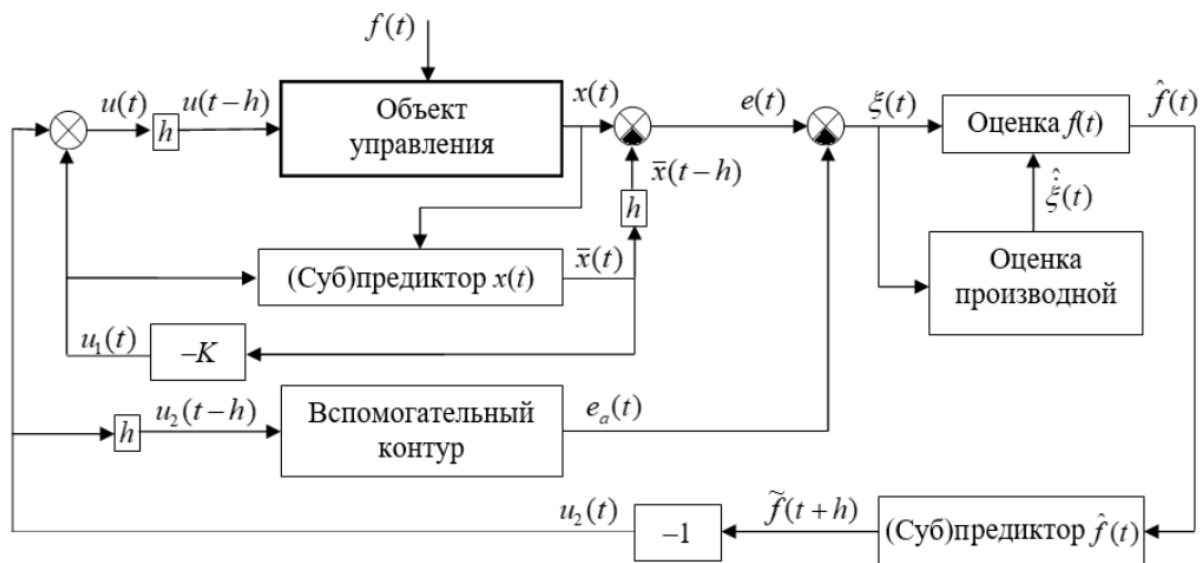


Рисунок 1.1 — Структурная схема системы управления.

ния. Для решения данной задачи будут синтезированы субпредикторы регулируемой величины и возмущения. Структурная схема такой системы управления подобна схеме, представленной на рис. 1.1, где вместо предикторов будут использоваться соответствующие субпредикторы. В отличие от [15, 52, 188, 199–203], в работе будет развиваться идеи многошагового прогнозирования (субпредикторы).

1.2 Предикторы регулируемой величины и возмущения

Вначале синтезируем закон управления u_1 . Для этого потребуется прогноз регулируемой величины на время запаздывания h . С этой целью введем предиктор

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + D(x(t) - \bar{x}(t-h)) + Bu_1(t), \quad (1.4)$$

где матрица D выбирается так, чтобы решения уравнения

$$\dot{\kappa}(t) = A\kappa(t) - D\kappa(t - h), \quad (1.5)$$

$\kappa(t) \in \mathbb{R}^n$, были предельно ограниченными. В теореме 1.1 будет сформулировано количественное условие для выбора матрицы D в виде разрешимости ЛМН.

Зададим закон управления u_1 в виде

$$u_1(t) = -K\bar{x}(t), \quad (1.6)$$

где матрица K выбирается из условия гурвицевости матрицы $A - BK$.

Введем ошибку прогноза $e(t) = x(t) - \bar{x}(t - h)$. С учетом (1.3), продифференцируем $e(t)$ вдоль решений уравнений (1.1) и (1.4):

$$\dot{e}(t) = Ae(t) - De(t - h) + Bu_2(t - h) + Bf(t). \quad (1.7)$$

Из (1.7) следует, что выполнить условие $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ при наличии внешнего возмущения f невозможно. Зато величину $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |e(t)|$ можно уменьшить путем соответствующего выбора закона управления u_2 , который обеспечит частичную компенсацию возмущения f . Поэтому далее синтезируем алгоритм компенсации возмущений.

Получим сначала информацию о возмущении f . С этой целью введем вспомогательный контур

$$\dot{e}_a(t) = Ae_a(t) - De_a(t - h) + Bu_2(t - h), \quad (1.8)$$

где $e_a(t) \in \mathbb{R}^n$. Найдем производную по времени от функции $\xi(t) = e(t) - e_a(t)$ вдоль траекторий уравнений (1.6) и (1.8):

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) - D\xi(t - h) + Bf(t). \quad (1.9)$$

Следуя структуре уравнения (1.9), зададим оценку возмущения в виде

$$\hat{f}(t) = B^+ \left(\hat{\xi}(t) - A\xi(t) + D\xi(t - h) \right), \quad (1.10)$$

где сигнал $\hat{\xi}(t)$ определяется согласно следующему алгоритму

$$\hat{\xi}_i(t) = \frac{p}{\mu p + 1} \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.11)$$

Здесь $\mu > 0$ – достаточно малое число, $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Для частичной компенсации возмущения f закон управления u_2 требуется задать в виде $u_2(t) = -\hat{f}(t + h)$. Для построения прогноза оценки возмущения воспользуемся теоремой Лагранжа о среднем [56] согласно которой функцию $\hat{f}(t + h)$ можно записать в виде

$$\hat{f}(t + h) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \hat{f}(t - h(j - 1)) + R(t), \quad (1.12)$$

где $C_{r+1}^j = \frac{(r+1)!}{(r+1-j)!j!}$, $R(t) = h^{r+1} \hat{f}^{(r+1)}(t - [(r+1)\theta - 1]h)$ – остаток разложения, $0 < \theta < 1$. Поскольку остаток $R(t)$ не доступен измерению, то предиктор возмущения и закон частичной компенсации возмущения определим в виде

$$\tilde{f}(t + h) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \hat{f}(t - h(j - 1)), \quad (1.13)$$

$$u_2(t) = -\tilde{f}(t + h). \quad (1.14)$$

Для дискретного времени алгоритм (1.13) рассмотрен в [97], для непрерывного времени в [63]. Из (1.13) следует, что для прогноза оценки возмущения требуется время rh .

В результате сформирован алгоритм управления, состоящий из предиктора регулируемой величины (1.4), вспомогательного контура (1.8), предиктора возмущения (1.13) и закона управления (1.3), состоящего из (1.6) для обеспечения устойчивости замкнутой системы и (1.14) для компенсации возмущения. Для формулировки основного результата раздела 1.2 необходимо сформировать уравнение замкнутой системы.

1.3 Уравнение замкнутой системы и основной результат

Введем новую переменную $x_1 = x - e$ и продифференцируем ее вдоль решений (1.1) и (1.7):

$$\dot{x}_1(t) = (A - BK) x_1(t) + De(t - h). \quad (1.15)$$

Рассмотрим ошибку оценки производной $\eta = \dot{\xi} - \hat{\dot{\xi}}$. Принимая во внимание (1.10), (1.11) и обозначив $z = \ddot{\xi}$, запишем следующие выражения

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= -\frac{1}{\mu} \eta(t) + z(t), \\ \dot{z}(t) &= Az(t) - Dz(t - h) + B\ddot{f}(t). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Поскольку сигнал $\ddot{f}(t)$ ограниченный, матрица D выбирается из условия обеспечения предельной ограниченности решений (1.5), то сигнал $\eta(t)$ предельно ограниченный.

Введем новые переменные $w(t) = \eta^{(r+1)}(t)$ и $g(t) = \xi^{(r+3)}(t)$. Принимая во внимание (1.16), продифференцируем η и z по времени $(r + 1)$ раз и результат запишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= -\frac{1}{\mu}w(t) + g(t), \\ \dot{g}(t) &= Ag(t) - Dg(t - h) + Bf^{(r+3)}(t).\end{aligned}\tag{1.17}$$

Так как сигнал $f^{(r+3)}(t)$ ограниченный, то сигнал $w(t)$ предельно ограниченный.

Перепишем (1.9) как $Bf(t) = \dot{\xi}(t) - A\xi(t) + D\xi(t - h)$. С учетом (1.10) и (1.12)-(1.14), составим следующие соотношения

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= u_2(t - h) + f(t) = \hat{f}(t) - \tilde{f}(t) + f(t) - \hat{f}(t) = \\ &= R(t - h) + B^+\eta(t) = h^{r+1}\hat{f}^{(r+1)}(t - (r + 1)\theta h) + \\ &+ B^+\eta(t) = h^{r+1}\left[f^{(r+1)}(t - (r + 1)\theta h) - \right. \\ &\left. - B^+w(t - (r + 1)\theta h)\right] + B^+\eta(t).\end{aligned}\tag{1.18}$$

Из ограниченности $f^{(r+1)}(t)$, $w(t)$ и $\eta(t)$ следует ограниченность $\lambda(t)$. Подставив (1.18) в (1.7), получим

$$\dot{e}(t) = Ae(t) - De(t - h) + B\lambda(t).\tag{1.19}$$

В результате, замкнутая система представлена уравнениями (1.15)-(1.17), (1.19). Поскольку решения уравнений (1.16) и (1.17) предельно ограниченные, то для исследования устойчивости замкнутой системы достаточно рассмотреть только уравнения (1.15) и (1.19).

Введем вектор и матрицы

$$x_p = \text{col}\{x_1, e\}, \quad A_p = \begin{bmatrix} A - BK & O_{n \times n} \\ O_{n \times n} & A \end{bmatrix},$$

$$D_p = \begin{bmatrix} O_{n \times n} & D \\ O_{n \times n} & -D \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} O_{n \times n} \\ B \end{bmatrix},$$

где $O_{n \times m}$ – нулевая матрица размерности $n \times m$. Перепишем уравнения (1.15) и (1.19) в виде

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + D_p x_p(t - h) + B_p \lambda(t)$$

или, используя формулу Ньютона-Лейбница, как

$$\dot{x}_p(t) = (A_p + D_p) x_p(t) - D_p \int_{t-h}^t \dot{x}_p(s) ds + B_p \lambda(t). \quad (1.20)$$

Теорема 1.1 Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (1.1), предиктора регулируемой величины (1.4), вспомогательного контура (1.8), предиктора возмущения (1.13) и закона управления (1.3), (1.6), (1.14). Пусть для заданного числа $\alpha > 0$ и матриц K, D существуют коэффициент $\beta > 0$ и матрицы $P > 0, P_2 > 0, P_3 > 0, Q > 0, S > 0$ такие, что выполнено ЛМН

$$\Psi := \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & O_{4n \times 4n} & -hP_2^T D_p & P_2^T B_p \\ * & \Psi_{22} & O_{4n \times 4n} & -hP_3^T D_p & P_3^T B_p \\ * & * & -e^{-2\alpha h} Q & O_{4n \times 4n} & O_{4n \times (2m+n)} \\ * & * & * & -hS & O_{4n \times (2m+n)} \\ * & * & * & * & -\beta I_{2m+n} \end{bmatrix} < 0, \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_{11} &= P_2^T (A_p + D_p) + (A_p + D_p)^T P_2 + 2\alpha P + Q, \\ \Psi_{12} &= P - P_2^T + (A_p + D_p)^T P_3, \\ \Psi_{22} &= -P_3 - P_3^T + hS.\end{aligned}\tag{1.22}$$

Тогда решения замкнутой системы (1.15)-(1.17), (1.19) предельно ограничены. Причем $\delta = O(h^{r+1} \sup |f^{(r+1)}(t)|)$ в целевом условии (1.2) при достаточно малом μ .

Доказательство. Для исследования устойчивости (1.20) рассмотрим функционал Ляпунова-Красовского в виде

$$V = V_1 + V_2 + V_3,\tag{1.23}$$

где

$$\begin{aligned}V_1 &= x_p^T P x_p, \\ V_2 &= \int_{t-h}^t e^{2\alpha(\sigma-t)} x_p^T(\sigma) Q x_p(\sigma) d\sigma, \\ V_3 &= \int_{-h}^0 \int_{t+\zeta}^t e^{2\alpha(\sigma-t)} \dot{x}_p^T(\sigma) S \dot{x}_p(\sigma) d\sigma d\zeta.\end{aligned}$$

Отметим, что составляющая V_3 позволяет получить условие устойчивости замкнутой системы, которое в явном виде будет зависеть от запаздывания (delay depended condition [130]). Принимая во внимание (1.20), составим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 + 2\alpha V_1 &= x_p^T P \dot{x}_p + 2\alpha x_p^T P x_p + \\ &+ 2 [x_p^T P_2^T + \dot{x}_p^T P_3^T] \times \\ &\times [(A_p + D_p) x_p(t) - D \int_{t-h}^t \dot{x}_p(s) ds + B_p \lambda(t) - \dot{x}_p(t)], \\ \dot{V}_2 + 2\alpha V_2 &= x_p^T(t) Q x_p(t) - e^{-2\alpha h} x_p^T(t-h) Q x_p(t-h), \\ \dot{V}_3 + 2\alpha V_3 &= h \dot{x}_p^T S \dot{x}_p - \int_{t-h}^t e^{2\alpha(\sigma-t)} \dot{x}_p^T(\sigma) S \dot{x}_p(\sigma) d\sigma.\end{aligned}\tag{1.24}$$

При составлении первого выражения в (1.24) использовался дескрипторный метод [130]. Воспользовавшись неравенством Йенсена (Jensen's inequality [130]), оценим последнее выражение в (1.24) в виде

$$\dot{V}_3 + 2\alpha V_3 \leq h \dot{x}_p^T S \dot{x}_p - \frac{e^{-2\alpha h}}{h} \int_{t-h}^t \dot{x}_p^T(\sigma) d\sigma S \int_{t-h}^t \dot{x}_p(\sigma) d\sigma. \quad (1.25)$$

Введем вектор

$$y(t) = \text{col} \left\{ x_p(t), \dot{x}_p(t), x_p(t-h), \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \dot{x}_p(\sigma) d\sigma, \lambda(t) \right\}$$

и запишем следующее выражение:

$$\dot{V} + 2\alpha V - \beta \lambda^T \lambda \leq y^T \Psi y.$$

Очевидно, что $y^T \Psi y \leq 0$, если выполнено условие (1.21).

Теперь покажем, что в замкнутой системе обеспечивается (1.2) с $\delta = O(h^{r+1} \sup |f^{(r+1)}(t)|)$. Принимая во внимание (1.3) и (1.18), перепишем (1.1) в виде $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_1(t-h) + B\lambda(t)$. Обозначим $\Delta(\mu) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\lambda(t)|$. Тогда из (1.16), (1.17) и (1.18) следует, что $\lim_{\mu \rightarrow 0} \Delta(\mu) = h^{r+1} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |f^{(r+1)}(t)|$. Таким образом, предложенный алгоритм обеспечивает (1.2) с точностью $\delta = O(h^{r+1} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |f^{(r+1)}(t)|)$, в то время как существующие алгоритмы [1-4, 6-9, 12, 13] обеспечивают $\delta = O(\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |f(t)|)$. Теорема 1.1 доказана.

З а м е ч а н и е 1.1 Покажем ограниченность всех сигналов в замкнутой системе. Так как вектор y предельно ограниченный, то сигнал x_p предельно ограниченный. Из предельной ограниченности x_p следует предельная ограниченность x_1 и e . Из выражения $x_1 = x - e$ следует предельная ограниченность x . Из предельной ограниченности e , x и

$e(t) = x(t) - \bar{x}(t - h)$ следует предельная ограниченность $\bar{x}$. Значит из (1.7) следует предельная ограниченность u_1 .

Продифференцируем (1.9): $\ddot{\xi}(t) = A\dot{\xi}(t) - D\dot{\xi}(t - h) + B\dot{f}(t)$. Из ограниченности $\dot{f}$ следует предельная ограниченность $\dot{\xi}$. Перепишем (1.11) в виде $\dot{\hat{\xi}} = -\frac{1}{\mu}\hat{\xi} + \frac{1}{\mu}\dot{\xi}$. Из предельной ограниченности $\dot{\xi}$ следует предельная ограниченность $\hat{\xi}$. Из предельной ограниченности $\hat{\xi}$ и ξ следует предельная ограниченность $\hat{f}$. Сигнал u_2 ограничен из (1.13) и (1.14). Значит сигнал u предельно ограничен из (1.3). В результате все сигналы ограничены в замкнутой системе.

1.4 Субпредиктор регулируемой величины и субпредиктор возмущения

В данном разделе рассмотрим синтез алгоритма, который позволит сократить время прогноза возмущения и обеспечить устойчивость замкнутой системы по отношению к большому запаздыванию в канале управления в (1.1), чем при использовании результатов раздела 1.3. Синтез нового алгоритма базируется на результатах разделов 1.2 и 1.3.

Для прогноза регулируемой величины введем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_i(t) &= A\bar{x}_i(t) + D_i(\bar{x}_{i+1}(t) - \bar{x}_i(t - \bar{h})) + \\ &\quad + Bu_1(t - (i - 1)\bar{h}), \quad i = 1, \dots, M - 1, \\ \dot{\bar{x}}_M(t) &= A\bar{x}_M(t) + D_M(x(t) - \bar{x}_M(t - \bar{h})) + \\ &\quad + Bu_1(t - (M - 1)\bar{h}),\end{aligned}\tag{1.26}$$

где $\bar{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{h} = \frac{h}{M}$. Число M задается разработчиком, а матрицы D_i выбираются из условия обеспечения предельной ограниченности решений следующей системы уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\kappa}_i(t) &= A\kappa_i(t) - D_i\kappa_i(t - \bar{h}) + D_{i+1}\kappa_{i+1}(t - \bar{h}), \\ i &= 1, \dots, M-1, \\ \dot{\kappa}_M(t) &= A\kappa_M(t) - D_M\kappa_M(t - \bar{h}).\end{aligned}\tag{1.27}$$

где $\kappa_i \in R^n$, $i = 1, \dots, M$. В Теореме 1.2 будет сформулировано количественное условие для выбора матриц D_i в виде разрешимости ЛМН. Систему (1.26) будем называть субпредиктором регулируемой величины, поскольку каждое уравнение системы (1.26) обеспечивает прогноз регулируемой величины на время запаздывания $\frac{h}{M}$.

Введем ошибки прогноза:

$$\begin{aligned}e_i(t) &= \bar{x}_{i+1}(t - (M-i)\bar{h}) - \bar{x}_i(t - (M-i+1)\bar{h}), \\ i &= 1, \dots, M-1, \\ e_M(t) &= x(t) - \bar{x}_M(t - \bar{h}).\end{aligned}\tag{1.28}$$

С учетом (1.3), продифференцируем (1.28) вдоль решений уравнений (1.1) и (1.26):

$$\begin{aligned}\dot{e}_i(t) &= Ae_i(t) - D_ie_i(t - \bar{h}) + D_{i+1}e_{i+1}(t - \bar{h}), \\ i &= 1, \dots, M-1, \\ \dot{e}_M(t) &= Ae_M(t) - D_Me_M(t - \bar{h}) + Bu_2(t - h) + Bf(t).\end{aligned}\tag{1.29}$$

Если положить $u_2(t) \equiv 0$ и $f(t) \equiv 0$ и выбрать D_i , $i = 1, \dots, M$ такими, что система (1.27) асимптотически устойчива, то из (1.28) следует, что

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t + h) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_1(t)$. Следовательно, зададим закон управления u_1 в виде

$$u_1(t) = -K\bar{x}_1(t), \quad (1.30)$$

где матрица K задается из условия гурвицевости матрицы $A - BK$.

Однако $f \neq 0$ по условию задачи. Поэтому далее синтезируем алгоритм компенсации возмущений u_2 с целью уменьшения влияния возмущения f на значение ошибок прогноза e_i , $i = 1, \dots, M$. Введем вспомогательный контур

$$\dot{e}_a(t) = Ae_a(t) - D_M e_a(t - \bar{h}) + Bu_2(t - h), \quad (1.31)$$

где $e_a(t) \in \mathbb{R}^n$. Найдем производную по времени от функции $\xi(t) = e_M(t) - e_a(t)$ вдоль траекторий M -го уравнения в системе (1.29) и уравнения (1.31):

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) - D_M \xi(t - \bar{h}) + Bf(t). \quad (1.32)$$

Следуя структуре (1.32), зададим оценку возмущения в виде

$$\hat{f}(t) = B^+ \left(\hat{\xi}(t) - A\xi(t) + D_M \xi(t - \bar{h}) \right), \quad (1.33)$$

где сигнал $\hat{\xi}(t)$ получен с помощью алгоритма (1.11).

Теперь сформируем алгоритм прогноза оценки возмущения $\hat{f}(t)$. Для этого запишем выражение для $\hat{f}(t + \hat{h})$ в виде

$$\hat{f}(t + \hat{h}) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \hat{f}(t - \hat{h}(j - 1)) + \hat{R}(t), \quad (1.34)$$

где $\hat{h} = \frac{h}{N}$, число $N > 0$ выбирается разработчиком, $\hat{R}(t) = \hat{h}^{r+1} \hat{f}^{(r+1)}(t - [(r+1)\theta - 1]\hat{h})$ – остаток разложения.

Очевидно, что значения $\hat{f}(t + \hat{h})$ недостаточно для компенсации возмущений. Следовательно, сдвинем вправо аргумент функции $\hat{f}(t + \hat{h})$ в (1.34) на величину $\hat{h}$ последовательно N раз. Следуя данной процедуре, прогноз возмущения на величину h можно сформировать в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t + \hat{h}) &= \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \hat{f}(t - \hat{h}(j-1)), \\ \tilde{f}(t + l\hat{h}) &= \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \tilde{f}(t - \hat{h}(j-l)) + \\ &+ \sum_{j=l}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \hat{f}(t - \hat{h}(j-l)), \quad l = 2, \dots, r+1 \\ &(\text{или } l = 2, \dots, N, \text{ если } N < r+2), \\ \tilde{f}(t + k\hat{h}) &= \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \tilde{f}(t - \hat{h}(j-k)), \\ k &= r+2, \dots, N \text{ (если } N \geq r+2). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Систему (1.35) будем называть субпредиктором возмущений. Отметим, что при $N < r+2$ субпредиктор возмущения состоит только из первых двух выражений (1.35). При $N \geq r+2$ субпредиктор возмущения включает в себя все уравнения (1.35). Также из (1.35) видно, что время прогноза возмущения составляет $\hat{h}r = \frac{hr}{N}$. То есть по сравнению с (1.13) алгоритмы (1.35) позволяют уменьшить время прогноза возмущения в N раз.

Сформируем закон частичной компенсации возмущения в виде

$$u_2(t) = -\tilde{f}(t + h). \tag{1.36}$$

В итоге сформирован алгоритм управления, состоящий из субпредиктора регулируемой величины (1.26), вспомогательного контура (1.31), субпредиктора возмущения (1.35) и закона управления (1.3), в состав которого

входят сигнал (1.30) для обеспечения устойчивости замкнутой системы и сигнал (1.36) для компенсации возмущения.

Перед формулировкой основного результата настоящего раздела предварительно сформируем уравнение замкнутой системы. С учетом (1.34)-(1.35) составим ошибки прогноза $\varepsilon_l(t) = \hat{f}(t + l\hat{h}) - \tilde{f}(t + l\hat{h})$, $l = 1, \dots, N$ в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(t) &= \hat{R}(t), \\ \varepsilon_l(t) &= \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \varepsilon_{l-j}(t) + \varepsilon_1(t + (l-1)\hat{h}), \\ l &= 2, \dots, r+2 \text{ (или } l = 2, \dots, N, \text{ если } N \leq r+2), \\ \varepsilon_v(t) &= \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \varepsilon_{v-j}(t) + \varepsilon_1(t + (v-1)\hat{h}), \\ v &= r+3, \dots, N \text{ (если } N > r+2).\end{aligned}\tag{1.37}$$

Рассмотрим следующее выражение

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= u_2(t-h) + f(t) = -\tilde{f}(t) + f(t) = \\ &= \hat{f}(t) - \tilde{f}(t) + f(t) - \hat{f}(t) = \varepsilon_N(t-h) + B^+ \eta(t).\end{aligned}\tag{1.38}$$

Введем новую переменную $x_1 = x - \sum_{i=1}^M e_i$. С учетом (1.38), продифференцируем x_1 по времени вдоль решений (1.1) и (1.29):

$$\dot{x}_1(t) = (A - BK)x_1(t) + D_1 e_1(t - \bar{h}).\tag{1.39}$$

Составим ошибку оценки производной $\eta = \dot{\xi} - \hat{\xi}$ в виде (1.16). Обозначив $z = \ddot{\xi}$, найдем производную от z с учетом (1.32):

$$\dot{z}(t) = Az(t) - D_M z(t - \bar{h}) + B\ddot{f}(t).\tag{1.40}$$

Введем новые переменные $w(t) = \eta^{(r+1)}(t)$, $g(t) = \xi^{(r+3)}(t)$. Принимая во внимание (1.16) и (1.40), продифференцируем η и z по времени $(r + 1)$ раз и результат запишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= -\frac{1}{\mu}w(t) + g(t), \\ \dot{g}(t) &= Ag(t) - D_M g(t - \bar{h}) + Bf^{(r+3)}(t).\end{aligned}\tag{1.41}$$

С учетом (1.38), перепишем (1.29) как

$$\begin{aligned}\dot{e}_i(t) &= Ae_i(t) - D_i e_i(t - \bar{h}) + D_{i+1} e_{i+1}(t), \\ i &= 1, \dots, M - 1, \\ \dot{e}_M(t) &= Ae_M(t) - D_M e_M(t - \bar{h}) + B\lambda_1(t).\end{aligned}\tag{1.42}$$

Покажем ограниченность $\lambda_1(t)$. Поскольку сигналы $f(t)$, $\dot{f}(t)$ и $f^{(r+3)}(t)$ ограниченные, то из подобия структур (1.40), второго уравнения (1.41) и последнего уравнения (1.27) следует предельная ограниченность $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Продифференцируем (1.32): $\ddot{\xi}(t) = A\dot{\xi}(t) - D_M \dot{\xi}(t - h) + B\dot{f}(t)$. Из ограниченности $\dot{f}$ следует предельная ограниченность $\dot{\xi}$. Перепишем (1.11) в виде $\dot{\hat{\xi}} = -\frac{1}{\mu}\hat{\xi} + \frac{1}{\mu}\dot{\xi}$. Из предельной ограниченности $\dot{\xi}$ следует предельная ограниченность $\hat{\xi}$. Из предельной ограниченности $\hat{\xi}$, ξ и (1.33) следует ограниченность $\hat{f}$. Из (1.35) следует ограниченность $\tilde{f}$. Сигнал $\varepsilon_N(t)$ ограничен из (1.37). В результате, $\lambda_1(t)$ ограничен из (1.38).

Поскольку решения (1.40) и (1.41) предельно ограниченные, то для исследования устойчивости замкнутой системы достаточно рассмотреть только уравнения (1.39) и (1.42).

Введем вектор и матрицы:

$$\begin{aligned}
x_p &= \text{col} \{x_1, e_1, e_2, \dots, e_M\}, \\
A_p &= \begin{bmatrix} A - BK & O_{n \times n} & \dots & O_{n \times n} & O_{n \times n} \\ O_{n \times n} & A & \dots & O_{n \times n} & O_{n \times n} \\ O_{n \times n} & O_{n \times n} & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_{n \times n} & O_{n \times n} & \dots & A & O_{n \times n} \\ O_{n \times n} & O_{n \times n} & \dots & O_{n \times n} & A \end{bmatrix}, \\
D_p &= \begin{bmatrix} O_{n \times n} & D_1 & O_{n \times n} & O_{n \times n} & \dots & O_{n \times n} \\ O_{n \times n} & -D_1 & D_2 & O_{n \times n} & \dots & O_{n \times n} \\ O_{n \times n} & O_{n \times n} & -D_2 & D_3 & \dots & O_{n \times n} \\ O_{n \times n} & O_{n \times n} & O_{n \times n} & -D_3 & \dots & O_{n \times n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{n \times n} & O_{n \times n} & O_{n \times n} & O_{n \times n} & \dots & -D_M \end{bmatrix}, \\
B_p &= \begin{bmatrix} O_{n \times m} \\ \vdots \\ O_{n \times m} \\ B \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Перепишем уравнения (1.39) и (1.42) в виде

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + D_p x_p(t - \bar{h}) + B_p \lambda_1(t)$$

или

$$\dot{x}_p(t) = (A_p + D_p) x_p(t) - D_p \int_{t-\bar{h}}^t \dot{x}_p(s) ds + B_p \lambda_1(t). \tag{1.44}$$

Отметим, что в предыдущем разделе уравнение замкнутой системы (1.20) содержало запаздывание h . Использование субпредиктора (1.26) поз-

волило получить новое уравнение замкнутой системы (1.44) с уменьшенным в M раз запаздыванием $\bar{h}$.

Теорема 1.2 Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (1.1), субпредиктора регулируемой величины (1.26), вспомогательного контура (1.31), субпредиктора возмущения (1.35) и закона управления (1.3), (1.30), (1.36). Пусть для заданного числа $\alpha > 0$ и матриц K , D существуют коэффициент $\beta > 0$ и матрицы $P > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $Q > 0$, $S > 0$ такие, что выполнено ЛМН

$$\Psi := \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & O_{q \times q} & -\bar{h}P_2^T D_p & P_2^T B_p \\ * & \Psi_{22} & O_{q \times q} & -\bar{h}P_3^T D_p & P_3^T B_p \\ * & * & -e^{-2\alpha\bar{h}}Q & O_{q \times q} & O_{q \times (n+m)} \\ * & * & * & -\bar{h}S & O_{q \times (n+m)} \\ * & * & * & * & -\beta I_{n+m} \end{bmatrix} < 0, \quad (1.45)$$

где Ψ_{11} имеет вид (1.22), $\Psi_{12} = P - P_2^T + A_0^T P_3$, $\Psi_{22} = -P_3 - P_3^T + \bar{h}S$, $q = (3+M)n$. Тогда решения замкнутой системы (1.1), (1.3), (1.26), (1.30), (1.31), (1.35), (1.36) предельно ограничены и выполнено целевое условие (1.2), где $\delta = O\left(\overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} |\varepsilon_N(h, t)|\right)$ при достаточно малом μ . Дополнительно, все сигналы ограничены в замкнутой системе.

Доказательство. Для доказательства теоремы 1.2 рассмотрим функционал Ляпунова-Красовского (1.23), где только V_2 и V_3 сформируем с учетом нового запаздывания $\bar{h}$ в (1.44):

$$V_2 = \int_{t-h}^t e^{2\alpha(\sigma-t)} x_p^T(\sigma) Q x_p(\sigma) d\sigma, \quad (1.46)$$

$$V_3 = \int_{-h}^0 \int_{t+\zeta}^t e^{2\alpha(\sigma-t)} \dot{x}_p^T(\sigma) S \dot{x}_p(\sigma) d\sigma d\zeta.$$

В силу подобия структур систем (1.20) и (1.44), вывод условия $\dot{V} + 2\alpha V - \beta \lambda_1^T \lambda_1 \leq y^T \Psi y \leq 0$ аналогичен выводу в Утверждении 1.

Так как $y^T \Psi y \leq 0$, то сигнал x_p предельно ограниченный. Из предельной ограниченности x_p следует предельная ограниченность $x_1, e_i, i = 1, \dots, M, \eta, z$. Доказательство ограниченности остальных сигналов в замкнутой системе аналогично доказательству в замечании 1.1.

Принимая во внимание (1.3) и (1.18), перепишем (1.1) в виде $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_1(t-h) + B\lambda_1(t)$. Обозначив $\Delta_1(\mu) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\lambda_1(t)|$, имеем $\overline{\lim}_{\mu \rightarrow 0} \Delta_1(\mu) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\varepsilon_N(h, t)|$. Таким образом предложенный алгоритм управления обеспечивает (1.2) с точностью $\delta = O\left(\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\varepsilon_N(h, t)|\right)$ в (1.2). Теорема 1.2 доказана.

1.5 Задача слежения за эталонным сигналом

Рассмотрим задачу слежения за эталонным сигналом. Пусть объект управления описывается уравнением

$$\dot{\chi}(t) = A\chi(t) + Bu(t-h) + F\phi(t), \quad (1.47)$$

где $\chi \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта, $\phi(t) \in \mathbb{R}^v$ – возмущение с ограниченными $(r+3)$ производными, известные матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и неизвестная матрица $F \in \mathbb{R}^{n \times v}$ удовлетворяют условиям согласования:

$A = A_m + Bc_1$ и $F = Bc_2$, гурвицева матрица A_m и матрицы c_1, c_2 неизвестные. Остальные обозначения в объекте (1.47) аналогичны обозначениям в (1.1).

Зададим эталонную модель в виде

$$\dot{\chi}_m(t) = A_m \chi_m(t) + Bw(t), \quad (1.48)$$

где $x_m(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния эталонной модели, $w(t) \in \mathbb{R}$ – неизвестный задающий сигнал с ограниченными $(r + 3)$ производными.

Введем ошибку слежения $x = \chi - \chi_m$. Дифференцируя x вдоль траекторий (1.1) и (1.48), получим

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h) + Bf(t). \quad (1.49)$$

Здесь $f(t) = c_1 \chi_m(t) - w(t) + c_2 \phi(t)$ – новая функция возмущения с ограниченными $(r + 3)$ производными.

Поскольку структура модели (1.49) аналогична структуре модели исходного объекта (1.1), то дальнейший синтез системы управления аналогичен предыдущим разделам и полученный алгоритм обеспечит устойчивость по вход-состоянию-выход замкнутой системы и выполнение целевого условия (1.2), где $x(t) = \chi(t) - \chi_m(t)$.

1.6 Управление сетевыми системами

Результаты предыдущих разделов будут применены к управлению сетевыми системами с запаздыванием. Такие задачи встречаются при управлении группой объектов с задержкой сигналов в каналах связи.

Рассмотрим динамическую сеть S , состоящую из N агентов. Введем орграф $\Gamma = (V, E)$, ассоциированный с сетью S , где каждой вершине орграфа Γ соответствуют подсистемы S_i , $i = 1, \dots, N$ и подсистема лидера S_L , $V = \{v_1, \dots, v_k, v_L\}$ – множество вершин, $E \in V \times V$ – множество ребер. Пусть $C = (c_{ij})$, $S = (s_{iL})$ – взвешенные матрицы смежности орграфа Γ такие, что $c_{ij} = 1$ и $s_{iL} = 1$ если $j \in N_{jL}$, иначе $c_{ij} = 0$ и $s_{iL} = 0$, $N_{jL} = \{v_j \in V : (v_j, v_i), (v_i, v_L) \in E\}$ – множество смежных вершин для узла v_i . Запись $(v_j, v_i), (v_i, v_L) \in E$ означает, что информация поступает от подсистемы S_i к подсистеме S_j и от подсистемы лидера S_L к S_i . Предположим, что орграф Γ имеет ориентированное остоное дерево.

Рассмотрим подсистему S_i , соответствующую i -й вершине орграфа Γ сети S , динамические процессы в которой описываются следующим уравнением

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_i(t) &= A\chi_i(t) + Bu_i(t-h) + B\phi_i(t), \quad t \geq 0, \\ u_i(s) &= 0, \quad s < 0, \quad i = 1, \dots, N,\end{aligned}\tag{1.50}$$

где $\chi_i(t) \in \mathbb{R}^n$ – измеряемый вектор состояния, $u_i(t) \in \mathbb{R}^m$ – сигнал управления, $\phi_i(t) \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение с ограниченными $r + 3$ производными, $r \geq 0$ – параметр, который будет использоваться при синтезе алгоритма управления. Остальные параметры, как в (1.1).

Зададим подсистему лидера S_L в виде

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_m(t) &= A\chi_m(t) + Br_m(t-h), \\ r_m(s) &= 0, \quad s < 0, \quad i = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{1.51}$$

Требуется разработать алгоритм управления, который обеспечит устой-

чивость (1.50) по вход-состоянию (input-to-state stability) и выполнение условия синхронизации

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\chi_i - \chi_m| \leq \delta, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.52)$$

где $\delta > 0$ – точность синхронизации.

1.7 Сетевые субпредикторы регулируемой величины и возмущения

Введем ошибку синхронизации $x_i = \sum_{j \in N_{jL}} (\chi_i - \chi_m) + (\chi_i - \chi_j)$. С учетом (1.50) и (1.51) продифференцируем x_i и результат запишем как

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & Ax_i(t) + n_{jL}Bu_i(t-h) + \\ & + B \sum_{j \in N_{jL}} (u_j(t-h)) + Bf_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.53)$$

где $f_i(t) = \sum_{j \in N_{jL}} [\phi_i(t) - \phi_j(t)] - r_m(t-h)$, n_{jL} – количество смежных вершин для i .

Зададим закон управления u_i в виде следующей суммы

$$u_i = u_{0i} + u_{1i} + u_{2i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.54)$$

С помощью сигнала u_{0i} будем компенсировать перекрестные связи по сигналам управления, сигнал u_{1i} необходим для обеспечения устойчивости замкнутой системы, а с помощью сигнала u_{2i} осуществим компенсацию возмущения ψ_i . Итак, зададим первую составляющую закона управления в виде

$$u_{0i}(t) = \frac{1}{n_{jL}} \sum_{j \in N_{jL}} u_j(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.55)$$

Для прогноза регулируемой величины введем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{ji}(t) = & A\bar{x}_{ji}(t) + D_j (\bar{x}_{j,i+1}(t) - \bar{x}_{ji}(t - \bar{h})) + \\ & + Bu_{1i}(t - (j - 1)\bar{h}), \quad j = 1, \dots, M - 1, \\ \dot{\bar{x}}_{Mi}(t) = & A\bar{x}_{Mi}(t) + D_M (x_i(t) - \bar{x}_{Mi}(t - \bar{h})) + \\ & + Bu_{1i}(t - (M - 1)\bar{h}), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.56)$$

где $\bar{x}_{ji}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{h} = \frac{h}{M}$. Число M задается разработчиком, а матрицы D_j выбираются из условия обеспечения предельной ограниченности решений следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_j(t) = & A\kappa_j(t) - D_j\kappa_j(t - \bar{h}) + D_{j+1}\kappa_{j+1}(t - \bar{h}), \\ & j = 1, \dots, M - 1, \\ \dot{\kappa}_M(t) = & A\kappa_M(t) - D_M\kappa_M(t - \bar{h}). \end{aligned} \quad (1.57)$$

где $\kappa_j \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, M$.

Введем ошибки прогноза:

$$\begin{aligned} e_{ji}(t) = & \bar{x}_{j+1,i}(t - (M - j)\bar{h}) - \bar{x}_{ji}(t - (M - j + 1)\bar{h}), \\ & j = 1, \dots, M - 1, \\ e_{Mi}(t) = & x_i(t) - \bar{x}_{Mi}(t - \bar{h}), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.58)$$

При $e_{ji}(t) \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, M$, следует, что $\bar{x}_{1i}(t - h) \rightarrow x_i(t)$ или $\bar{x}_{1i}(t) \rightarrow x_i(t + h)$. С учетом (1.54) продифференцируем (1.58) вдоль решений уравнений (1.50) и (1.56):

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{ji}(t) &= Ae_{ji}(t) - D_j e_{ji}(t - \bar{h}) + D_{j+1} e_{j,i+1}(t - \bar{h}), \\
j &= 1, \dots, M - 1, \\
\dot{e}_{Mi}(t) &= Ae_{Mi}(t) - D_M e_{Mi}(t - \bar{h}) + Bu_{2i}(t - h) + Bf_i(t), \\
i &= 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Если положить $u_{2i}(t) \equiv 0$ и $f_i(t) \equiv 0$ и выбрать $D_j, j = 1, \dots, M$, такими, что система (1.57) асимптотически устойчива, то из (1.58) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t+h) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_{1i}(t)$. Следовательно, зададим закон управления u_{1i} в виде

$$u_{1i}(t) = -K\bar{x}_{1i}(t), \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.60}$$

где матрица K задается из условия гурвицевости матрицы $A - BK$.

Однако $f_i \neq 0$ по условию задачи. Поэтому далее синтезируем алгоритм компенсации возмущений u_{2i} с целью уменьшения влияния возмущения f на значение ошибок прогноза $e_{ji}, j = 1, \dots, M$. Введем вспомогательный контур

$$\dot{e}_{ai}(t) = Ae_{ai}(t) - D_M e_{ai}(t - \bar{h}) + Bu_{2i}(t - h), \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.61}$$

где $e_{ai}(t) \in \mathbb{R}^n$. Найдем производную по времени от функции $\xi_i(t) = e_{Mi}(t) - e_{ai}(t)$ вдоль траекторий M -го уравнения в системе (1.59) и уравнения (1.61):

$$\dot{\xi}_i(t) = A\xi_i(t) - D_M \xi_i(t - \bar{h}) + Bf_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.62}$$

Следуя структуре (1.62), зададим оценку возмущения в виде

$$\hat{f}_i(t) = B^+ \left(\hat{\xi}_i(t) - A\xi_i(t) + D_M \xi_i(t - \bar{h}) \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.63)$$

где сигнал $\hat{\xi}_i(t)$ получен с помощью алгоритма

$$\hat{\xi}_{ji}(t) = \frac{p}{\mu p + 1} \xi_{ji}(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.64)$$

Здесь $\mu > 0$ – достаточно малое число, $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Теперь сформируем алгоритм прогноза оценки возмущения $\hat{f}(t)$ в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(t + \hat{h}) &= \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \hat{f}_i(t - \hat{h}(j-1)), \\ \tilde{f}_i(t + l\hat{h}) &= \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \tilde{f}_i(t - \hat{h}(j-l)) + \\ &\quad + \sum_{j=l}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \hat{f}_i(t - \hat{h}(j-l)), \\ l &= 2, \dots, r+1 \\ &\quad (\text{или } l = 2, \dots, N, \text{ если } N < r+2), \\ \tilde{f}_i(t + k\hat{h}) &= \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \tilde{f}_i(t - \hat{h}(j-k)), \\ k &= r+2, \dots, N \\ &\quad (\text{если } N \geq r+2), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.65)$$

При $N < r+2$ субпредиктор возмущения состоит только из первых двух выражений (1.65). При $N \geq r+2$ субпредиктор возмущения включает в себя все уравнения (1.65). Также из (1.65) видно, что время прогноза возмущения составляет $\hat{h}r = \frac{hr}{N}$.

Сформируем закон частичной компенсации возмущения в виде

$$u_{2i}(t) = -\tilde{f}_i(t+h), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.66)$$

Матрицы A_p , D_p и B_p заданы в виде (1.43).

Теорема 1.3 Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (1.50), субпредиктора регулируемой величины (1.56), вспомогательного контура (1.61), субпредиктора возмущения (1.65) и закона управления (1.54), (1.55), (1.60), (1.66). Пусть для заданного числа $\alpha > 0$ и матриц K , D существуют коэффициент $\beta > 0$ и матрицы $P > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $Q > 0$, $S > 0$ такие, что выполнено ЛМН (1.45). Тогда решения замкнутой системы (1.50), (1.54)–(1.56), (1.60), (1.61), (1.65), (1.66) предельно ограничены и выполнено целевое условие (1.52), где $\delta = O(\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\varepsilon_N(h, t)|)$ при достаточно малом μ . Дополнительно: все сигналы ограничены в замкнутой системе.

Доказательство теоремы 1.3 аналогично доказательству теоремы 1.2.

1.8 Примеры

Рассмотрим модель объекта управления (1.1) со следующими параметрами

$$[211, 220]: A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix}, a_1 = -1, a_2 = 10/3, b_1 = 0, 1, \\ b_2 = -1/30 \text{ и } x(0) = [0, 98 \ 0 \ 0, 2 \ 0]^T.$$

В [220] показано, что данная модель может описывать перевернутый маятник на подвижной тележке, где $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$, x_1 – позиция тележки, x_2 – скорость тележки, x_3 – угол маятника относительно вертикальной оси, x_4 – угловая скорость маятника, $a_1 = -m_p g / M_c$, $a_2 = g / l$, $b_1 = 1 / M_c$, $b_2 = -1 / (M_c l)$, $M_c = 10$ – масса тележки, $m_p = 1$ – масса маятника, $l = 3$ – длина маятника и $g = 10$ – ускорение свободного падения. Положим, что $f(t) = 1 + \sin(0,2t) + \cos(t) + \sin(1,5t + \pi/4) + \frac{10}{(5p+1)^2}d(t)$, $d(t)$ – сигнал, моделируемый в Matlab Simulink с помощью блока "Band-Limited White Noise" с мощностью шума (noise power) 0,1 и периодом (sample time) 0,1.

В [211, 220] для стабилизации данного объекта использовался закон управления $u = -Kx$, где $K = [2 \ 12 \ 378 \ 210]$. Далее во всех алгоритмах будем использовать одно и то же значение K . Максимальное значение запаздывания, для которого можно стабилизировать объект в [211] равно $h_{\max} = 0,2$. При этом система управления [211] очень чувствительна к возмущениям.

1) *Синтез алгоритма на базе предикторов.* Выберем $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 & 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2,5 \end{bmatrix}$ в предикторе регулируемой переменной (1.4). В алгоритме оценки производной (1.11) зададим $\mu = 0,01$. ЛМН (1.21) разрешимо при $h_{\max}^{LMI} = 0,38$. Моделирование в Matlab Simulink показало, что система устойчива при $h_{\max}^{MS} = 0,41$, то есть решение ЛМН имеет небольшое отклонение (7,3%) от значения, полученного в Matlab Simulink. Причем, схема управления на базе предиктора позволяет стабилизировать объект

при большем в 2 раза времени запаздывания в канале управления по сравнению с [211].

Теперь сравним качество переходных процессов для предложенной схемы и алгоритмов [122, 179]. Пусть $h = 0,35$. На рис. 1.2 приведены результаты переходных процессов для разработанного алгоритма при $r = 3$ и $r = 4$ в (1.13). На рис. 1.3 изображены графики переходных процессов при использовании алгоритмов [122, 179]. Отметим, что разработанный алгоритм и алгоритмы [122, 179] сохраняют устойчивость при максимальном запаздывании $h = 0,41$.

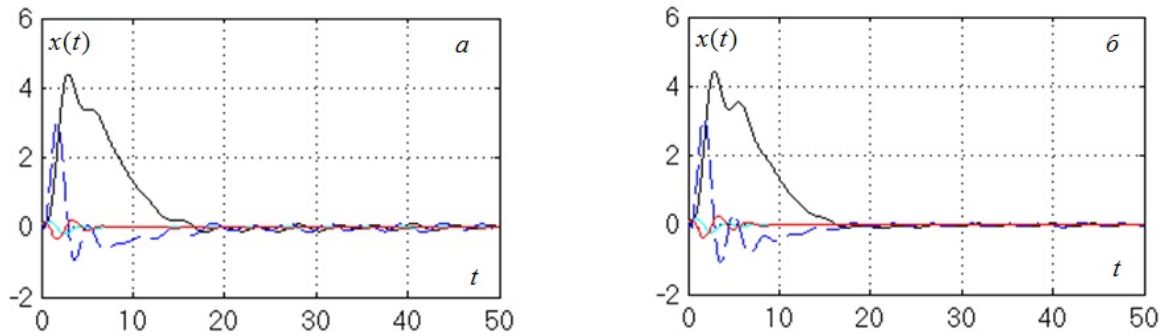


Рисунок 1.2 — Переходные процессы по $x(t)$ при $r = 3$ (а) и $r = 4$ (б).

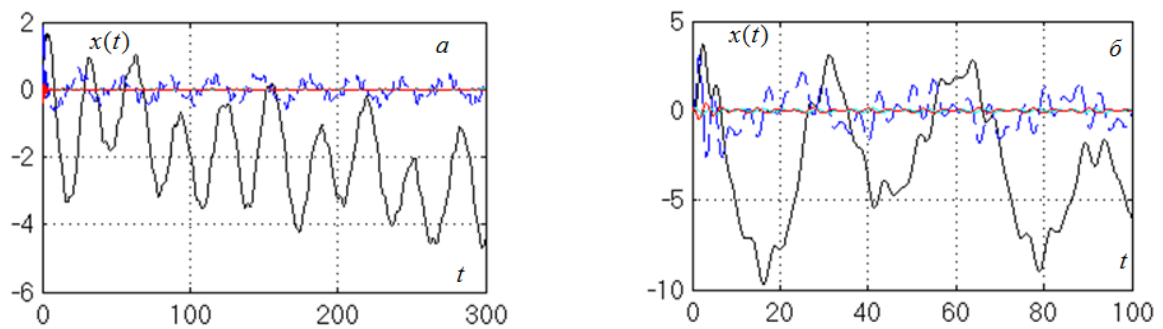


Рисунок 1.3 — Переходные процессы по $x(t)$ при использовании алгоритма [179] (а) и алгоритма [122] (б).

Дополнительный анализ результатов моделирования для алгоритмов [122, 179] показал, что изменение параметров K с целью подавления, а

не компенсации, возмущений ведет к потере устойчивости замкнутой системы. Однако разработанный алгоритм обеспечивает компенсацию возмущений для любых значений K , при которых замкнутая система остается устойчивой, так как контур компенсации возмущений не зависит от контура стабилизации замкнутой системы.

2) *Синтез алгоритма на базе субпредикторов.* Выберем $M = 2$ и $D_1 = D_2 = D$ в (1.26), то есть каждый субпредиктор представляет собой предыдущий предиктор с такими же параметрами, но уменьшенным в два раза временем запаздывания. Пусть $N = 4$ и $r = 4$ в (1.35), т.е. сократим время прогноза возмущения в 4 раза. ЛМН (1.45) разрешимо при $h_{\max}^{LMI} = 0,75$. Моделирование в Matlab Simulink показало, что система устойчива при $h_{\max}^{MS} = 0,8$, т.е. консервативность при использовании ЛМН составляет 6,3%. Таким образом схема управления на базе субпредикторов позволяет стабилизировать объект при большем времени запаздывании в канале управления в 4 раза по сравнению с [211] и в 2 раза по сравнению с разработанным алгоритмом на базе предикторов и алгоритма [179]. Результаты переходных процессов при $h = 0,7$ для разработанного алгоритма на базе субпредикторов и алгоритма [186] приведены на рис. 1.4.

1.9 Заключение по главе 1

- Синтезированы алгоритмы управления линейными объектами с запаздывающим входным сигналом при наличии внешних возмущений. Первый алгоритм основан на использовании предикторов регулируемой величины и возмущения. Второй алгоритм базируется на исполь-

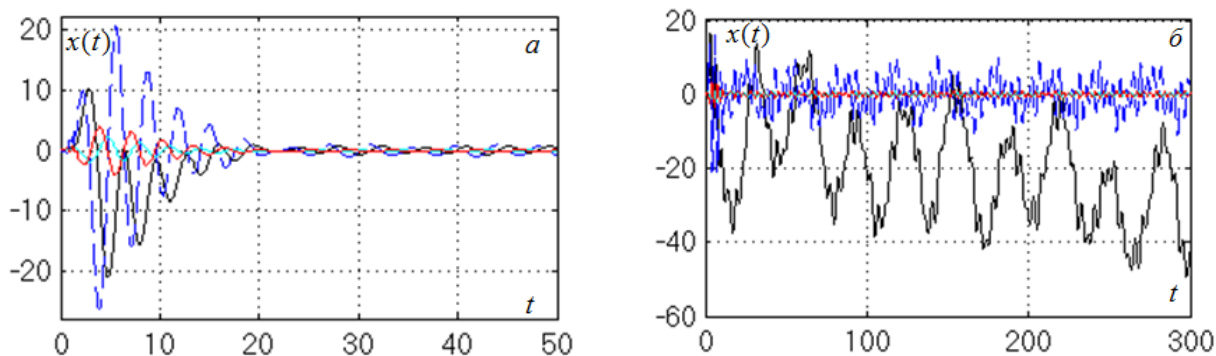


Рисунок 1.4 — Переходные процессы по $x(t)$ при использовании разработанного алгоритма на базе субпредикторов (а) и алгоритма [186] (б).

зовании субпредикторов регулируемой величины и возмущения.

- Показано, что использование принципа компенсации возмущений позволяет существенно уменьшить влияние возмущений на качество переходных процессов по сравнению с методами подавления возмущений [172, 179].
- Получены достаточные условия устойчивости замкнутой системы в виде разрешимости линейных матричных неравенств.
- Полученные результаты обобщены на задачу слежения за эталонным сигналом и задачу синхронизацию сетевых систем с коммуникационным запаздыванием.
- Моделирование разработанных алгоритмов показало эффективность использования разработанных алгоритмов по сравнению со схемами [122, 179, 186, 211].

Глава 2 Управление при возмущениях и помехах в измерениях

Алгоритмы [13, 40, 47, 51, 96, 126, 197, 198] основаны на подходах подавления помех и шума, используя фильтры и обратную связь с высоким коэффициентом усиления. Точность в установившемся режиме, задаваемая этими алгоритмами, в значительной степени зависит от верхних границ возмущений, шумов и их производных. В отличие от [13, 40, 47, 51, 96, 126] существуют методы компенсации помех, позволяющие эффективно подавлять помехи без использования фильтров или обратной связи с высоким коэффициентом усиления и повышать точность в установившемся режиме. Идея метода компенсации возмущений заключается в оценке возмущений в режиме реального времени и использовании этой оценки для построения закона управления. В результате значение управляющего сигнала противоположно значению оценки возмущения. Классические результаты задачи развязки возмущений (ЗРВ) рассмотрены в [33, 34, 166]. В настоящее время предлагается множество решений ЗРВ для различных видов систем (см., например, [126, 170, 171]). В [115] ЗРВ решается с помощью линейно-квадратичной гауссовой оптимизации и H^∞ -оптимизации в предположении, что возмущения случайны или принадлежат классу L_2 . ЗРВ с оптимальной компенсацией произвольных ограниченных возмущений сформулирована в [126], а для некоторых частных случаев эта задача решена в [96]. Полное решение ЗРВ с оптимальной компенсацией возму-

щений получено в [115] с использованием методов l_1 -оптимизации. Однако алгоритмы, основанные на l_1 -оптимизации, имеют высокий динамический порядок и слабую сходимость к точке равновесия. В отличие от [40, 47, 126] качество переходных процессов можно улучшить, если возмущения описывать суммой синусоидальных сигналов, см., например, [13, 40, 126]. Однако сложность расчета и реализации алгоритмов [13, 40, 126] существенно зависит от количества синусоидальных сигналов.

В условиях внешних возмущений и помех измерения построена теория l^1 -оптимального управления в [6], являющаяся минимаксным аналогом стохастической линейно-квадратичной теории синтеза регуляторов для систем с равномерными ограничениям на возмущения. Управление дискретными системами в условиях возмущений рассмотрены в [57]. В работе [7] решена задача синтеза оптимальны регуляторов для случая неминимально-фазовых объектов. В [19] предложен алгоритм адаптивного оптимального управления в условиях возмущений. Связь непрерывных и дискретных моделей, выбор шага дискретизации для аналитического конструирования оптимального регулятора рассмотрена в [20, 165]. Задача оптимизации переходных процессов на конечном интервале времени рассмотрена в [19].

Таким образом, алгоритмы компенсации помех [13, 40, 47, 51, 96, 126] обеспечивают лучшую точность в установившемся режиме, чем алгоритмы подавления помех [13, 40, 47, 51, 96, 126] без шумов. Однако эти алгоритмы компенсации помех не могут быть непосредственно применены к системам, в которых присутствуют возмущения.

В отличие от [13, 40, 47, 51, 96, 126], в [132] используется метод компенсации помех и возмущений. В отличие от [47] в [132] возмущения и

шумы другие, а матрицы модели объекта имеют более общую структуру. Кроме того, в отличие от [13, 51], в [132] возмущения и шумы могут быть несинусоидальными и в отличие от [40] в [132] шумы могут иметь произвольный частотный спектр. Кроме того, в отличие от [13, 40, 47, 51, 96, 126] в [132] точность в установившемся режиме зависит от первой производной возмущений и только одной составляющей вектора шумов. Таким образом, алгоритм [132] эффективен при помехах и возмущениях большой величины.

Несмотря на отмеченные выше преимущества алгоритмов [132], они доступны только для линейных систем с согласованными возмущениями. Однако существует множество технических и физических систем, описываемых нелинейными уравнениями с несогласованными возмущениями. Таким образом, настоящая глава в основном направлена на решение следующих двух основных задач:

- (i) разработать алгоритм обратной связи по выходу для неопределенных нелинейных систем в условиях несогласованных возмущений и шумов измерений;
- (ii) получить условия, обеспечивающие сходимость решений замкнутой системы и минимизирующие окончательную оценку.

В данном разделе используются следующие *обозначения*: A^+ — левая псевдообратная матрица к A ; $E_r = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ — вектор соответствующей размерности, где r -я компонента равна 1 и другие компоненты равны 0; $\tilde{E} = [E_1, \dots, E_{r-1}, E_{r+1}, \dots, E_m]$; $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ обозначают евклидо-

ву норму вектора и матрицы соответственно; $p = \frac{d}{dt}$, $\dot{w} = \frac{dw}{dt}$, $w'_t = \frac{\partial w}{\partial t}$ и $w'_x = \frac{\partial w}{\partial x}$.

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим модель объекта в виде

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(t, u, x), \quad (2.1)$$

$$y(t) = Lx(t),$$

$$z(t) = y(t) + \xi(t), \quad (2.2)$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u = u(t) \in \mathbb{R}^l$ – управляющий сигнал, $y = y(t) \in \mathbb{R}^m$ – неизмеренный выходной сигнал ($m \geq 2$), сигнал $z = z(t) \in \mathbb{R}^m$ доступен для измерения, $\xi = \xi(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)]^T$ – ограниченный шум с ограниченным $\dot{\xi}_r$, $r \in \{1, 2, \dots, m\}$. Обозначим $\chi_1 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |\xi_r(t)|$ и $\chi_2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |\dot{\xi}_r(t)|$. Неизвестная функция $f = f(x, u, t) \in \mathbb{R}^g$ включает в себя неизвестную нелинейность $\psi(x, t)$, управление $u(t)$ с неизвестным параметром и внешнее возмущение $\varphi(t)$ в виде $f = \psi(x, t) + c_0 Gu(t) + \varphi(t)$, где $|\psi| \leq \alpha_1 |x|$, $\|\psi'_x\| \leq \alpha_2$, $|\psi'_t| \leq \alpha_3 |x|$, $\chi_3 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |\varphi|$ и $\chi_4 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |\dot{\varphi}|$. Коэффициент c_0 неизвестен, но $c_0 \in [c_{\min}, c_{\max}]$, где $c_{\min}$ и $c_{\max}$ известны. Матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times g}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{g \times l}$ известны, а A гурвицева.

Необходимо разработать алгоритм, обеспечивающий устойчивость от входа к состоянию (5.1) с выполнением оценки

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |y(t)| \leq \delta, \quad (2.3)$$

где $\delta = \Theta(\sum_{i=1}^4 \chi_i)$ будет получена в теореме 5.1 ниже, $\Theta(\chi)$ для $\chi \in \mathbb{R}$ означает, что $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\Theta(\chi)}{\chi} = C$, C – константа. Таким образом, точность в установившемся режиме зависит только от возмущения ϕ , r -й компоненты вектора шума и его первых производных. В [13, 40, 47, 51, 96, 126] точность δ зависит от возмущения ϕ , всех компонент вектора помехи и его производных.

Кратко рассмотрим основные этапы проектирования схемы управления. Уравнения объекта (5.1), (2.2) содержат два независимых неизвестных сигнала f и ξ . Поэтому для одновременной компенсации f и ξ требуется не менее двух независимых измерений выхода объекта, следовательно, $m \geq 2$. Таким образом, разработка алгоритма состоит из двух шагов. На первом шаге новый вектор помехи без r -й компоненты $\tilde{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \xi_{r+1}, \dots, \xi_m]^T$ оценивается в разделе 5.6. С этой целью разработан алгоритм оценивания $\tilde{\xi}$ (Алгоритм оценки $\tilde{\xi}$ на рис. 2.1). В результате на точность оценки помехи влияет только компонента ξ_r , а не весь вектор ξ . На втором шаге с использованием информации о $\hat{\xi}$ неизвестная функция f оценивается и компенсируется с помощью закона управления (см. Компенсатор возмущения рис. 2.1).

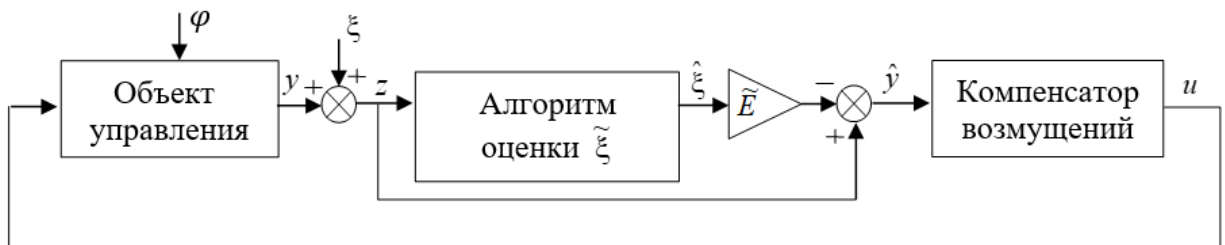


Рисунок 2.1 — Структура схемы управления.

2.2 Алгоритм оценки помехи

В настоящем разделе представлен алгоритм оценивания вектора $\tilde{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \xi_{r+1}, \dots, \xi_m]^T$. Сначала получим уравнение с переменной $\tilde{\xi}$, а затем построим оценку $\tilde{\xi}$.

Исключим r -е уравнение в (2.2) и перепишем результат относительно $\tilde{\xi}$. Для этого предварительно умножив (2.2) на $\tilde{E}^T$, получим

$$\tilde{\xi} = \tilde{E}^T z - \tilde{E}^T L x. \quad (2.4)$$

Из (2.2) следует, что переменные x и ξ связаны, и x содержится в (5.12). Однако переменная x не может быть выражена через ξ из (2.2). Следовательно, согласно структурам (5.1), (2.2) и с учетом $\xi = \tilde{E}\tilde{\xi} + E_r\xi_r$, введем новую переменную $\tilde{x} = L^+[z - \tilde{E}\tilde{\xi} - E_r\xi_r]$. Учитывая (2.2) и (5.12), имеем $x - \tilde{x} = \tilde{E}^T L A (I - L^+ L) x$. Интегрируя (5.1) по t и подставляя результаты в (5.12), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} = & \int_0^t [\tilde{A}\tilde{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s)] ds + \tilde{E}^T z - \tilde{E}^T L x(0) \\ & - \int_0^t [\tilde{B}u(s) + \tilde{D}f(s) - \tilde{A}_2 \xi_r(s) + \tilde{A}_3 x(s)] ds, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\tilde{A} = \tilde{E}^T L A L^+ \tilde{E}$, $\tilde{A}_1 = \tilde{E}^T L A L^+$, $\tilde{A}_2 = \tilde{E}^T L A L^+ E_r$, $\tilde{A}_3 = \tilde{E}^T L A (I - L^+ L)$, $\tilde{B} = \tilde{E}^T L B$, $\tilde{D} = \tilde{E}^T L D$.

Соотношение (2.5) не может быть применено для получения информации о $\tilde{\xi}$, так как (2.5) содержит сигналы не доступные измерению. Воспользовавшись соотношением (2.5), рассмотрим алгоритм оценки помехи $\tilde{\xi}$ (Алгоритм оценки $\tilde{\xi}$ на рис. 2.1) в виде

$$\hat{\xi} = \int_0^t [\tilde{A}\hat{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s)] ds + \tilde{E}^T z. \quad (2.6)$$

Здесь $\hat{\xi}$ – оценка $\tilde{\xi}$. Чтобы оценить точность оценки помехи (2.6), рассмотрим следующую ошибку

$$e = \tilde{\xi} - \hat{\xi}. \quad (2.7)$$

Продифференцируем (2.7) вдоль траекторий (2.5), (2.6) и перепишем результат в виде

$$\dot{e} = \tilde{A}e - \tilde{B}u - \tilde{D}f + \tilde{A}_2 \xi_r - \tilde{A}_3 x. \quad (2.8)$$

Величина $|e|$ зависит от значений u и f . Таким образом, особый выбор управления u позволяет уменьшить влияние f на значение $|e|$. Поэтому следующий раздел посвящен построению закона управления u , компенсирующего влияние f .

2.3 Синтез закона управления

Теперь получим информацию о неизвестной функции f и используем данную информацию для построения закона управления u . Сначала уточним информацию о выходном сигнале y , используя сигнал $\hat{\xi}$, заданный (2.6). Пусть $\hat{y}$ — оценка y , представленная как (см. рис. 2.1)

$$\hat{y} = z - \tilde{E}\hat{\xi}. \quad (2.9)$$

Для вывода закона управления необходимо следующее предположение.

Предположение 1. Матрицы B , D и L в (5.1) удовлетворяют следующим условиям $D = FR$, $(LF)^+(LF) = I$, $(LF)^+(LB) = kI$, где $F \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $R \in \mathbb{R}^{l \times g}$, $k \in \mathbb{R}$ и $c_{\min} + k > 0$.

В соответствии с (2.2), (2.7) и $\xi = \tilde{E}\tilde{\xi} + E_r\xi_r$ перепишите (??) в виде $\hat{y} = Lx + \tilde{E}e + E_r\xi_r$. Принимая во внимание (5.1) и предположение 1, продифференцируем $\hat{y}$ по t и перепишем результат как

$$LFRf = \dot{\hat{y}} - LAx - LBu - \tilde{E}\dot{e} - E_r\dot{\xi}_r. \quad (2.10)$$

Рассмотрим метод [132] для построения закона управления. Из (5.1) следует, что неизвестная функция f может быть скомпенсирована, если выбрать закон управления так, что $Bu + Df = 0$. Предварительно умножая $Bu + Df = 0$ на $(LF)^+L$ и учитывая предположение 1, получаем $u = -\frac{1}{k}Rf$. Однако нельзя использовать сигнал f из (2.10), поскольку он зависит от неизмеренных сигналов x , $\dot{e}$ и $\dot{\xi}_r$. Поэтому определим закон управления u следующим образом

$$u = -\frac{1}{k}R\hat{f}, \quad (2.11)$$

где $\hat{f}$ – оценка f . В соответствии со структурой (2.10) и вторым уравнением (5.1) определим сигнал $\hat{f}$ в виде

$$R\hat{f} = (LF)^+ (\dot{\hat{y}} - LAL^+\hat{y} - \alpha(p)LBu). \quad (2.12)$$

Здесь $\alpha(p)$ – скалярный дифференциальный оператор и $p = d/dt$. Поясним выбор оператора $\alpha(p)$. Подставляя (2.12) в (2.11), имеем

$$[1 - \alpha(p)]u = -\frac{1}{k}(LF)^+[\dot{\hat{y}} - LAL^+\hat{y}]. \quad (2.13)$$

Если $\alpha(p) = 1$, то построение закона управления невозможно, так как сигнал u сокращается в (2.13). Если $\alpha(p) = \text{const} \neq 1$, то для реализации $\dot{\hat{y}}$ требуется наблюдатель. Если $\deg \alpha(p) \geq 1$, то наблюдатель не требуется, но динамический порядок алгоритма (2.13) избыточен для $\deg \alpha(p) \geq 2$. Таким образом, если $\deg \alpha(p) = 1$, то наблюдатели не требуются и динамический порядок алгоритма (2.13) не является избыточным. Теперь определим структуру оператора первого порядка $\alpha(p)$. Учитывая (2.10) и (2.12), рассмотрим разность $R(f - \hat{f}) = (LF)^+ \left[LA(L^+\hat{y} - x) + (\alpha(p) - 1)u - \tilde{E}\dot{e} - E_r\dot{\xi}_r \right]$. Для простоты выберите $\alpha(p) = 1 - \mu p$, где $\mu > 0$ — расчетный параметр. Если $\mu \rightarrow 0$, то $\alpha(p) \rightarrow 1$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |f(t) - \hat{f}(t)|$ зависит только от качества оценки (2.6).

В итоге, учитывая $\alpha(p) = 1 - \mu p$ и (2.13), введем закон управления в виде

$$u = -\frac{1}{\mu k}(LF)^+[\hat{y} - LAL^+ \int_0^t \hat{y}(s)ds]. \quad (2.14)$$

В [13, 40, 47, 51, 96, 126] количество рассчитываемых параметров равно размерности выходной переменной z . Полученный закон управления (2.14) имеет всего один параметр μ , что упрощает реализацию алгоритма. В следующем разделе получим уравнение замкнутой системы и сформулируем основные результаты раздела.

2.4 Основной результат

Разделим вывод замкнутой системы на три этапа. На первом шаге получим уравнение относительно переменной x с учетом (5.1), (2.7), (2.9), (2.10), (2.11). На втором шаге получим уравнение относительно переменной e с учетом (5.1), (2.7), (2.9), (2.10), (ссылка eq19). На третьем шаге выведем уравнение замкнутой системы с использованием уравнений по переменным x и e . Затем сформулируем основные результаты.

2.4.1 Шаг 1. Уравнение по переменной x

Предположение 2. Пусть выполнено соотношение $RG = I$.

Принимая во внимание (5.1), (2.10) и (2.12), перепишем (2.11) как

$$\begin{aligned} ku = & \underbrace{-R\psi - c_0u - R\varphi}_{-Rf} + (LF)^+ \underbrace{[L\dot{x} - LAx - LBu]}_{(LF)Rf} \\ & + (LF)^+ [-L\dot{x} - \tilde{E}\dot{e} - E_r\dot{\xi}_r + LAL^+Lx \\ & + LAL^+\tilde{E}e + LAL^+E_r\xi_r + (1 - \mu p)LBu], \end{aligned}$$

где последнее слагаемое равно $-R\hat{f}$, или в форме

$$\begin{aligned} [c_0 + k + \mu kp]u = & -R(\psi + \varphi) - (LF)^+ [\tilde{E}\dot{e} + E_r\dot{\xi}_r \\ & + LA(I - L^+L)x - LAL^+\tilde{E}e - LAL^+E_r\xi_r]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Умножив слева Rf на $[c_0 + k + \mu kp]$ и учитывая (2.15), перепишем результат следующим образом

$$\begin{aligned}
[c_0 + k + \mu kp]Rf &= k\mu R\dot{\psi} + k\mu R\dot{\varphi} + kR\psi + kR\varphi \\
&+ c_0(LF)^+[-\tilde{E}\dot{e} - E_r\dot{\xi}_r - LA(I - L^+L)x \\
&+ LAL^+\tilde{E}e + LAL^+E_r\xi_r].
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Предварительно умножив Rf на $[c_0 + k + \mu kp]$ и учитывая (2.15), перепишем результат следующим образом

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= A_{21}x + A_{22}\dot{x} + A_{23}e + A_{24}\dot{e} \\
&+ B_{21}\psi + D\dot{\psi} + B_{21}\varphi + D\dot{\varphi} + B_{23}\xi_r + B_{24}\dot{\xi}_r.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Здесь

$$w = c_0 + k, \quad W = (B + c_0F)(LF)^+,$$

$$A_{21} = \frac{1}{k\mu}[wA - WLA(I - L^+L)],$$

$$A_{22} = \frac{1}{k\mu}[-wI + k\mu A],$$

$$A_{23} = \frac{1}{k\mu}WLAL^+\tilde{E}, \tag{2.18}$$

$$A_{24} = -\frac{1}{k\mu}W\tilde{E},$$

$$B_{21} = \frac{1}{k\mu}(kF - B)R,$$

$$B_{23} = \frac{1}{k\mu}WLAL^+E_r,$$

$$B_{24} = -\frac{1}{k\mu}WE_r.$$

2.4.2 Шаг 2. Уравнение по переменной e

Умножив слева (2.8) на $[c_0 + k + \mu kp]$ и учитывая (2.15) и (2.16), перепишем (2.8) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{e} = & A_{41}x - \tilde{A}_3\dot{x} + A_{43}e + A_{44}\dot{e} \\ & + B_{41}\psi - \tilde{D}\dot{\psi} + B_{41}\varphi - \tilde{D}\dot{\varphi} + B_{43}\xi_r + B_{44}\dot{\xi}_r. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{W} = & (\tilde{B} + c_0\tilde{E}^T L F)(L F)^+, \\ A_{41} = & \frac{1}{k\mu}(\tilde{W} - w\tilde{E}^T) L A (I - L^+ L), \\ A_{43} = & \frac{1}{k\mu}[w\tilde{A} - \tilde{W} L A L^+ \tilde{E}], \\ A_{44} = & \frac{1}{k\mu}[-wI + k\mu\tilde{A} + \tilde{W}\tilde{E}], \\ B_{41} = & \frac{1}{k\mu}(\tilde{B} - k\mu\tilde{E}^T L F) R, \\ B_{43} = & \frac{1}{k\mu}[w\tilde{A}_2 - \tilde{W} L A L^+ E_r], \\ B_{44} = & \frac{1}{k\mu}[\tilde{W} E_r + k\mu\tilde{A}_2]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.4.3 Шаг 3. Уравнение замкнутой системы

Объединим уравнения (2.17) и (2.19). Для этого введем матрицы

$$\begin{aligned}
A_e &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & 0 & I \\ A_{41} & -\tilde{A}_3 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}, \\
B_e &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & D & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & -\tilde{D} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix}, \\
G_e &= \begin{bmatrix} 0 \\ B_{21} \\ 0 \\ B_{41} \end{bmatrix}, \\
F_e &= \begin{bmatrix} 0 \\ D \\ 0 \\ -\tilde{D} \end{bmatrix}, \\
C_1 &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
C_2 &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\tilde{\Psi}_1 = \alpha_1^2 C_1^T C_1, \quad \tilde{\Psi}_2 = 2\alpha_2^2 C_2^T C_2 + 2\alpha_3^2 C_1^T C_1,$$

$$\Psi_{11} = A_e^T P + P A_e + 2\beta P + \tau_1 \tilde{\Psi}_1 + \tau_2 \tilde{\Psi}_2.$$

Приняв $x_e = \text{col}\{x, \dot{x}, e, \dot{e}\}$ и $d = \text{col}\{\varphi, \dot{\varphi}, \xi_r, \dot{\xi}_r\}$, объединим системы (2.17) и (2.19) в виде

$$\dot{x}_e = A_e x_e + G_e \psi + F_e \dot{\psi} + B_e d. \tag{2.22}$$

Теорема 2.1 Пусть выполняются предположения 1 и 2. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из объекта (5.1), (2.2), алгоритма оценки помехи (2.6) и закона управления (2.14), (2.9). Пусть для заданных коэффициентов $\beta > 0$ и $\mu > 0$ существуют $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\rho > 0$ и матрица $P > 0$, удовлетворяющие следующей оптимизационной задаче:

maximize γ

subject to

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & PG_e & PF_e & PB_e \\ * & -\tau_1 I & 0 & 0 \\ * & * & -\tau_2 I & 0 \\ * & * & * & -\rho I \end{bmatrix} < 0, P - \gamma I > 0. \quad (2.23)$$

Тогда решения замкнутой системы предельно ограничены и (2.3) с точностью

$$\delta = \|L\| \sqrt{\frac{\rho \sum_{i=1}^4 \chi_i^2}{2\beta\gamma}}. \quad (2.24)$$

Доказательство. Для анализа устойчивости от входа к состоянию (2.22) рассмотрим следующую функцию Ляпунова

$$V = x_e^T P x_e. \quad (2.25)$$

Найдем условие, при котором выполняется следующее неравенство

$$\dot{V} + 2\beta V - \rho d^T d \leq 0. \quad (2.26)$$

С этой целью, используя (2.22) и (2.25), перепишите (2.26) следующим образом

$$\begin{aligned}
& x_e^T (A_e^T P + P A_e) x_e + 2x_e^T P G_e \psi + 2x_e^T P F_e \dot{\psi} \\
& + 2x_e^T P B_e d + 2\beta x_e^T P x_e - \rho d^T d \leq 0.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Используя отношения $x = C_1 x_e$ и $|\psi| \leq \alpha_1 |x|$, рассмотрим следующую верхнюю оценку

$$\psi^T \psi \leq \alpha_1^2 x_e^T C_1^T C_1 x_e. \tag{2.28}$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^T \dot{\psi} &= (\psi'_x \dot{x} + \psi'_t)^T (\psi'_x \dot{x} + \psi'_t) \\
&= \dot{x}^T \psi'_x{}^T \psi'_x \dot{x} + \dot{x}^T \psi'_x{}^T \psi'_t + \psi'_t{}^T \psi'_x \dot{x} + \psi'_t{}^T \psi'_t.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Так как $\|\psi'_x\| \leq \alpha_2$ and $|\psi'_t| \leq \alpha_3 |x|$, то оценим второй и третий члены в (2.29) как $\dot{x}^T \psi'_x{}^T \psi'_t + \psi'_t{}^T \psi'_x \dot{x} \leq \dot{x}^T \psi'_x{}^T \psi'_x \dot{x} + \psi'_t{}^T \psi'_t \leq \alpha_2^2 \dot{x}^T \dot{x} + \alpha_3^2 x^T x$. Принимая во внимание $x = C_1 x_e$ и $\dot{x} = C_2 x_e$, найдите верхнюю границу (2.29) как

$$\dot{\psi}^T \dot{\psi} \leq 2\alpha_2^2 x_e^T C_2^T C_2 x_e + 2\alpha_3^2 x_e^T C_1^T C_1 x_e. \tag{2.30}$$

Обозначим $z = \text{col}\{x_e, \psi, \dot{\psi}, d\}$ и перепишем (2.27), (2.28) и (2.30) в виде

$$z^T \begin{bmatrix} A_e^T P + P A_e + 2\beta P & P G_e & P F_e & P B_e \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & -\rho I \end{bmatrix} z \leq 0,$$

$$\tau_1 z^T \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} z \geq 0, \quad (2.31)$$

$$\tau_2 z^T \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} z \geq 0.$$

Согласно S-процедуре, неравенства (2.31) одновременно выполнены, если выполнено ЛМН (2.23). С другой стороны, из (2.25) и (2.26) следует, что $\limsup_{t \rightarrow \infty} (x_e^T x_e) \leq \frac{\rho \sum_{i=1}^4 \chi_i^2}{2\beta \lambda_{\min}(P)}$. Оценка δ по формуле (2.24) выводится из очевидного соотношения $y^T y = x^T L^T L x \leq \|L\|^2 x_e^T x_e$.

Теперь докажем ограниченность всех сигналов в замкнутой системе. Поскольку x_e предельно ограничен, то сигналы x , $\dot{x}$, e и $\dot{e}$ предельно ограничены. Предельная ограниченность z следует из (2.2). Сигнал $\hat{\xi}$ ограничен из (2.7). Сигнал $\hat{y}$ ограничен из (2.9). Из (2.15) и условия $c_{\min} + k > 0$ (см. предположение 1) следует ограниченность сигнала u . Ограниченность $\int_0^t \hat{y}(s) ds$ следует из (2.14). Таким образом, функция $\int_0^t [\tilde{A}\hat{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s)] ds$

ограничена из (2.6). Следовательно, в замкнутой системе все сигналы ограничены.

В теореме 5.1 ЛМН (2.23) зависит от неизвестного параметра c_0 , который принадлежит известному множеству $[c_{\min}, c_{\max}]$. Поэтому мы формулируем следующий результат для проверки (2.23).

Теорема 2.2 ЛМН (2.23) выполнены, если следующие два ЛМН выполнены

$$\Psi^- < 0 \quad \text{и} \quad \Psi^+ < 0, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Psi^- &= \Psi|_{A_e=A_e^-, B_e=B_e^-}, \quad \Psi^+ = \Psi|_{A_e=A_e^+, B_e=B_e^+}, \\ A_e^- &= A_e|_{c_0=c_{\min}}, \quad A_e^+ = A_e|_{c_0=c_{\max}}, \quad B_e^- = B_e|_{c_0=c_{\min}}, \\ B_e^+ &= B_e|_{c_0=c_{\max}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Матрица Ψ аффинна относительно матрицы системы (2.22). Из (2.18), (2.20) и (2.21) следует, что матрицы A_e и B_e линейно зависят от параметра c_0 . Таким образом, согласно замечанию 2 в [?], ЛМН (2.23) выполнены, если выполнены два ЛМН (2.32).

Замечание 2.1 Задача расчета коэффициента μ аналогична классической невыпуклой задаче расчета статической обратной связи по выходу. Чтобы найти μ , можно использовать итеративную процедуру. В нашем случае алгоритм оптимизации представлен следующими шагами.

Шаг 1. Выбираем произвольное $\mu = \mu^0$ такое, что первое ЛМН в (2.23) выполнено. Также выберем произвольное малое число $\epsilon > 0$ и установим $j = 0$.

Шаг 2. Учитывая (2.23), максимизируем γ с $\mu = \mu^j$ и получим (для этого μ) решения P^, γ^* . Установим $P^j = P^*$.*

Шаг 3. Используя (2.23), максимизируем γ с $P = P^j$ и получим (для заданного P) решение μ^ . Положим $\mu^{j+1} = \mu^*$ и $\gamma_j = \gamma^*$.*

Шаг 4. Если $j \geq 1$ и $|\gamma_j^{-1} - \gamma_{j-1}^{-1}| \leq \epsilon$, то установим $\mu = \mu^j, \gamma = \gamma_j$ и остановим алгоритм. В противном случае увеличиваем j на 1 и переходим к шагу 2.

З а м е ч а н и е 2.2 Из (2.8) следует, что ошибка e зависит только от одной компоненты ξ_r вектора шума ξ . Предположим, что мы априори знаем, что вектор ξ имеет две компоненты ξ_i и ξ_j такие, что $\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |\xi_i(t)| < \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |\xi_j(t)|$. Задав $r = i$, величина $\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |e(t)|$ будет уменьшена. Также, если мы знаем наименьшую компоненту вектора ξ , рекомендуется выбрать ее в качестве r -й компоненты.

З а м е ч а н и е 2.3 Рассмотрим систему (5.1), (2.2) с $z \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$ и невырожденной матрицей $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Пусть нельзя выделить наименьшей компоненты вектора ξ . Преобразуем систему (5.1), (2.2) к виду

$$\dot{x}^* = A^*x^* + B^*u + D^*f(x^*, u, t), \quad z^* = x^* + \xi^*, \quad (2.33)$$

где

$$\begin{aligned} A^* &= KAK^{-1}, B^* = KB, D^* = KD, N = KL^{-1}, \\ x^* &= Kx, z^* = Nz, \xi^* = N\xi, \end{aligned} \quad (2.34)$$

K – невырожденная матрица. Предположим, что существует такая K , что $\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |\xi_r^(t)| < \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |\xi_i^*(t)|, i, r = 1, \dots, n, r \neq i$ Следовательно, значение δ в (2.3) можно уменьшить, используя алгоритм оценки помехи*

(2.5) и закон управления (2.14), (2.9), переписанные в новых координатах следующим образом

$$\hat{\xi}^* = \int_0^t [\tilde{A}^* \hat{\xi}^*(s) - \tilde{A}_1^* z^*(s)] ds + \tilde{E}^T z^*,$$

$$\hat{x}^* = z^* - \tilde{E} \hat{\xi}^*, \quad (2.35)$$

$$u = -\frac{1}{\mu k^*} (F^*)^+ [\hat{x}^* - A^* \int_0^t \hat{x}^*(s) ds],$$

где $\tilde{A}^* = \tilde{E}^T A^* \tilde{E}$, $\tilde{A}_1^* = \tilde{E}^T A^*$, $D^* = F^* R^*$, $(F^*)^+ B^* = k^*$.

2.5 Примеры моделирования

Пример 1. Рассмотрим объект (5.1), (2.2). Известны следующие параметры:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 1.9 & 3.4 & 1.9 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 1 & -1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_{\min} = -0.1, \quad c_{\max} = 25, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 10\sqrt{3} \text{ и } \alpha_3 = 0.2\sqrt{3}.$$

Другие неизвестные параметры и функции в (5.1), (2.2) определены ниже.

Выберем параметры в алгоритме (2.6), (2.9), (2.14). Используя $r = 2$ и $L^+ = L^T$, получаем $\tilde{A} = -1$, $\tilde{A}_1 = [-1 \ 1]$, $(LF)^+ = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $LAL^+ =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } k = 2.$$

Проверим условия теоремы 5.2 с помощью пакета Yalmip. ЛМН, заданные в (2.32), выполнены для $\mu \in [10^{-6}, 0,09]$ в (2.14). Моделирование в Matlab Simulink для

$$\psi = 5 \sin(t) \begin{bmatrix} x_1 + \sin(x_3) \\ x_2 + \sin(x_1) \\ x_3 + \sin(x_2) \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5 \sin(0.7t) \\ 0.7 + 0.8 \cos(0.3t) \\ -1 + \sin(1.1t + \frac{\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

показали, что решения (5.1) ограничены при $\mu \in (0, 0,3]$.

Учитывая алгоритм оптимизации из замечания 2.1 с $\mu^0 = 0,05$, коэффициент $\mu^* = 0,01$ получается для $\epsilon = 10^{-3}$ на 8-й итерации ($j = 8$).

Сравним предложенные результаты с алгоритмами из [132] и [47]. Пусть $\mu = 0,01$ в (2.14). Робастный алгоритм [132] представлен в виде

$$u = -100v,$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1^1 + 2v_1^2 + v_1^3 \\ v_2^1 + 2v_2^2 + v_2^3 \end{bmatrix},$$

$$v_i^1 = z_i, \quad v_i^2 = \frac{z_i - z_i(t-0.01)}{0.01}, \quad v_i^3 = \frac{v_i^2 - v_i^2(t-0.01)}{0.01}, \quad i = 1, 2.$$

Алгоритм [47] задается как

$$u = -J\hat{z},$$

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + Bu + S(\hat{z} - z),$$

где матрицы $J = \begin{bmatrix} 0,09 & 0,62 & 1,13 \\ 1,12 & 0,11 & 1,26 \end{bmatrix}$ и $S = - \begin{bmatrix} 0,27 & 0,66 & 0,28 \\ 0,69 & 2,53 & 2,99 \\ 0,24 & 2,95 & 6,27 \end{bmatrix}$ вычис-

ляются так, что эллипсоид $x^T P x = 1$, $P > 0$ имеет наименьшие квадраты суммы полуосей.

Рассмотрим объект (5.1), (2.2) с $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$, $c_0 = 0$, $\xi_1 = 1 + 10 \sin(3t)$, $\xi_2 = 0,01 \sin(0,8t)$, ψ и φ задаются в (2.36). На рис. 2.2 и рис. 2.3 показаны переходные процессы по $y = [y_1 \ y_2]^T$, полученные для алгоритмов [47], [132].

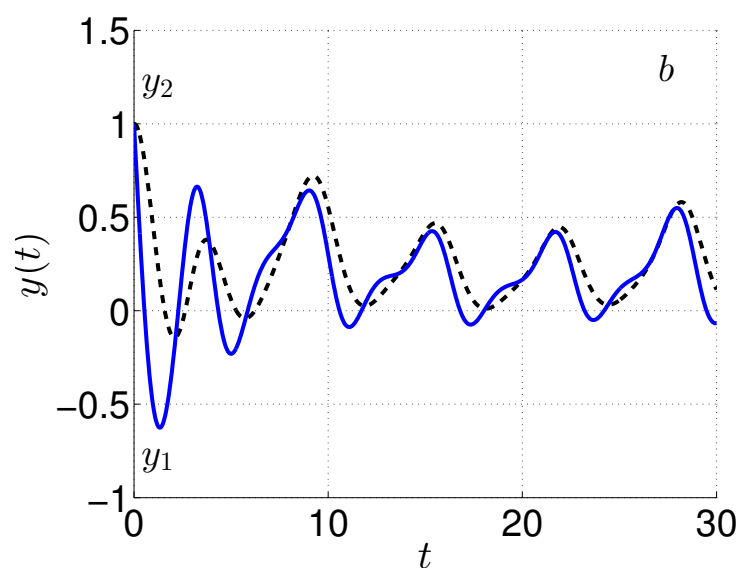
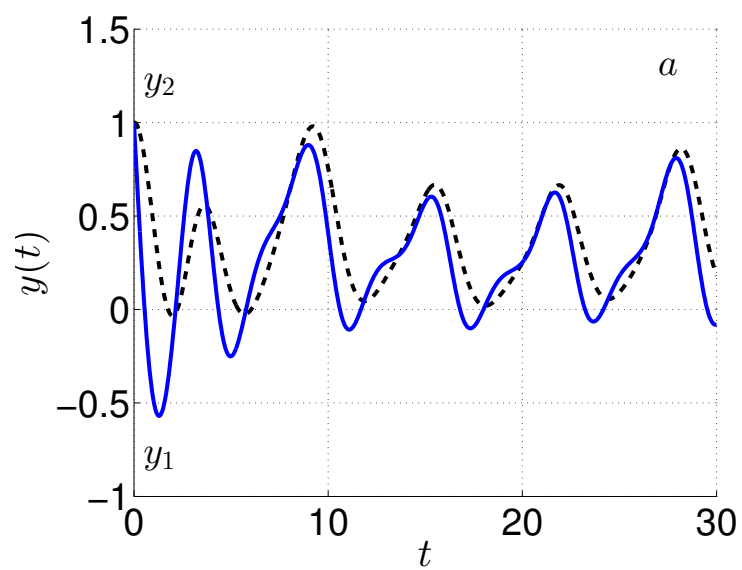


Рисунок 2.2 — Переходные процессы по $y(t)$ для алгоритмов из [132] (a) и [47] (b).

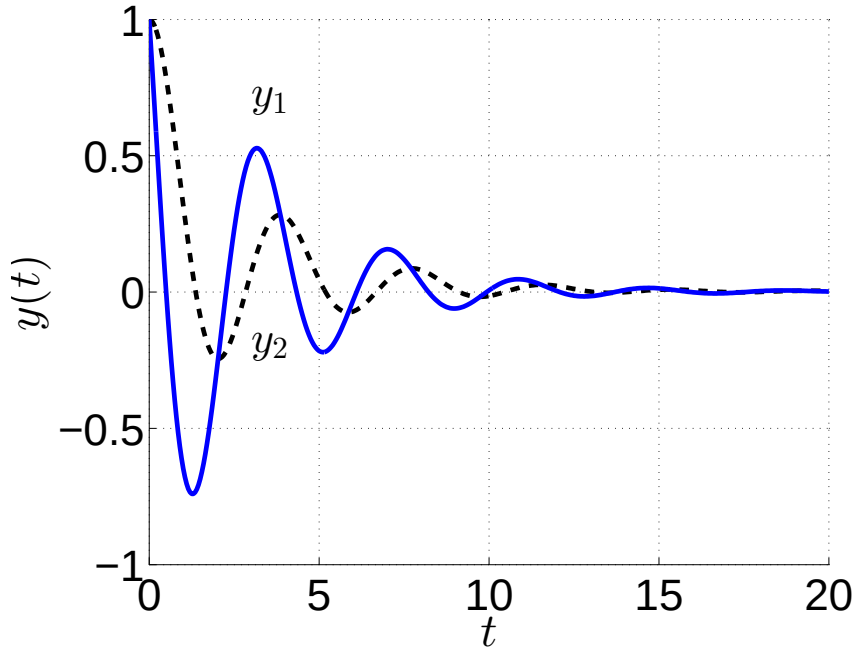


Рисунок 2.3 — Переходные процессы по $y(t)$ для предложенного алгоритма.

Переходные процессы, полученные для алгоритмов [47] и [132], зависят от сигналов ξ_1 , ξ_2 , а переходные процессы, полученные для предложенного алгоритма, зависят только от сигнала ξ_2 . Кроме того, моделирование показало, что верхняя граница μ , полученная с помощью (2.32), имеет допустимое отклонение от верхней границы μ , полученной с помощью Matlab Simulink.

Пример 2. Рассмотрим маятник, модель которого описывается следующим уравнением

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{k}{l} \dot{\theta} + \frac{k_u}{Ml^2} u + \frac{1}{Ml^2} f, \quad (2.37)$$

где θ – угол отклонения ($\theta = 0$ в нижнем положении), u – управляющий момент, f – возмущение, связанное с управляющим моментом, $g = 9,8$ – ускорение свободного падения, $M = 1$ и $l = 1$ – известные масса

и длина маятника соответственно, $k = 0.5$ – неизвестный коэффициент трения, $k_u = 1 + c_0$ – неизвестный коэффициент усиления управления, $c_0 \in [-0, 9; -0, 3]$. Пусть для измерения доступен сигнал $h = [\theta \dot{\theta}]^T + \xi$.

Рассмотрим возмущение $f = 1 + 0,1d_1$ и шумы $\xi_1 = -0,9 \sin(1,7t) + 0,003 \sin(10t) - 0,9d_2 + 0,03d_3$, $\xi_2 = 1,5 \sin(1,7t) + 1,5d_3$ (см. рис. ??, а). Сигналы d_1 , d_2 и d_3 получаются блоками ограниченного диапазона белого шума в Matlab Simulink с мощностью шума 1, 0,01, 0,001 и временем выборки 0,01 с, 0,05 с, 0,03 с соответственно.

Рассмотрим уравнение эталонного маятника.

$$\ddot{\theta}_{ref} = -\frac{g}{l} \sin \theta_{ref} - \frac{k_r}{l} \dot{\theta}_{ref} + \frac{1}{Ml^2} r, \quad (2.38)$$

где θ_{ref} – эталонный угол отклонения, $r = \sin(0.7t)$ – неизвестный эталонный крутящий момент, $k_r = 0.4$ – известный эталонный коэффициент трения.

Необходимо разработать алгоритм, обеспечивающий синхронизацию маятников (2.37) и (2.38), т.е. условие $\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |[\theta \dot{\theta}]^T - [\theta_{ref} \dot{\theta}_{ref}]^T| < \delta$ должно быть выполнено.

Обозначим $v = \theta - \theta_{ref}$, $x_1 = v$, $x_2 = \dot{v}$, $x = [x_1 \ x_2]^T$, $z = h - [\theta_{ref} \dot{\theta}_{ref}]^T = x + \xi$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{k_r}{l} \end{bmatrix}$, $B = D = [0 \ \frac{1}{Ml^2}]^T$, $\psi = Ml^2 x_1 + Ml(k_r - k)x_2 - 2Mgl \sin(0,5x_1) \cos(0,5(\theta + \theta_{ref}))$, $\varphi = Ml(k_r - k)\dot{\theta}_{ref} - r + f$. С учетом обозначений уравнения (2.37) и (2.38) можно переписать в виде (5.1) и (2.2), где $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \sqrt{122}$.

Согласно замечанию 2 введем матрицу $K = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 2.5 & 1.5 \end{bmatrix}$, которая при-

водит к $\sup_{t \geq 0} |\xi_1^*(t)| > \sup_{t \geq 0} |\xi_2^*(t)|$ (см. рис. ??,b), где $\xi^{\hat{E}} = \hat{E}\xi$. Теперь рассмотрим преобразованную систему (2.33). Выберем $r = 2$ и применим алгоритм (2.35) с $\mu = 0,01$. Пусть $[\theta(0) \ \dot{\theta}(0)]^T = [1 \ 1]^T$, $c_0 = 0,2$, $[\theta_{ref}(0) \ \dot{\theta}_{ref}(0)]^T = [0,2 \ -0,2]^T$. На рис. 2.5 приведены переходные процессы по $x = [x_1 \ x_2]^T$.

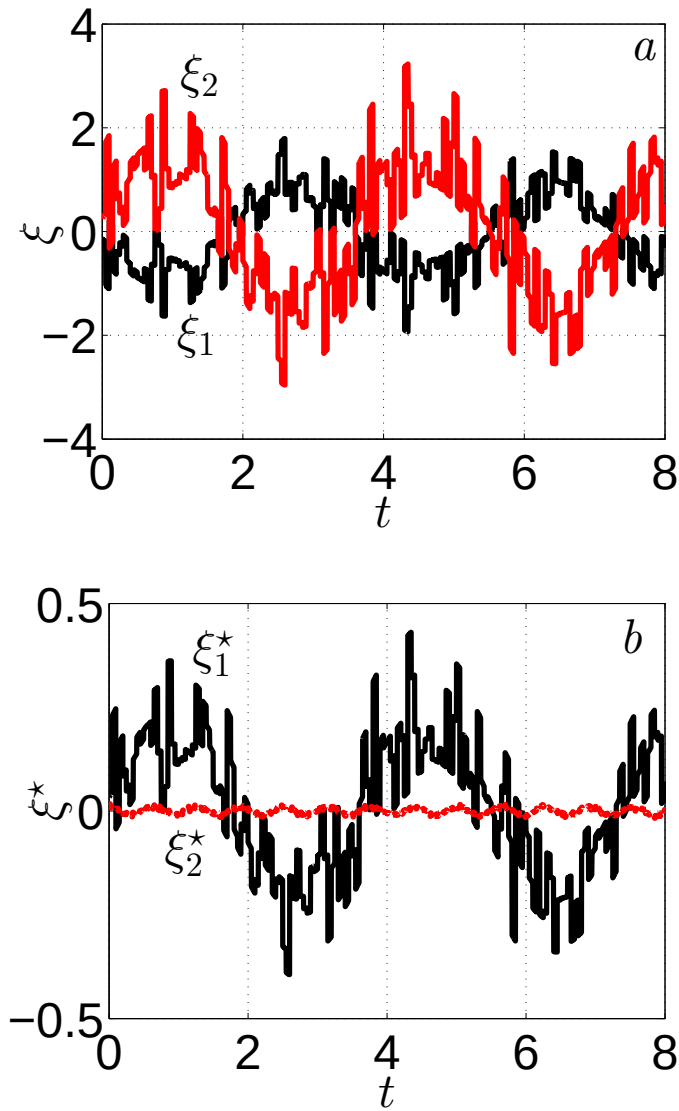


Рисунок 2.4 — Графики ξ_1, ξ_2 (a) и ξ_1^*, ξ_2^* (b).

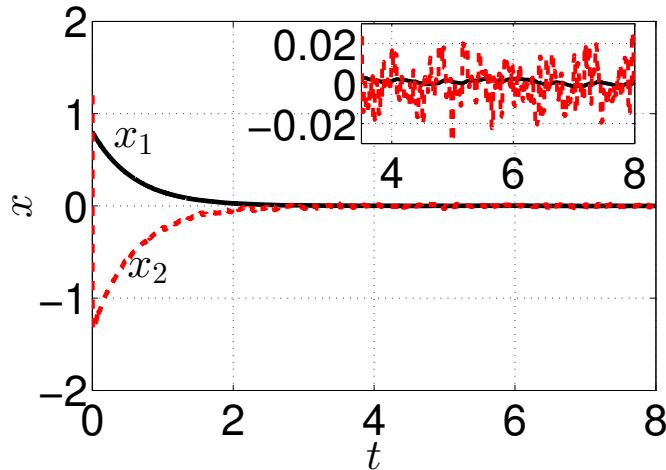


Рисунок 2.5 — Переходные процессы по x_1 и x_2 .

В примере 2 показано, что с учетом нового базиса, заданного $x^* = Kx$, можно повысить точность в установившемся режиме.

2.6 Управление по выходной переменной объекта

В [103, 219] предложен новый наблюдатель, который является расширением наблюдателя с большим коэффициентом усиления [100, 196] на случай высокочастотных помех измерения. При этом размерность нового наблюдателя равна $2\gamma - 2$. Увеличение размерности наблюдателя [100, 196] в 2 раза, по сравнению с наблюдателем [103, 219], связано с введением дополнительных дифференциальных уравнений, компенсирующих влияние высокочастотной помехи измерения. В [100, 196] приведен сравнительный численный анализ предложенного алгоритма и алгоритма [100, 196], который показал эффективность применения алгоритма [103, 219] по сравнению

с [100, 196].

Однако для расчета параметров наблюдателя [103, 219] необходимо решить уравнение, порядок которого равен $2\gamma - 2$. Причем от решений данного уравнения одновременно зависит качество оценки производных и качество фильтрующих свойств. При этом качество фильтрующих свойств наблюдателей [103, 219] существенно ограничено.

В данном разделе, в отличие от [103, 219], предлагается разделить фильтрующие и оценивающие свойства в виде двух независимых алгоритмов. В результате, по сравнению с [103, 219], это позволит:

- 1) улучшить качество фильтрации высокочастотной помехи;
- 2) сделать независимым расчет параметров фильтра и параметров наблюдателя;
- 3) для оценки производных использовать любой из существующих наблюдателей.

Рассмотрим объект управления, модель которого описывается уравнениями

$$Q(p)z(t) = R(p)u(t) + f(t), \quad y(t) = z(t) + w(t), \quad (2.39)$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$ – регулируемая переменная, $u(t) \in \mathbb{R}$ – сигнал управления, $f(t) \in \mathbb{R}$ – внешнее неконтролируемое ограниченное возмущение, $w(t) \in \mathbb{R}$ – внешний высокочастотный ограниченный шум, $Q(p)$, $R(p)$ – линейные дифференциальные операторы с неизвестными коэффициентами, $Q(p)$ – нормированный, коэффициент при старшей степени оператора $R(p)$ положительный, $\deg Q(p) = n$, $\deg R(p) = m$, $p = d/dt$.

При решении задачи на объект управления наложены следующие предположения.

Предположение 2.1 *Неизвестные коэффициенты операторов $Q(p)$ и $R(p)$ принадлежат известному компактному множеству Ξ .*

Предположение 2.2 *Многочлен $R(\lambda)$ – гурвицев, где λ – комплексная переменная.*

Предположение 2.3 *В объекте управления доступен измерению только сигнал $y(t)$.*

Требуется спроектировать непрерывную систему управления, обеспечивающую выполнение целевого условия

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |z(t)| < \delta_1, \quad (2.40)$$

где $\delta_1 > 0$ – точность регулирования.

2.7 Алгоритм фильтрации высокочастотных помех измерения

Для выделения сигнала z из сигнала y , рассмотрим алгоритм:

$$\mu \dot{\xi}(t) = G\xi(t) + By(t), \quad \hat{y}(t) = L_r \xi(t), \quad \xi(0) = 0, \quad (2.41)$$

где $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r]^T$,

$$G = \begin{bmatrix} -\sigma_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sigma_2^{-1} & -\sigma_2^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3^{-1} & -\sigma_3^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_r^{-1} & -\sigma_r^{-1} \end{bmatrix}, \sigma_i > 0, B = [\sigma_1^{-1}, 0, \dots, 0]^T,$$

$\mu > 0$ – малый параметр. Здесь и далее матрица $L_r = [0, \dots, 0, 1]$ имеет размерность $1 \times l$. Так в (2.41) размерность L_r равна $1 \times r$.

Теорема 2.3 Пусть выполнены условия предположений, сигнал z – ограниченный и для w выполнено следующее соотношение

$$\mu^{-1} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left| \int_0^t e^{\mu^{-1}G(t-s)} B w(s) ds \right| < \delta_2, \quad (2.42)$$

где $\delta_2 > 0$ – достаточно малое число. Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что при $\mu \leq \mu_0$ выполнено условие

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\hat{y}(t) - z(t)| < \delta_3. \quad (2.43)$$

Здесь $\delta_3 > 0$ – достаточно малое число.

Значение интеграла в (2.42) зависит от вида матрицы G и свойств сигнала $w(s)$. Некоторые свойства левой части (2.42) будут приведены ниже для синусоидального сигнала $w(s)$.

Доказательство. Рассмотрим систему (2.41), на вход которой вместо сигнала y подается сигнал z :

$$\mu \dot{\tilde{\xi}}(t) = G \tilde{\xi}(t) + B z(t), \quad \tilde{y}(t) = L_r \tilde{\xi}(t), \quad \tilde{\xi}(0) = 0. \quad (2.44)$$

Для анализа системы (2.44) воспользуемся леммой из [8, 15, 16].

Лемма 2.1 Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), h), \quad (2.45)$$

где $x \in \mathbb{R}^s$, $f(x, u, h)$ – функция липшицева по x и u – ограниченная функция, $h > 0$ – малый параметр. Предположим, что система (2.45) при $u = 0$ – асимптотически устойчивая. Рассмотрим множество $\Omega = \{x : f(x, u, h = 0) = 0\}$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $h_0 > 0$ такое, что при $h < h_0$ выполнено условие

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \Omega) < \epsilon.$$

Доказательство леммы 2.1 приведено в [8, 15].

Проверим условия леммы 2.1 для системы (2.44). При $z = 0$ система (2.44) асимптотически устойчивая. Подставив $\mu = 0$ в (2.44), получим $G\xi = -Bz$ или $\xi_1 = z$ и $\xi_i = \xi_{i+1}$, $i = \overline{1, r-1}$. То есть $y = z$. Тогда, согласно лемме 2.1, существует $\mu > 0$ такое, что при $\mu \leq \mu_0$ выполнено условие

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t) - z(t)| < \delta_4, \quad (2.46)$$

где $\delta_4 > 0$ – достаточно малое число.

Рассмотрим сигнал y , который состоит из сигнала z и помехи w . Найдем условие, при котором будет выполнено условие (2.43).

Принимая во внимание (2.41) и (2.44), составим ошибку рассогласования $\zeta = \xi - \tilde{\xi}$ в виде

$$\dot{\zeta}(t) = \frac{1}{\mu} G \zeta(t) + \frac{1}{\mu} B w(t), \quad \hat{y}(t) - \tilde{y}(t) = L_r \zeta(t). \quad (2.47)$$

Найдем решение первого уравнения (2.47) в форме

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= e^{\mu^{-1} G t} \zeta(0) + \mu^{-1} \int_0^t e^{\mu^{-1} G(t-s)} B w(s) ds = \\ &= \mu^{-1} \int_0^t e^{\mu^{-1} G(t-s)} B w(s) ds. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Если выполнено условие (2.42), то из (2.48) следует, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\zeta(t)| < \delta_2. \quad (2.49)$$

Рассмотрим следующие соотношения

$$\begin{aligned} |\hat{y}(t) - z(t)| &\leq |\hat{y}(t) - \tilde{y}(t)| + |\tilde{y}(t) - z(t)| \leq \\ &\leq |\zeta(t)| + |\tilde{y}(t) - z(t)|. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Очевидно, что для (2.50) будет справедлив следующий предельный переход

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\hat{y}(t) - z(t)| \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\zeta(t)| + \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t) - z(t)|. \quad (2.51)$$

Пусть $\delta_2 + \delta_4 \leq \delta_3$. Принимая во внимание (2.46) и (2.49), получим оценку (2.43) из (2.51). Теорема 2.3 доказана.

Пусть помеха w представлена мультигармоническим сигналом

$$w(t) = \sum_{i=1}^v A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (2.52)$$

где A_i , ω_i и φ_i – амплитуда, частота и фаза i -й гармоники. Например, формула (2.52) может быть получена при разложении ограниченной помехи в ряд Фурье с последующим извлечением частичной суммы ряда. Данная

техника, например, используется для решения ряда задач в электротехнике [26], информатике [55], теории управления [54] и т.д.

Теорема 2.4 Пусть выполнены условия предположений, функция z – ограниченная и помеха w представлена соотношением (2.52). Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что при $\mu \leq \mu_0$ выполнено соотношение

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\hat{y}(t) - z(t)| \leq \sum_{i=1}^v A_i \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_i^2 \mu^2 \sigma_j^2}} \right) + \delta_4. \quad (2.53)$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 2.3 следует, что для системы (2.44) существует $\mu > 0$ такое, что при $\mu \leq \mu_0$ выполнено условие (2.46). Принимая во внимание (2.41) и (2.44), составим ошибку рассогласования $\zeta = \xi - \tilde{\xi}$ в виде (2.47). Перепишем систему (2.47) как

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1(t) &= -\mu^{-1} \sigma_1^{-1} \zeta_1(t) + \mu^{-1} \sigma_1^{-1} \sum_{i=1}^v A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \\ \dot{\zeta}_j(t) &= -\mu^{-1} \sigma_j^{-1} \zeta_j(t) + \mu^{-1} \sigma_j^{-1} \zeta_{j-1}(t), \quad j = \overline{2, r}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Найдем решение первого уравнения системы (2.54) в виде

$$\begin{aligned} \zeta_1(t) &= e^{-\mu^{-1} \sigma_1^{-1} t} \zeta_1(0) + \\ &+ \mu^{-1} \sigma_1^{-1} \sum_{i=1}^v A_i \int_0^t e^{\mu^{-1} \sigma_1^{-1} (s-t)} \sin(\omega_i s + \varphi_i) ds = \\ &= \sum_{i=1}^v \frac{A_i}{\sqrt{1 + \omega_i^2 \mu^2 \sigma_1^2}} \sin(\omega_i t + \varphi_i + \vartheta_{1,i}), \\ \vartheta_{1,i} &= \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_i^2 \mu^2 \sigma_1^2}}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Подставляя (2.55) во второе уравнение (2.54), найдем решение второго уравнения (2.54) в виде

$$\begin{aligned}
\zeta_2(t) &= e^{-\mu^{-1}\sigma_2^{-1}t}\zeta_2(0)+ \\
&+ \mu^{-1}\sigma_2^{-1}\sum_{i=1}^v \frac{A_i}{\sqrt{1+\omega_i^2\mu^2\sigma_1^2}} \times \\
&\times \int_0^t e^{\mu^{-1}\sigma_2^{-1}(s-t)} \sin(\omega_i s + \varphi_i + \vartheta_{1,i}) ds = \\
&= \sum_{i=1}^v A_i \frac{1}{\sqrt{(1+\omega_i^2\mu^2\sigma_1^2)(1+\omega_i^2\mu^2\sigma_2^2)}} \sin(\omega_i t + \varphi_i + \vartheta_{1,i} + \vartheta_{2,i}), \\
\vartheta_{2,i} &= \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\omega_i^2\mu^2\sigma_2^2}}.
\end{aligned}$$

Аналогично образом найдем решение последнего уравнения системы (2.54) в виде

$$\zeta_r(t) = \sum_{i=1}^v A_i \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_i^2 \mu^2 \sigma_j^2}} \right) \sin(\omega_i t + \varphi_i + \sum_{j=1}^r \vartheta_{j,i}), \quad (2.56)$$

где $\vartheta_{j,i} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\omega_i^2\mu^2\sigma_j^2}}$.

Оценим сверху (2.56) как

$$|\zeta_r(t)| \leq \sum_{i=1}^v A_i \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_i^2 \mu^2 \sigma_j^2}} \right). \quad (2.57)$$

Принимая во внимание соотношения (2.46), (2.51) и (2.57), получим оценку (2.53). Из (2.57) следует, что чем больше значения ω_i , тем меньше значение правой части (2.53). Поэтому в постановке задачи рассматривается высокочастотная помеха. Теорема 3.7 доказана.

Для выбора параметров в алгоритме (2.41) можно воспользоваться следующей рекомендацией: уменьшением числа μ и увеличением чисел r (что соответствует порядку фильтра) и σ_i можно уменьшить значение $|\hat{y} - z|$. Уменьшение числа μ «сводит» динамический фильтр к статическому звену, а увеличение чисел r и σ_i сводит к уменьшению правой части (2.57),

а значит и к уменьшению величины ошибки фильтрации. По сути правая часть (2.57) позволяет определить полосу пропускания системы фильтров.

2.8 Алгоритм подавления возмущений

Для дальнейшего синтеза системы управления воспользуемся алгоритмом [62]. Из постановки задачи производные $y(t)$ не доступны измерению (предположение 2.3). В силу того, что оператор $Q(p)$ нормированный, то в законе управления можно оценить $\gamma - 1$ производные сигнала $\hat{y}(t)$. Значит, зададим закон управления в форме

$$u(t) = -\alpha \sum_{i=0}^{\gamma-1} d_i \bar{y}^{(i)}(t), \quad (2.58)$$

где $\alpha > 0$, коэффициенты $d_0, d_1, \dots, d_{\gamma-1}$ выбираются так, чтобы полином $D(\lambda) = d_{\gamma-1}\lambda^{\gamma-1} + d_{\gamma-2}\lambda^{\gamma-2} + \dots + d_1\lambda + d_0$ был гурвицев, $\gamma = n - m$ – носительная степень объекта управления, $\bar{y}^{(i)}(t)$ – оценка i -й производной сигнала $\hat{y}(t)$, $i = 0, 1, \dots, \gamma - 1$.

Подставив (2.58) в (2.39), получим

$$F(p)z(t) = \alpha R(p)g(t) + \alpha R(p)D(p)\psi(t) + f(t), \quad (2.59)$$

где $F(p) = Q(p) + \alpha R(p)D(p)$, $g(t) = D(p)\hat{y}(t) - \sum_{i=0}^{\gamma-1} d_i \bar{y}^{(i)}(t)$ – сигнал, характеризующий отклонение i -й производной «отфильтрованного» выхода объекта $\hat{y}(t)$ от соответствующей оценки $\bar{y}^{(i)}(t)$, $\psi(t) = z(t) - \hat{y}(t)$. Значение функции $g(t)$ зависит от качества оценивания производных сигнала $\hat{y}(t)$, значение функции $\psi(t)$ – от качества фильтрации алгоритма (2.41).

Поскольку известно множество Ξ (предположение 2.1), то всегда существуют число α и полином $D(\lambda)$ такие, что полином $F(\lambda)$ будет гурвицевым, см. [9, 43, 59].

Для реализации закона управления (2.58) воспользуемся наблюдателем, заданным уравнениями

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) &= \hat{y}(t), \\ \bar{y}^{(j)}(t) &= \frac{\bar{y}^{(j-1)}(t) - \bar{y}^{(j-1)}(t-h)}{h}, \quad j = \overline{1, \gamma-1}.\end{aligned}\tag{2.60}$$

Подставив (2.60) в (2.58), перепишем закон управления (2.58) в виде

$$u(t) = -\alpha \sum_{i=0}^{\gamma-1} \left[\frac{d_i}{h^i} \sum_{j=0}^i (-1)^j C_i^j \hat{y}(t-jh) \right], \tag{2.61}$$

где $C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!}$. Сформулируем утверждение, выполнение условий которого гарантирует выполнение целевого условия (2.40).

Теорема 2.5 Предположим, что выполнены предположения 2.1-2.3, функция $w(t)$ ограничена при $r \geq \gamma$ и ограничена вместе с ее $\gamma-r-1$ производными при $r < \gamma$. Тогда существуют $\alpha > 0$ и $h > 0$ такие, что фильтр (2.41) и закон управления (2.61) гарантируют выполнение условия (2.40) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

Доказательство. Преобразуем систему (2.59) к виду

$$\dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t) + \alpha B_1 g(t) + \alpha B_2 \psi(t) + B_3 f(t), \quad z(t) = J_n \varepsilon(t), \tag{2.62}$$

где $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]^T$, $z^{(i)} = \varepsilon_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$, A , B_1 , B_2 , B_3 полученные при преобразовании (2.59) к (2.62). Здесь и далее матрица $J_l = [1, 0, \dots, 0]$ имеет размерность $1 \times l$. Например, в (2.62) размерность J_n равна $1 \times n$.

Перепишем систему (2.41) в виде дифференциального уравнения $\prod_{i=1}^r (\mu\sigma_i p + 1) \hat{y}(t) = y(t)$. Для дальнейшего исследования устойчивости замкнутой системы с использованием аппарата функционалов Ляпунова-Красовского, перепишем дифференциальное уравнение (2.63) в форме вход-состояние-выход:

$$\dot{\theta}(t) = M\theta(t) + Ny(t), \quad \hat{y}(t) = J_r\theta(t), \quad (2.63)$$

где $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r]^T$, $\hat{y}^{(i)} = \theta_{i+1}$, $i = \overline{0, r-1}$, матрица M и вектор N получены при переходе от (2.41) к (2.63). В результате вторые уравнения (2.62) и (2.63) записаны относительно первых компонент векторов состояний, что дает возможность дальнейшего «удобного» анализа устойчивости решений данных уравнений.

Рассмотрим два случая, которые зависят от размерности фильтра (2.41).

1) Пусть $r < \gamma$. Перепишем оператор $D(p)$ в виде

$$D(p) = \rho_1^T [p^{\gamma-1}, p^{\gamma-2}, \dots, p^r] + \\ + \rho_2^T [p^{r-1}, p^{r-2}, \dots, 1], \quad (2.64)$$

где ρ_1 и ρ_2 – векторы с соответствующими коэффициентами оператора $D(p)$. Принимая во внимание (2.64), перепишем функцию $g(t)$ в виде

$$g(t) = \sum_{j=1}^{\gamma-r} \rho_{1,(j-1+r)} L_r \theta^{(j)} + \rho_2^T \theta(t) - \\ - \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{d_i}{h^i} J_r \theta(t) - \sum_{i=1}^{\gamma-1} \left[\frac{d_i}{h^i} \sum_{j=1}^i (-1)^j C_i^j J_r \theta(t - jh) \right], \quad (2.65)$$

где ρ_1 , j – j -я компонента вектора ρ_1 . Принимая во внимание (2.63), найдем j -ю производную ($1 \leq j \leq n$) от θ в виде

$$\begin{aligned}
\theta^{(j)} &= M^j \theta + \sum_{i=0}^{j-1} M^{j-i-1} N y^{(i)} = \\
&= M^j \theta + \sum_{i=0}^{j-1} M^{j-i-1} N z^{(i)} + \sum_{i=0}^{j-1} M^{j-i-1} N w^{(i)} = \\
&= M^j \theta + \sum_{i=0}^{j-1} M^{j-i-1} N K_{i+1} \varepsilon + \sum_{i=0}^{j-1} M^{j-i-1} N w^{(i)},
\end{aligned} \tag{2.66}$$

где $K_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ – матрица размерности $1 \times n$ с нулевыми элементами за исключением j -го, который равен 1.

Подставив (2.66) в (2.65), получим

$$\begin{aligned}
g &= \sum_{j=1}^{\gamma-r} \rho_{1,(j-1+r)} L_r \left(M^j \theta + \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=0}^{j-1} M^{j-i-1} N K_{i+1} \varepsilon + \sum_{i=0}^{j-1} M^{j-i-1} N w^{(i)} \right) + \\
&\quad + \rho_2^T \theta(t) - \\
&\quad - \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{d_i}{h^i} J_r \theta(t) - \sum_{i=1}^{\gamma-1} \left[\frac{d_i}{h^i} \sum_{j=1}^i (-1)^j C_i^j J_r \theta(t - jh) \right].
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Из (2.67) следует, что при $r < \gamma$ требуется ограниченность производных функции w до $\gamma - r - 1$ включительно. С учетом (2.61) и (2.67), преобразуем уравнение (2.62) к виду

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}(t) &= A \varepsilon(t) + \\
&\quad + \alpha B_1 \left(\sum_{j=1}^{\gamma-r} \rho_{1,(j-1+r)} \times \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^{j-1} M^{j-i-1} N K_{i+1} \varepsilon + \sum_{i=0}^{j-1} M^{j-i-1} N w^{(i)} \right) + \\
&\quad + L_r \left(M^j \theta + \rho_2^T \theta(t) - \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{d_i}{h^i} J_r \theta(t) \right) - \\
&\quad - \alpha B_1 \left[\sum_{i=1}^{\gamma-1} \frac{d_i}{h^i} \sum_{j=1}^i (-1)^j C_i^j J_r \theta(t - jh) \right] + \\
&\quad + \alpha B_2 J_n \varepsilon(t) - \alpha B_2 J_r \theta(t) + B_3 f(t).
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Введем обозначения:

$$\varepsilon_p(t) = [\varepsilon^T(t), \theta^T(t)]^T,$$

$$A_{11} = A + \alpha B_1 \sum_{j=1}^{\gamma-r} \rho_{1,(j-1+r)} L_r \sum_{i=0}^{j-1} M^{j-i-1} N K_{i+1} + \alpha B_2 J_n,$$

$$A_{12} = \alpha B_1 \left(\sum_{j=r}^{\gamma-r} \rho_{1,(j-1+r)} L_r M^j + \rho_2^T - \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{d_i}{h^i} J_r \right) - \alpha B_2 J_r,$$

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ N J_n & M \end{bmatrix},$$

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{j+1} \alpha B_1 \frac{d_i}{h^i} C_i^j J_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, i = \overline{1, \gamma-1}, j = \overline{1, i},$$

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} w + \sum_{j=1}^{\gamma-r} \sum_{i=0}^{j-1} \begin{bmatrix} \alpha B_1 \rho_{1,(j-1+r)} L_r M^{j-i-1} N \\ 0 \end{bmatrix} w^{(i)} + \begin{bmatrix} B_3 \\ 0 \end{bmatrix} f.$$

Здесь ϑ – ограниченная функция. С учетом обозначений перепишем системы (2.64) и (2.68) в виде

$$\dot{\varepsilon}_p(t) = A_p \varepsilon_p(t) + \sum_{i=1}^{\gamma-1} \sum_{j=1}^i F_{ij} \varepsilon_p(t - jh) + \vartheta(t), \quad (2.69)$$

Рассмотрим функционал Ляпунова-Красовского вида

$$V = \varepsilon_p^T(t) P \varepsilon_p(t) + \sum_{i=1}^{\gamma-1} \sum_{j=1}^i \int_{-jh}^0 \varepsilon_p^T(t+s) N_{ij} \varepsilon_p(t+s) ds, \quad (2.70)$$

где $P = P^T > 0$ – решение уравнения $A_p^T P + P A_p = -Q$, $Q = Q^T > 0$, $N_{ij} = N_{ij}^T > 0$. Взяв от функционала (2.70) производную по времени вдоль траекторий системы (2.69), получим

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -\varepsilon_p^T(t)Q\varepsilon_p(t) + 2\varepsilon_p^T(t)P \sum_{i=1}^{\gamma-1} \sum_{j=1}^i F_{ij}\varepsilon_p(t-jh) + \\
& + 2\varepsilon_p^T(t)P\vartheta(t) + \\
& + \sum_{i=1}^{\gamma-1} \sum_{j=1}^i \left(\varepsilon_p^T(t)N_{ij}\varepsilon_p(t) - \varepsilon_p^T(t-jh)N_{ij}\varepsilon_p(t-jh) \right).
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Оценим сверху слагаемые в (2.72):

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_p^T(t)P \sum_{i=1}^{\gamma-1} \sum_{j=1}^i F_{ij}\varepsilon_p(t-jh) & \leq 0.5\gamma(\gamma-1)\chi\varepsilon_p^T(t)P^2\varepsilon_p(t) + \\
& + \chi^{-1} \sum_{i=1}^{\gamma-1} \sum_{j=1}^i \varepsilon_p^T(t-jh)F_{ij}^T F_{ij}\varepsilon_p(t-jh),
\end{aligned}$$

$$2\varepsilon_p^T(t)P\vartheta(t) \leq \chi\varepsilon_p^T(t)P^2\varepsilon_p(t) + \chi^{-1}|\vartheta(t)|^2.$$

С учетом оценок перепишем (2.71) в виде

$$\dot{V} \leq -\varepsilon_p^T(t)W\varepsilon_p(t) - \sum_{i=1}^{\gamma-1} \sum_{j=1}^i \varepsilon_p^T(t-jh)R_{ij}\varepsilon_p(t-jh) + \chi^{-1}\tau, \tag{2.72}$$

где $W = Q - 0.5\gamma(\gamma-1)\chi P^2 - \chi P^2 - \sum_{i=1}^{\gamma-1} \sum_{j=1}^i N_{ij}$, $R_{ij} = N_{ij} - \chi^{-1}F_{ij}^T F_{ij}$, $\tau = \sup_t |\vartheta(t)|^2$.

Очевидно, что существуют α и χ такие, что $W > 0$ и $R_{ij} > 0$. Оценим (2.72) в виде

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(W)\varepsilon_p^T(t)\varepsilon_p(t) + \chi^{-1}\tau. \tag{2.73}$$

Здесь $\lambda_{\min}(W)$ – наименьшее собственное число матрицы W . Из (2.73) следует, что $|z(t)| \leq |\varepsilon_p(t)| \leq \sqrt{\chi^{-1}\tau/\lambda_{\min}(W)}$. Следовательно, выбором α и χ такими, что $W > 0$, $R_{ij} > 0$ можно обеспечить выполнение условия $\delta_1 \leq \sqrt{\chi^{-1}\tau/\lambda_{\min}(W)}$. Стоит отметить, что оценка для z достаточно грубая, так

как при доказательстве используются грубые оценки и в (2.73) исключены слагаемые $\sum_{i=1}^{\gamma-1} \sum_{j=1}^i \varepsilon_p^T(t-jh) R_{ij} \varepsilon_p(t-jh)$, участвующие в компенсации величины $\chi^{-1} \tau$.

2) Пусть $r \geq \gamma$. Перепишем оператор $D(p)$ в виде

$$D(p) = \rho^T \begin{bmatrix} p^{\gamma-1} & p^{\gamma-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание (2.61), перепишем функцию $g(t)$ в виде

$$\begin{aligned} g(t) = & \rho^T \theta(t) - \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{d_i}{h^i} J_r \theta(t) - \\ & - \sum_{i=1}^{\gamma-1} \left[\frac{d_i}{h^i} \sum_{j=1}^i (-1)^j C_i^j J_r \theta(t-jh) \right]. \end{aligned} \quad (2.74)$$

С учетом (2.74), преобразуем уравнение (2.62) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = & A \varepsilon(t) + \alpha B_1 \left(\rho^T \theta(t) - \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{d_i}{h^i} J_r \theta(t) \right) - \\ & - \alpha B_1 \left[\sum_{i=1}^{\gamma-1} \frac{d_i}{h^i} \sum_{j=1}^i (-1)^j C_i^j J_r \theta(t-jh) \right] + \\ & + \alpha B_2 J_n \varepsilon(t) - \alpha B_2 J_r \theta(t) + B_3 f(t). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Перепишем системы (2.64) и (2.75) в виде

$$\dot{\varepsilon}_p(t) = A_p \varepsilon_p(t) + \sum_{i=1}^{\gamma-1} \sum_{j=1}^i F_{ij} \varepsilon_p(t-jh) + \vartheta(t), \quad (2.76)$$

где $A_p = \begin{bmatrix} A + \alpha B_2 J_n & \alpha B_1 \left(\rho^T - \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{d_i}{h^i} J_r \right) - \alpha B_2 J_r \\ N J_n & M \end{bmatrix}$, $\vartheta = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_3 \\ 0 \end{bmatrix} f$ – ограниченная функция, структура матрицы F_{ij} соответствует структуре матрицы F_{ij} в (2.69).

Поскольку структура системы (2.76) подобна структуре системы (2.69), то дальнейшее доказательство второго случая аналогично доказательству первого случая. Теорема 2.5 3 доказана.

2.9 Пример управления с измеряемым выходным сигналом объекта

Рассмотрим объект управления вида

$$\begin{aligned}(p^4 + q_3 p^3 + q_2 p^2 + q_1 p + q_0) z(t) &= u(t) + f(t), \\ y(t) &= z(t) + w(t).\end{aligned}\tag{2.77}$$

Множество Ξ возможных значений параметров в (2.77) задано неравенствами:

$$-1 \leq q_3 \leq 0, 1, \quad -2 \leq q_2 \leq 2, \quad -3 \leq q_1 \leq 3, \quad -1 \leq q_0 \leq 1, \quad |f(t)| \leq 1.$$

Выберем в (2.41) $\sigma_i = 1$ и $\mu = 0.01$. Порядок r в алгоритме (2.41) будет определен в таблице 2.1.

Пусть $\alpha = 7$, $d_0 = 0,9$, $d_1 = 1,5$, $d_2 = 2$ и $d_3 = 0,5$. Тогда, закон управления (2.61) можно переписать в виде

$$u(t) = -7 \left(0,9 \bar{y}(t) + 1,5 \dot{\bar{y}}(t) + 2 \ddot{\bar{y}}(t) + 0,5 \dddot{\bar{y}}(t) \right). \tag{2.78}$$

Для оценки производных в (2.78) воспользуемся наблюдателем (2.60).

Пусть $h = 1/20$. Тогда наблюдатель (2.60) перепишем в виде

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) &= \hat{y}(t), \\ \bar{y}^{(1)}(t) &= 20 [\bar{y}(t) - \bar{y}(t - 0,05)], \\ \bar{y}^{(2)}(t) &= 20 [\bar{y}^{(1)}(t) - \bar{y}^{(1)}(t - 0,05)], \\ \bar{y}^{(3)}(t) &= 20 [\bar{y}^{(2)}(t) - \bar{y}^{(2)}(t - 0,05)].\end{aligned}\tag{2.79}$$

Продemonстрируем эффективность предложенной схемы (2.41), (2.78) и (2.79) по сравнению с наблюдателем с большим коэффициентом усиления [3] и наблюдателем с большим коэффициентом усиления в условиях помех измерения [15, 16]. Для этого зададим снова закон управления в виде (2.78), только для оценки производных в (2.78) воспользуемся следующими наблюдателями:

1) наблюдатель с большим коэффициентом усиления [100, 196]:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi(t) + \\ & + \begin{bmatrix} 110 \\ 110^2 \cdot 0,35 \\ 110^3 \cdot 0,05 \\ 110^4 \cdot 0,0024 \end{bmatrix} \left(y(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi(t) \right), \\ \bar{y}(t) = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi(t), \quad \bar{y}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi(t), \\ \bar{y}^{(2)}(t) = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xi(t), \quad \bar{y}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi(t); \end{aligned} \quad (2.80)$$

2) наблюдателем с большим коэффициентом усиления в условиях помех измерения [103, 219]:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_1(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \eta_1(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \eta_2(t) + \\
&+ \begin{bmatrix} 110 & 0 \\ 0 & 110^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,16 \end{bmatrix} \left(y(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \eta_1(t) \right), \\
\dot{\eta}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \eta_2(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \eta_3(t) + \\
&+ \begin{bmatrix} 110 & 0 \\ 0 & 110^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,0525 \end{bmatrix} \\
&\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \eta_1(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \eta_2(t) \right), \\
\dot{\eta}_3(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \eta_3(t) + \\
&+ \begin{bmatrix} 110 & 0 \\ 0 & 110^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,0171 \end{bmatrix} \\
&\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \eta_2(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \eta_3(t) \right), \\
\bar{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \eta_1(t), \quad \bar{y}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \eta_2(t), \\
\bar{y}^{(2)}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \eta_3(t), \quad \bar{y}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \eta_3(t).
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Пусть в (2.77) $q_3 = 0$, $q_2 = 1$, $q_1 = 1$, $q_0 = 0$, $f(t) = 0$, $w(t) = \sin(0,5 \cdot 10^3 t)$ и $z(0) = 1$, $\dot{z}(0) = \ddot{z}(0) = 0$, $\ddot{\dot{z}}(0) = -1$. В табл. 2.1 приведены максимальные значения ошибок оценивания производных сигнала $z(t)$ в установившемся режиме при использовании системы управления (2.41), (2.78), (2.79), системы управления (2.78), (2.80) (на базе [100, 196]) и системы управления (2.78), (2.81) (на базе [103, 219]).

Тип системы управления	Значение $\sup z(t) - \bar{y}(t) $ после 8 (с) с начала функционирования системы	Значение $\sup \dot{z}(t) - \dot{\bar{y}}(t) $ после 8 (с) с начала функционирования системы	Значение $\sup \ddot{z}(t) - \ddot{\bar{y}}(t) $ после 8 (с) с начала функционирования системы	Значение $\sup \dddot{z}(t) - \dddot{\bar{y}}(t) $ после 8 (с) с начала функционирования системы
Система управления (2.78), (2.81) (на базе наблюдатель с большим коэффициентом усиления [100, 196])	0,22	8,41	132,3	698
Система управления (2.78), (2.80) (на базе наблюдателя с большим коэффициентом усиления в условиях помех измерения [103, 219])	0,26	4,9	31,1	266,1
Система управления (2.41), (2.78), (2.79) при $r = 2$ в (2.41)	0,04	0,2	2	57
Система управления (2.41), (2.78), (2.79) при $r = 5$ в (2.41)	$3 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$

Табл. 2.1 – Максимальные значения ошибок оценивания производных сигнала $z(t)$ в установившемся режиме при использовании предложенной схемы, а также схем [100, 103, 196, 219].

Из таблицы 2.1 видно, что предложенный алгоритм управления позволяет значительно уменьшить ошибки оценивания производных сигнала z , а при $r = 2$ динамический порядок предложенного алгоритма на единицу меньше, чем алгоритма [103, 219]. Причем, из таблицы 2.1 следует, что увеличением параметра r можно улучшить качество оценивания производных.

Пусть $q_3 = 0, 1$, $q_2 = 2$, $q_1 = 3$, $q_0 = 1$, $f(t) = \sin(t)$, $w(t) = \sin(0,5 \cdot$

$10^3 t) + \sin(10^3 t) + \sin(10^4 t)$, $z(0) = 1$, $\dot{z}(0) = \ddot{z}(0) = 0$, $\ddot{z}'(0) = -1$ в (2.77).

На рис. 2.6 приведены результаты моделирования по $z(t)$, $\dot{z}(t)$, $\ddot{z}(t)$ и $\ddot{z}'(t)$ при использовании системы управления (2.41), (2.78), (2.79), когда $r = 5$ в (2.41). Графики для $z(t)$ и $\ddot{z}(t)$ изображены непрерывными кривыми, для $\dot{z}(t)$ и $\ddot{z}'(t)$ – пунктирными кривыми.

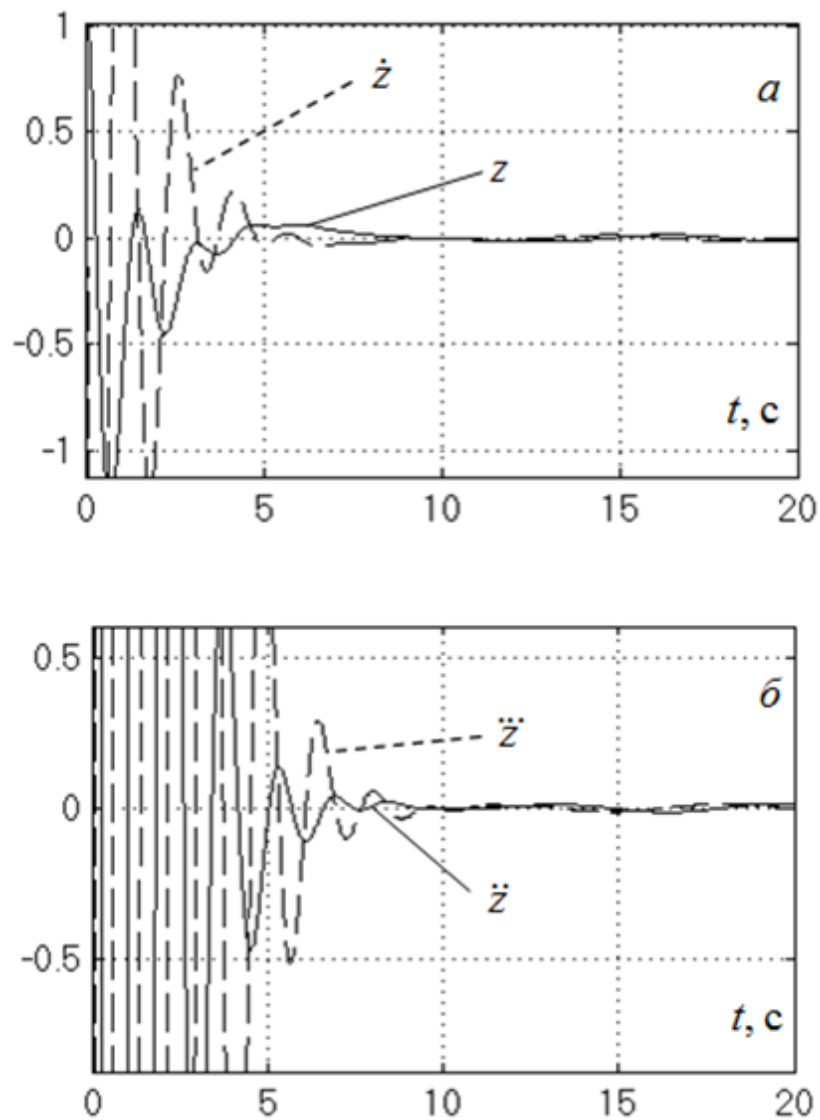


Рисунок 2.6 — Результаты моделирования по $z(t)$, $\dot{z}(t)$ (a) и $\ddot{z}(t)$, $\ddot{z}'(t)$ (б).

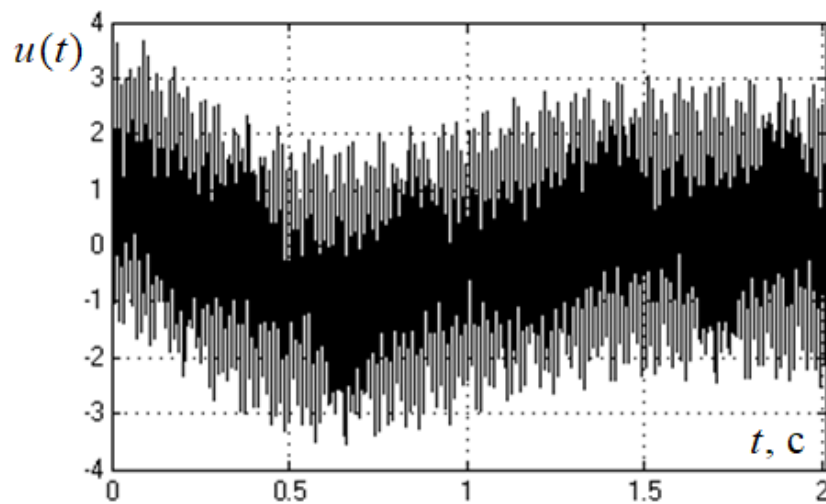


Рисунок 2.7 — Результаты моделирования по $u(t)$.

Результаты моделирования показали (рис. 2.6), что после 10 (с) абсолютные значения сигналов $z(t)$, $\dot{z}(t)$, $\ddot{z}(t)$ и $\dddot{z}(t)$ не превышают 0,014, а абсолютные значения ошибок оценивания сигналов $z(t)$, $\dot{z}(t)$, $\ddot{z}(t)$ и $\dddot{z}(t)$ не превышают $2 \cdot 10^{-3}$. Результаты моделирования по управлению приведены на рис. 2.7. Стоит отметить, что переходные процессы по $u(t)$ для каждой из схем [100, 103, 196, 219] подобны. Однако при одном уровне и качестве сигнала управления достигаются разные качества по выходному сигналу, что отдает предпочтение предложенному в данной главе алгоритму.

2.10 Заключение по главе 2

- Разработан алгоритм управления с обратной связью по выходу с компенсацией возмущений и помех измерения в нелинейных системах с несколькими входами и выходами.
- В отличие от [13, 40, 47, 51, 96, 126] в представленном разделе размер-

ность помехи может быть равна размерности выхода объекта, помехи и возмущения независимы, а закон управления имеет только один настраиваемый параметр μ .

- Достаточные условия, сформулированные в терминах линейных матричных неравенств, обеспечивают устойчивость замкнутой системы.
- Точность в установившемся режиме зависит от возмущения, одной составляющей помехи и ее первой производной.
- Численные примеры иллюстрируют эффективность предложенного метода при наличии гладких и случайных помехах и возмущениях.
- Разработан робастный закон управления при наличии параметрической интервальной неопределенности, внешних ограниченных возмущений и высокочастотных помех в измерениях. Полученное решение позволяет независимо влиять на качество фильтрации помехи и качество ошибки стабилизации.
- Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие эффективность разработанного алгоритма по сравнению с классическим наблюдателем с большим коэффициентом усиления [100, 196] и наблюдателем с большим коэффициентом усиления в условиях помех измерения [103, 219].

Глава 3 Управление с обеспечением выходного сигнала в заданном множестве

Задача управления объектами с обеспечением желаемого качества переходных процессов по регулируемой переменной является одной из основных задач теории автоматического управления. В условиях определенности параметров модели объекта существует ряд классических методов: методы управления с заданным расположением собственных чисел замкнутой системы, методы управления с обеспечением желаемых частотных характеристик замкнутой системы, методы оптимального управления и т.д., см., например, [3, 45, 50, 54]. Вопрос улучшения оценки сверху для отклонения регулируемой переменной в линейных параметрически определенных системах с ненулевыми начальными условиями до сих пор остается актуальным [5, 49, 221].

Для управления в условиях параметрической неопределенности и возмущений можно выделить методы адаптивного и робастного управления, где качество регулирования задается эталонным сигналом, см., например, [2, 217]. Однако методы [2, 217] не гарантируют заданного отклонения регулируемого сигнала от эталонного в переходном режиме. Если начальные условия объекта неизвестны, то в начальный момент времени данные отклонения могут быть произвольно большими. Методы [2, 217] гарантируют только заданное отклонение регулируемой переменной от эталонного сигнала в установившемся режиме.

Метод [48] позволяет гарантировать нахождение фазовых траекторий системы в некотором наименьшем эллипсоиде в переходном и установившемся режимах. Однако данный эллипсоид остается одним и тем же в любой момент времени, что может давать грубое качество регулирования в переходном и в установившемся режимах.

В [181] рассмотрено применение адаптивного управления с обеспечением регулируемой переменной в заданных множествах, которые могут быть разными для переходного и установившегося режимов. Данные множества задаются последовательностью прямоугольников, где высота каждого прямоугольника соответствует желаемому максимальному отклонению выходной переменной объекта от положения равновесия, а длина прямоугольника – желаемому времени нахождения выходной переменной объекта в соответствующем прямоугольнике. Однако прямоугольные области в [181] достаточно грубые и алгоритм применим только для объектов со скалярными входными и выходными сигналами.

В отличие от [181] в [107] предложен метод управления с гарантией нахождения регулируемой переменной в заданном криволинейном множестве для объектов с векторными входными и выходными сигналами. Однако реализация данного метода требует знания знака и множества начальных условий объекта, а полученные верхние и нижние оценки переходных процессов достаточно грубые в том смысле, что определяются одной функцией с разными знаками. Причем верхние и нижние оценки должны асимптотически сходиться к некоторым константам. В настоящее время результат [107] имеет большое количество обобщений на разного рода системы, см. например, [112, 121, 227], но все вышеперечисленные особенности метода [107]

остаются справедливыми и в [112, 121, 227].

Настоящая глава сфокусирована на получении нового метода управления с обеспечением регулируемой переменной в заданном множестве. В отличие от [107] целевое множество не будет зависеть от знака значений начальных условий, а требуется только знание множества начальных значений объекта управления. По сравнению с [107, 181] конфигурация заданного множества может задаваться произвольными ограниченными непрерывно-дифференцируемыми функциями, для которых не требуется асимптотическая сходимость. В результате полученный метод позволит существенно расширить класс решаемых задач в смысле качества переходных процессов в отличие от [107, 181].

Глава организована следующим образом. В разделе 3.1 приведен класс исследуемых объектов и поставлена цель управления в виде принадлежности выходного сигнала объекта заданному множеству. Раздел 3.7.2 содержит основной результат, где предложена специальная замена координат, которая позволяет свести исходную задачу с ограничениями к задаче исследования на устойчивость по вход-состоянию новой расширенной динамической системы без ограничений. Также в разделе 3.7.2 приведены примеры такой замены координат. Возможность использования предложенного метода продемонстрирована в дальнейших разделах для некоторых видов систем. Так, в разделе 3.4 предложен алгоритм управления по состоянию линейными объектами с известными параметрами и неизвестным внешним ограниченным возмущением. Раздел 3.5 содержит синтез закона управления, который не зависит от параметров объекта, где сам объект описывается динамической системой с секторной нелинейностью

и возмущениями. Раздел 3.6 иллюстрирует применимость предложенной схемы для объекта управления с произвольной относительной степенью. Разделы 3.4–3.6 сопровождаются моделированием, иллюстрирующим эффективность предложенного метода, и анализом полученных результатов.

Однако результаты разделов 3.7.2–3.6 будут ограничены рассмотрением объектов, у которых:

- 1) размерность сигнала управления больше или равна размерности регулируемого сигнала;
- 2) не накладываются ограничения на сигнал управления.

Касательно первого ограничения на практике существует достаточно много задач, когда размерность сигнала управления меньше размерности регулируемого сигнала, например управление неполноприводными системами: шагающие роботы, станки с программным управлением, летательные аппараты, водные суда, некоторые маятниковые системы и т.д. Для решения таких задач предложено много методов, в частности [43, 208, 215, 216], однако они не гарантируют заданного качества регулирования в любой момент времени, а лишь в установившемся режиме.

Относительно второго ограничения логически возникает вопрос о величине сигнала управления, необходимого для обеспечения выходного сигнала в заданном множестве в любой момент времени.

В разделах 3.7.1–3.7.4 подход, описанный в разделах 3.7.2–3.6, будет развит для решения следующих задач:

- 1) управление объектами, у которых размерность сигнала управления может быть меньше размерности регулируемого сигнала;

- 2) обеспечение регулируемого и управляющего сигналов в заданном множестве в любой момент времени;
- 3) использование аппарата линейных матричных неравенств для анализа устойчивости замкнутой системы и синтеза параметров регулятора.

3.1 Общая постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u, t), \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{3.1}$$

где $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ – сигнал управления, $y = \text{col}\{y_1, \dots, y_v\}$ – выходной сигнал, вектор-функция F определена для всех x , u и t , кусочно-непрерывна и ограничена по t , $h(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция по x . Объект управления (3.1) управляемый и наблюдаемый для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Требуется разработать закон управления, который обеспечит нахождение выходного сигнала объекта $y(t)$ в следующем множестве

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^v : \underline{g}_i(t) < y_i(t) < \bar{g}_i(t), i = 1, \dots, v\}\tag{3.2}$$

для любых $t \geq 0$,

где $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$ – ограниченные функции вместе со своими первыми производными по времени. Данные функции выбираются разработчиком исходя из требований работы системы. Например, при управлении электрическим генератором [44] требуется поддержание частоты $w(t)$ и выходного напряжения $V(t)$ в заданных пределах: $\underline{w} < w(t) < \bar{w}$ и $\underline{V} < V(t) < \bar{V}$.

3.2 Метод решения. Основной результат

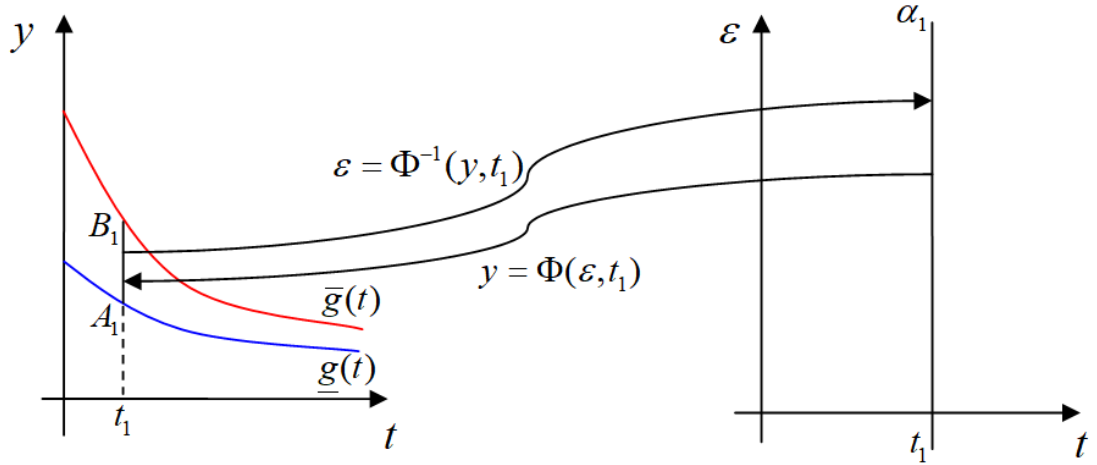
Рассмотрим сначала основную идею решения. Для ее иллюстрации положим, что $y \in \mathbb{R}$ в (3.1) и $\underline{g}(t) < y(t) < \bar{g}(t)$ в (3.2). Выберем произвольное значение $t = t_1$ и обозначим интервал $A_1 B_1 = (\underline{g}(t_1); \bar{g}(t_1))$ (см. рис. 3.1 слева). Введем новую систему координат (см. рис. 3.1 справа) с $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и рассмотрим в ней вертикальную прямую α_1 в момент времени t_1 . Интервал $A_1 B_1$ и прямая α_1 являются эквивалентными множествами в том смысле, что между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие [32] вида $y(t_1) = \Phi(\varepsilon(t_1), t_1)$ и $\varepsilon(t_1) = \Phi^{-1}(y(t_1), t_1)$. Поскольку значение t_1 произвольно, то можно ввести замену координат, устанавливающую взаимнооднозначное соответствие для любого момента времени. В результате исходная задача с ограничениями на выходной сигнал будет преобразована к новой задаче без ограничений в новом пространстве, где для обеспечения устойчивости новой системы могут быть использованы любые существующие методы управления.

Введем замену выходной переменной y в общем виде как

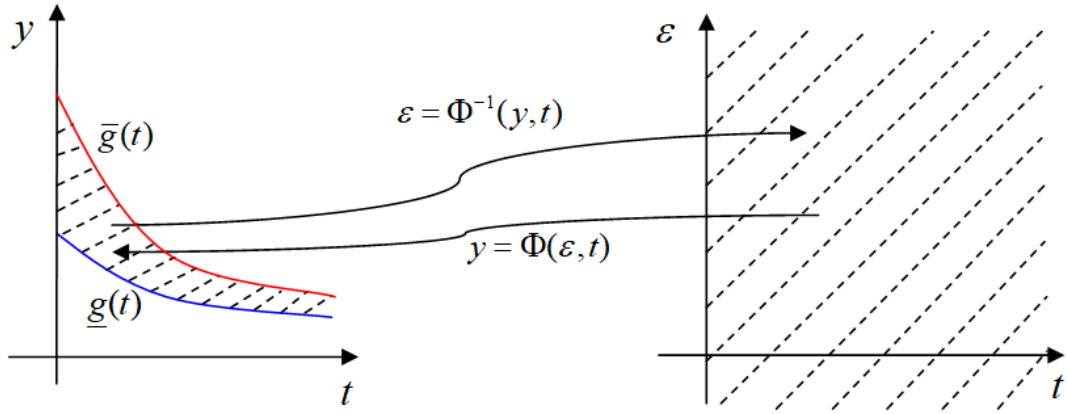
$$y(t) = \Phi(\varepsilon(t), t), \quad (3.3)$$

где $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^v$ – непрерывно-дифференцируемая вектор-функция по t , функция $\Phi(\varepsilon, t) = \text{col}\{\Phi_1(\varepsilon, t), \dots, \Phi_v(\varepsilon, t)\}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (а) $\underline{g}_i(t) < \Phi_i(\varepsilon, t) < \bar{g}_i(t)$, $i = 1, \dots, v$ для любых $t \geq 0$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$;
- (б) существует обратное отображение $\varepsilon = \Phi^{-1}(y, t)$ для любых $y \in \mathcal{Y}$ и $t \geq 0$;



a



б

Рисунок 3.1 — Упрощенная иллюстрация метода решения..

- (в) функция $\Phi(\varepsilon, t)$ непрерывно-дифференцируемая по ε и t , а также $\det \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right) \neq 0$ для любых $y \in \mathcal{Y}$ и $t \geq 0$;
- (г) функция $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$ ограничена по $t \geq 0$ для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$.

Теперь определим динамику по переменной ε для исследования устойчивости замкнутой системы. Для этого найдем полную производную по времени от (3.3) в виде $\dot{y} = \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$. Так как $\det \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right) \neq 0$ (см.

условие (в)), то перепишем последнее равенство как

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left(\dot{y} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right). \quad (3.4)$$

Выражение (3.4) содержит сигнал управления $u(t)$, так как $\dot{y} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} F(x, u, t)$ из (3.1). Теперь сформулируем основной результат настоящей главы.

Теорема 3.1 Пусть для преобразования (3.3) выполнены условия (а)-(г). Если существует такой закон управления $u(t) \subset U$, что решения (3.4) ограничены, то $y(t) \in \mathcal{Y}_\alpha \subset \mathcal{Y}$. Если при выбранном законе управления решения (3.4) неограниченны, то $y(t) \in \mathcal{Y}$.

Доказательство. Пусть выбран закон управления $u(t) \subset U$ так, что решения уравнения (3.4) ограничены, т.е. $|\varepsilon(t)| < N$ при любом t , где $0 < N < \infty$. Тогда в силу преобразования (3.3) и условия (а) следует, что $y \in \mathcal{Y}_\alpha = \{y \in \mathbb{R}^v : \underline{M}_i(t) < y_i(t) < \overline{M}_i(t), i = 1, \dots, v\}$, где $\underline{M}_i(t) = \inf_{|\varepsilon| < N} \{\Phi_i(\varepsilon, t)\}$ и $\overline{M}_i(t) = \sup_{|\varepsilon| < N} \{\Phi_i(\varepsilon, t)\}$ для любых $t \geq 0$. Поскольку (3.3) является взаимно однозначным отображением, то $\overline{M}_i(t) < \overline{g}_i(t)$ и $\underline{M}_i(t) > \underline{g}_i(t)$, значит, $\mathcal{Y}_\alpha \subset \mathcal{Y}$. Пусть теперь закон управления не обеспечивает ограниченность решения (3.4), т.е. $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^v$. Тогда в силу преобразования (3.3), а также условий (а) и (3.2) имеем, что $y \in \mathcal{Y}$, где $\underline{g}_i(t) = \inf_{\varepsilon \in \mathbb{R}^v} \{\Phi_i(\varepsilon, t)\}$ и $\overline{g}_i(t) = \sup_{\varepsilon \in \mathbb{R}^v} \{\Phi_i(\varepsilon, t)\}$. Теорема 3.6 доказана.

Замечание 3.1 Теорема 3.6 позволяет перейти от задачи управления (3.1) с ограничениями (3.2) к задаче управления (3.4) без ограничений. Следующие разделы демонстрируют возможность применения предложенного метода для некоторых типов задач.

З а м е ч а н и е 3.2 Предложенный метод позволяет решить задачу перевода объекта (3.1) в заданную область или точку за заданное время t_f при заданных ограничениях (3.2) на выходной сигнал. Перевод объекта в заданную область за конечное время реализуется соответствующим заданием функций $\underline{g}(t)$ и $\bar{g}(t)$, например, см. рис. 3.2, слева, где заданная область обозначена заштрихованной областью.

З а м е ч а н и е 3.3 Перевод объекта в заданную точку за конечное время задается путем заданием функций $\underline{g}(t)$ и $\bar{g}(t)$ в точке $t = t_f$ в виде $\lim_{t \rightarrow t_f^-} \underline{g}(t_f) = \lim_{t \rightarrow t_f^-} \bar{g}(t_f)$ (см. рис. 3.2, справа).

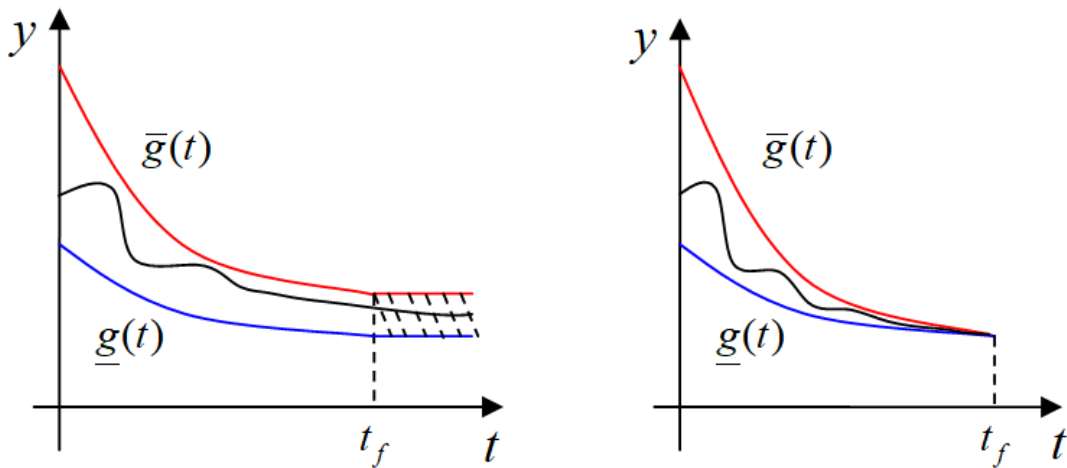


Рисунок 3.2 — Управление с переводом объекта в заданную область (слева) или точку (справа) за конечное время t_f .

3.3 Замена координат

3.3.1 Примеры

Приведем несколько примеров функции $\Phi(\varepsilon, t)$. В примерах 1 и 2 верхняя и нижняя границы множества будут зависеть от одной функции $g(t)$. В примерах 3 и 4 границы множества будут заданы независимыми функциями $\underline{g}(t)$ и $\bar{g}(t)$.

Пример 1. Пусть $\Phi(\varepsilon, t) = g(t)S(\varepsilon)$, где в данном случае функция $S(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ определяет замену координат, а функция $g(t) \in \mathbb{R}$ задает качество переходных процессов. Дополнительно, $g(t) \neq 0$ и $\dot{g}(t)$ – ограниченные функции, $S(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+|\varepsilon|} + r$ (см. пример функции $S(\varepsilon)$ на рис. 3.3 для $r = 1$). Так как из (3.3) $y(t) = g(t)S(\varepsilon)$, то переменная $y(t)$ содержится в множестве $(r - 1)g(t) < y(t) < (r + 1)g(t)$ при $g(t) > 0$ или в множестве $(r + 1)g(t) < y(t) < (r - 1)g(t)$ при $g(t) < 0$. Обратное отображение имеет вид $\varepsilon = \frac{y - rg}{g - (y - rg)\text{sign}(\varepsilon)}$.

Пример 2. Зададим в примере 1 функцию $S(\varepsilon)$ в виде $S(\varepsilon) = \frac{\bar{r}e^\varepsilon + r}{e^\varepsilon + 1}$, где $0 < \underline{r} < \bar{r}$ (см. пример функции $S(\varepsilon)$ на рис. 3.3 для $\bar{r} = 1, 5$ и $\underline{r} = 0, 5$). Тогда из (3.3) обратное преобразование выглядит как $\varepsilon = \ln \frac{rg - y}{y - \bar{r}g}$. Переменная $y(t)$ находится в множестве $\underline{r}g(t) < y(t) < \bar{r}g(t)$ при $g(t) > 0$ или в множестве $\bar{r}g(t) < y(t) < \underline{r}g(t)$ при $g(t) < 0$.

Пример 3. Выберем $\Phi(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t)e^\varepsilon + g(t)}{e^\varepsilon + 1}$, где $\Phi(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, функции $\bar{g}(t)$, $\underline{g}(t)$, $\dot{\bar{g}}(t)$ и $\dot{\underline{g}}(t)$ ограниченные для любого t и $\underline{g}(t) < \bar{g}(t)$. С учетом (3.3) обратное преобразование $\varepsilon = \ln \frac{g - y}{y - \bar{g}}$ будет выполнено при $\underline{g}(t) < y(t) < \bar{g}(t)$ для любых t .

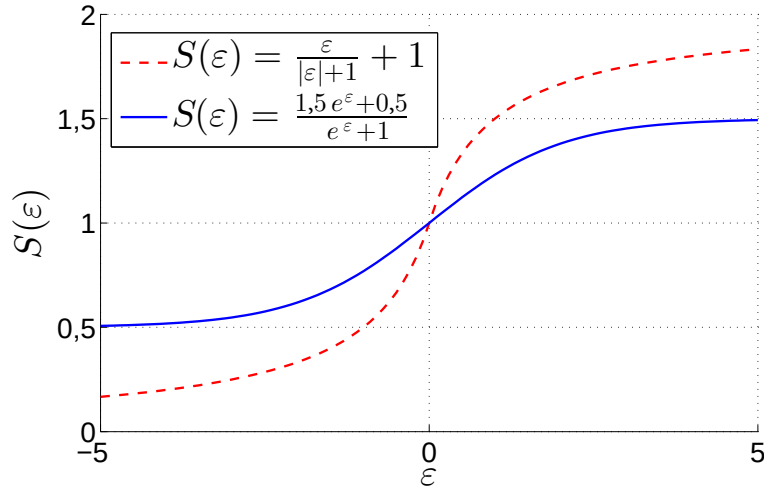


Рисунок 3.3 — Примеры функции $S(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+|\varepsilon|} + 1$ и $S(\varepsilon) = \frac{1.5e^\varepsilon + 0.5}{e^\varepsilon + 1}$.

Пример 4. Зададим $\Phi(\varepsilon, t)$ в виде $\Phi(\varepsilon, t) =$

$$\begin{cases} \bar{g}(t) + 0,5(\underline{g}(t) - \bar{g}(t))e^{-\varepsilon}, & \varepsilon \geq 0, \\ \underline{g}(t) + 0,5(\bar{g}(t) - \underline{g}(t))e^{\varepsilon}, & \varepsilon < 0, \end{cases}$$

где остальные функции, как и в примере 3. Принимая во внимание (3.3), обратное преобразование примет вид $\varepsilon =$

$$\begin{cases} \ln \frac{\bar{g}-g}{2(\bar{g}-y)}, & 0 \leq y < \bar{g}, \\ \ln \frac{2(y-\underline{g})\bar{g}-\underline{g}}{\bar{g}-\underline{g}}, & \underline{g} < y < 0. \end{cases}$$

Значит, $\underline{g}(t) < y(t) < \bar{g}(t)$ для любых t .

3.3.2 Обобщенная замена координат

Дополним раздел 3.3.1 более общей и «удобной» функцией замены переменной вида

$$\Phi(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t) - \underline{g}(t)}{2} T(\varepsilon) + \frac{\underline{g}(t) + \bar{g}(t)}{2}, \quad (3.5)$$

где $T(\varepsilon)$ – взаимнооднозначная функция такая, что $-1 < T(\varepsilon) < 1$ для любых ε .

В качестве примера $T(\varepsilon)$ могут быть следующие функции:

- 1) $T(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+|\varepsilon|}$ (см. пример 1);
- 2) $T(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon + 1} = \text{th}(0,5\varepsilon)$ (см. пример 2);
- 3) $T(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \text{arctg}(\varepsilon)$.

3.4 Управление линейным объектом с известными параметрами и измеряемым вектором состояния

Пусть объект управления описывается следующим линейным дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + G\varphi(x, t) + Bu + Df(x, t), \\ y &= Lx.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $\varphi(x, t) \in \mathbb{R}^k$ – известная нелинейная функция ограниченная по x и t , $f(x, t) \in \mathbb{R}^l$ – неизвестное возмущение ограниченное по x и t . Матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $G \in \mathbb{R}^{n \times k}$ и $L \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ известны, а матрица $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$ неизвестна. Пара (A, B) управляема и пара (L, A) наблюдаема. Объект (3.6) имеет относительную степень, равную единице ($LB \neq 0$ [?]).

Сформулируем результат, который содержит «простейший» закон управления в смысле «удобства» анализа замкнутой системы на устойчивость.

Теорема 3.2 Предположим, что для преобразования (3.3) выполнены условия (а)-(г), $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для любых ε и t , а также существует вектор $T \in \mathbb{R}^n$ такой, что матрица $A - B(LB)^{-1}LA - TL$ гурвицева. Тогда для любого $K > 0$ закон управления

$$u = -(LB)^{-1} [K\varepsilon + LAx + G\varphi(x, t)] \quad (3.7)$$

обеспечивает выполнение целевого условия (3.2).

Замечание 3.4 Отметим, что модель (3.6) с гурвицевой матрицей $A - B(LB)^{-1}LA - TL$ может описывать ряд технических систем. Например, дистилляционная колонна [14], [3, с. 569], где сигнал управления – расход орошения, а регулируемый сигнал – состав легких фракций верха колонны; летательный аппарат [3, с. 565] на различных высотах и числах Маха, где u – управление рулями высоты, y – вертикальное ускорение; электрический двигатель постоянного тока [207], где сигнал управления – входное напряжение, выходной сигнал – угловая скорость, и т.д.

Доказательство. Принимая во внимание преобразование (3.3) и уравнение объекта (3.6), перепишем выражение (3.4) в виде

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} (LAx + LBu + \psi), \quad (3.8)$$

где $\psi = LDf(x, t) + LG\varphi(x, t) - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$ – ограниченная функция по x , ε и t . Подставив закон управления (3.7) в первое уравнение (3.6) и уравнение (3.8), а также добавив в полученном выражении слагаемое $T\Phi(\varepsilon, t) - TLx(t) = 0$ (которое справедливо в силу (3.3) и второго уравнения (3.6)), получим

$$\begin{aligned} \dot{x} = & (A - B(LB)^{-1}LA - TL)x - KB(LB)^{-1}\varepsilon + \\ & - B(LB)^{-1}LG\varphi(x, t) + Df + T\Phi(\varepsilon, t), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} [-K\varepsilon + \psi]. \quad (3.10)$$

Введение вектора T позволяет рассматривать неустойчивые объекты (3.6).

Исследуем уравнение (3.10) на устойчивость по вход-состоянию. Для этого

выберем функцию Ляпунова вида $V = 0,5\varepsilon^2$. Подставив (3.10) в условие $\dot{V} + 2\alpha V \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} - \beta \psi^2 \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \leq 0$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, получим

$$-(K - \alpha)\varepsilon^2 + \varepsilon\psi - \beta\psi^2 \leq 0 \text{ или в виде } [\varepsilon \ \psi] \begin{bmatrix} -K + \alpha & 0,5 \\ 0,5 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \psi \end{bmatrix} \leq 0. \text{ По-}$$

следнее неравенство будет выполнено, если матрица $\begin{bmatrix} -K + \alpha & 0,5 \\ 0,5 & -\beta \end{bmatrix}$ будет

отрицательно определенной, что равносильно выполнению условий $K > \alpha$

и $(K - \alpha)\beta > 0,25$. Поскольку K заданное число, то для него всегда най-

дутся α и β такие, что данные условия будут выполнены. Значит, сигнал

$\varepsilon(t)$ будет ограниченным. Если матрица $A - B(LB)^{-1}LA - TL$ гурвицева,

то в силу ограниченности функций $\varepsilon(t)$, $\Phi(\varepsilon, t)$ и $f(t)$ сигнал $x(t)$ будет

ограниченным. Значит, закон управления u , определенный в (3.7), будет

ограничен. Тогда из теоремы 3.6 следует, что целевое условие (3.2) будет

выполнено. Теорема 3.2 доказана.

Пример 5. Продемонстрируем теперь качество переходных процессов

на примере управления объектом, параметры которого заданы в виде

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ L &= [1 \ 2], \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\varphi(x, t) = \sin(t) \sin(x_1 + x_2),$$

$$f(t) = 0,1 + \sin(3t) \cos(x_1 + x_2^2) + \text{sat} \left(\frac{d(t)}{0,3} \right),$$

где $\text{sat}(\cdot)$ – функция насыщения, сигнал $d(t)$ смоделирован в Matlab Simulink с помощью блока "Band-Limited White Noise" с мощностью шума 0,1 и временем выборки 0,1. Требуется обеспечить принадлежность выходного сигнала $y(t)$ множеству $\underline{r}g(t) < y(t) < \bar{r}g(t)$, где $\underline{r} = 0,8$ и $\bar{r} = 1$, а функция $g(t)$ будет определена ниже.

Матрица $A - B(LB)^{-1}LA - TL$ гурвицева, например, при любом $T = [T_1 \ T_2]^T$, где $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$. Зададим $K = 1$ в (3.7). Определим функцию $\Phi(\varepsilon, t)$, как в примере 2, задав $g(t)$ в виде

$$g(t) = (g_0 - g_\infty)e^{-kt} + g_\infty. \quad (3.12)$$

Здесь $g_0 = y(0) + 0,01$, $g_\infty = 0,1$ и $k = 0,5$. На рис. 3.4 приведены результаты переходных процессов по $y(t)$, $u(t)$ и $f(t)$. Колебания сигнала управления на рис. 3.4 вызваны наличием возмущения f . Причем, как видно из рис. 3.4 (справа), после 3 секунд с начала работы системы амплитуда колебаний сигнала управления соизмерима с величиной возмущения. На рис. 3.5 представлены результаты моделирования при отсутствии возмущения ($f = 0$). Таким образом, для стабилизации объекта в заданном

множестве не требуется большого значения управляющего сигнала.

Отметим, что на рис. 3.4 (и в последующих примерах) выходные сигналы не достигают границ желаемого множества, что согласуется с теоретическими выводами и что читатель может легко проверить путем моделирования. Для иллюстрации сказанного на рис. 3.4 приведен фрагмент рисунка в увеличенном масштабе.

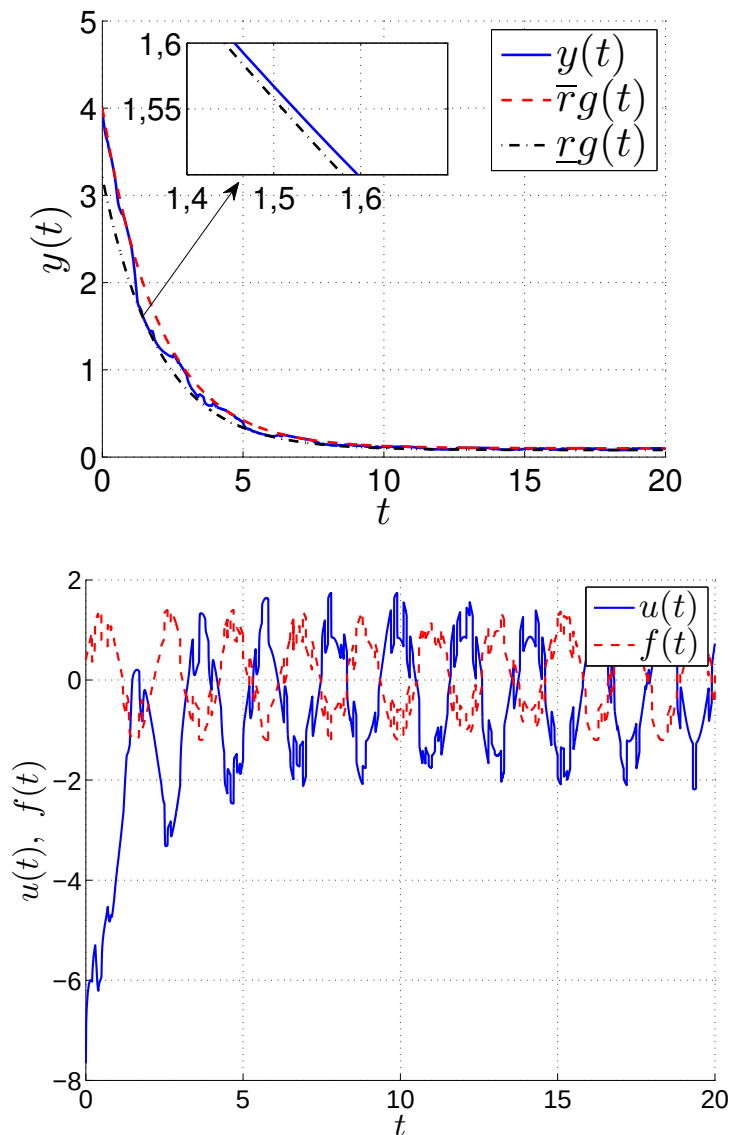


Рисунок 3.4 — Переходные процессы по $y(t)$, $u(t)$ и $f(t)$ при $g(t)$ вида (3.12).

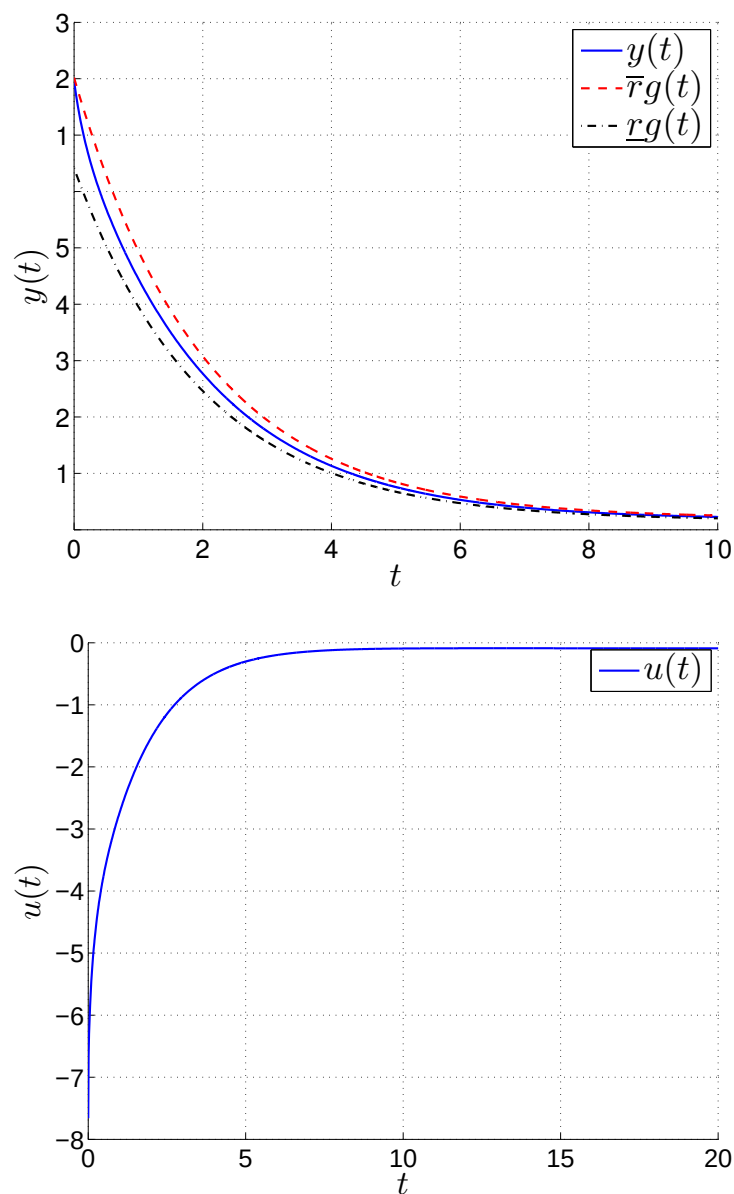


Рисунок 3.5 — Переходные процессы по $y(t)$ и $u(t)$ для $g(t)$ вида (3.13) при отсутствии возмущения ($f = 0$).

В отличие от [107] и рис. 3.4, 3.5, где границы целевого множества сходятся к некоторым числам, теперь обеспечим принадлежность выходного сигнала $y(t)$ ранее заданному множеству $0, 8g(t) < y(t) < g(t)$, где функция $g(t)$ не имеет предела:

$$g(t) = g_0 \sin(kt) + g_0 + g_\infty. \quad (3.13)$$

На рис. 3.6 приведены результаты моделирования по $y(t)$ и $u(t)$.

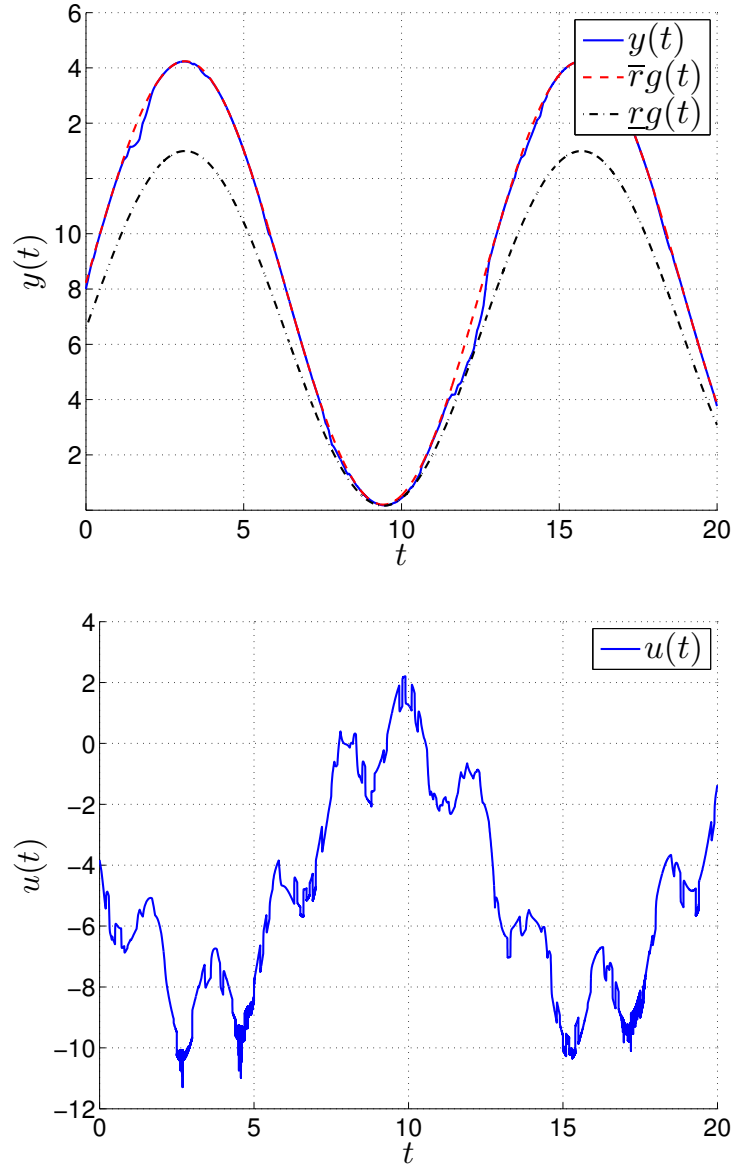


Рисунок 3.6 — Переходные процессы по $y(t)$ и $u(t)$ для $g(t)$ вида (3.13).

Из рис. 3.4-3.6 видно, что при $\underline{r} > 0$ и $\bar{r} > 0$ значение $y = 0$ недостижимо в силу преобразования координат из примера 2. Нулевое значение y может быть достигнуто только при $\underline{r} < 0$ и $\bar{r} > 0$ (с учетом $g(t) > 0$).

Однако в таком случае заданное множество будет более грубым по сравнению с множествами из рис. 3.4-3.6, поскольку нижняя граница желаемого множества будет находиться в отрицательной области значений y . Данная проблема будет преодолена в последующих примерах при использовании замены координат из примера 3.

3.5 Управление объектом по выходу с секторной нелинейностью в условиях возмущений

Рассмотрим объект управления вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + G\varphi(x) + Bu + Df, \\ y &= Lx.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^v$ ($v \leq m$), $f \in \mathbb{R}^l$ – неизвестная ограниченная функция, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$ и $L \in \mathbb{R}^{v \times n}$ – известные матрицы, неизвестная нелинейность $\varphi(x) \in \mathbb{R}^k$ удовлетворяет условию $|\varphi(x)| \leq C|x|$, $C > 0$ – известная константа. Пара (A, B) управляема и пара (L, A) наблюдаема. Объект (3.14) имеет строгую относительную степень (от англ. «strict relative degree»), равную единице (т.е. $L_i B_j \neq 0$, где L_i – i -я строка матрицы L и B_j – j -я строка матрицы B , $i, j = 1, \dots, n$ [58, 166]). Требуется разработать алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия (3.2).

Зададим закон управления в виде

$$u = K_1 y + K_2 \varepsilon,\tag{3.15}$$

где $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times v}$ и $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times v}$ выбираются разработчиком. В частности, K_1 и K_2 можно выбирать при условии, что матрицы $A + BK_1L$ и LK_2 гурвицевы. Принимая во внимание (3.3) и (3.15), а также добавив в полученном выражении слагаемые $T_1Lx - T_1\Phi(\varepsilon, t) = 0$ и $T_2Lx - T_2\Phi(\varepsilon, t) = 0$ (которые справедливы в силу (3.3) и второго уравнения (3.14)), перепишем (3.4) и (3.14) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} = & (A + BK_1L + T_1L)x + BK_2\varepsilon + G\varphi(x) + \\ & + Df - T_1\Phi(\varepsilon, t), \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = & \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} [LBK_2\varepsilon + (LA + LBK_1L + T_2L)x + \\ & + LG\varphi(x) + LDf - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} - T_2\Phi(\varepsilon, t)]. \end{aligned}$$

Здесь $T_1 \in \mathbb{R}^{n \times v}$, $T_2 \in \mathbb{R}^{v \times v}$, I – единичная матрица. Введение матриц T_1 и T_2 позволяет исследовать неустойчивые объекты (3.14).

Из второго уравнения (3.16) следует, что условие $v \leq m$ (т.е. $\dim \varepsilon \leq \dim u$) и единичная строгая относительная степень (3.14) позволит закону управления (3.15) обеспечить ограниченность $\varepsilon(t)$. Введем новые обозна-

чения

$$\begin{aligned}
x_e &= \text{col}\{x, \varepsilon\}, \\
f_e &= \text{col}\left\{f, \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}, \Phi(\varepsilon, t)\right\}, \\
A_{21}(\varepsilon, t) &= \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} (LA + LBK_1L + T_2L), \\
A_{22}(\varepsilon, t) &= \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} LBK_2, \\
A_e(\varepsilon, t) &= \begin{bmatrix} A + BK_1L + T_1L & BK_2 \\ A_{21}(\varepsilon, t) & A_{22}(\varepsilon, t) \end{bmatrix}, \\
G_e(\varepsilon, t) &= \begin{bmatrix} G \\ \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} LG \end{bmatrix}, \\
D_{21}(\varepsilon, t) &= \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} LD, \\
D_{22}(\varepsilon, t) &= -\left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}, \\
D_{23}(\varepsilon, t) &= -\left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} T_2, \\
D_e(\varepsilon, t) &= \begin{bmatrix} D & 0 & -T_1 \\ D_{21}(\varepsilon, t) & D_{22}(\varepsilon, t) & D_{23}(\varepsilon, t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

и перепишем (3.16) в виде

$$\dot{x}_e = A_e(\varepsilon, t)x_e + G_e(\varepsilon, t)\varphi(x) + D_e(\varepsilon, t)f_e. \tag{3.18}$$

Теорема 3.3 Предположим, что для преобразования (3.3) выполнены условия (а)-(г), $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для любых ε и t . Пусть для заданных $\alpha > 0$, K_1 , K_2 , T_1 и T_2 существует коэффициент $\beta > 0$ и матрица $P = P^T > 0$ такие, что выполнено матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}(\varepsilon, t) & PG_e(\varepsilon, t) & PD_e(\varepsilon, t) \\ * & -I & 0 \\ * & * & -\beta I \end{bmatrix} \leq 0. \tag{3.19}$$

Здесь $\Psi_{11}(\varepsilon, t) = A_e(\varepsilon, t)^T P + P A_e(\varepsilon, t) + \alpha P + C^2 E^T E$, ” * ” определяет симметричный блок симметричной матрицы, $E = [I \ 0]$. Тогда закон управления (3.15) обеспечивает выполнение целевого условия (3.2).

Доказательство. Для анализа устойчивости (3.18) зададим функцию Ляпунова в виде $V = x_e^T P x_e$, где $P = P^T > 0$. С учетом (3.18), подставив выражение для V в неравенство

$$\dot{V} + \alpha V - \beta f_e^T f_e \leq 0, \quad (3.20)$$

получим

$$\begin{aligned} & x_e^T [A_e(\varepsilon, t)^T P + P A_e(\varepsilon, t) + \alpha P] x_e \\ & + 2x_e^T P G_e(\varepsilon, t) \varphi(x) + 2x_e^T P D_e(\varepsilon, t) f_e - \beta f_e^T f_e \leq 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Введем новый вектор $z = \text{col}\{x_e, \varphi(x), f_e\}$ и перепишем неравенство (3.21) в виде

$$z^T \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11}(\varepsilon, t) & P G_e(\varepsilon, t) & P D_e(\varepsilon, t) \\ * & 0 & 0 \\ * & * & -\beta I \end{bmatrix} z \leq 0. \quad (3.22)$$

Здесь $\bar{\Psi}_{11}(\varepsilon, t) = A_e(\varepsilon, t)^T P + P A_e(\varepsilon, t) + \alpha P$. По условию задачи $\varphi^2(x) \leq C^2 x_e^T E^T E x_e$. Перепишем данное условие в виде

$$z^T \begin{bmatrix} C^2 E^T E & 0 & 0 \\ * & -I & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z \geq 0. \quad (3.23)$$

Согласно S-процедуре неравенства (3.22) и (3.23) будут одновременно выполнены, если будет выполнено неравенство (3.19). Значит, из условия (3.20) функция $x_e(t)$ ограничена, следовательно, сигналы $x(t)$ и $\varepsilon(t)$ ограничены. Тогда закон управления (3.15) будет ограниченным. В силу теоремы 3.6 цель управления (3.3) будет выполнена. Теорема 3.3 доказана.

Пример 6. Продемонстрируем качество управления на объекте с двумя входами и двумя выходами со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi(x, t) = \sin(t) [\sin(x_1) \quad \sin(x_2) \quad \sin(x_3)]^T,$$

$$f(x, t) = 1 + \sin(2t) \cos(x_1 + x_2^2 + x_3) + \text{sat} \left(\frac{d(t)}{0,3} \right),$$

функция $d(t)$ определена в (3.11).

Параметры регулятора (3.15) зададим в виде $K_1 = 0,01 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $K_2 = \begin{bmatrix} 1,5 & -1,75 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Дополнительно выберем $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ и $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Пусть $\Phi(\varepsilon, t) = \text{diag}\{\Phi_1(\varepsilon_1, t), \Phi_2(\varepsilon_2, t)\}$, где Φ_i определены, как в примере 3, т.е. $\Phi_i(\varepsilon_i, t) = \frac{\bar{g}_i(t)e^{\varepsilon_i} + g_i(t)}{e^{\varepsilon_i} + 1}$, $i = 1, 2$. Значит, $\Phi(\varepsilon, t) > 0$ для лю-

бых ε и t . Тогда $\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i} = \frac{e^{\varepsilon_i}(\bar{g}_i(t) - \underline{g}_i(t))}{(e^{\varepsilon_i} + 1)^2} > 0$, так как $\bar{g}_i(t) > \underline{g}_i(t)$. Дополнительно, $\left(\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i}\right)^{-1} \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow +\infty$ и наименьшее значение $\left(\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i}\right)^{-1} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{4}{\bar{g}_i(t) - \underline{g}_i(t)} > 0$. Согласно [128], если выполнено линейное матричное неравенство в вершинах политопа, то и внутри политопа линейное матричное неравенство будет выполнено. В рассматриваемом случае при каждом фиксированном $\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i}$ матричное неравенство (3.19) является линейным. Однако политоп не замкнутый, так как $\left(\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i}\right)^{-1} \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow +\infty$. Численное моделирование при увеличении $\left(\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i}\right)^{-1}$ показало, что собственные числа матрицы P сходятся к некоторым положительным значениям. В вершинах $\frac{4}{\bar{g}_i(t) - \underline{g}_i(t)}$ матричное неравенство (3.19) также выполнено.

Зададим параметры функции $\Phi(\varepsilon, t)$ в виде

$$\begin{aligned}\bar{g}_1(t) &= (g_0 - g_1)e^{-kt} + g_1, \\ \bar{g}_2(t) &= (g_0 - g_2)\cos(kt) + g_4, \\ \underline{g}_1(t) &= (g_0 - g_2)e^{-kt} + g_3, \\ \underline{g}_2(t) &= \cos(kt) + g_5,\end{aligned}\tag{3.24}$$

где $g_0 = \sqrt{y^T(0)y(0)} + 0,01$, $g_1 = 0,1$, $g_2 = 2$, $g_3 = -0,2$, $g_4 = g_0 - 0,1$, $g_5 = 0,8$ и $k = 0,5$.

На рис. 3.7, 3.8 приведены результаты переходных процессов по $y_1(t)$, $y_2(t)$ и $u(t) = \text{col}\{u_1(t), u_2(t)\}$ при $x(0) = \text{col}\{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1\}$.

Исследования робастности замкнутой системы с законом управления $u = K_1 y + K_2 \varepsilon$ по отношению к параметрам объекта (3.6) путем моделирования показали, что замкнутая система сохраняет устойчивость

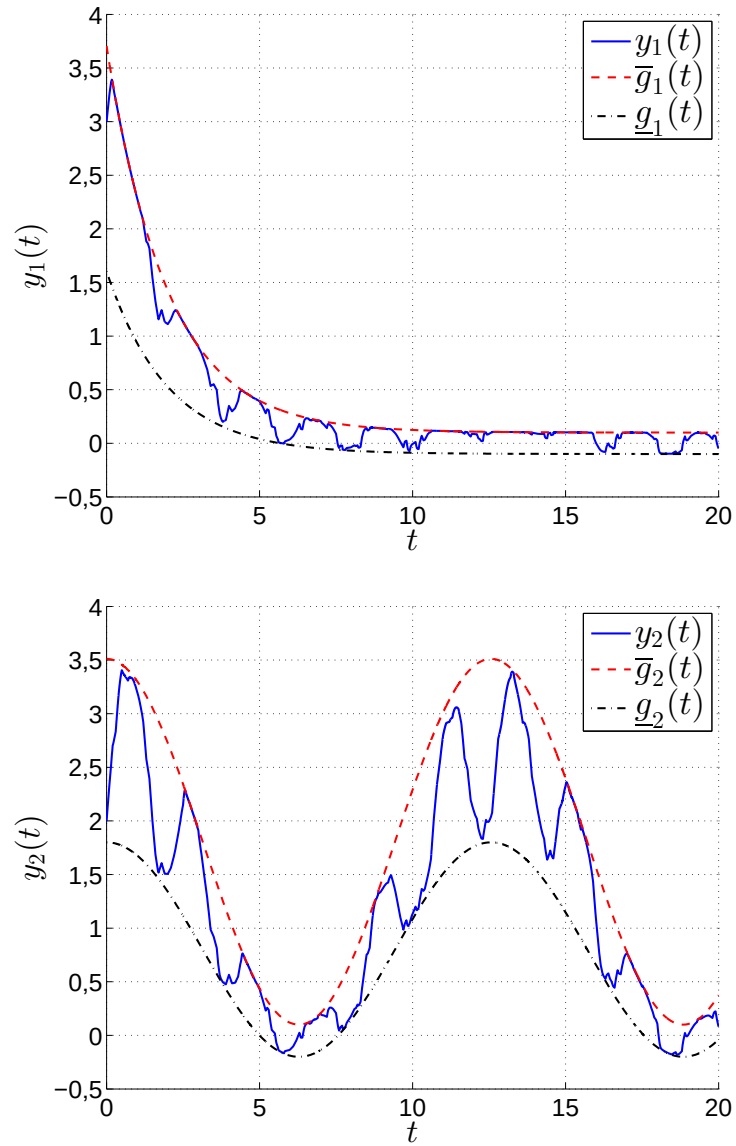


Рисунок 3.7 — Переходные процессы по $y_1(t)$ и $y_2(t)$ для функции $\Phi(\varepsilon, t)$ с параметрами (3.24) при $x(0) = \text{col}\{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1\}$.

и обеспечивает выполнение цели управления при $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ и

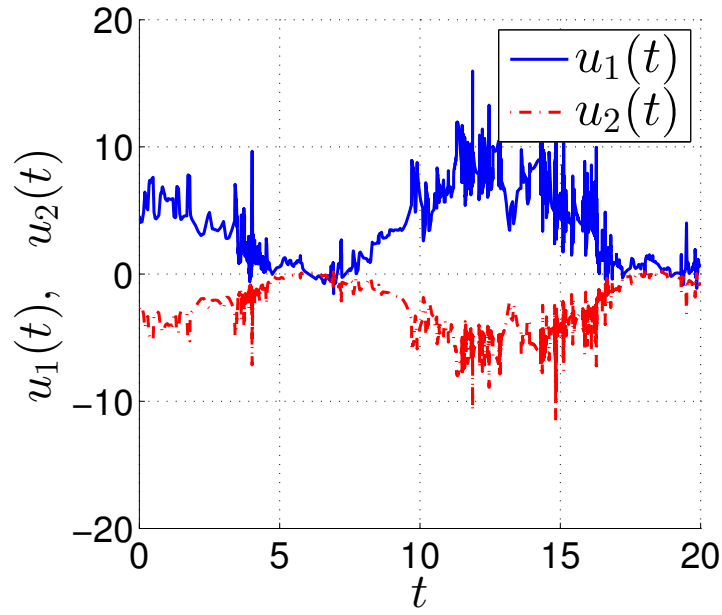


Рисунок 3.8 — Переходные процессы по $u(t) = \text{col}\{u_1(t), u_2(t)\}$ для функции $\Phi(\varepsilon, t)$ с параметрами (3.24) при $x(0) = \text{col}\{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1\}$.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{\varphi 1} & g_{\varphi 2} & g_{\varphi 3} \end{bmatrix}, \text{ где } a_1 \in [-5; 0, 1], a_2 \in [-5; -2], a_3 \in [-5; -3],$$

$b \in [0, 5; 10]$ и $g_{\varphi 1} \in [-3; 3], g_{\varphi 2} \in [-3; 3]$ и $g_{\varphi 3} \in [-3; 3]$.

Исследование робастности по отношению к начальным значениям объекта показало следующее. Согласно условиям (3.3) и (а) начальные значения $y_i(0)$ должны быть согласованы с неравенствами $\underline{g}_i(0) < y_i(0) < \bar{g}_i(0)$, $i = 1, 2$. Однако начальные условия могут иметь существенную неопределенность, и если они оказались на границе заданной области или за ее пределами, то закон управления будет неработоспособным в силу того, что обратная функция не существует при таких значениях (см. пример 3). Для решения данной проблемы $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$ в (3.24) можно задавать с «запасом» в начальный момент времени, например в виде

$$\begin{aligned}
\bar{g}_1(t) &= (g_0 - g_1)e^{-kt} + g_1 + g_6e^{-k_0t}, \\
\bar{g}_2(t) &= (g_0 - g_2)\cos(kt) + g_4 + g_6e^{-k_0t}, \\
\underline{g}_1(t) &= (g_0 - g_2)e^{-kt} + g_3 - g_6e^{-k_0t}, \\
\underline{g}_2(t) &= \cos(kt) + g_5 - g_6e^{-k_0t},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

где $g_6 > 0$ и $k_0 > 0$. Причем для покрытия большой области начальных значений с обеспечением нахождения выходных переменных объекта в множестве (3.24) необходимо g_6 и k_0 выбирать достаточно большими числами. Результаты моделирования по выходным сигналам $y_1(t)$ и $y_2(t)$ представлены на рис. 3.9 при $g_6 = 3$ и $k_0 = 2$ (значения g_6 и k_0 не выбраны достаточно большими числами для иллюстрации результата на рисунке) в (3.25), а также $x(0) = \text{col}\{\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -1\}$.

Анализ результатов моделирования также показал, что если:

1) время переходного процесса по $y(t)$ соизмеримо со временем переходного процесса по $\varepsilon(t)$;

2) функция $|f(t)|$ принимает большие значения,

то переходные процессы по y могут протекать почти на границах $\bar{g}(t)$ и $\underline{g}(t)$. Из выражения $\varepsilon = \ln \frac{g-y}{y-\underline{g}}$ следует, что величина $|\varepsilon(t)|$ может принимать большие значения, а значит, возрастет вычислительная нагрузка на систему управления. В результате увеличивается работа Matlab/Simulink, а иногда Matlab/Simulink выдает ошибку в вычислениях. Для предотвращения данной проблемы рекомендуется выбирать настраиваемые параметры так, чтобы переходные процессы по $\varepsilon(t)$ протекали быстрее, чем по $y(t)$. Это также позволит повысить робастность по отношению к параметрической неопределенности в объекте и влиянию возмущения f . Так, из рис.

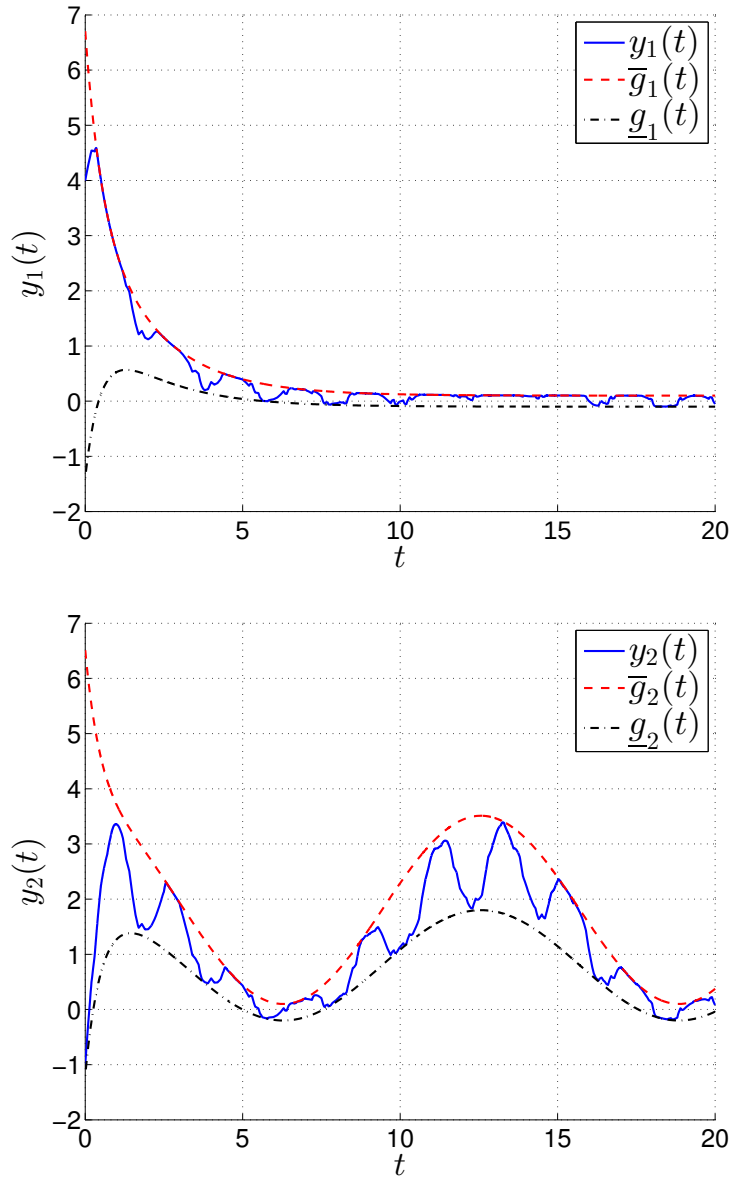


Рисунок 3.9 — Переходные процессы по $y_1(t)$ и $y_2(t)$ для функции $\Phi(\varepsilon, t)$ с параметрами (3.25) при $x(0) = \text{col}\{\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -1\}$.

3.10 видно, что при увеличении $\gamma > 0$ в законе управления $u = K_1 y + \gamma K_2 \varepsilon$ переходные процессы по y отдаляются от границ $\underline{g}(t)$ и $\bar{g}(t)$.

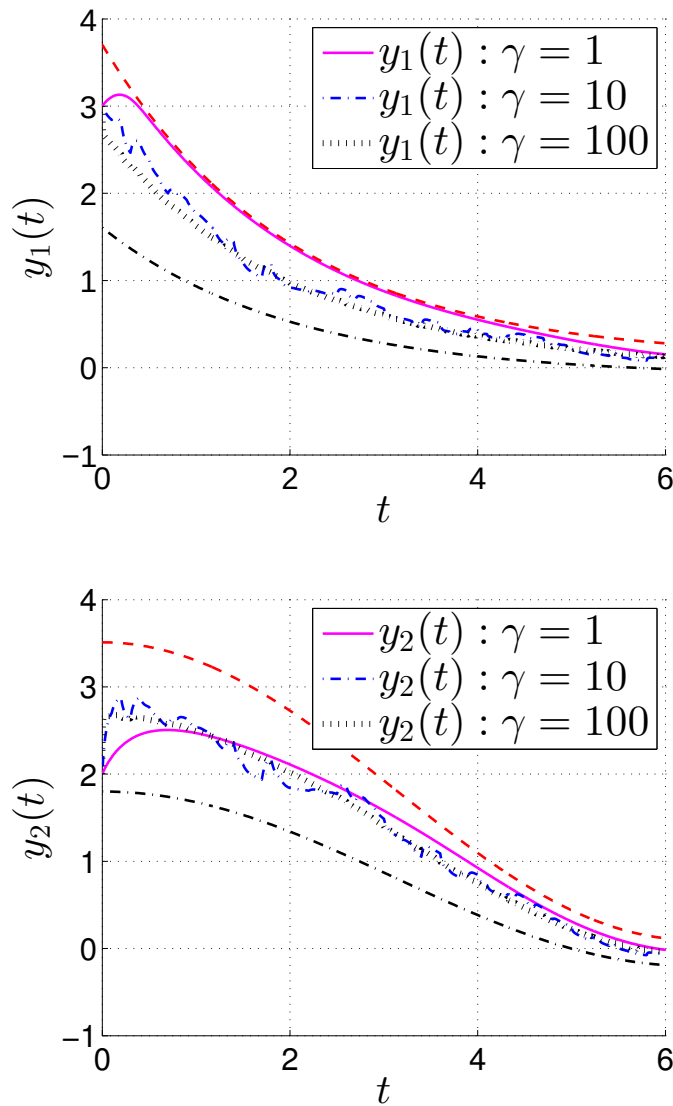


Рисунок 3.10 — Переходные процессы по $y_1(t)$ и $y_2(t)$ при $\gamma = 1$, $\gamma = 10$ и $\gamma = 100$ при $x(0) = \text{col}\{1 \ 1 \ 0\}$.

3.6 Динамический регулятор для объектов с произвольной относительной степенью

Результаты разделов 3.4 и 3.5 справедливы при относительной степени объекта, не превышающей единицы. Хорошо известно, что управление объектами со скалярными входными и выходными сигналами и с произвольной

относительной степенью в условиях параметрической неопределенности является сложной задачей относительно обоснования работоспособности алгоритма, см., например, [10,95]. Поскольку основная цель главы – обеспечение целевого условия (3.2) с применением нового преобразования (3.3), то в настоящем разделе ради простоты выводов рассматривается объект со скалярными входным и выходным сигналами и с известными параметрами, но с произвольной относительной степенью. В численном примере будет продемонстрирована работоспособность алгоритма по отношению к параметрической неопределенности.

3.6.1 Линейные объекты с известными параметрами

Пусть объект управления описывается уравнением

$$Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t). \quad (3.26)$$

Здесь $y \in \mathbb{R}$ – выходной сигнал, $u \in \mathbb{R}$ – сигнал управления, $f \in \mathbb{R}$ – ограниченное возмущение, $Q(p)$ и $R(p)$ – линейные дифференциальные операторы с известными коэффициентами, $Q(\lambda)$ – гурвицевый полином, λ – комплексная переменная, $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования. Требуется разработать алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия (3.2).

Подставив $y(t)$ из (3.26) в (3.4), получим

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left(\frac{pR(p)}{Q(p)} u(t) + \frac{pD(p)}{Q(p)} f(t) - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right). \quad (3.27)$$

Закон управления $u = -\frac{Q(p)}{pR(p)} K \varepsilon$, где $K > 0$, позволил бы свести уравнение (3.27) к виду $\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left(-K \varepsilon + \frac{pD(p)}{Q(p)} f(t) - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right)$, решение ко-

торого было бы ограниченным при $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$. Обозначим относительную степень объекта (3.26) через $\rho = \deg Q(p) - \deg R(p)$. Тогда приведенный закон управления не реализуем при $\rho > 1$ из-за требований к наличию $\rho - 1$ производных от сигнала $\varepsilon(t)$. Поэтому зададим закон управления в виде

$$u = -\frac{Q(p)}{R(p)[p(\mu p + 1)^{\rho-1} + a\mu]} K\varepsilon. \quad (3.28)$$

Здесь достаточно малое число $\mu > 0$ и коэффициент $a > 0$ выбираются из условия гурвицевости полинома $\lambda(\mu\lambda + 1)^{\rho-1} + a\mu$. Учитывая (3.28), перепишем (3.26) и (3.27) как

$$y(t) = -K \frac{1}{p(\mu p + 1)^{\rho-1} + a\mu} \varepsilon(t) + \frac{D(p)}{Q(p)} f(t), \quad (3.29)$$

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left(-K\varepsilon - K \frac{p - p(\mu p + 1)^{\rho-1} - a\mu}{p(\mu p + 1)^{\rho-1} + a\mu} \varepsilon + \phi \right), \quad (3.30)$$

где $\phi = \frac{pD(p)}{Q(p)} f(t) - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$ – ограниченная функция.

Теорема 3.4 Пусть для преобразования (3.3) выполнены условия (a)-(z), $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для любых ε и t . Тогда существуют коэффициенты μ_0 и a такие, что при $\mu < \mu_0$ полином $\lambda(\mu\lambda + 1)^{\rho-1} + a\mu$ гурвицев и закон управления (3.28) обеспечивает выполнение целевого условия (3.2).

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3.30), которое является регулярно возмущенным при малом параметре μ . Перепишем (3.30) при $\mu = 0$ в виде

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial \Phi(\bar{\varepsilon}, t)}{\partial \bar{\varepsilon}} \right)^{-1} (-K\bar{\varepsilon} + \phi). \quad (3.31)$$

Для анализа устойчивости (3.31) зададим функцию Ляпунова как $V = 0,5\bar{\varepsilon}^2$. Проверим условие $\dot{V} + 2\alpha V \left(\frac{\partial \Phi(\bar{\varepsilon}, t)}{\partial \bar{\varepsilon}} \right)^{-1} - \beta \left(\frac{\partial \Phi(\bar{\varepsilon}, t)}{\partial \bar{\varepsilon}} \right)^{-1} \phi^2 < 0$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Подставив V и (3.31) в последнее неравенство, получим $-(K - \alpha)\bar{\varepsilon}^2 + \bar{\varepsilon}\phi - \beta\phi^2 < 0$. Данное неравенство будет выполнено при выполнении условия $K > \alpha$ и $(K - \alpha)\beta > 0,25$ (см. доказательство теоремы 3.7). Поскольку α и β – произвольные числа, то всегда можно обеспечить выполнение данных условий при заданном K . Следовательно, решение уравнения (3.31) предельно ограниченное. Значит, согласно теореме 2.2 из [16] существует μ_0 такое, что при $\mu < \mu_0$ выполнено условие $|\bar{\varepsilon}(t) - \varepsilon(t)| < O(\mu)$, где $\lim_{\mu \rightarrow 0} O(\mu) = 0$. В результате при $\mu < \mu_0$ решение уравнения (3.30) также предельно ограниченное. Тогда в силу ограниченности $f(t)$ и $\varepsilon(t)$, а также гурвицевости $Q(\lambda)$ и $\lambda(\mu\lambda + 1)^{\rho-1} + a\mu$ сигнал $y(t)$ будет ограниченным из (3.29). Значит, закон управления u будет ограничен из (3.28). Тогда из теоремы 5.1 следует, что целевое условие (3.3) будет выполнено. Теорема 3.4 доказана.

3.6.2 Нелинейные объекты с неизвестными параметрами

Пусть объект управления описывается следующим уравнением

$$Q(p)y(t) = kR(p)u(t) + f(y, t). \quad (3.32)$$

Здесь нелинейная функция $f(y, t) \in \mathbb{R}$ ограничена по t и ограничена по y если $y(t)$ ограничено по t . Нормированные полиномы $Q(s)$ и $R(s)$ содержат неизвестные параметры. Коэффициент $k > 0$ неизвестный, но $\bar{k} \geq k$, где $\bar{k}$ известно.

Пусть $Q(s) = Q_m(s) + \Delta Q(s)$ и $R(s) = R_m(s) + \vartheta \Delta R(s)$, где $Q_m(s)$

и $R_m(s)$ – нормированные гурвицевы полиномы порядков n и m соответственно (следовательно, $\deg \Delta Q(s) = n - 1$ и $\deg \Delta R(s) = m - 1$), $0 < \vartheta < \bar{\vartheta}$, параметр $\bar{\vartheta}$ известен. Найдем преобразование Лапласа от (3.32) как $y(s) = \frac{kR_m(s)}{Q_m(s)}u(s) + \frac{k\vartheta\Delta R_m(s)}{Q_m(s)}u(s) - \frac{\Delta Q(s)}{Q_m(s)}y(s) + \frac{1}{Q_m(s)}f(y, s) + \epsilon(s)$, где $\epsilon(s)$ зависит от ненулевых начальных условий (3.32) и $\epsilon(t)$ – экспоненциально затухающая функция. Дифференцируя $y(t)$ и подставляя $\dot{y}(t)$ в (3.32), найдем обратное преобразование Лапласа в виде

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) = & \left(\frac{\partial \Phi(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} \right)^{-1} \left(\frac{kpR_m(p)}{Q_m(p)}u(t) + \frac{k\vartheta p\Delta R(p)}{Q_m(p)}u(t) \right. \\ & \left. - \frac{p\Delta Q(p)}{Q_m(p)}y(t) + \frac{p}{Q_m(p)}f(y, t) + \dot{\epsilon}(t) - \frac{\partial \Phi(\epsilon, t)}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Введем закон управления в виде

$$u(t) = -\frac{Q_m(p)}{pR_m(p)}K\epsilon(t), \quad (3.34)$$

где $K > 0$ и перепишем уравнение (3.33) как

$$\dot{\epsilon}(t) = \left(\frac{\partial \Phi(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} \right)^{-1} \left(-kK\epsilon(t) - \frac{kK\vartheta\Delta R(p)}{R_m(p)}\epsilon(t) + \phi(t) \right). \quad (3.35)$$

Здесь $\phi(t) = \frac{p}{Q(p)}f(y, t) - \frac{p\Delta Q(p)}{Q_m(p)}y(t) - \frac{\partial \Phi(\epsilon, t)}{\partial t} + \dot{\epsilon}(t)$. Сигнал $y(t)$ ограничен из теоремы 3.6, значит, функция $\phi(t)$ также ограничена. Если $\vartheta > 0$ – достаточно малое число, тогда имеем дифференциальное уравнение с регулярными возмущениями. Система (3.35) устойчива по вход-состоянию-выход, если $\vartheta = 0$. Следовательно, согласно [16], существует $\bar{\vartheta} > \vartheta$ такое, что система (3.35) устойчива по вход-состоянию-выход при $\frac{\partial \Phi(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} > 0$. Однако закон управления (3.34) нереализуем при $\rho = \deg Q(p) - \deg R(p) > 1$, так как $(\rho - 1)$ -ые производные от сигнала ϵ должны быть доступны измерению. Принимая во внимание (3.34), введем новый закон управления

$$u = -\frac{Q_m(p)}{R_m(p)[p(\mu p + 1)^{\rho-1} + a\mu]}K\epsilon. \quad (3.36)$$

Здесь достаточно малое число $\mu > 0$ и коэффициент $a > 0$ выбираются так, что полином $s(\mu s + 1)^{\rho-1} + a\mu$ гурвицев.

С учетом (3.36), перепишем (3.32) и (3.33) в виде

$$\begin{aligned} y(t) = & -kK \frac{1}{p(\mu p + 1)^{\rho-1} + a\mu} \varepsilon(t) - \\ & -kK \frac{\vartheta \Delta R(p)}{R_m(p)[p(\mu p + 1)^{\rho-1} + a\mu]} \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\Delta Q(p)}{Q_m(p)} y(t) + \frac{1}{Q_m(p)} f(t) + \epsilon(t), \\ & \quad \quad \quad (3.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = & \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \\ & \times \left(-kK \varepsilon(t) - kK \frac{p - p(\mu p + 1)^{\rho-1} - a\mu}{p(\mu p + 1)^{\rho-1} + a\mu} \varepsilon(t) \right. \\ & \left. - kK \frac{\vartheta p \Delta R(p)}{R_m(p)[p(\mu p + 1)^{\rho-1} + a\mu]} \varepsilon(t) + \phi(t) \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Теорема 3.5 Пусть условия (а)-(в) выполнены для преобразования (3.3), $\bar{\vartheta} \leq \mu$ и $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для всех ε и t . Для заданных $\alpha > 0$ и $K > 0$ существуют $\beta > 0$, $\mu_0 > 0$ и a такие, что для $\mu < \mu_0$ полином $s(\mu s + 1)^{\rho-1} + a\mu$ гурвицев и выполнено следующее линейное матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} \alpha - \bar{k}K & 0.5 \\ 0.5 & -\beta \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.40)$$

Тогда закон управления (3.36) обеспечивает цель (3.2).

С учетом условия $\bar{\vartheta} \leq \mu$ доказательство теоремы 3.5 аналогично доказательству теоремы 3.4.

Пример 7. Пусть параметры объекта управления (3.32) определены в виде $Q(p) = (p - 1)^3$, $R(p) = 1$, $k = 1$ и возмущение $f(y, t) = \sin(t) \ln(\sin(y) + |y| + 1) + y^2 + y^3 + 10 \text{sat} \left(\frac{d(t)}{0.3} \right)$, где $d(t)$ задано в (3.11).

Параметры регулятора (3.34) зададим в виде $Q_m(p) = (p+1)^3$, $R_m(p) = 1$, $K = 3$, $\mu = 0,01$ и $a = 0,1$. Тогда закон управления (3.34) будет выглядеть как

$$u = -\frac{3(p+1)^3}{p(0,01p+1)^2+10^{-3}}\varepsilon. \quad (3.41)$$

Зададим функцию Φ , как в примере 3, где $\Phi(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t)e^\varepsilon + \underline{g}(t)}{e^\varepsilon + 1}$ и

$$\bar{g}(t) = \begin{cases} 2 \cos(t) + 0,2, & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ 2,2, & t > 2\pi; \end{cases}$$

$$\underline{g}(t) = \begin{cases} 2 \cos(t) - 0,2, & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ 1,8, & t > 2\pi. \end{cases}$$

Результаты моделирования показали, что закон управления (3.41) обеспечивает цель управления (3.2). Моделирование также показало, что замкнутая система робастна по отношению к параметрическим неопределенностям. Так, на рис. 3.11, 3.12 приведены результаты переходных процессов по $y(t)$ и $u(t)$ при $y(0) = 2$, $py(0) = p^2y(0) = 1$, неустойчивом полиноме $Q(\lambda) = (\lambda - 1)^3$ и регуляторе (3.41). Начальные всплески сигнала управления обусловлены рассогласованием начальных условий в регуляторе и в объекте управления. Однако после отработки регулятором рассогласования начальных условий дальнейший график управления принимает «небольшие» значения, которые соответствуют выходному сигналу в заданном множестве.

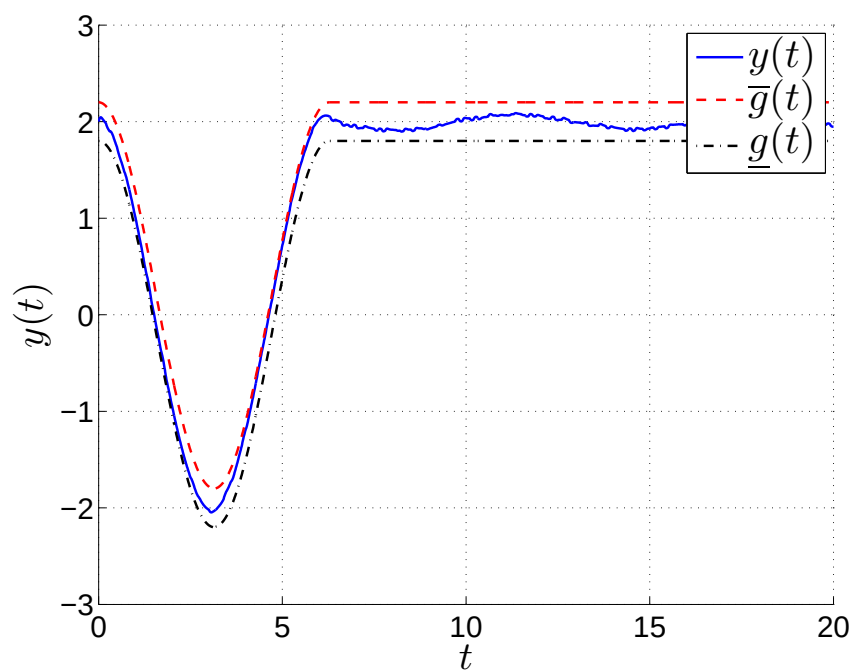


Рисунок 3.11 — Переходные процессы по $y(t)$.

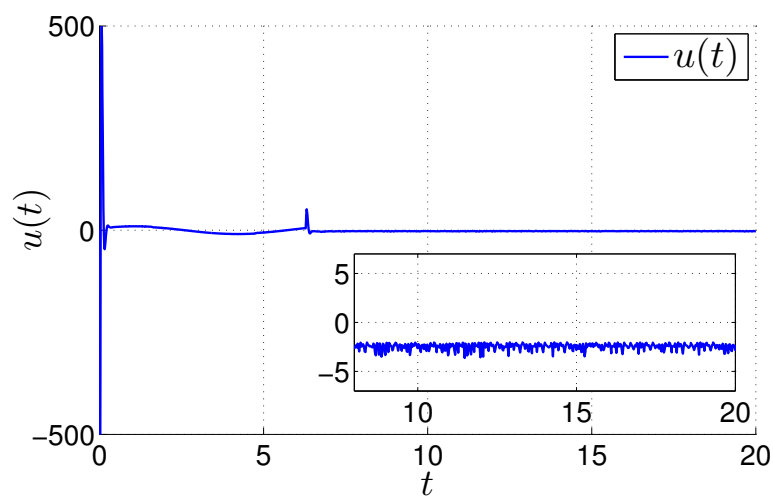


Рисунок 3.12 — График сигнала $u(t)$.

3.7 Управление с заданными ограничениями на входные и выходные сигналы

В разделе будем использовать следующее определение.

Определение 3.1 ([43, 94]) Непрерывная функция $\alpha : [0, a) \rightarrow [0; \infty)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, если она является строго возрастающей и $\alpha(0) = 0$.

3.7.1 Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u, t), \\ y &= H(x, u, t),\end{aligned}\tag{3.42}$$

где $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ – сигнал управления, $y = \text{col}\{y_1, \dots, y_l\} \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^l$ – выходной сигнал, функции F и H определены для всех x , u и t , F кусочно-непрерывна и ограничена по t , функция H непрерывно дифференцируемая по всем аргументам и ограниченная по t . Объект управления (3.42) управляемый и наблюдаемый для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

В отличие от [65] в настоящей главе не требуются ограничения вида $\dim u \geq \dim y$, а возможно произвольное соотношение между размерностями сигналов u и y . Это достигается за счет замены вида

$$\xi = G(y, u, t),\tag{3.43}$$

где размерность ξ не превосходит размерности управляющего сигнала, т.е. $\xi = \text{col}\{\xi_1, \dots, \xi_v\}$, $v \leq m$, G – непрерывно дифференцируемая функция по всем аргументам и ограниченная по t .

Замечание 3.5 Можно не ограничиваться только классом непрерывно дифференцируемых функций G , но и рассмотреть более общий

класс функций. Для этого рассмотрим следующее определение и комментарии к нему.

Определение 3.2 ([23]) Функция $u \rightarrow G(y, u, t)$ называется дифференцируемой в точке $u \in \mathbb{R}^m$ по направлению $v \in \mathbb{R}^m$, если существует конечный предел

$$G'_u(y, u, t; v) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{G(y, u + \alpha v, t) - G(y, u, t)}{\alpha}.$$

Если функция $u \rightarrow G(y, u, t)$ дифференцируема в точке u по любому направлению $v \in \mathbb{R}^m$, то она называется дифференцируемой по направлениям в точке u , а функция $v \rightarrow G'_u(y, u, t; v)$ называется производной функции $u \rightarrow G(y, u, t)$ по направлениям.

Пусть функция $G(y, u, t)$ локально липшицева, непрерывно дифференцируема по y и t и дифференцируема по направлениям по u . Тогда для любых абсолютно непрерывных функций $y(t)$ и $u(t)$ функция $G(y(t), u(t), t)$ также будет абсолютно непрерывной. Более того, по правилу вычисления производной по направлениям сложной функции [23] будет

$$\frac{d}{dt} G(y(t), u(t), t) = \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + G'_u(y(t), u(t), t; \dot{u}(t)) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

для почти всех $t \geq 0$. Здесь $G'_u(y(t), u(t), t; \dot{u}(t))$ – производная функции $u \rightarrow G(y(t), u, t)$ в точке $u(t)$ по направлению $\dot{u}(t)$.

Таким образом, когда рассматриваемая функция G не является дифференцируемой по u , но является дифференцируемой по направлениям по u , во всех выкладках величину $\frac{\partial G(y(t), u(t), t)}{\partial u} \dot{u}(t)$ можно заменить на $G'_u(y(t), u(t), t; \dot{u}(t))$.

Требуется разработать закон управления, который обеспечит выполнение условия

$$\underline{g}_i(t) < \xi_i(t) < \bar{g}_i(t), \quad i = 1, \dots, v \quad (3.44)$$

для всех t . Функция G и непрерывно дифференцируемые функции $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$ выбираются так, чтобы были учтены ограничения $u \in \mathcal{U}$ и $y \in \mathcal{Y}$. Таким образом, ограничения (3.44) вместе с преобразованием (3.43) должны включать в себя ограничения на входные и выходные сигналы объекта (3.42). Дополнительно, выбором функций $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$ можно задавать различную «конфигурацию» области, в которой осуществляется переходной процесс по $\xi_i(t)$.

Требуется синтезировать закон управления, который обеспечит выполнение условия (3.44). С другой стороны, определение переменной ξ обуславливает поведение сигналов y и u . Так, в разделах 5.7 и 5.4 функция G будет задана в квадратичной форме, что вместе с (3.44) требует нахождение переменных y и u в некоторой области, проекциями на координатные плоскости которой являются кольца с переменными радиусами, зависящими от $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$ (подробнее см. ниже). В замечаниях 3.9 и 3.11 приведены примеры других видов замен (3.43), что обуславливает другие формы областей, где будут находиться y и u .

3.7.2 Метод решения

Следуя [65], введем замену переменной ξ в виде

$$\xi(t) = \Phi(\varepsilon(t), t), \quad (3.45)$$

где $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^v$ – непрерывно дифференцируемая функция по t , $\Phi(\varepsilon, t) = \text{col}\{\Phi_1(\varepsilon, t), \dots, \Phi_v(\varepsilon, t)\}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (а) $\underline{g}_i(t) < \Phi_i(\varepsilon, t) < \bar{g}_i(t)$, $i = 1, \dots, v$ для любых $t \geq 0$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$;
- (б) существует обратное отображение $\varepsilon = \Phi^{-1}(\xi, t)$ для любых ξ из (3.44) и $t \geq 0$;
- (в) функция $\Phi(\varepsilon, t)$ непрерывно дифференцируемая по ε и t , а также $\det\left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon}\right) \neq 0$ для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$ и $t \geq 0$;
- (г) $\left|\frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}\right| \leq \gamma$, $\gamma > 0$ для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$ и $t \geq 0$. Величина γ известна, поскольку (3.45) определяется разработчиком.

Для синтеза закона управления потребуется знание динамики $\varepsilon(t)$. Найдем полные производные по времени от $y(t)$ и $\xi(t)$ вдоль траекторий (3.42), (3.43), (3.45) и приравняем полученные результаты для (3.43) и (3.45). В итоге получим

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x} F + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} &= \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial G}{\partial t}.\end{aligned}\tag{3.46}$$

Принимая во внимание условие в), выразим $\dot{\varepsilon}$ из (3.46) в виде

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} \left[\frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} F + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial u}\right) \dot{u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].\end{aligned}\tag{3.47}$$

З а м е ч а н и е 3.6 Если по условию задачи не доступно измерению состояние x , то для синтеза закона управления вместо (3.47) удобно использовать выражение, полученное из второго выражения в (3.46) в виде

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} \left[\frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].\tag{3.48}$$

В следующих разделах выражения (3.47) и (3.48) будут использоваться для синтеза законов управления. Теперь сформулируем основной результат настоящего раздела.

Теорема 3.6 Пусть для преобразования (3.45) выполнены условия а)-г), $\underline{g}_i(0) < \xi_i(0) < \bar{g}_i(0)$, $i = 1, \dots, v$, существует стабилизирующий закон управления $u = u(t, y, \varepsilon)$ для системы (3.47) или (3.48), кусочно-непрерывный по t и локально липшицевый по y и ε , а также существует функция Ляпунова $V(t, \varepsilon)$ такая, что

$$\begin{aligned} \alpha_1(|\varepsilon|) &\leq V(t, \varepsilon) \leq \alpha_2(|\varepsilon|), \\ \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[\frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right] \\ &\leq -\alpha_3(|\varepsilon|), \end{aligned} \quad (3.49)$$

где α_1 , α_2 и α_3 – $\mathcal{K}$ -функции. Тогда будет выполнено условие (3.44).

Так как выполнены условия (3.49), то $\varepsilon(t)$ – предельно ограниченная функция. Тогда из условия (а) следует, что будет выполнено условие (3.44).

Замечание 3.7 Условия теоремы 3.6 остаются справедливыми при ослабленных предположениях о дифференцируемости функции G , а именно, если G локально липшицева по всем переменным, непрерывно дифференцируема по y и t , и дифференцируема по направлениям по u . В этом случае в правой части второго равенства (3.46) второе слагаемое заменится на $G'_u(y, u, t; v)$ (см. определение 5.2). Значит, равенства (3.46)-(3.48) будут выполнены только для почти всех t . В результате в (3.47) и (3.48) необходимо заменить $\frac{\partial G}{\partial u} \dot{u}$ на соответствующую производную по направлениям и рассматривать все выкладки для почти всех t . Поэтому ниже в

доказательствах теорем 3.7 и 3.8 соответствующие (не-)равенства для производных выполняются для почти всех t .

В [65] предложены различные частные виды замены координат (3.45), не связанные друг с другом. Ниже приведем новый вид замены координат, который позволит связать преобразования из [65] и получить ряд новых видов замен.

Пример 1. Пусть $\Phi(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}$ в (3.45) задана в виде

$$\Phi(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t) - \underline{g}(t)}{2} T(\varepsilon) + \frac{g(t) + \bar{g}(t)}{2}, \quad (3.50)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $T(\varepsilon)$ – строго монотонная функция такая, что $-1 < T(\varepsilon) < 1$ для любых ε .

Достоинство замены координат (3.50) по сравнению с [65] состоит в том, что она позволяет отдельно выделить функции $\bar{g}(t)$, $\underline{g}(t)$ и $T(\varepsilon)$. Функции $\bar{g}(t)$ и $\underline{g}(t)$ определяют желаемую область для регулируемой переменной и задаются разработчиком. Функция $T(\varepsilon)$ определяет замену координат. Например, $T(\varepsilon)$ может быть выбрана в виде $T(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+|\varepsilon|}$, $T(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon + 1} = \text{th}(0, 5\varepsilon)$, $T(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \arctg(\varepsilon)$ и т.п.

Ниже рассмотрим применение предложенного подхода для тех же типов моделей, что и в [65]. Обобщение полученных результатов на случай неизвестных параметров модели может быть непосредственно получено как в [156].

3.7.3 Управление по состоянию с ограничением на фазовые переменные и сигнал управления

Рассмотрим объект управления

$$\dot{x} = Ax + Bu + Df, \quad (3.51)$$

где $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}$ и $|f(t)| \leq \bar{f}$ для всех t , матрицы A , B и D известны и имеют соответствующие размерности. Пара (A, B) управляема. В данном случае $y = x$. Множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{U}$ заданы как

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_x x \leq 1\}, \quad \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : p_u |u| \leq 1\}, \quad (3.52)$$

где $P_x > 0$ и $p_u > 0$ задаются разработчиком.

Для сравнения ограничений по x и u введем замены переменных $\tilde{x} = \sqrt{\lambda_{\min}(P_x)}x$ и $\tilde{u} = p_u u$, которые позволят пропорционально преобразовать $x^T P_x x \leq 1$ к новому эллипсоиду с наибольшей полуосью единичной длины и $p_u |u| \leq 1$ к новому отрезку длины 2. С учетом данной замены преобразуем уравнение объекта (3.51) и множества $\mathcal{X}, \mathcal{U}$ к виду

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} + \tilde{D}f, \quad (3.53)$$

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{\lambda_{\min}\{P_x\}} \tilde{x}^T P_x \tilde{x} \leq 1\}, \quad \tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{u} \in \mathbb{R} : |\tilde{u}| \leq 1\},$$

где $\tilde{B} = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}\{P_x\}}}{p_u} B$ и $\tilde{D} = \sqrt{\lambda_{\min}\{P_x\}} D$.

Представим новый сигнал управления $\tilde{u}$ в виде следующей суммы:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2, \quad (3.54)$$

где $\tilde{u}_1$ будет использоваться для стабилизации (3.53), $\tilde{u}_2$ — для обеспечения заданных ограничений на $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$.

С учетом неравенством Юнга ($2a^T b \leq \mu a^T a + \mu^{-1} b^T b$ для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$ и $\mu > 0$) рассмотрим следующую оценку: $\tilde{u}^2 = \tilde{u}_1^2 + 2\tilde{u}_1\tilde{u}_2 + \tilde{u}_2^2 \leq (1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})\tilde{u}_2^2$, $r > 0$. Учитывая, что $y = x$ в (3.51), определим переменную ξ в (3.43) в виде

$$\xi = \frac{1}{\lambda_{\min}\{P_x\}} \tilde{x}^T P_x \tilde{x} + (1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})(|\tilde{u}_2| + \delta)^2, \quad (3.55)$$

где величина $\delta > 0$ задается разработчиком и потребуется для реализации закона управления $\tilde{u}_2$ с учетом того, что $|\tilde{u}_2| + \delta \neq 0$. Обозначив $P_1 = \frac{1}{\lambda_{\min}\{P_x\}} P_x$, $p_2 = 1+r$ и $p_3 = 1+r^{-1}$, перепишем (3.55) в виде

$$\xi = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta)^2. \quad (3.56)$$

В силу того, что ξ – скалярная величина, представим (3.44) как

$$\underline{g}(t) < \xi(t) < \bar{g}(t). \quad (3.57)$$

Так как $\tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + \tilde{u}^2 \leq \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 \tilde{u}_2^2 \leq \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta)^2$, то выбрав $\bar{g}(t) \leq 1$ получим, что в (3.57) учтены ограничения (3.53).

Требуется синтезировать закон управления, который обеспечит выполнение (3.57). Тогда фазовые переменные и сигнал управления будут находиться в заданных множествах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{U}$ с дополнительным выполнением условия (3.57).

Отметим, что метод [65] для объекта (3.51) позволяет решить только задачу нахождения одной компоненты вектора x в заданном множестве без ограничений на сигнал управления.

Сформулируем основной результат раздела 5.7.

Теорема 3.7 Пусть для преобразования (3.43) выполнены условия (a)-(z), $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для любых ε и t , а также $\underline{g}(0) < \xi(0) < \bar{g}(0)$. Если для заданных $\delta > 0$, $\mu > 0$, $P_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$, $\beta > 0$, $c > 0$ и $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ существуют $H > 0$, $\alpha > 0$, $\tau_i > 0$, $i = 1, \dots, 6$ такие, что при $v = \pm \bar{f}$ разрешимы следующие линейные неравенства:

$$\begin{bmatrix} -\alpha + 0,5\tau_1 & 0,5v\mu^{-1}\tilde{D}^T\tilde{D} & -0,5 \\ * & -\tau_2 & 0 \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.58)$$

$$c\tau_1 \geq \bar{f}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T H + H\bar{A} + \beta H & H\tilde{B} & H\tilde{D} \\ * & -\tau_4 & 0 \\ * & * & -\tau_5 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.59)$$

$$H \geq \bar{P}_1,$$

$$K^T K \leq \tau_6 H,$$

$$\frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{P_1\}}\beta \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}\tau_4 + \bar{f}^2\tau_5,$$

$$\frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{P_1\}}\tau_6 \leq \frac{1}{1+r},$$

тогда закон управления

$$u = \frac{1}{p_u}(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2),$$

$$\tilde{u}_1 = K\tilde{x}, \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{u}}_2 &= -\frac{1}{2p_3(|\tilde{u}_2|+\delta)}\text{sign}(u_2) \\ &\times [\alpha\varepsilon + 2\tilde{x}^T\bar{P}_1\bar{A}\tilde{x} + 2\tilde{x}^T\bar{P}_1\tilde{B}\tilde{u}_2 + \mu\text{sign}(\varepsilon)\tilde{x}^T\bar{P}_1^2\tilde{x}] \end{aligned}$$

обеспечит выполнение (3.57), где $\bar{A} = A + \tilde{B}K$ и $\bar{P}_1 = P_1 + p_2K^TK$.

З а м е ч а н и е 3.8 Для разрешимости (3.59) необходимо выбирать K из условия гурвицевости матрицы $\bar{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что решения уравнений с разрывной правой частью рассматриваются в смысле Филиппова. Поэтому в доказательствах теорем 3.7 и 3.8 соответствующие (не-)равенства для производных будут выполнены для почти всех t . Принимая во внимание (3.54) и (3.60), преобразуем (3.53) и (3.56) к виду

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \bar{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}_2 + \tilde{D}f, \\ \xi &= \tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{x} + p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)^2.\end{aligned}\tag{3.61}$$

С учетом (3.61) перепишем (3.47) как

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} \left[2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \bar{A}\tilde{x} + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{B}\tilde{u}_2 + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{D}f + \right. \\ &\quad \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)\text{sign}(\tilde{u}_2)\dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial t} \right].\end{aligned}\tag{3.62}$$

Для анализа устойчивости решений (3.62) рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V_1 = 0,5\varepsilon^2.\tag{3.63}$$

Взяв полную производную по времени от (3.63) вдоль решений (3.62), получим:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} \varepsilon \left[2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \bar{A}\tilde{x} + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{B}\tilde{u}_2 + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{D}f + \right. \\ &\quad \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)\text{sign}(\tilde{u}_2)\dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial t} \right].\end{aligned}\tag{3.64}$$

Воспользовавшись неравенством Юнга для $2\varepsilon\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{D}f \leq \mu|\varepsilon|\tilde{x}^T \bar{P}_1^2 \tilde{x} + \mu^{-1}|\varepsilon|\tilde{D}^T \tilde{D}f^2$ и учитывая третье выражение в (3.60), оценим (3.64) в виде

$$\dot{V}_1 \leq \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} \left(-\alpha\varepsilon^2 + \mu^{-1}|\varepsilon|\tilde{D}^T \tilde{D}f^2 - \varepsilon \frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial t} \right).\tag{3.65}$$

Потребуем при $V_1 \geq c$ выполнение условия $\dot{V}_1 \leq 0$, принимая во внимание ограничения $f^2 \leq \bar{f}^2$ и $\left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}\right)^2 \leq \gamma^2$ (см. постановку задачи и условие (г)). Так как $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ не влияет на знак выражения (3.65), то перепишем вышеназванные условия как

$$\begin{aligned} -\alpha \varepsilon^2 + \mu^{-1} \varepsilon \text{sign}(\varepsilon) \tilde{D}^T \tilde{D} f^2 - \varepsilon \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} &\leq 0 \quad \forall \left(\varepsilon, f, \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right) : \\ 0,5 \varepsilon^2 &\geq c, \quad f^2 \leq \bar{f}^2, \quad \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right)^2 \leq \gamma^2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Обозначив $z = \text{col} \left\{ \varepsilon, f, \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right\}$, перепишем (3.66) в матричном виде:

$$\begin{aligned} z^T \begin{bmatrix} -\alpha & 0,5 \mu^{-1} \text{sign}(\varepsilon) f \tilde{D}^T \tilde{D} & -0,5 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z &\leq 0, \\ z^T \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z &\leq -c, \\ z^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z &\leq \bar{f}^2, \\ z^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} z &\leq \gamma^2. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Согласно S-процедуре [22, 195, 225], неравенства (3.67) будут выполне-

ны, если будут выполнены следующие условия:

$$\begin{bmatrix} -\alpha + 0.5\tau_1 & 0,5\text{sign}(\varepsilon)\mu^{-1}\tilde{D}^T\tilde{D} & -0,5 \\ * & -\tau_2 & 0 \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.68)$$

$$c\tau_1 \geq \bar{f}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3.$$

Так как $\text{sign}(\varepsilon)f \in [-\bar{f}, \bar{f}]$, то имеем политопную неопределенность в (3.68) с двумя вершинами политопа $v = -\bar{f}$ и $v = \bar{f}$. Согласно [48, 128], если существует решения $\alpha, \tau_i, i = 1, 2, 3$ первого ЛМН в (3.58) в вершинах $v = -\bar{f}$ и $v = \bar{f}$, то первое ЛМН в (3.68) будет иметь решение. Значит, система (3.62) устойчива по вход-состоянию. В силу замены координат (3.45) и свойства а) переменная ξ в (3.61) будет ограничена. Тогда сигналы $\tilde{x}, x$ и $\tilde{u}_2$ будут ограничены. Из третьего выражения (3.60) следует ограниченность $\dot{\tilde{u}}_2$.

Теперь получим дополнительные условия, накладывающие ограничения на $\tilde{u}_1$ в (3.60). Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V_2 = \tilde{x}^T H \tilde{x} \quad (3.69)$$

и потребуем при $V_2 \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}$ выполнение условий $\dot{V} \leq 0$ и $H \geq \bar{P}_1$ (последнее означает, что эллипсоид $\tilde{x}^T H \tilde{x} = \inf\{\bar{g}(t)\}$ содержится внутри эллипсоида $\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{x} = \inf\{\bar{g}(t)\}$), принимая во внимание ограничения $\tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}$ и $f^2 \leq \bar{f}^2$. Т.е. потребуем, чтобы закон управления $\tilde{u}_1$ гарантировал нахождение фазовых траекторий в меньшем множестве по сравнению с

(3.57). Перепишем данные условия как

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \tilde{x}^T (\bar{A}^T H + H \bar{A}) \tilde{x} + 2\tilde{x}^T H \tilde{B} \tilde{u}_2 + 2\tilde{x}^T H \tilde{D} f \leq 0 \\ \forall(\tilde{x}, \tilde{u}_2, f) : & \\ \tilde{x}^T H \tilde{x} &\geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{P_1\}}, \quad \tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}, \quad f^2 \leq \bar{f}^2. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Обозначив $s = \text{col}\{\tilde{x}, \tilde{u}_2, f\}$, преобразуем (3.70) к виду

$$\begin{aligned} s^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T H + H \bar{A} & H \tilde{B} & H \tilde{D} \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} s &\leq 0, \\ -s^T \begin{bmatrix} H & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} s &\geq -\frac{\inf \bar{g}(t)}{\lambda_{\min}\{P_1\}}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$s^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & -1 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} s \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3},$$

$$s^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & -1 \end{bmatrix} s \leq \bar{f}.$$

С учетом $\tilde{u}^2 \leq 1$ из (3.53) и $\tilde{u}^2 \leq (1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})\tilde{u}_2^2$ из неравенства Юнга потребуем выполнение $(1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})\tilde{u}_2^2 \leq 1$. Значит, $\tilde{u}_1^2 \leq \frac{1}{1+r}$. Используя S-процедуру [128] и второе выражение в (3.60), в результате неравенства (3.71) и $\tilde{x}^T K^T K \tilde{x} \leq \frac{1}{1+r}$ при $\tilde{x}^T H \tilde{x} \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{P_1\}}$ будут выполнены

одновременно, если будут выполнены условия (3.59). Теорема 3.7 доказана.

З а м е ч а н и е 3.9 Не обязательно рассматривать переменную ξ в квадратичной форме. Так, если априори заданы ограничения в квадратичной форме (3.52), то можно воспользоваться также заменой в квадратичной форме (3.56) или в качестве альтернативы $\xi = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + (|\tilde{u}| + \delta)^2$. Если же все ограничения заданы в интервальной форме на координаты вектора состояния и управление, то можно воспользоваться заменами вида $\xi = |\tilde{x}| + |\tilde{u}_1| + |\tilde{u}_2|$ или $\xi = \sum_{i=1}^n p_{1i} |\tilde{x}_i| + |\tilde{u}_1| + |\tilde{u}_2|$, $p_{1i} > 0$, $i = 1, \dots, n$ и т.п., дополнительно ослабив предположения о дифференцируемости функции G по x и u , см. замечание 3.7. Очевидно, что для каждой замены будут получены другие формы закона управления и условия их работоспособности.

П р и м е р 2. Рассмотрим неустойчивый объект (3.51) со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ x(0) &= \begin{bmatrix} -0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix}, \\ f(t) &= 0,01[\text{sign}(\sin(1,7t)) + \sin(0,3t) + \text{sat}\{d(t)\}], \end{aligned} \tag{3.72}$$

где $\text{sat}\{\cdot\}$ – функция насыщения, $d(t)$ – белый шум с ограниченной полосой пропускания и моделируемый в Matlab Simulink с помощью блока «Band-Limited White Noise» со следующими параметрами: мощность шума 0,3 и время выборки 0,2 соответственно. Тогда $\bar{f} = 0,03$.

Пусть $P_x = 0,81 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $p_u = 1$ определены в (3.52).

Зададим $\delta = 0,01$ в (3.56), $K = [-2 \ -4]$ и $\mu = 0,01$ в (3.60), $T(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon + 1}$, $\bar{g} = 0,89e^{-0,1t} + 0,1$ и $\underline{g} = 0,01$ в (3.57), а также $r = 0,01$ в (3.55). Вычислим: $P_1 = I$, $p_2 = 1,01$, $p_3 = 101$ и $\gamma = \frac{3\bar{g} - \underline{g}}{2} = 1,475$. Если задать $c = 1$ и $\beta = 0,1$, то неравенства (3.58), (3.59) имеют решения, например, при $\alpha = 37,9$.

На рис. 3.13 изображены фазовые портреты по (x_1, x_2) и (u_1, u_2) , а на рис. 3.14 приведен переходной процесс по $\xi(t)$. На рис. 3.13 большие эллипсы соответствуют выражениям $x^T P_x x = \bar{g}(0)$ и $(1 + r)p_u u_1^2 + (1 + r^{-1})p_u u_2^2 = \bar{g}(0)$, а меньшие эллипсы – $x^T P_x x = \inf\{\bar{g}(t)\}$ и $(1 + r)p_u u_1^2 + (1 + r^{-1})p_u u_2^2 = \inf\{\bar{g}(t)\}$. Из рис. 3.13 видно, что фазовые траектории начинаются в большом эллипсе, с течением времени (примерно через 25 с после начало работы системы, см. рис. 3.14) достигают меньшего эллипса и остаются в нем, никогда не покидая его.

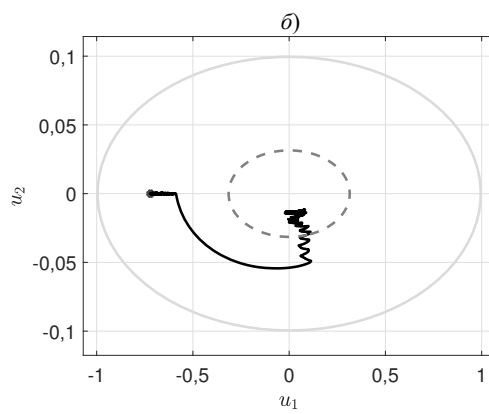
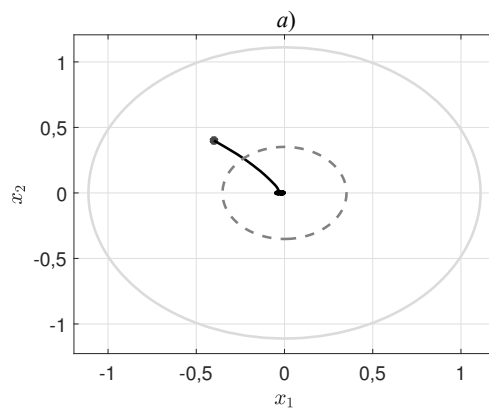


Рисунок 3.13 — Фазовые траектории в замкнутой системе по (x_1, x_2) (рис. а)) и (u_1, u_2)

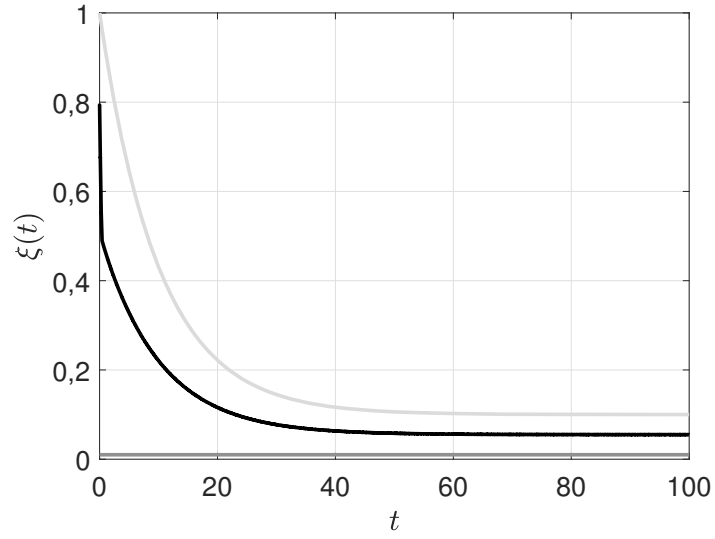


Рисунок 3.14 — Переходной процесс по $\xi(t)$ в замкнутой системе.

3.7.4 Управление по выходу

Рассмотрим объект управления вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Df, \\ y &= Lx,\end{aligned}\tag{3.73}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$, $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}$ и $|f(t)| \leq \bar{f}$ для всех t . Матрицы A , B , D и L имеют соответствующие размерности. Пара (A, B) управляема и пара (L, A) наблюдаема. Объект управления (3.73) строго минимально-фазовый [43]. Множества $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{U}$ заданы в виде

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R} : p_y|y| \leq 1\}, \quad \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : p_u|u| \leq 1\},\tag{3.74}$$

где $p_y > 0$ и $p_u > 0$ задаются разработчиком.

Для сравнения ограничений по y и u введем замены $\tilde{y} = p_y y$ и $\tilde{u} = p_u u$,

которые позволят преобразовать ограничения (3.74) к отрезкам одинаковой длины. Преобразуем множества $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{U}$ к виду

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \{\tilde{y} \in \mathbb{R} : |\tilde{y}| \leq 1\}, \quad \tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{u} \in \mathbb{R} : |\tilde{u}| \leq 1\}. \quad (3.75)$$

Представим $\tilde{u}$ в виде суммы (3.54) и определим переменную ξ в (3.43) как

$$\xi = \tilde{y}^2 + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta)^2, \quad (3.76)$$

где δ , p_2 и p_3 определены в разделе 5.7. Выбрав $\bar{g}(t) \leq 1$, получим, что (3.76) включает в себя ограничения (3.74). Цель управления состоит в поиске закона управления, гарантирующего выполнение условия (3.57) с учетом (3.76).

Метод [65] для объекта (3.73) гарантирует нахождение только выходного сигнала в заданном множестве. В отличие от [65] предложенный метод позволит обеспечить нахождение выходного и управляющего сигналов в заданном множестве.

Преобразуем (3.73) к виду

$$Q(p)\tilde{y}(t) = R(p)\tilde{u}(t) + \phi(t). \quad (3.77)$$

Здесь $Q(p) = \det(pI - A)$, $R(p) = \frac{p_y}{p_u} L(pI - A)^* B$, $(pI - A)^*$ – присоединенная матрица, $\phi(t) = p_y L(pI - A)^* [x(0) + Df(t) + Bu(0) + Bf(0)]$. В дальнейшем, ради простоты выводов, например, как в [?, ?, 43] и ссылках на литературу в них, будем использовать одновременно запись в форме вход-выход (или передаточной функции) и пространства состояний.

Сформулируем основной результат раздела 5.4.

Теорема 3.8 Пусть для преобразования (3.43) выполнены условия а)-г), $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для любых ε и t , а также $\underline{g}(0) < \xi(0) < \bar{g}(0)$. Если для заданных $\delta > 0$, $\mu > 0$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$, $\beta > 0$, $c > 0$ и $k \in \mathbb{R}$ существуют $H > 0$, $\alpha > 0$, $\tau_i > 0$, $i = 1, \dots, 6$ такие, что при $v = \pm \bar{f}$ разрешимы следующие линейные неравенства:

$$\begin{bmatrix} -\alpha + 0,5\tau_1 & 0,5v\mu^{-1} & -0,5 \\ * & -\tau_2 & 0 \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.78)$$

$$c\tau_1 \geq \hat{\phi}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T H + Q\bar{A} + \beta H & \frac{1}{p_u}HB & HD \\ * & -\tau_4 & 0 \\ * & * & -\tau_5 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.79)$$

$$H \geq p_y^2 \bar{p}_1 L^T L,$$

$$L^T K^T K L \leq \tau_6 H,$$

$$\frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1} \beta \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3} \tau_4 + \hat{\phi}^2 \tau_5,$$

$$\frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1} \tau_6 \leq \frac{1}{1+r},$$

тогда закон управления

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{p_u}(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2), \\ \tilde{u}_1 &= k\tilde{y}, \\ \dot{\tilde{u}}_2 &= -\frac{1}{2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)} \text{sign}(\tilde{u}_2) \\ &\times \left[\alpha\varepsilon + 2\bar{p}_1\tilde{y}\frac{pR(p)}{Q(p)}\tilde{u}_2 + \mu\bar{p}_1^2 \text{sign}(\varepsilon)\tilde{y}^2 \right] \end{aligned} \quad (3.80)$$

обеспечит выполнение (3.57), где $\bar{A} = A + \frac{k}{p_u}BL$, $\bar{p}_1 = 1 + k^2p_2$.

Замечание 3.10 Для разрешимости (3.79) необходимо выбирать k из условия гурвицевости матрицы $\bar{A}$.

Доказательство. С учетом $\tilde{u}_1$ в (3.80) перепишем (3.76) и (3.77)

в виде

$$\begin{aligned}\bar{Q}(p)\tilde{y}(t) &= R(p)\tilde{u}_2(t) + \phi(t), \\ \xi &= \bar{p}_1\tilde{y}^2 + p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)^2.\end{aligned}\tag{3.81}$$

Здесь $\bar{Q}(p) = Q(p) - kR(p)$. Подставив (3.77) в (3.47), получим

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} \left[2\bar{p}_1\tilde{y}\frac{pR(p)}{Q(p)}\tilde{u}_2 + 2\bar{p}_1\tilde{y}\bar{\phi}(t) \right. \\ &\quad \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)\text{sign}(\tilde{u}_2)\dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial t} \right],\end{aligned}\tag{3.82}$$

где $\bar{\phi}(t) = \frac{p}{Q(p)}\phi(t)$ – ограниченная функция. Обозначим $\hat{\phi} = \sup\{\bar{\phi}(t)\}$.

Для анализа устойчивости (3.82) рассмотрим функцию Ляпунова (3.63).

Взяв производную от (3.63) вдоль решений (3.82), получим

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} \varepsilon \left[2\bar{p}_1\tilde{y}\frac{pR(p)}{Q(p)}\tilde{u}_2 + 2\bar{p}_1\tilde{y}\bar{\phi} \right. \\ &\quad \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)\text{sign}(\tilde{u}_2)\dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial t} \right].\end{aligned}\tag{3.83}$$

Воспользовавшись неравенством Юнга для $2\varepsilon\bar{p}_1\tilde{y}\bar{\phi} \leq |\varepsilon|\mu\bar{p}_1^2\tilde{y}^2 + \bar{\phi} + |\varepsilon|\mu^{-1}\bar{\phi}^2$ и учитывая третье выражение в (3.80), получим

$$\dot{V}_1 = \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} \left[-\alpha\varepsilon^2 + \mu^{-1}|\varepsilon|\varepsilon\bar{\phi}^2 - \varepsilon\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial t} \right].\tag{3.84}$$

Дальнейшие действия для получения условий (3.78) аналогичны, как в доказательстве теоремы 3.7.

Теперь получим дополнительные условия, накладывающие ограничения на $\tilde{u}_1$ в (3.80). Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V_2 = x^T H x.\tag{3.85}$$

Перепишем (3.81) как

$$\dot{x} = \bar{A}x + \frac{1}{p_u}B\tilde{u}_2 + D\phi, \quad \tilde{y} = p_y Lx.\tag{3.86}$$

Потребуем при $V_2 \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1}$ выполнение условий $\dot{V}_2 \leq 0$ и $H \geq p_y^2 \bar{p}_1 L^T L$ (последнее означает, что эллипсоид $x^T H x = \inf\{\bar{g}(t)\}$ содержится внутри цилиндра $x^T p_y^2 \bar{p}_1 L^T L x = \inf\{\bar{g}(t)\}$), принимая во внимание ограничения $\tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}$ и $\phi^2 \leq \hat{\phi}^2$. Перепишем вышеназванные условия в виде

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= x^T (\bar{A}^T H + H \bar{A}) x + 2x^T \frac{1}{p_u} H B \tilde{u}_2 + 2x^T H D \phi \leq 0 \\ \forall (x, \tilde{u}_2, \phi) : & \\ x^T H x &\geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1}, \quad \tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}, \quad \phi^2 \leq \hat{\phi}^2. \end{aligned} \quad (3.87)$$

С учетом $(1+r)\tilde{u}_1^2 \leq 1$ зададим $x^T p_y^2 L^T K^T K L x \leq \frac{1}{1+r}$ при $x^T H x \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1}$. Дальнейшие действия для получения условий (3.79) аналогичны, как в доказательстве теоремы 3.7. Теорема 3.8 доказана.

З а м е ч а н и е 3.11 В разделе 5.4 могут быть получены другие формы закона управления, если изначально преобразование (3.43) (в частности, в разделе 5.4 заданное в виде (3.76)) будет определено по-другому, например, в виде $\xi = \tilde{y}^2 + \tilde{u}^2$, $\xi = |\tilde{y}| + |\tilde{u}_1| + |\tilde{u}_2|$ и т.п. (см. замечание 3.9).

П р и м е р 3. Рассмотрим неустойчивый объект (3.73) со следующими

параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = 0,1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

сигнал $f(t)$ определен в примере 2. Тогда $R(p) = (p+1)^2$, $Q(p) = (p+1)^3$ и $\hat{\phi} = 0,22$.

Пусть в (3.74) определены следующие параметры: $p_y = 1$ и $p_u = 0,3$.

Зададим $\delta = 0,01$, $k = -2$ и $\mu = 0,01$ в (3.80), $r = 0,01$ в (3.76), а также $T(\varepsilon)$ из примера 2. Если задать $\beta = 0,1$ и $c = 1$, то неравенства (3.78) будут разрешимы, например, при $\alpha = 374,3$.

На рис. 3.15, 3.16 изображены траектории по $\xi(t)$, $y(t)$ и $u(t)$ при $\bar{g} = 0,79e^{-0,1t} + 0,2$ и $\underline{g} = 0,69e^{-0,1t} + 0,01$ в (3.44), на рис. 3.17, 3.18 – при $\bar{g} = 0,45 \cos(0,5t) + 0,54$ и $\underline{g} = 0,3 \cos(0,5t) + 3,01$ в (3.44). Из рис. 3.15-3.18 видно, что сигналы ξ , y и u никогда не покидают заданных ограничений (3.74) и дополнительно заданных разработчиком ограничений (3.57), которые, например, могут быть определены экспоненциальными (см. рис. 3.15, 3.16) или синусоидальными (рис. 3.17, 3.18) функциями.

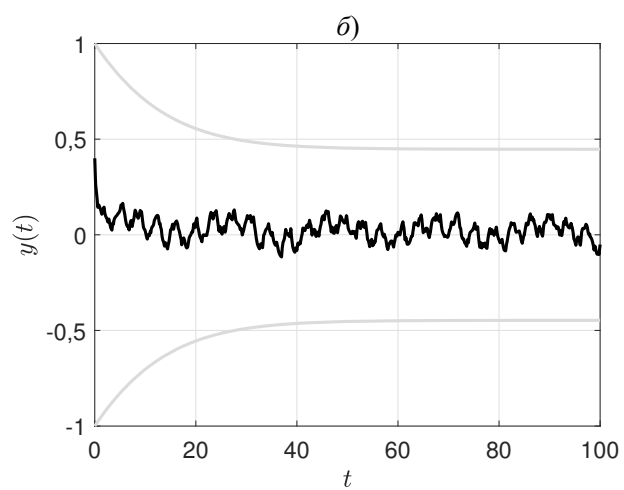
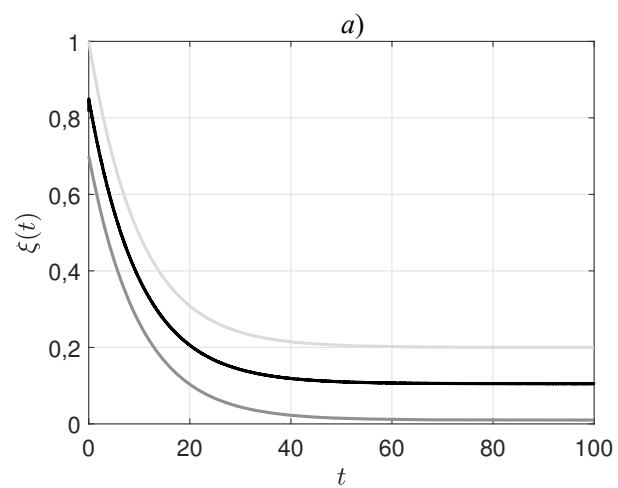


Рисунок 3.15 — Переходные процессы по $\xi(t)$ (рис. а)) и $y(t)$ (рис. б)) при ограничениях (3.57), заданных экспоненциальными функциями.

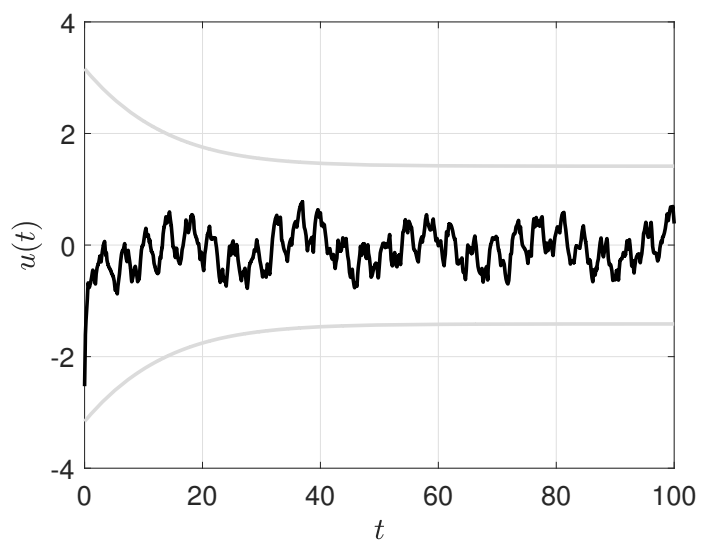


Рисунок 3.16 — Переходные процессы по $u(t)$ при ограничениях (3.57), заданных экспоненциальными функциями.

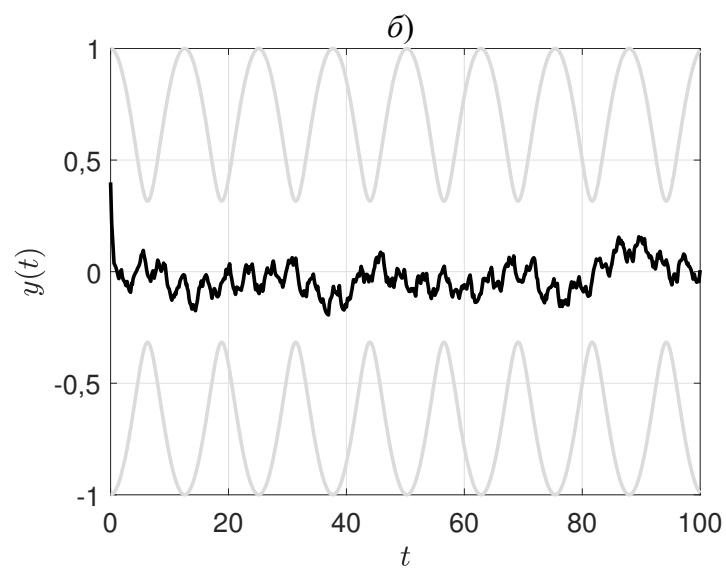
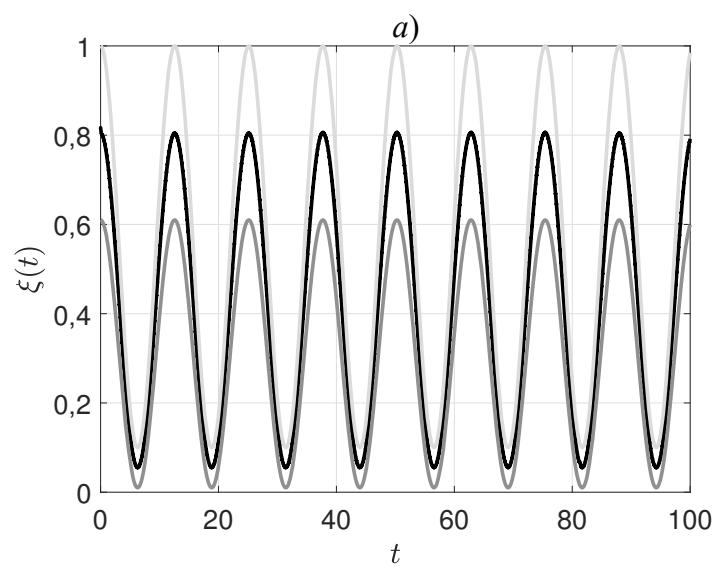


Рисунок 3.17 — Переходные процессы по $\xi(t)$ (рис. а)) и $y(t)$ (рис. б)) при ограничениях (3.57), заданных синусоидальными функциями.

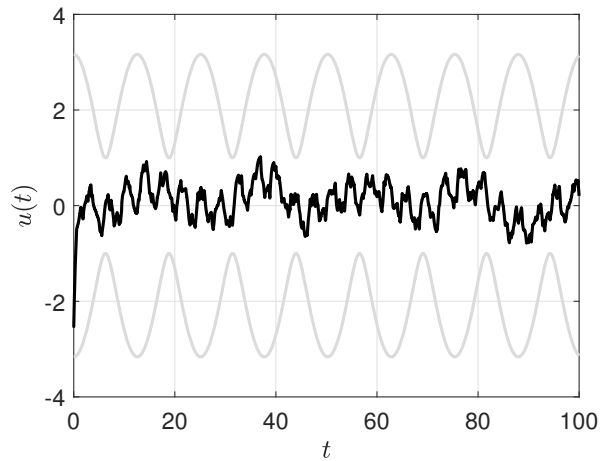


Рисунок 3.18 — Переходные процессы по $u(t)$ при ограничениях (3.57), заданных синусоидальными функциями.

3.8 Заключение по главе 3

- Разработан новый метод управления динамическими системами, позволяющий гарантировать нахождение выходной переменной объекта управления в заданном множестве. Для решения задачи предложена специальная замена координат, позволяющая свести исходную задачу с ограничениями к задаче исследования на устойчивость по вход-состоянию новой расширенной динамической системы без ограничений.
- Приведены примеры замены координат и алгоритмы управления линейными объектами и динамическими системами с секторной нелинейностью.

- Метод развит на динамические системы с произвольным соотношением числа управлений и выходных сигналов и гарантией их нахождения в заданных множествах.
- Разработанный метод применяется для решения задач управления по состоянию и по выходу линейными системами с учетом ограничений на сигнал управления и выходные переменные, где размерность регулируемых переменных больше размерности сигнала управления.
- Устойчивость замкнутой системы и синтез параметров регулятора сформулированы в терминах разрешимости линейных матричных неравенств.

Глава 4 Управление скалярными системами параболического и гиперболического типов

В настоящей главе рассматривается некоторый класс линейных дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типа с распределенным управлением. Такие уравнения могут описывать, например, конвекционно-диффузионные процессы, вращающуюся стойку компрессора с приводом впрыска воздуха, распространение тепла в стержне, колебание струны и т.д.

Реализуемое конечномерное управление с использованием преобразования Фурье и метода Галеркина рассмотрено в работах [113, 162, 212]. Для линейных параболических систем в [119] предложен метод управления, основанный на движущихся датчиках и актуаторах вдоль пространственной координаты. В [173, 213] для подобных систем предложено адаптивное управление с использованием процедуры бэкстеппинга, которое достаточно трудоемко в расчете и реализации.

В отличие от [113, 119, 162, 173, 212, 213], в настоящей главе будет предложен способ формирования закона управления с использованием дискретизации сигнала измерения по пространственной переменной. Для конечномерных систем подобный подход изучался в течение нескольких последних десятилетий в качестве дискретизации по уровню измеряемого сигнала [104, 111, 118, 235] и др. В отличие от непрерывного управления, такое дискретное управление не учитывает поведение объекта между вы-

борками, зато в ряде случаев оно позволяет решить ряд технических задач: управление через цифровые каналы связи, управление с ограничением на информационные каналы связи и т.п. В данной главе дискретизация по пространственной переменной позволит получить реализуемый сигнал управления.

Наблюдаемость систем с дискретными пространственными измерениями изучено в [168]. Дискретное по пространственной переменной управление бесконечномерными системами рассмотрено, например, в [116, 129, 175, 176]. Методы [116, 176] не применимы к неизвестным параметрам системы и не содержат количественного анализа устойчивости замкнутой системы и скорости сходимости решений. В отличие от [116, 176], в [129, 175] предложен метод управления системами параболического типа с неизвестными параметрами с использованием линейных матричных неравенств (ЛМН) для анализа экспоненциальной устойчивости. Однако решения [116, 129, 175, 176] не учитывают наличие возмущений.

В настоящей главе, как и в [116, 129, 175, 176], будет предложен метод управления с дискретизацией по пространственной переменной. Однако, в отличие от [116, 129, 175, 176], предложенный закон управления позволит формировать различные конфигурации регулируемого сигнала по пространственной переменной. Например, по сравнению с [129, 175] предложенный закон управления не требует своей реализации по всей пространственной переменной, а стабилизация объекта может осуществляться с меньшими затратами на регулируемый сигнал. В отличие от [116, 129, 175, 176] будет показана экспоненциальная устойчивость замкнутой системы для систем параболического и гиперболического типов в усло-

виях возмущений с использованием ЛМН. Будут приведены численные примеры моделирования и сравнительный анализ эффективности предложенного алгоритма с решением [129, 175] для систем параболического типа.

4.1 Постановка задачи

1) Пусть первый класс исследуемых объектов описывается следующим скалярным линейным дифференциальным уравнением параболического типа

$$\begin{aligned} z_t(x, t) = & a_1 z_{xx}(x, t) + a_2 z_x(x, t) + \\ & + \phi z(x, t) + u(x, t) + f(x, t), \\ & x \in [0, l], \quad l > 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

с граничными условиями Дирихле

$$z(0, t) = z(l, t) = 0 \quad (4.2)$$

или смешанными граничными условиями

$$z_x(0, t) = v z(0, t), \quad z(l, t) = 0, \quad v \geq 0. \quad (4.3)$$

Здесь $t \geq 0$, $z : [0, l] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – состояние объекта, $u(x, t)$ – сигнал управления, $f(x, t)$ – возмущение класса C^1 . Коэффициенты a_1 , a_2 , ϕ и функция $f(x, t)$ неизвестны, но известны границы интервалов, которым они принадлежат: $0 < \underline{a}_1 \leq a_1$, $\underline{a}_2 \leq a_2 \leq \bar{a}_2$, $\underline{\phi} \leq \phi \leq \bar{\phi}$, $|f(x, t)| \leq \bar{f}$. Величина v в (4.3) может быть неизвестной.

Замечание 4.1 При $u(x, t) = 0$ уравнение (4.1) описывает конвекционно-диффузионные процессы, а при $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ и $\phi = 0$ –

процессы диффузии. В [162] уравнением (4.1) описывается вращающаяся стойка компрессора с приводом впрыска воздуха $u(x, t)$, где $z(x, t)$ – осевой поток через компрессор. При $u(x, t) = 0$ и $a_2 = 0$ краевая задача (4.1), (4.2) описывает распространение тепла в однородном одномерном стержне с фиксированной температурой на концах, где a_1 и ϕ – коэффициенты теплопроводности и теплообмена с окружающей средой соответственно, $z(x, t)$ – значение температуры в момент времени t в точке x .

2) Пусть второй класс исследуемых объектов описывается скалярным линейным дифференциальным уравнением гиперболического типа в виде

$$\begin{aligned} z_{tt}(x, t) = & a_1 z_{xx}(x, t) + a_2 z_x(x, t) + \phi z(x, t) - bz_t(x, t) \\ & + u(x, t) + f(x, t), \\ x \in & [0, l], \end{aligned} \quad (4.4)$$

с граничными условиями Дирихле (4.2) или смешанными граничными условиями (4.3). В (4.4) $\bar{b} > b > \underline{b} > 0$, где вершины $\bar{b}$ и $\underline{b}$ известны. Остальные константы и функции в (4.4) принимают те же значения, что и в (4.1).

З а м е ч а н и е 4.2 При $u(x, t) = 0$ и $a_2 = 0$ краевая задача (4.4), (4.2) описывает колебания однородной струны с фиксированными концами и рассеиванием энергии, где a_1 , b и ϕ – коэффициенты упругости, диссипации и жесткости соответственно, $z(x, t)$ и $z_t(x, t)$ – прогиб и скорость струны соответственно в момент времени t в точке x .

Для решения задачи разобьем отрезок $[0, l]$ на N подинтервалов, не

обязательно равной длины, и обозначим:

$$\begin{aligned} 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = l, \quad \Delta \geq x_{j+1} - x_j, \\ j = 0, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь Δ – известная константа. Предположим, что N сенсоров расположены внутри данных подинтервалов, т.е. доступны измерению только сигналы $z(\bar{x}_j, t)$, где $\bar{x}_j \in (x_j, x_{j+1})$, $j = 0, \dots, N - 1$.

Цель управления состоит в разработке дискретного по пространственной переменной x закона управления, который обеспечит экспоненциальную устойчивость замкнутой системы для (4.1) и (4.4).

4.2 Дискретный по пространственной переменной закон управления

Зададим закон управления в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) = -KF^j(z(\bar{x}_j, t), x, t), \quad x \in [x_j, x_{j+1}), \\ \bar{x}_j \in (x_j, x_{j+1}), \quad j = 0, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $K > 0$, функция $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

- (а) $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ класса C^1 для любых $t \geq 0$ и $x \in [0, l]$;
- (б) производная $F_x^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ ограничена для любых $t \geq 0$ и $x \in [0, l]$;
- (в) $F^j(z(\bar{x}_j, t), \bar{x}_j, t) = z(\bar{x}_j, t)$, $\bar{x}_j \in (x_j, x_{j+1})$, $j = 0, \dots, N - 1$.

Условие (а) требуется для решения краевой задачи (см. раздел 5.4). Требования (б) и (в) необходимы для доказательства устойчивости замкнутой системы и ограниченности всех сигналов в ней. Приведем примеры функции $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$.

Пример 1. Пусть $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = \varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)z(\bar{x}_j, t)$, где $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ класса C^1 , $\varphi_x^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)z(\bar{x}_j, t)$ ограничена для любых x и t , а также $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), \bar{x}_j, t) = 1$. В частности, если $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = 1$ для любых x и t , то получим закон управления из [129, 175]. Далее рассмотрим примеры других функций $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$.

Пример 2. В [129, 175] $u(x, t) \neq 0$ на всем интервале $[x_j, x_{j+1})$, если $z(\bar{x}_j, t) \neq 0$. Приведем пример, когда $u(x, t) \neq 0$ лишь на части интервала $[x_j, x_{j+1})$ при $z(\bar{x}_j, t) \neq 0$. Пусть в примере 1 функция φ^j задана в виде

$$\begin{aligned} \varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = \\ = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos \left(\frac{\alpha(x - \bar{x}_j)}{1 + z^2(\bar{x}_j, t)} \right), \\ x \in \left[\bar{x}_j - \frac{\pi}{\alpha(1 + z^2(\bar{x}_j, t))}; \bar{x}_j + \frac{\pi}{\alpha(1 + z^2(\bar{x}_j, t))} \right], \\ 0, \\ x \in \left[x_j; \bar{x}_j - \frac{\pi}{\alpha(1 + z^2(\bar{x}_j, t))} \right) \cup \left(\bar{x}_j + \frac{\pi}{\alpha(1 + z^2(\bar{x}_j, t))}; x_{j+1} \right). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь $\alpha > 0$ – достаточно большое число, которое может быть выбрано из условия $\alpha > \max \left\{ \frac{\pi(1 + z^2(\bar{x}_j, t))}{\bar{x}_j - x_j}, \frac{\pi(1 + z^2(\bar{x}_j, t))}{x_{j+1} - \bar{x}_j} \right\}$. Очевидно, что $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), \bar{x}_j, t) = 1$, $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ класса C^1 и $\varphi_x^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)z(\bar{x}_j, t)$ ограничена для любых $x \in [0, l]$ и $z(\bar{x}_j, t) \in \mathbb{R}$. Графики функции (4.7) приведены на рис. 4.1.

Пример 3. В (4.7) переход между значениями функций ϕ^j зависит от $z(\bar{x}_j, t)$. Далее приведем пример, исключаяющий данную зависимость. Зада-

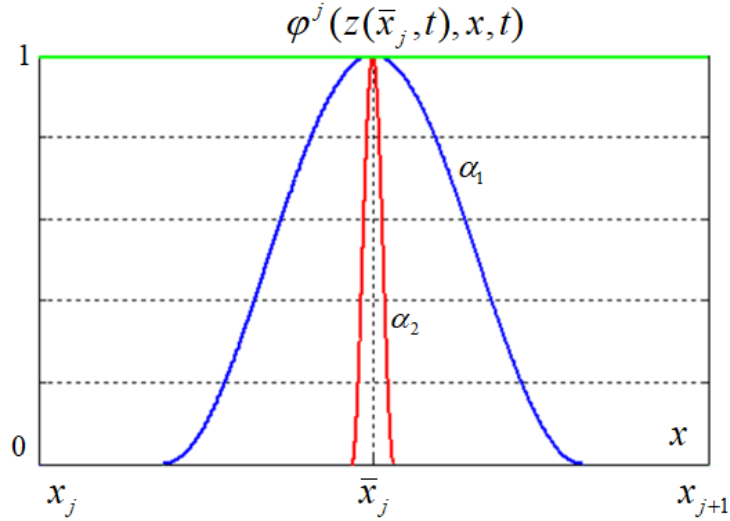


Рисунок 4.1 — График функции $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ из примера 2 (при $z(\bar{x}_j, t) = \text{const} > 0$) на интервале $x \in [x_j, x_{j+1})$ при различных значениях $\alpha > 0$ ($(\alpha = \alpha_1) > (\alpha = \alpha_2)$).

дим в примере 2 функцию φ^j в виде

$$\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{(1+z^2(\bar{x}_j, t))(\beta_j^2 - (x - \bar{x}_j)^2)} + \frac{\alpha}{\beta_j(1+z^2(\bar{x}_j, t))}}, \\ x \in (\bar{x}_j - \beta_j; \bar{x}_j + \beta_j); \\ 0, x \in [x_j; \bar{x}_j - \beta_j] \cup [\bar{x}_j + \beta_j; x_{j+1}). \end{cases} \quad (4.8)$$

Здесь $\alpha > 0$, $\beta_j \leq \min\{x_{j+1} - \bar{x}_j, \bar{x}_j - x_j\}$. В отличие от (4.7), в (4.8) переход между функциями не зависит от $z(\bar{x}_j, t)$, а зависит только от β_j . Очевидно, что $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), \bar{x}_j, t) = 1$, функция $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ класса $\mathcal{C}^1$, а также $\varphi_x^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)z(\bar{x}_j, t)$ ограничена для любых $x \in [0, l]$ и $z(\bar{x}_j, t) \in \mathbb{R}$. Графики функции (4.8) приведены на рис. 4.2.

Замечание 4.3 В [129] использовался закон управления $u(x, t) = -Kz(\bar{x}_j, t)$, $\bar{x}_j = 0.5(x_j + x_{j+1})$, $x \in [x_j, x_{j+1})$, $j = 0, \dots, N - 1$, что явля-

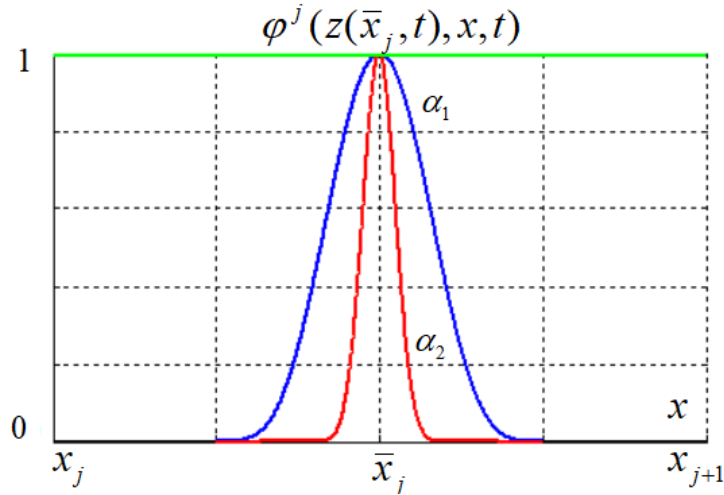


Рисунок 4.2 — График функции $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ из примера 3 (при $z(\bar{x}_j, t) = \text{const} > 0$) на интервале $x \in [x_j, x_{j+1})$ при различных значениях $\alpha > 0$ ($(\alpha = \alpha_1) > (\alpha = \alpha_2)$).

ется частным случаем (4.6) (см. пример 1). Если функцию $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ выбрать как в примерах 2 или 3, то из рис. 4.1, 4.2 видно, что площадь под кривой $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = 1$ для [129] может быть существенно больше, чем площадь под остальными кривыми. Таким образом, предложенный закон управления может стабилизировать объект (4.1) при меньших затратах на управление, что далее будет продемонстрировано на численных примерах.

Пример 4. Приведем пример управления близкого к граничному. Пусть $N = 2$. Тогда отрезок $[0, l]$ имеет следующее разбиение: $0 = x_0 < x_1 = l$. Если выбрать единственную на отрезке $[0; l]$ функцию (4.7) или (4.8) с достаточно большим значением α и точкой $\bar{x}_0$ достаточно близкой к левому концу x_0 , то получим управление, близкое к граничному. Аналогично можно выбрать точку x_0 достаточно близко к правому концу. Если взять $N = 3$,

то можно две точки $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$ выбрать достаточно близко к левому и правому концам соответственно.

4.3 Основной результат для системы параболического типа

Подставим (4.6) в (4.1) и запишем уравнение замкнутой системы:

$$\begin{aligned} z_t(x, t) = & a_1 z_{xx}(x, t) + a_2 z_x(x, t) + f(x, t) - \\ & -(K - \phi)z(x, t) + K[z(x, t) - F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)], \\ & x \in [x_j, x_{j+1}), \quad j = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Теорема 4.1 Рассмотрим замкнутую систему (4.9) при граничных условиях (4.2) или (4.3). Пусть для заданных коэффициентов $\bar{R} > 0$, $\Delta > 0$, $\delta > 0$, $K > 0$ будут разрешимы следующие два линейных матричных неравенства:

$$\Psi(a_2 = \underline{a}_2) \leq 0, \quad \Psi(a_2 = \bar{a}_2) \leq 0, \quad (4.10)$$

где

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & a_2 & 1 & 0 \\ * & \Psi_{22} & 0 & -\frac{4\Delta^2}{\pi^2} K \bar{R}^{-1} \\ * & * & -\beta_1 & 0 \\ * & * & * & -\beta_2 + \frac{4\Delta^2}{\pi^2} K \bar{R}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Здесь $\Psi_{11} = -2K + 2\bar{\phi} + 2\delta + K\bar{R}$ и $\Psi_{22} = -2\underline{a}_1 + \frac{4\Delta^2}{\pi^2} K \bar{R}^{-1}$. Тогда будет выполнено следующее неравенство

$$\|z(\cdot, t)\|_{L_2}^2 \leq e^{-2\delta t} \|z(\cdot, 0)\|_{L_2}^2 + \frac{\gamma}{2\delta}, \quad (4.12)$$

где $\gamma = \beta_1 \sup_{t \geq 0} \int_0^l f^2(x, t) dx + \beta_2 \sup_{t \geq 0} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (F_x^j(x, t))^2 dx$.

Перед доказательством теоремы рассмотрим две вспомогательные леммы.

Лемма 4.1 (Расширенное неравенство Виртингера). Пусть $z \in H_1(0, l)$ – скалярная функция, $0 = \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_{n-1} < \chi_n = l$ и $\Delta \geq \chi_i - \chi_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$. Если $z(\chi_i) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, тогда

$$\int_0^l z^2(\xi) d\xi \leq \frac{4\Delta^2}{\pi^2} \int_0^l z_\xi^2(\xi) d\xi. \quad (4.13)$$

Доказательство. Перепишем левую часть неравенства (4.13) в виде

$$\int_0^l z^2(\xi) d\xi = \int_0^{\chi_1} z^2(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\chi_i}^{\chi_{i+1}} z^2(\xi) d\xi + \int_{\chi_n}^l z^2(\xi) d\xi.$$

Применяя неравенство Виртингера к каждому интегральному выражению, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\chi_1} z^2(\xi) d\xi + \int_{\chi_n}^l z^2(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\chi_i}^{\chi_{i+1}} z^2(\xi) d\xi \leq \\ & \leq \frac{4\Delta^2}{\pi^2} \left(\int_0^{\chi_1} z_\xi^2(\xi) d\xi + \int_{\chi_n}^l z_\xi^2(\xi) d\xi \right) + \frac{\Delta^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\chi_i}^{\chi_{i+1}} z_\xi^2(\xi) d\xi \\ & \leq \frac{4\Delta^2}{\pi^2} \int_0^l z_\xi^2(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Лемма 4.2 Пусть функция $V : [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ дифференцируема на $[t_0, \infty)$ и задано дифференциальное неравенство

$$\dot{V}(t) \leq -\delta V(t) + f(t), \quad (4.14)$$

где $\delta > 0$ и $\sup_{t \geq t_0} |f(t)| = \beta$. Тогда справедливо следующее неравенство

$$V(t) \leq e^{-\delta(t-t_0)} V(t_0) + \frac{\beta}{\delta}, \quad t \geq t_0. \quad (4.15)$$

Доказательство. Обозначим

$$y(t) = e^{-\delta(t-t_0)}V(t_0) + \frac{\beta}{\delta}, \quad t \geq t_0.$$

Легко проверить, что функция $y(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{y}(t) = -\delta y(t) + \beta, \quad t \geq t_0. \quad (4.16)$$

Воспользуемся принципом сравнения и покажем, что $V(t) \leq y(t)$ для любых $t \geq t_0$. Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots$ последовательность положительных чисел таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0^+$. Тогда функция

$$\dot{y}_n(t) = -\delta y_n(t) + \beta + \frac{\varepsilon_n}{\delta} \quad (4.17)$$

является решением дифференциального уравнения

$$\dot{y}(t) = -\delta y(t) + \beta + \varepsilon_n. \quad (4.18)$$

Предположим, что существует $t^* > t_0$ такое, что

$$t^* = \inf\{t > t_0 : V(t) \geq y_n(t)\}. \quad (4.19)$$

Тогда $V(t^*) \geq y_n(t^*)$ и $V(t) < y_n(t)$ при $t_0 \leq t \leq t^*$. Из (4.14) и (4.18) имеем $\dot{V}(t^*) < \dot{y}_n(t^*)$. С другой стороны, из $V(t) < y_n(t)$ при $t < t^*$ и $V(t^*) = y_n(t^*)$ следует, что $\dot{V}(t^*) \geq \dot{y}_n(t^*)$. Мы пришли к противоречию. Значит, $V(t) < y_n(t)$ для всех $t \geq t_0$ и $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, $V(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y(t)$ при всех $t \geq t_0$. Доказательство Леммы 4.2 закончено.

Доказательство. Для анализа устойчивости замкнутой системы (4.9) рассмотрим следующий функционал Ляпунова

$$V(t) = \int_0^l z^2(x, t) dx. \quad (4.20)$$

Дифференцируя $V(t)$ по времени вдоль траекторий (4.9), составим следующее выражение

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) + 2\delta V(t) = & 2 \int_0^l [a_1 z(x, t) z_{xx}(x, t) + a_2 z(x, t) z_x(x, t) - \\ & - (K - \phi) z^2(x, t) + z(x, t) f(x, t)] dx + \\ & + 2K \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} z(x, t) [z(x, t) - F^j(x, t)] dx + \\ & + 2\delta \int_0^l z^2(x, t) dx,\end{aligned}\tag{4.21}$$

где ради краткости в доказательстве обозначим $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = F^j(x, t)$. С учетом граничных условий (4.2) или (4.3), проинтегрируем по частям первое слагаемое в (4.21):

$$\begin{aligned}2a_1 \int_0^l z(x, t) z_{xx}(x, t) dx &= \\ &= 2a_1 z(x, t) z_x(x, t) \Big|_0^l - 2a_1 \int_0^l z_x^2(x, t) dx \\ &\leq -2a_1 \int_0^l z_x^2(x, t) dx.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Используя неравенство Юнга для предпоследнего слагаемого в (4.21), получим

$$\begin{aligned}2K \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} z(x, t) [z(x, t) - F^j(x, t)] dx &\leq \\ &\leq K \bar{R} \int_0^l z^2(x, t) dx + \\ &+ K \bar{R}^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [z(x, t) - F^j(x, t)]^2 dx.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Согласно условию (в) $z(x, t) = F^j(x, t)$ в точке $x = \bar{x}_j$. Тогда применяя Лемму 4.1 к (4.23), получим

$$\begin{aligned}K \bar{R}^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [z(x, t) - F^j(x, t)]^2 dx &\leq \\ &\leq \frac{4\Delta^2}{\pi^2} K \bar{R}^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [z_x^2(x, t) - \\ &- 2z_x(x, t) F_x^j(x, t) + (F_x^j(x, t))^2] dx.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Обозначим $\eta_j = \text{col}\{z(x, t), z_x(x, t), f(x, t), F_x^j(x, t)\}$. Применяя (4.22)–(4.24) к (4.21), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) + 2\delta V(t) - \beta_1 \int_0^l f^2(x, t) dx - \\ - \beta_2 \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} F_x^j(x, t) dx \leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \eta^T \Psi \eta dx, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где Ψ задана в (4.11). Матрица (4.11) аффинна по отношению к параметру a_2 . Значит, согласно [130], если выполнены ЛМН (4.10) в вершинах $a_2 = \{\underline{a}_2, \bar{a}_2\}$, то ЛМН $\Psi \leq 0$ будет выполнено для любых $a_2 \in [\underline{a}_2, \bar{a}_2]$. Следовательно, будет выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) + 2\delta V(t) - \beta_1 \int_0^l f^2(x, t) dx - \\ - \beta_2 \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} F_x^j(x, t) dx \leq 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Воспользовавшись Леммой 4.2, решение дифференциального неравенства (4.26) определим в виде

$$V(t) \leq V(0)e^{-2\delta t} + \frac{\gamma}{2\delta}. \quad (4.27)$$

Тогда из (4.27) следует (4.12). Теорема 4.1 доказана.

4.4 Основной результат для системы гиперболического типа

Подставим (4.6) в (4.4) и запишем уравнение замкнутой системы:

$$\begin{aligned} z_{tt}(x, t) = a_1 z_{xx}(x, t) + a_2 z_x(x, t) - bz_t(x, t) + f(x, t) - \\ - (K - \phi)z(x, t) + K[z(x, t) - F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)], \\ x \in [x_j, x_{j+1}), \quad j = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Теорема 4.2 Рассмотрим замкнутую систему (4.28) при граничных условиях (4.2) или (4.3). Пусть для заданных коэффициентов $p \in (-0.5; 0.5)$, $\bar{R} > 0$, $\Delta > 0$, $\delta > 0$, $K > 0$ будут разрешимы следующие линейные матричные неравенства в соответствующих вершинах:

$$\Psi(\phi = \{\underline{\phi}, \bar{\phi}\}, a_2 = \{\underline{a}_2, \bar{a}_2\}, b = \{\underline{b}, \bar{b}\}) \leq 0, \quad (4.29)$$

где

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0.5pa_2 & \Psi_{13} & 0.5p & 0 \\ * & \Psi_{22} & a_2 & 0 & -\frac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1} \\ * & * & \Psi_{33} & 1 & 0 \\ * & * & * & -\beta_1 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_2 + \frac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

$$\Psi_{11} = -0.5p(K - \bar{\phi}) + 0.25K\bar{R}p^2 + 2\delta,$$

$$\Psi_{13} = 1 - 0.5pb - K + \phi + K\bar{R}p,$$

$$\Psi_{22} = -pa_1 + \frac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1},$$

$$\Psi_{33} = 0.5p - 2\underline{b} + 0.5K\bar{R}.$$

Тогда будет выполнено неравенство (4.12) параметры которого рассчитываются с учетом (4.29).

Доказательство. Для анализа устойчивости замкнутой системы (4.28), рассмотрим функционал Ляпунова в виде

$$V(t) = \int_0^l [a_1 z_x^2(x, t) + z^2(x, t) + pz(x, t)z_t(x, t) + z_t^2(x, t)] dx. \quad (4.31)$$

При $p \in (-0.5; 0.5)$ будет справедливо неравенство $z^2 + pz z_t + z_t^2 \geq 0$. Значит, $V(t) \geq 0$. Дифференцируя $V(t)$ по времени вдоль траекторий (4.28),

составим следующее выражение

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) + 2\delta V(t) = & 2 \int_0^l [a_1 z_x(x, t) z_{xt}(x, t) + z(x, t) z_t(x, t) + \\
& + 0.5 p z_t^2(x, t) + [0.5 p z(x, t) + z_t(x, t)] \times \\
& \times [a_1 z_{xx}(x, t) + a_2 z_x(x, t) - \\
& - b z_t(x, t) + f(x, t) - (K - \phi) z(x, t)] dx \\
& + 2K \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [0.5 p z(x, t) + z_t(x, t)] \times \\
& \times [z(x, t) - F^j(x, t)] + 2\delta \int_0^l z^2(x, t) dx,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

где ради краткости в доказательстве обозначим $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = F^j(x, t)$.

С учетом граничных условий (4.2) или (4.3), проинтегрируем по частям первое слагаемое в (4.32):

$$\begin{aligned}
2a_1 \int_0^l z_x(x, t) z_{xt}(x, t) dx &= 2a_1 z_x(x, t) z_t(x, t) \Big|_0^l - \\
&- 2a_1 \int_0^l z_t(x, t) z_{xx}(x, t) dx = \\
&\leq -2a_1 \int_0^l z_t(x, t) z_{xx}(x, t) dx.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Используя неравенство Юнга для предпоследнего слагаемого в (4.32), получим

$$\begin{aligned}
2K \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [0.5 p z(x, t) + z_t(x, t)] [z(x, t) - F^j(x, t)] dx &\leq \\
&\leq K \bar{R} \int_0^l [0.5 p z(x, t) + z_t(x, t)]^2 dx + \\
&+ K \bar{R}^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [z(x, t) - F^j(x, t)]^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Так как $z(x, t) = F^j(x, t)$ в точке $x = \bar{x}_j$ (см. условие (в)), то применяя Лемму 4.1 к (4.34), получим (4.24). Обозначим $\bar{\eta}_j = \text{col}\{z(x, t), z_x(x, t), z_t(x, t), f(x, t), F_x^j(x, t)\}$. Применяя (4.22), (4.33), (4.34) и (4.24) к (4.32), запишем результат в виде

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) + 2\delta V(t) - \beta_1 \int_0^l f^2(x, t) dx - \\
- \beta_2 \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} F_x^j(x, t) dx \leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \bar{\eta}^T \bar{\Psi} \bar{\eta} dx.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Здесь $\bar{\Psi}$ задано в (4.30). Матрица $\bar{\Psi}$ аффинна по отношению к параметрам ϕ , a_2 и b . Согласно [130], если выполнены ЛМН (4.29) в вершинах $\phi = \{\underline{\phi}, \bar{\phi}\}$, $a_2 = \{\underline{a}_2, \bar{a}_2\}$ и $b = \{\underline{b}, \bar{b}\}$, то $\bar{\Psi} \leq 0$ выполнено для любых $\phi \in [\underline{\phi}, \bar{\phi}]$, $a_2 \in [\underline{a}_2, \bar{a}_2]$ и $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$. Следовательно, будет выполнено неравенство вида (4.26). Воспользовавшись Леммой 4.2, решение дифференциального неравенства (4.26) можно записать в виде (4.27). Тогда из (4.27) следует неравенство (4.12) параметры которого рассчитываются с учетом (4.29). Теорема 4.2 доказана.

4.5 Решение краевой задачи

В данном разделе покажем, что существуют решения уравнений (4.9) и (4.28), удовлетворяющие граничным условиям (4.2) или (4.3).

4.5.1 Объекты параболического типа

Сначала рассмотрим уравнение (4.9) с граничными условиями (4.2). Краевую задачу (4.9), (4.2) можно сформулировать как абстрактную неоднородную задачу Коши в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, l)$ в виде

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + F(t, z(t)), \quad z_0 = z(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \quad (4.36)$$

Здесь оператор $\mathcal{A} = a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial x} + \phi$ имеет область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{z \in H_2(0, l) : z(0) = z(l) = 0\}$, $F(t, z(t)) = f(t) + u(t)$, функция $u(t)$ задана в (4.6). Согласно Теореме 4.1, [164] и [117], инфинитезимальный оператор $\mathcal{A}$ генерирует строго непрерывную экспоненциально устойчивую

полугруппу (C_0 -полугруппу) $T(t)$. Тогда, краевая задача (4.36) может быть сформулирована как краевая задача на полубесконечном интервале $[0, \infty)$ и ее решения могут быть найдены как решения следующего интегрального уравнения

$$z(t) = T(t)z(0) + \int_0^t T(t-s)F(s, z(s))ds. \quad (4.37)$$

Так как функция $F(t, z(t))$ класса $\mathcal{C}^1$, то согласно теореме 1.5 (глава 6) [192] существует уникальное решение (4.36) и это решение удовлетворяет интегральному уравнению (4.37). Краевая задача при смешанных граничных условиях (4.3) решается аналогично.

4.5.2 Объекты гиперболического типа

Теперь рассмотрим уравнение (4.28) с граничными условиями (4.2) или (4.3). Запишем сначала краевую задачу (4.28), (4.2) как абстрактную неоднородную задачу Коши в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, l)$ в виде

$$\dot{\xi}(t) = \bar{\mathcal{A}}\xi(t) + \bar{F}(t, \xi(t)), \quad \xi_0 = \xi(0) \in \bar{\mathcal{A}}, \quad (4.38)$$

где $\xi = \text{col}\{z, z_t\}$, оператор $\bar{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \phi & -b \end{bmatrix}$ имеет область определения $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}) = \{\xi \in H_2(0, l) : \xi(0) = \xi(l) = 0\}$, $\bar{F}(t, \xi(t)) = [0 \ 1]^T [f(t) + u(t)]$, функция $u(t)$ задана в (4.6). Согласно Теореме 4.2, [164] и [117], инфинитезимальный оператор $\mathcal{A}$ генерирует строго непрерывную экспоненциально устойчивую полугруппу (C_0 -полугруппу) $T(t)$. Следовательно, дальнейшие рассуждения для уравнения (4.38) аналогичны, как для (4.36) в предыдущем подразделе 4.5.1.

4.6 Управление полулинейными системами

Условия теорем 4.1, 4.2 и раздела 4.5 будут аналогичными для полулинейных систем параболического и гиперболического типов, которые представлены следующими уравнениями:

1) уравнение параболического типа:

$$\begin{aligned} z_t(x, t) = & \frac{\partial}{\partial x}[a_1(x)z_x(x, t)] + a_2(x)z_x(x, t) \\ & + \phi(z, x, t)z(x, t) + u(x, t) + f(x, t), \\ & x \in [0, l], \quad l > 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

с граничными условиями Дирихле (4.2) или смешанными граничными условиями (4.3). Функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $\phi(z, x, t)$ и функция $f(x, t)$ неизвестны, но известны границы интервалов, которым они принадлежат: $0 < \underline{a}_1(x) \leq a_1$, $\underline{a}_2 \leq a_2(x) \leq \bar{a}_2$, $\underline{\phi} \leq \phi(z, x, t) \leq \bar{\phi}$. Остальные параметры и функции те же, что и в (4.1);

2) уравнение гиперболического типа:

$$\begin{aligned} z_{tt}(x, t) = & \frac{\partial}{\partial x}[a_1(x)z_x(x, t)] + a_2(x)z_x(x, t) \\ & + \phi(z, x, t)z(x, t) \\ & - b(z, x, t)z_t(x, t) + u(x, t) + f(x, t), \\ & x \in [0, l], \end{aligned} \quad (4.40)$$

с граничными условиями Дирихле (4.2) или смешанными граничными условиями (4.3). В (4.40) $\bar{b} > b(z, x, t) > \underline{b} > 0$, где вершины $\bar{b}$ и $\underline{b}$ известны. Остальные функции в (4.40) принимают те же значения, что и в (4.39).

4.7 Пример управления распределенными системами

4.7.1 Моделирование системы управления

Пусть $l = 1$. Для моделирования систем (4.1) и (4.4) разделим отрезок $[0, 1]$ на 160 подинтервалов одинаковой длины соответственно с шагом дискретизации по пространственной переменной $D = 1/160$. Производные первого и второго порядков по пространственной переменной от функции $z(x, t)$ вычисляются в точках $0 = x_0 < x_1 < \dots x_l < \dots < x_{160}$ с помощью формул

$$z_x(x_k, t) = \frac{z(x_{k+1}, t) - z(x_k, t)}{D},$$
$$z_{xx}(x_k, t) = \frac{z(x_{k+1}, t) - 2z(x_k, t) + z(x_{k-1}, t)}{D^2}.$$

Для формирования закона управления (4.6) разделим отрезок $[0, 1]$ поочередно на $N = 2$ и на $N = 10$ равных подинтервалов (см. (4.5)).

Рассмотрим системы (4.1) и (4.4) при граничных условиях Дирихле (4.2)

и

$$a_1 \geq 0.5, \quad a_2 \in [-5, 5],$$
$$\phi \in [-5, 5], \quad b = [-5, -1], \quad |f(x, t)| \leq 20$$

для любых x и t .

Матричные неравенства (4.10) и (4.29) разрешимы при $K \geq 100$.

4.7.2 Результаты моделирования для системы параболического типа

В (4.1) выберем

$$\begin{aligned}a_1 &= 1, \quad a_2 = -1, \quad \phi = 5, \\f(x, t) &= 0.2[\sin(30kt) + \sin(2kt)], \quad k = 0, \dots, 160, \\z(x, 0) &= \sin(\pi x_k).\end{aligned}$$

Для моделирования алгоритмов управления рассмотрим два разбиения: $N = 2$ и $N = 10$ (см. (4.5)). Пусть $\bar{x}_j = 0.5(x_j + x_{j+1})$. В законе управления (4.6) выберем функцию $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ из примера 3, где $\alpha = 10^3$, а также $\beta_j = 1/8$ при $N = 2$ и $\beta_j = 1/80$ при $N = 10$.

На рисунках 4.3–4.5 представлены решения (4.1) и графики $u(x, t)$ для:

- 1) закона управления $u(x, t) = -Kz(\bar{x}_j, t)$ из [129, 175] при $K = 100$;
- 2) предложенного закона управления (4.6) при $K = 100$;
- 3) предложенного закона управления (4.6) при $K = 500$.

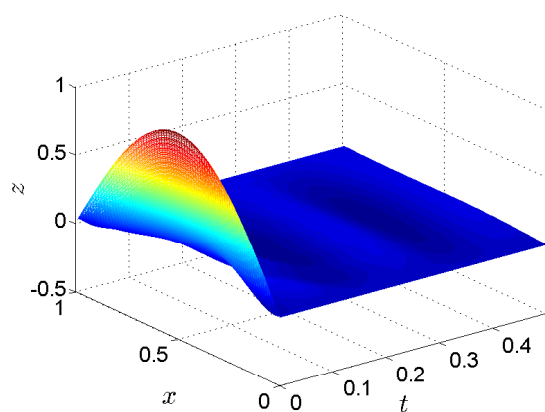
Из рис. 4.3, 4.4 видно, что качество управления по $z(x, t)$ для предложенного закона управления незначительно уступает качеству управления для алгоритма из [129, 175]. При этом предложенный алгоритм обеспечивает экспоненциальную устойчивость по $z(x, t)$ в условиях возмущений. Если же увеличить коэффициент K в предложенном законе управления в 5 раз, то амплитуда управления также возрастет примерно в 5 раз, но при этом скорость экспоненциальной сходимости и качество подавления возмущения в установившемся режиме будет выше, чем у алгоритма из [129, 175] при $K = 100$.

Теперь проанализируем затраты на управление. На рис. 4.6, 4.7 представлена интегральная разность вида

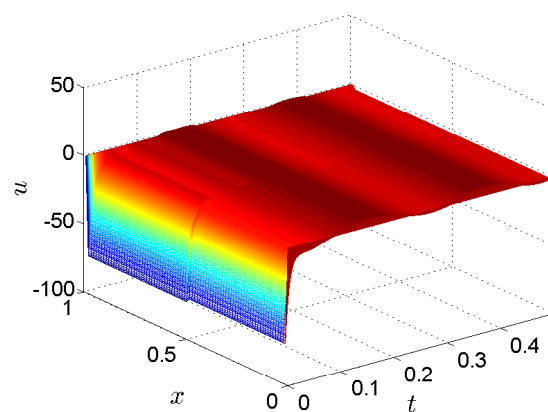
$$I = \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^t (|u_{F\&B}(\bar{x}_j, s)| - |u_{proposed}(\bar{x}_j, s)|) ds,$$

где $u_{F\&B}(\bar{x}_j, t)$ – закон управления [129], $u_{proposed}(\bar{x}_j, t)$ – предложенный закон управления. Из рис. 4.6, 4.7 видно, что затраты на управление у предложенного алгоритма меньше, чем у [129]. При этом предложенный закон управления принимает ненулевые значения лишь на части пространственной переменной, в то время как управление [129, 175] требует реализации на протяжении всей пространственной переменной, см. рис. 4.3–4.5.

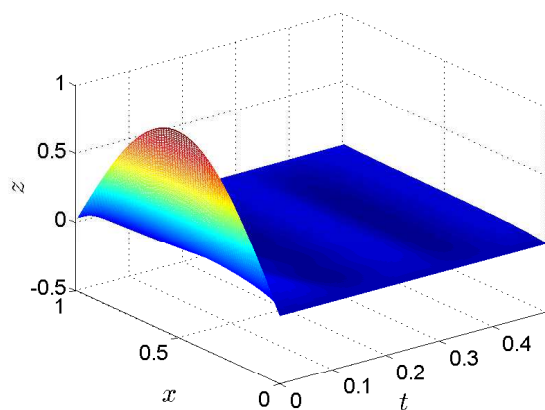
Отметим, что результаты моделирования для функции $F^j(x, t)$ из примера 2 с $\alpha = 100$ сопоставимы с результатами, полученными для функции $F^j(x, t)$ из примера 3, поэтому они не приводятся.



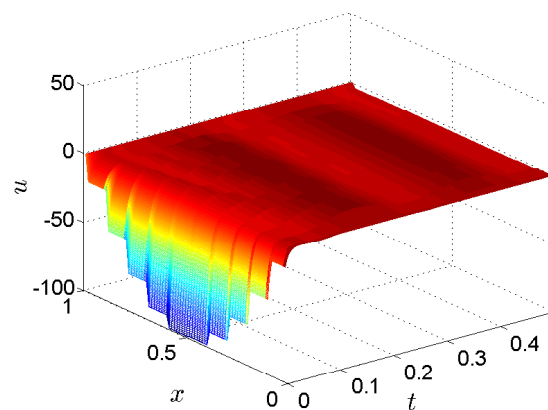
a



б

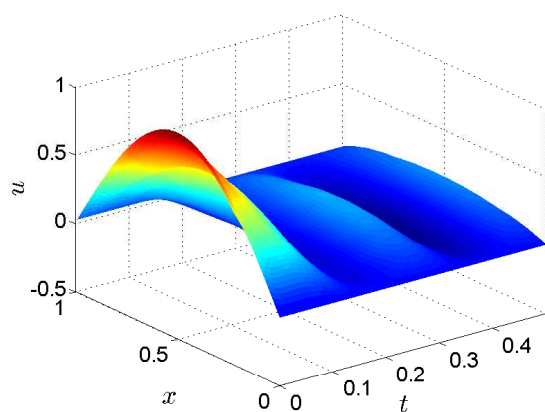


в

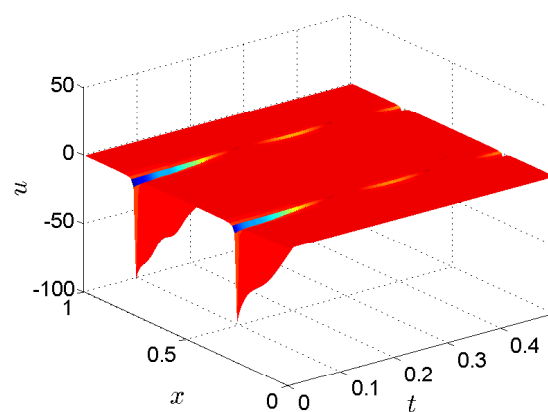


г

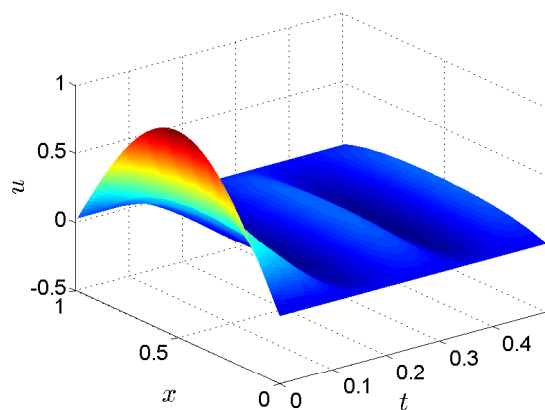
Рисунок 4.3 — Пространственно-временной график по $z(x, t)$ и $u(x, t)$ для $[129, 175]$ при $N = 2$ (*a, б*) и $N = 10$ (*в, г*) при $K = 100$.



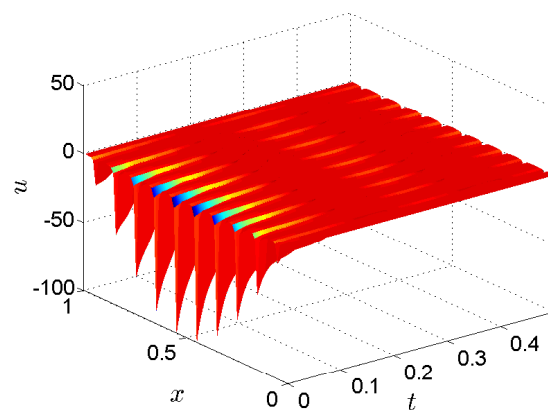
a



б



в



г

Рисунок 4.4 — Пространственно-временной график по $z(x, t)$ и $u(x, t)$ для предложенного алгоритма при $N = 2$ (*a, б*) и $N = 10$ (*в, г*) при $K = 100$.

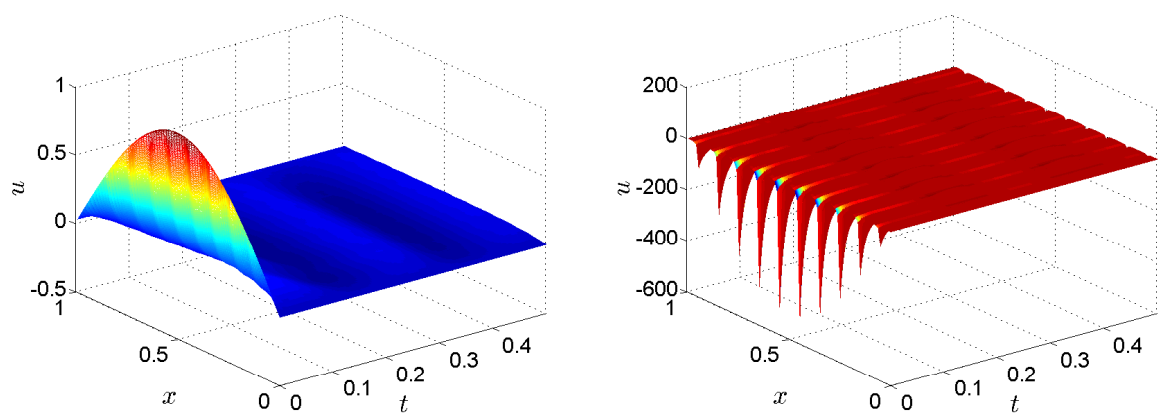
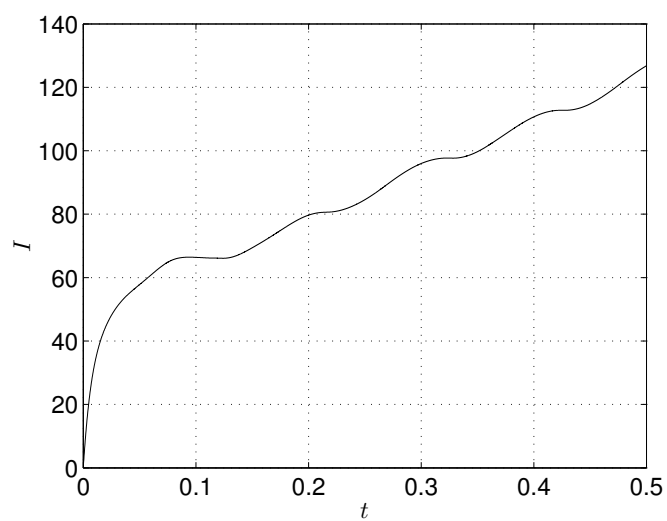
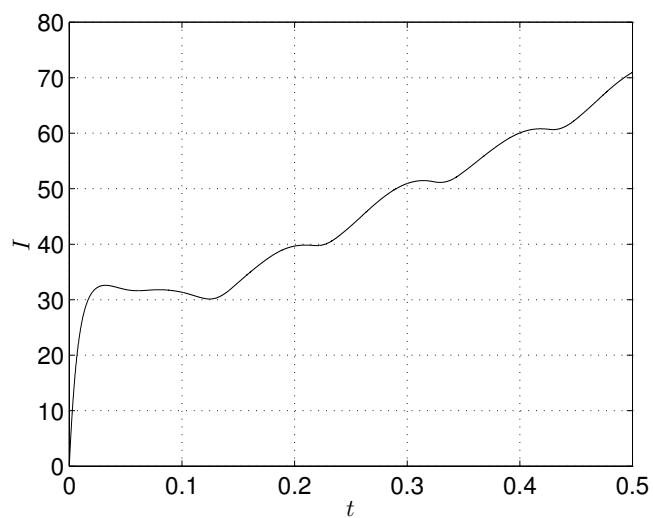


Рисунок 4.5 — Пространственно-временной график по $z(x, t)$ и $u(x, t)$ для предложенного алгоритма при $N = 10$ при $K = 500$.



a



б

Рисунок 4.6 — Разница затрат на управление при $N = 2$ (*a*) и $N = 10$ (*б*) между использованием закона управления из [129, 175] и предложенным законом управления соответственно при $K = 100$.

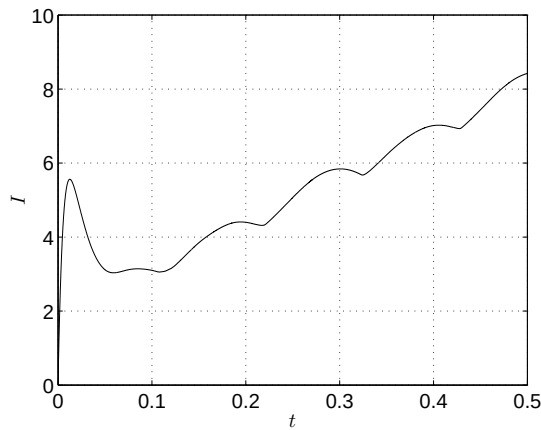


Рисунок 4.7 — Разница затрат на управление при $N = 10$ между использованием закона управления из $[129, 175]$ при $K = 100$ и предложенным законом управления при $K = 500$.

4.7.3 Результаты моделирования для системы гиперболического типа

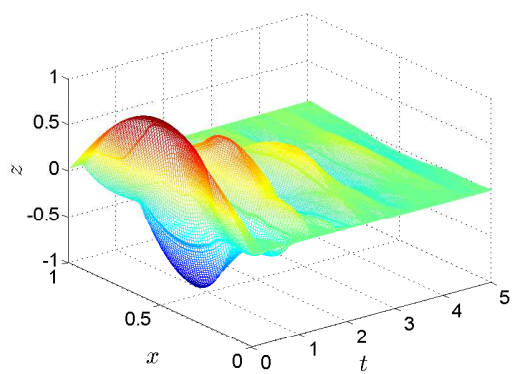
При моделировании (4.4) выберем

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad b = -1, \quad \phi = 5,$$

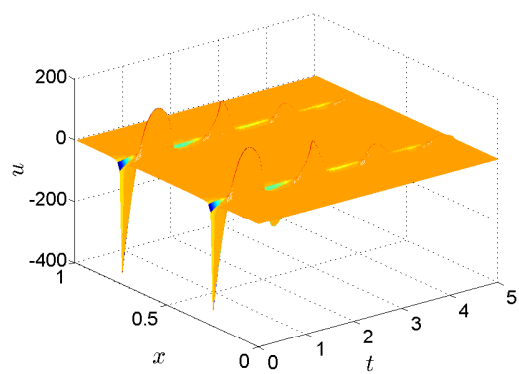
$$f(x, t) = 0.2[\sin(30kt) + \sin(2kt)], \quad k = 0, \dots, 160,$$

$$z(x, 0) = \sin(\pi x_k), \quad z_t(x, 0) = 0.$$

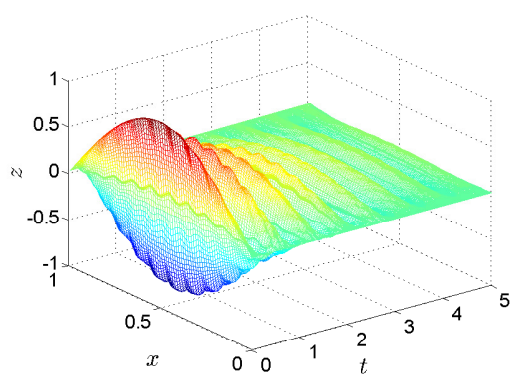
В законе управления (4.6) выберем параметры согласно предыдущему подразделу. На рис. 4.8, 4.9 представлены решения (4.4) и графики $u(x, t)$ для предложенного закона управления (4.6) при $K = 100$ и $K = 500$.



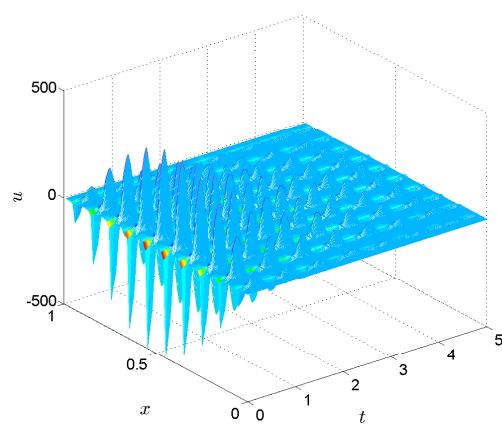
a



б

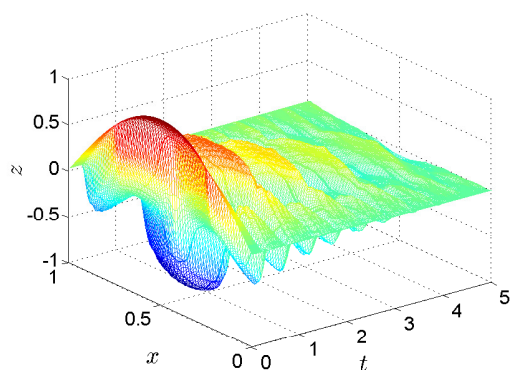


в

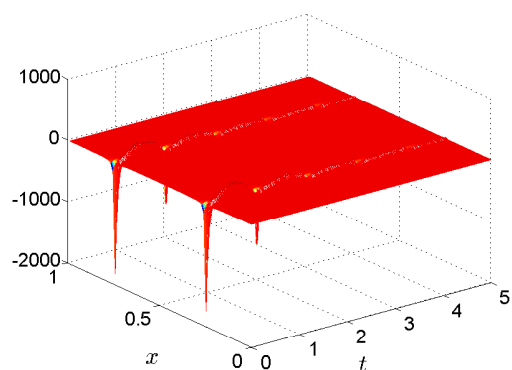


г

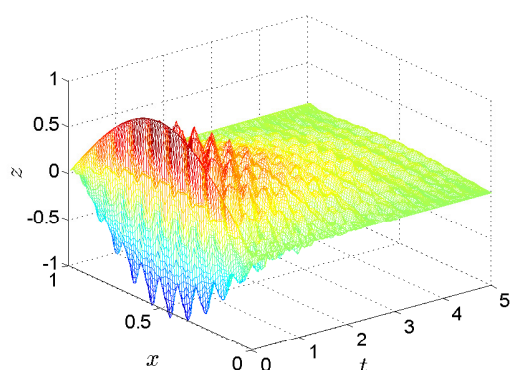
Рисунок 4.8 — Пространственно-временной график по $z(x, t)$ и $u(x, t)$ для предложенного алгоритма при $N = 10$ при $K = 100$.



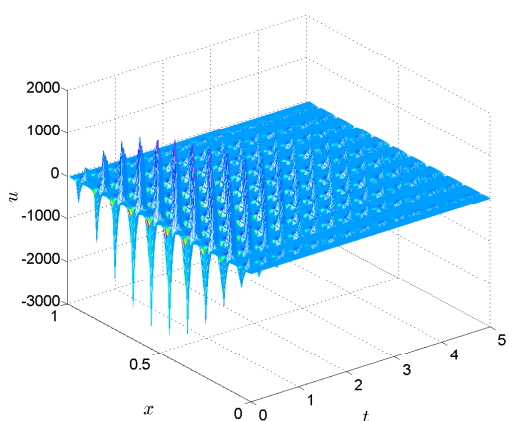
a



б



в



г

Рисунок 4.9 — Пространственно-временной график по $z(x, t)$ и $u(x, t)$ для предложенного алгоритма при $N = 10$ при $K = 500$.

Из рис. 4.8, 4.9 видно, что предложенный алгоритм обеспечивает экспоненциальную устойчивость по $z(x, t)$ в условиях возмущений. Результаты моделирования для функции $F^j(x, t)$ из примера 3 с $\alpha = 100$ сопоставимы с результатами, полученными для функции $F^j(x, t)$ из примера 2, поэтому они не приводятся.

4.8 Заключение по главе 4

- Предложен дискретный по пространственной переменной закон управления скалярными линейными дифференциальными уравнениями параболического и гиперболического типов с интервально неопределенными параметрами и внешними ограниченными возмущениями. Для синтеза закона управления используется конечный набор измерений выходного сигнала. Закон управления зависит от функции, зависящей от пространственной координаты и текущего измерения. Данная функция позволяет достигать разных свойств, например, обеспечивать пониженные затраты на управление или реализовывать управление близкое к граничному.
- Доказана экспоненциальная устойчивость замкнутых систем и робастность по отношению к параметрам и внешним возмущениям.
- Численные примеры моделирования подтвердили результаты расчетов и показали эффективность предложенного алгоритма по сравнению с результатом [129, 175] в том смысле, что при меньших затратах на управление можно достичь выше скорость сходимости решений и качество регулирования в установившемся режиме.

Глава 5 Дивергентные методы устойчивости

Данный раздел посвящен развитию дивергентного метода исследования устойчивости динамических систем. Интерес к данному методу вызван его связью со многими задачами физики и механики, в частности, с процессами, описываемыми уравнением непрерывности [102, 158, 180, 193].

Первые результаты исследования устойчивости динамических систем с использованием дивергенции и потока векторного поля были предложены в [35, 110, 131, 229] для динамических систем второго порядка. Данные результаты были улучшены в [27, 28, 30, 204, 205] для систем произвольного порядка. Однако все данные методы предлагаются для исследования устойчивости или асимптотической устойчивости, но не экспоненциальной. Дивергентные методы [27, 28, 30, 204, 205] успешно используются в работах [189–191].

5.1 Постановка задачи

В данном разделе рассматриваются автономные системы. Автономные системы (или стационарные системы) описываются автономными дифференциальными уравнениями, не зависящими явно от времени, т.е.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)). \quad (5.1)$$

Здесь $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ – состояние, $f = [f_1, \dots, f_n]^T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируемая функция в $D \subset \mathbb{R}^n$. Множество D содержит

начало координат и $f(0) = 0$. Предположим, что область притяжения D_A точки равновесия $x = 0$ совпадает с областью D . Однако все полученные результаты справедливы, если $D_A \subset D$ или $D_A = \mathbb{R}^n$.

Требуется получить новые условия экспоненциальной устойчивости в дивергентной форме.

5.2 Условия устойчивости

Обозначим через $\Upsilon = \{x \in D : \mu(x) = C, C > 0\}$ и $V = \Upsilon \cup \text{int}\{\Upsilon\}$, а также обозначим через $\bar{\Upsilon} = \{x \in D : \mu^{-1}(x) = C, C > 0\}$ и $\bar{V} = \bar{\Upsilon} \cup \text{int}\{\bar{\Upsilon}\}$.

Теорема 5.1 Если точка равновесия $x = 0$ уравнения (5.1) является экспоненциально устойчивой, то существует дважды дифференцируемая функция $\mu(x) > 0$ в $x \in D \setminus \{0\}$, $\mu(0) \geq 0$ и $|\nabla\{\mu(x)\}| \neq 0$ для любого $x \in D \setminus \{0\}$ такая, что будет выполнено одно из следующих условий:

$$(i_{T1}) \quad \int_V \nabla \cdot \left\{ |\nabla\{\mu(x)\}| f(x) + \alpha \frac{\mu(x)}{|\nabla\{\mu(x)\}|} \nabla\{\mu(x)\} \right\} dV \leq 0,$$

$$(ii_{T1}) \quad \int_{\bar{V}} \nabla \cdot \left\{ |\nabla\{\mu^{-1}(x)\}| f(x) - \alpha \frac{\mu^{-1}(x)}{|\nabla\{\mu^{-1}(x)\}|} \nabla\{\mu^{-1}(x)\} \right\} d\bar{V} \geq 0,$$

где $\alpha > 0$.

Доказательство. Поскольку точка равновесия $x = 0$ уравнения (5.1) экспоненциально устойчива, то согласно [94, следствию 3.4] и взятию $\mu(x)$ в качестве функции Ляпунова будет выполнено неравенство

$$\dot{\mu}(x) \leq -\alpha\mu(x). \quad (5.2)$$

Учитывая $\dot{\mu}(x) = \nabla\{\mu(x)\}f(x)$, проинтегрируем (5.2) как

$$\oint_{\Upsilon} [\nabla\mu(x)f(x) + \alpha\mu(x)] d\Upsilon \leq 0. \quad (5.3)$$

Используя теорему о дивергенции, перепишем (5.3) в виде (i_{T1}).

Учитывая $\nabla\{\mu^{-1}(x)\} = -\mu^{-2}(x)\nabla\{\mu(x)\}$, перепишем (5.2) как

$$\nabla\{\mu^{-1}(x)\}f(x) \geq \alpha\mu^{-1}(x). \quad (5.4)$$

Интегрируя (5.4), получим

$$\oint_{\bar{\Upsilon}} [\nabla\mu^{-1}(x)f(x) - \alpha\mu^{-1}(x)] d\bar{\Upsilon} \geq 0. \quad (5.5)$$

Согласно теореме о дивергенции, перепишите (5.5) в виде (ii_{T1}). Теорема 5.1 доказана.

З а м е ч а н и е 5.1 Условия (i_{T1}) и (ii_{T1}) представлены в интегральной форме. Однако их можно переписать в соответствующих дифференциальных формах, если

$$(i_{R1}) \quad \nabla \cdot \left\{ |\nabla\{\mu(x)\}|f(x) + \alpha \frac{\mu(x)}{|\nabla\{\mu(x)\}|} \nabla\{\mu(x)\} \right\} \leq 0,$$

$$(ii_{R1}) \quad \nabla \cdot \left\{ |\nabla\{\mu^{-1}(x)\}|f(x) - \alpha \frac{\mu^{-1}(x)}{|\nabla\{\mu^{-1}(x)\}|} \nabla\{\mu^{-1}(x)\} \right\} \geq 0.$$

Проиллюстрируем результат теоремы 5.1 на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_1x_2^2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 - x_2x_1^2 - x_2^3, \end{aligned} \quad (5.6)$$

с точкой равновесия $(0, 0)$. Фазовый портрет (5.6) показан на рис. 5.1. Здесь и далее каждая фазовая траектория имеет свой цвет для соответствующей начальной точки.

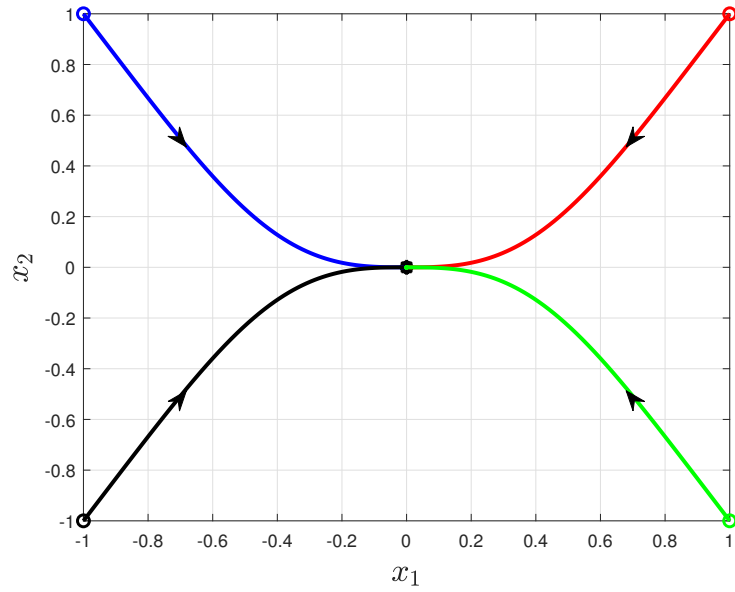


Рисунок 5.1 — Фазовый портрет (5.6).

Исследуем точку равновесия (5.6). Введем

$$\mu(x) = |x|^{2\beta}, \quad (5.7)$$

где β — натуральное число. Вычислим следующие вспомогательные выра-

жения:

$$\nabla\{\mu(x)\} = 2\beta(x_1^2 + x_2^2)^{\beta-1}x,$$

$$\nabla\{\mu^{-1}(x)\} = -2\beta(x_1^2 + x_2^2)^{-\beta-1}x,$$

$$|\nabla\{\mu(x)\}| = 2\beta(x_1^2 + x_2^2)^{\beta-0.5},$$

$$|\nabla\{\mu^{-1}(x)\}| = 2\beta(x_1^2 + x_2^2)^{-\beta-0.5},$$

$$\frac{\mu(x)}{|\nabla\{\mu(x)\}|} \nabla\{\mu(x)\} = (x_1^2 + x_2^2)^{\beta-0.5}x,$$

$$\frac{\mu^{-1}(x)}{|\nabla\{\mu^{-1}(x)\}|} \nabla\{\mu^{-1}(x)\} = -(x_1^2 + x_2^2)^{-\beta-0.5}x,$$

$$\nabla \cdot \{|\nabla\{\mu(x)\}|f(x)\} \leq -2\beta(x_1^2 + x_2^2)^{\beta-0.5}$$

$$\times [2\beta + 2 + (2\beta + 3)(x_1^2 + x_2^2)],$$

$$\nabla \cdot \{|\nabla\{\mu^{-1}(x)\}|f(x)\} \geq 2\beta(x_1^2 + x_2^2)^{-\beta-0.5}$$

$$\times [2\beta - 2 + (2\beta - 3)(x_1^2 + x_2^2)],$$

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{\mu(x)}{|\nabla\{\mu(x)\}|} \nabla\{\mu(x)\} \right\} = (2\beta + 1)(x_1^2 + x_2^2)^{\beta-0.5},$$

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{\mu^{-1}(x)}{|\nabla\{\mu^{-1}(x)\}|} \nabla\{\mu^{-1}(x)\} \right\}$$

$$= (2\beta - 1)(x_1^2 + x_2^2)^{-\beta-0.5}.$$

Используя последние соотношения, проверим выполнение условий (i_{T1})

и (ii_{T1}):

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left\{ |\nabla \{\mu(x)\}| f(x) + \alpha \frac{\mu(x)}{|\nabla \{\mu(x)\}|} \nabla \{\mu(x)\} \right\} \leq \\ & -(x_1^2 + x_2^2)^{\beta-0.5} [4\beta^2 + 4\beta - 2\alpha\beta - \alpha \\ & + 2\beta(2\beta + 3)(x_1^2 + x_2^2)] < 0 \text{ for } \alpha < \frac{4\beta(\beta+1)}{2\beta+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left\{ |\nabla \{\mu^{-1}(x)\}| f(x) - \alpha \frac{\mu^{-1}(x)}{|\nabla \{\mu^{-1}(x)\}|} \nabla \{\mu^{-1}(x)\} \right\} \geq \\ & (x_1^2 + x_2^2)^{\beta-0.5} [4\beta^2 - 4\beta - 2\alpha\beta + \alpha + 2\beta(2\beta - 3) \\ & \times (x_1^2 + x_2^2)] > 0 \text{ for } \beta \geq 2 \text{ and } \alpha < \frac{4\beta(\beta-1)}{2\beta-1}. \end{aligned}$$

В результате точка равновесия $x = 0$ является экспоненциально устойчивой.

В следующей теореме мы введем новую вспомогательную функцию $\xi(x)$, позволяющую расширить класс изучаемых систем по сравнению с теоремой 5.1.

Теорема 5.2 Если точка равновесия $x = 0$ уравнения (5.1) является экспоненциально устойчивой, то существуют дважды дифференцируемая функция $\mu(x) > 0$ и дифференцируемая функция $\xi(x) > 0$ в $x \in D \setminus \{0\}$, $\mu(0) \geq 0$ и $|\nabla \{\mu(x)\}| \neq 0$ для любого $x \in D \setminus \{0\}$ такие, что выполнено одно из следующих условий:

$$(i_{T2}) \int_V \nabla \cdot \left\{ \xi(x) f(x) + \alpha \frac{\mu(x)\xi(x)}{|\nabla \{\mu(x)\}|^2} \nabla \{\mu(x)\} \right\} dV \leq 0,$$

$$\begin{aligned} (i_{T2}) \int_{\bar{V}} \nabla \cdot \left\{ \xi^{-1}(x) f(x) - \alpha \frac{\mu^{-1}(x)\xi^{-1}(x)}{|\nabla \{\mu^{-1}(x)\}|^2} \nabla \{\mu^{-1}(x)\} \right\} \\ d\bar{V} \geq 0, \end{aligned}$$

где $\alpha > 0$.

В частности, выбирая $\xi(x) = |\nabla \{\mu(x)\}|$, имеем условие теоремы 5.1.

З а м е ч а н и е 5.2 Условия (i_{T2}) и (ii_{T2}) можно переписать в соответствующих дифференциальных формах, если

$$(i_{R2}) \quad \nabla \cdot \left\{ |\nabla \{\mu(x)\}| f(x) + \alpha \frac{\mu(x)}{|\nabla \{\mu(x)\}|} \nabla \{\mu(x)\} \right\} \leq 0,$$

$$(ii_{R2}) \quad \nabla \cdot \left\{ |\nabla \{\mu^{-1}(x)\}| f(x) - \alpha \frac{\mu^{-1}(x)}{|\nabla \{\mu^{-1}(x)\}|} \nabla \{\mu^{-1}(x)\} \right\} \geq 0.$$

Покажем на следующем примере, что теоремы 5.1 и 5.2 обеспечивают только необходимые условия.

Пример 2. Выберем $\xi(x) = 1$ и $\mu(x) = |x|^{2\beta}$. Тогда, $\nabla \{\mu(x)\} = 2\beta|x|^{\beta-2}x$, $|\nabla \{\mu(x)\}| = 2\beta|x|^{2\beta-1}$ и $\frac{\mu(x)\xi(x)}{|\nabla \{\mu(x)\}|^2} \nabla \{\mu(x)\} = \frac{n}{2\beta}$. Принимая во внимание (i_{R2}) , получим

$$\nabla \cdot \{f(x)\} \leq -\frac{n\alpha}{2\beta} < 0.$$

Заметим, что необходимое условие устойчивости [27, 28, 35, 110, 131, 229] выглядит как $\nabla \cdot \{f(x)\} < 0$.

Т е о р е м а 5.3 Пусть $\mu(x)$ – положительно определенная непрерывно дифференцируемая функция в D , $\alpha > 0$ и $x = 0$ – точка равновесия системы (5.1). Если выполнено одно из следующих неравенств

$$(i_{T2}) \quad \nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} \leq -\mu(x)[\alpha - \nabla \cdot \{f(x)\}],$$

$$(ii_{T2}) \quad \nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} \geq \alpha\mu^{-1}(x) \text{ and } \nabla \cdot \{f(x)\} \leq 0,$$

$$(iii_{T2}) \quad \nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} \leq -\alpha\mu(x) \text{ and } \nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} \geq \alpha\mu^{-1}(x),$$

для $x \in D \setminus \{0\}$, то $x = 0$ является экспоненциально устойчивой.

Доказательство. Рассмотрим каждый случай (i_{T2})-(iii_{T2}) отдельно. Перепишем неравенство (i_{T2}) следующим образом

$$\nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} - \nabla \cdot \{f(x)\}\mu(x) \leq -\alpha\mu(x). \quad (5.8)$$

С учетом известного соотношения [102]

$$\nabla\{\mu(x)\}^T f(x) = \nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} - \nabla \cdot \{f(x)\}\mu(x), \quad (5.9)$$

представим левую часть (5.8) в виде (5.2), т. е. $x = 0$ является экспоненциально устойчивой точкой равновесия.

Из (ii_{T2}) имеем

$$\nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} - \nabla \cdot \{f(x)\}\mu^{-1}(x) \geq \alpha\mu^{-1}(x). \quad (5.10)$$

Принимая во внимание первое выражение в (5.9), перепишите (5.10) следующим образом

$$\nabla\{\mu^{-1}(x)\}f(x) \geq \alpha\mu^{-1}(x).$$

Учитывая $\nabla\{\mu^{-1}(x)\}f(x) = -\mu^{-2}\nabla\{\mu(x)\}f(x)$, получим (5.2).

Из (iii_{T2}) получим

$$\nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} - \mu^2(x)\nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} \leq -2\alpha\mu(x)$$

или в форме

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} - \nabla \cdot \{f(x)\}\mu(x) \\ - \mu^2(x)\nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} + \nabla \cdot \{f(x)\}\mu(x) \leq -2\alpha\mu(x). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Учитывая $\nabla\{\mu(x)\}^T f(x) = -\mu^2(x)\nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} + \nabla \cdot \{f(x)\}\mu(x)$ и (5.9), получим (5.2) из (5.11). Теорема 5.3 доказана.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_1x_2^2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - x_2x_1^2 - x_2^3, \end{aligned} \quad (5.12)$$

с точкой равновесия $(0, 0)$. Фазовый портрет (5.12) показан на рис. 5.8.

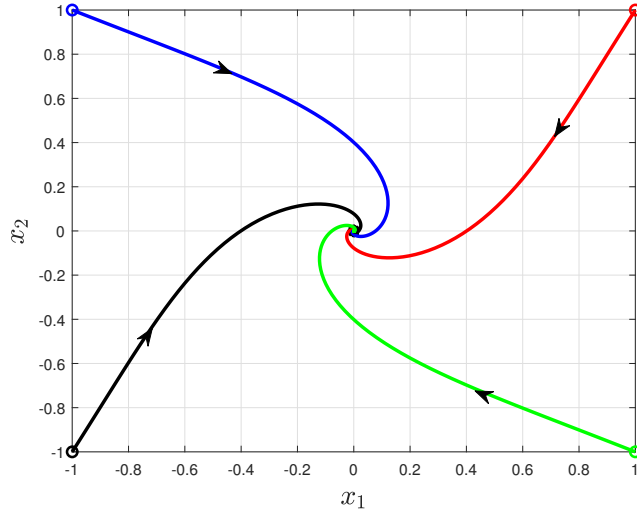


Рисунок 5.2 — Фазовый портрет (5.12).

Исследуем точку равновесия (5.12). Согласно теореме 5.3 введем $\mu(x)$ в виде (5.7). Вычислим следующие вспомогательные выражения:

$$\nabla \cdot \{f(x)\} = -2 - 4x_1^2 - 4x_2^2, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} &= -2\beta(x_1^2 + x_2^2)^{\beta-1}[x_1^2 + x_2^2 \\ &\quad + 2x_1^2x_2^2 + x_1^4 + x_2^4] \\ &\quad - 2(x_1^2 + x_2^2)^\beta(1 + 2x_1^2 + 2x_2^2), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} &= (x_1^2 + x_2^2)^{-\beta}[-2 + 2\beta \\ &\quad + (2\beta - 4)(x_1^2 + x_2^2)]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

С учетом (5.14) проверим условие (i_{T2})

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} \\ \leq -|x|^{2\beta}[2\beta - (-2 - 4x_1^2 - 4x_2^2)].\end{aligned}$$

Учитывая (5.13) и (5.15), проверим условие (ii_{T2})

$$\nabla \cdot \{f(x)\} < 0,$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} \\ \geq |x|^{-2\beta}[-2 + 2\beta] \quad \text{for } \beta \geq 2.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Используя (5.14), можно получить $\nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} \leq -2(\beta+1)(x_1^2+x_2^2)^\beta$.

Учитывая (5.16), условие (iii_{T2}) выполнено.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 0.5 \sin(x_2), \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + 0.5 \sin(x_1),\end{aligned}\tag{5.17}$$

с точкой равновесия (0, 0). Фазовый портрет (5.17) показан на рис. 5.3.

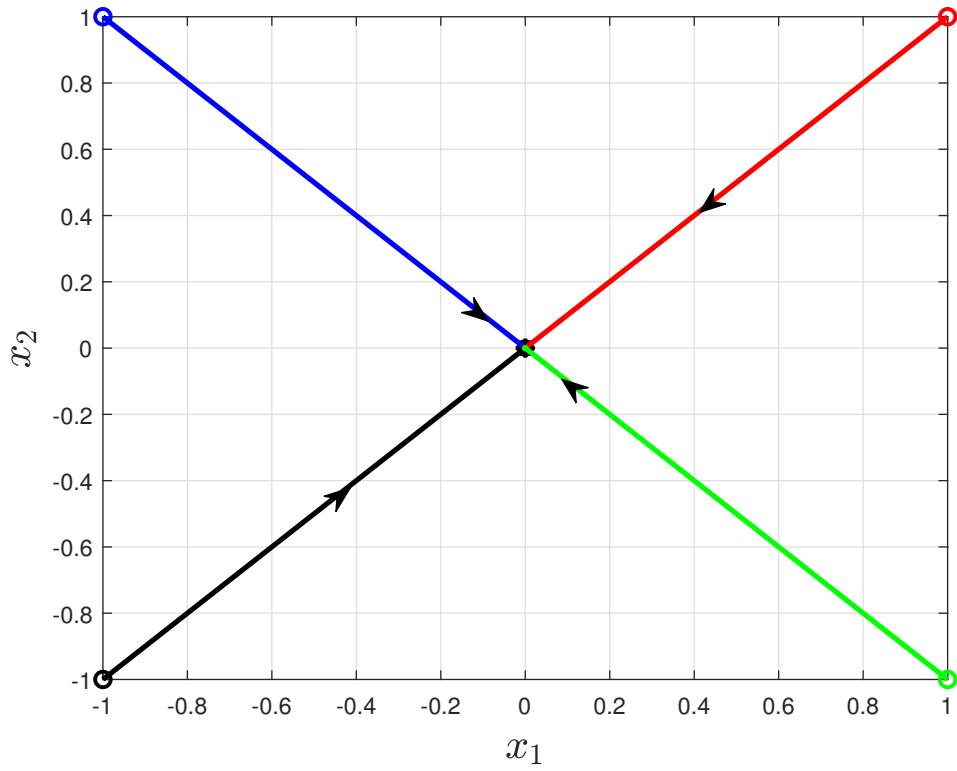


Рисунок 5.3 — Фазовый портрет (5.17).

Введем $\mu(x)$ как в (5.7). Вычислим следующие выражения

$$\nabla \cdot \{f(x)\} = -2, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} = & -2\beta(x_1^2 + x_2^2)^{\beta-1} \\ & \times [x_1 \sin(x_1) + x_2 \sin(x_2)] \\ & - 2(\beta + 1)(x_1^2 + x_2^2)^\beta, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} = & 2(\beta - 1)(x_1^2 + x_2^2)^{-\beta} \\ & - \beta(x_1^2 + x_2^2)^{-\beta-1} \\ & \times (x_1 \sin(x_1) + x_2 \sin(x_2)). \end{aligned} \quad (5.20)$$

С учетом (5.19) проверим условие (i_{T2})

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} &\leq \beta(x_1^2 + x_2^2)^{\beta-1} [x_1^2 + x_2^2] \\ -2(\beta + 1)(x_1^2 + x_2^2)^\beta &= -(\beta + 2)(x_1^2 + x_2^2)^\beta.\end{aligned}\tag{5.21}$$

Учитывая (5.18) и (5.20), проверим условие (ii_{T2})

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} &\geq 2(\beta - 1)(x_1^2 + x_2^2)^{-\beta} \\ -0.5\beta(x_1^2 + x_2^2)^{-\beta-1}(x_1^2 + x_2^2) & \\ = (1.5\beta - 2)(x_1^2 + x_2^2)^{-\beta} &\geq 0 \text{ for } \beta \geq 2.\end{aligned}\tag{5.22}$$

Используя (5.21) и (5.22), получим, что условие (iii_{T2}) выполнено.

Пример 5. Рассмотрим маятник (см. рис. 5.4 [94]), который описывается следующим уравнением

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2,\end{aligned}\tag{5.23}$$

где x_1 – угол отклонения стержня от вертикальной оси, x_2 – угловая скорость, g – ускорение свободного падения, l – длина стержня, k – коэффициент трения, m – масса груза. Исследуем точку равновесия $(0, 0)$. Фазовый портрет (5.23) в окрестности $(0, 0)$ показан на рис. 5.5 для $\frac{g}{l} = 1$ и $\frac{k}{m} = 1$.

Обозначим через $a = \frac{g}{l}$ и $b = \frac{k}{m}$. Введем $\mu(x)$ следующим образом

$$\mu(x) = a[1 - \cos(x_1)] + 0.5x_2^2.$$

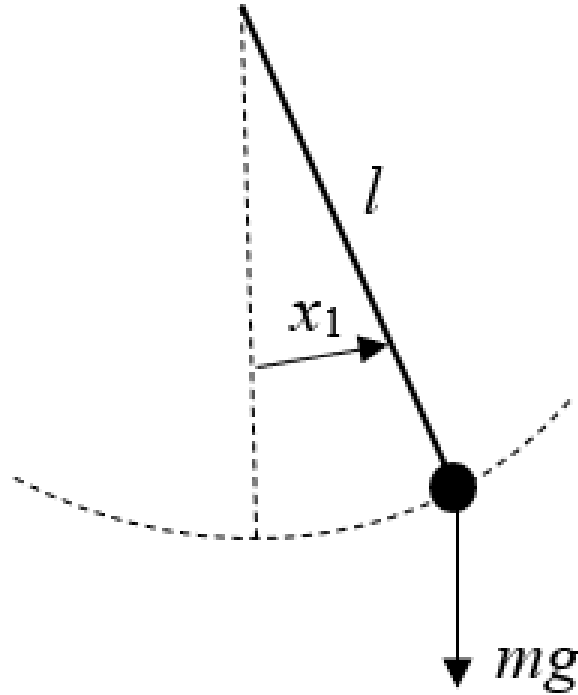


Рисунок 5.4 — Маятник.

Вычислим следующие выражения:

$$\nabla \cdot \{f(x)\} = -b, \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} = & -b(x_2^2 + a[1 - \cos(x_1)] \\ & + 0.5x_2^2), \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} = \frac{b(0.5x_2^2 - a[1 - \cos(x_1)])}{(a[1 - \cos(x_1)] + 0.5x_2^2)^2}. \quad (5.26)$$

С учетом (5.25) проверим условие (i_{T2})

$$\nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} \leq -b(a[1 - \cos(x_1)] + 0.5x_2^2).$$

Согласно (i_{T2}) имеем $\alpha = 0$. Точка равновесия $(0, 0)$ является асимптотически устойчивой.

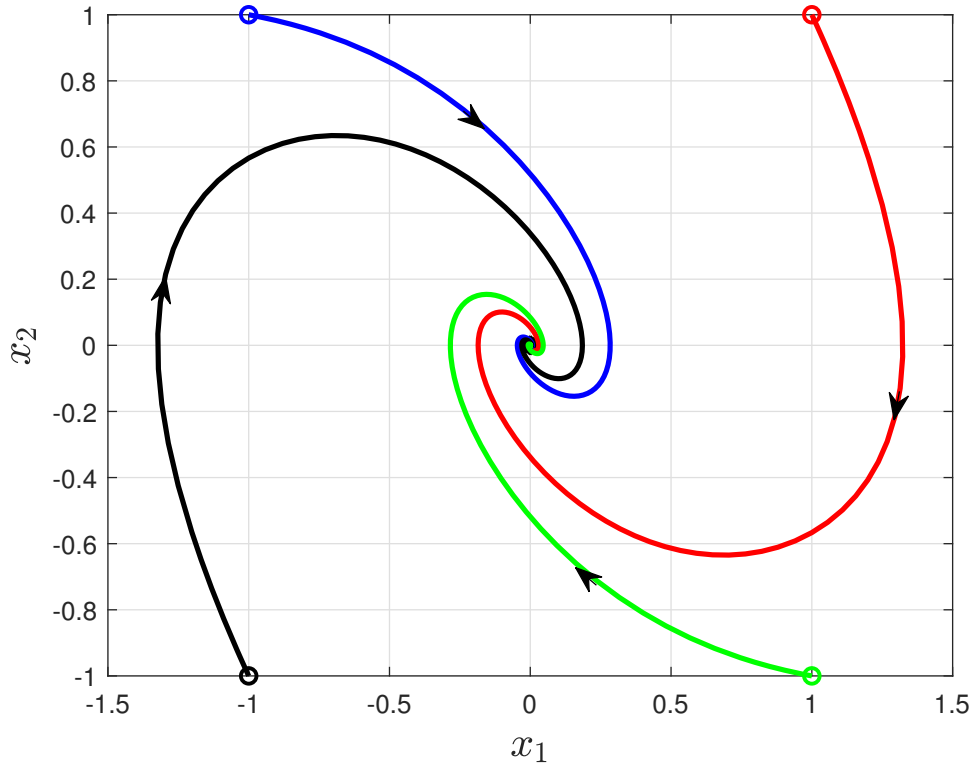


Рисунок 5.5 — Фазовый портрет (5.23) в окрестности точки $(0, 0)$.

Учитывая (5.24) и (5.26), проверим условие (ii_{T2})

$$\nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} \geq \frac{b}{a[1-\cos(x_1)]+0.5x_2^2}.$$

Согласно (ii_{T2}) получается $\alpha = b$. Следовательно, точка равновесия $(0, 0)$ является экспоненциально устойчивой. Также, согласно (iii_{T2}) , точка равновесия $(0, 0)$ является экспоненциально устойчивой при $\alpha = b$.

Рассмотрим функцию Ляпунова $V = a[1-\cos(x_1)]+0.5x_2^2$ в виде полной энергии системы [94]. Взяв производную по времени от V по траекториям (5.23), получим $\dot{V} = -abx_2^2$ [94]. Таким образом, методом Ляпунова для тех же V и μ можно установить только асимптотическую устойчивость точки равновесия $(0, 0)$.

5.3 Устойчивость линейных систем

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax, \quad (5.27)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Введем $\mu(x) = (x^T Q x)^\beta$ с $Q = Q^T > 0$ и $\beta \geq 1$.

Рассчитаем следующие отношения

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} \\ &= \beta(x^T Q x)^{\beta-1} x^T [QA + A^T Q + \frac{\text{trace}(A)}{\beta} Q] x, \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} = -\beta(x^T Q x)^{-\beta-1} \\ & \times x^T \left[QA + A^T Q - \frac{\text{trace}(A)}{\beta} Q \right] x. \end{aligned}$$

Согласно условию (i_{T2}) и (5.28) линейная система (5.27) является экспоненциально устойчивой, если $\nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} + \mu(x)[\alpha - \nabla \cdot \{f(x)\}] = \beta(x^T Q x)^{\beta-1} x^T [QA + A^T Q + \frac{\alpha}{\beta} Q] x \leq 0$ или

$$QA + A^T Q + \frac{\alpha}{\beta} Q \leq 0. \quad (5.29)$$

Неравенство (5.29) является известным линейным матричным неравенством для экспоненциальной устойчивости линейной системы (5.27) [?].

Согласно условию (ii_{T2}) и (5.28) линейная система экспоненциально устойчива, если $\nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)f(x)\} - \alpha\mu^{-1}(x) = \beta(x^T Q x)^{\beta-1} x^T [QA + A^T Q + \frac{\alpha}{\beta} Q] x \geq 0$ или

$$QA + A^T Q + \frac{\alpha - \text{trace}(A)}{\beta} Q \leq 0, \quad (5.30)$$

$$\text{trace}(A) \leq 0.$$

Результат (5.30) аналогичен (5.29).

Согласно условию (iii_{T2}) и (5.28) линейная система экспоненциально устойчива, если $\nabla \cdot \{\mu(x)f(x)\} + \alpha\mu(x) = \beta(x^T Q x)^{\beta-1} x^T [QA + A^T Q + \frac{2\alpha}{\beta} Q]x \leq 0$ или

$$\begin{aligned} QA + A^T Q + \frac{2\alpha}{\beta} Q &\leq 0, \\ QA + A^T Q + \frac{\alpha - \text{trace}(A)}{\beta} Q &\leq 0, \\ \text{trace}(A) &\leq 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Результаты (5.31) аналогичны (5.29).

5.4 Синтез закона управления

Рассмотрим динамическую систему в виде

$$\dot{x} = \psi(x, u), \quad (5.32)$$

где $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $u(x) \in \mathbb{R}^m$ – управляющий сигнал, $\psi(x, u) = \xi(x) + g(x)u(x)$, функции $\xi(x)$, $g(x)$ и $u(x)$ непрерывно дифференцируемы в D , $\psi(0, u(0)) = 0$ и система (5.32) стабилизируема в D .

Теорема 5.4 Пусть $\mu(x)$ — положительно определенная непрерывно дифференцируемая функция в $\tilde{D} \in D$. Замкнутая система является экспоненциально устойчивой, если закон управления $u(x)$ выбран таким, что выполняется одно из следующих условий

$$(i_{T3}) \quad \nabla \cdot \{\mu(x)\psi(x, u)\} \leq -\mu(x)[\alpha - \nabla \cdot \{\psi(x, u)\}];$$

$$(ii_{T3}) \quad \nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)\psi(x, u)\} \geq \alpha\mu^{-1}(x) \text{ and } \nabla \cdot \{\psi(x, u)\} \leq 0;$$

$$(iii_{T3}) \quad \nabla \cdot \{\mu(x)\psi(x, u)\} \leq -\alpha\mu(x) \text{ and } \nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)\psi(x, u)\} \geq \alpha\mu^{-1}(x),$$

для всех $x \in D \setminus \{0\}$, где $\alpha > 0$.

Поскольку система (5.32) стабилизируема в D , то доказательство теоремы 5.8 аналогично доказательству теоремы 5.3 (обозначая через $f(x) = \psi(x, u(x))$).

Пример 6. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= u.\end{aligned}\tag{5.33}$$

Фазовые траектории при $u = 0$ представлены на рис. 5.7. Требуется построить закон управления, обеспечивающий экспоненциальную устойчивость замкнутой системы.

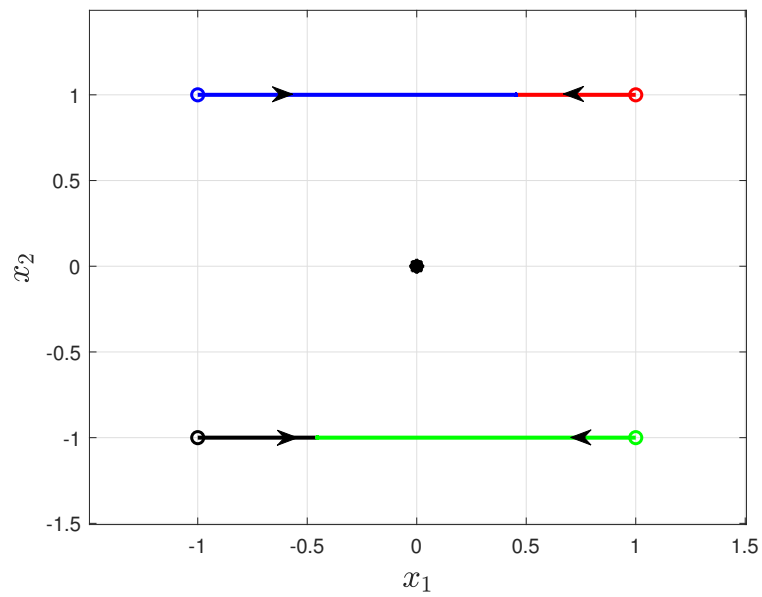


Рисунок 5.6 — Фазовый портрет (5.33).

Выберем $\mu(x)$ в виде (5.7). Найдем следующие соотношения

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \{\mu(x)\psi(x, u)\} = \\
& 2\beta(x_1^2 + x_2^2)^{\beta-1} \\
& \times (-x_1^2 + x_1x_2 - x_1^4 - x_1^2x_2^2 + x_2u) \\
& (x_1^2 + x_2^2)^\beta (-1 - 3x_1^2 - x_2^2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}),
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)\psi(x, u)\} = \\
& \beta(x_1^2 + x_2^2)^{-\beta-1} \\
& \times [(x_1^2 + x_2^2)(-1 - 3x_1^2 - x_2^2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}) \\
& + 2\beta(x_1^2 - x_1x_2 + x_1^4 + x_1^2x_2^2 - x_2u)],
\end{aligned}$$

Введя

$$u = -x_1 - x_2 - x_2x_1^2 - x_2^3,$$

перепишем (5.34) в виде

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \{\mu(x)\psi(x, u)\} \\
& = -(x_1^2 + x_2^2)^\beta \\
& \times (2\beta + 2\beta(x_1^2 + x_2^2)) - (2 - 4x_1^2 - 4x_2^2) \\
& \leq -(x_1^2 + x_2^2)^\beta \\
& \times (2\beta - (-2 - 4x_1^2 - 4x_2^2)),
\end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \{\mu^{-1}(x)\psi(x, u)\} \\
& = (x_1^2 + x_2^2)^{-\beta} \\
& \times 2[\beta - 1 + (\beta - 2)x_1^2 + (\beta - 2)x_2^2] \\
& \geq 2[\beta - 1](x_1^2 + x_2^2)^{-\beta} \quad \text{for } \beta \geq 3.
\end{aligned}$$

Таким образом, выполняются условия (i_{ТЗ}) и (ii_{ТЗ}). Дополнительно оце-

нивая

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \{\mu(x)\psi(x, u)\} \\ & \leq -(x_1^2 + x_2^2)^\beta (2\beta - (-2 - 4x_1^2 - 4x_2^2)) \\ & \leq -2\beta(x_1^2 + x_2^2)^\beta, \end{aligned}$$

имеем выполнение условия (iii_{T3}).

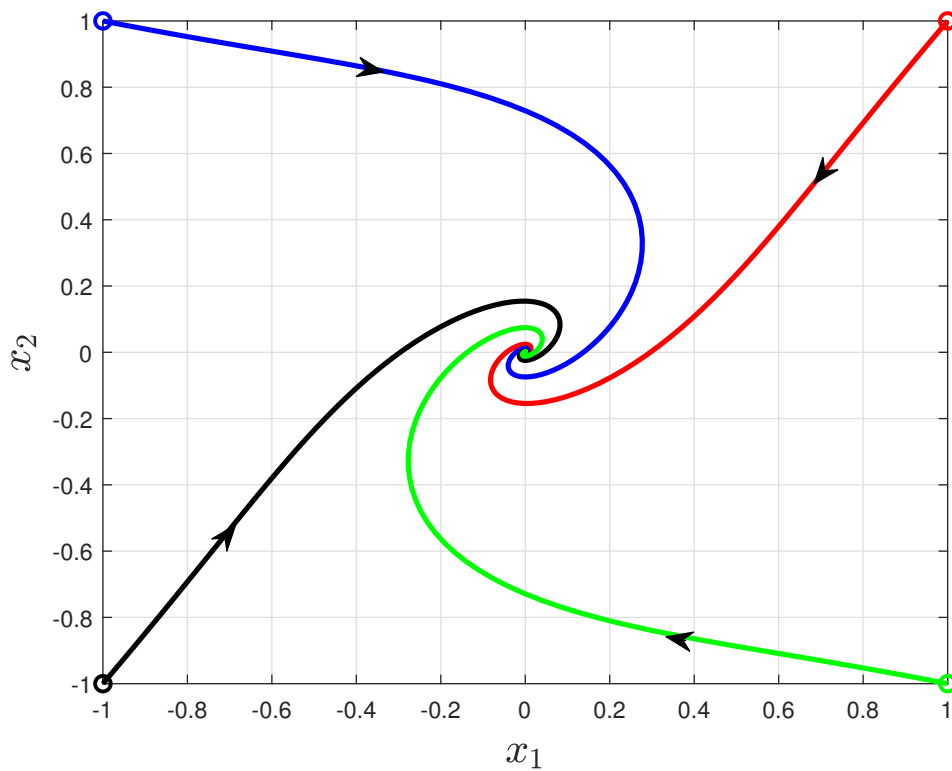


Рисунок 5.7 — Фазовый портрет в замкнутой системе.

5.5 Неавтономные системы

Рассмотрим неавтономную систему в виде

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{5.36}$$

где $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ – вектор состояния, функция $f = [f_1, \dots, f_n]^T : D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна в t и непрерывно-дифференцируема по x в $D \times [0, \infty)$. Открытое множество $D \subset \mathbb{R}^n$ содержит $x = 0$ и $f(0, t) = 0$ для любых $t \geq 0$.

Рассмотрим вспомогательные определения.

Определение 5.1 [94]. Непрерывная функция $\alpha : [0, a) \rightarrow [0; \infty)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, если она строго возрастающая и $\alpha(0) = 0$.

Определение 5.2 [94]. Непрерывная функция $\beta : [0, a) \times [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ принадлежит классу $\mathcal{KL}$ если, для каждого фиксированного s , функция $\beta(r, s)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$ по r и, для каждого фиксированного r , функция $\beta(r, s)$ уменьшается по s и $\beta(r, s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Сформулируем необходимое условие устойчивости для системы (5.36).

Теорема 5.5 Пусть матрица Якоби $[\partial f / \partial x]$ ограничена в $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r, r > 0\}$ и равномерно ограничена по t , траектории системы (5.36) удовлетворяют $|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0)$ для любых $x(t_0) \in D_0$ и $t \geq t_0 \geq 0$, где $\beta(\cdot, \cdot)$ принадлежит классу $\mathcal{KL}$ функций, $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r_0, r_0 > 0\}$ и $\beta(r_0, 0) < r$. Тогда существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $S(x, t) : D_0 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такая что $|\nabla\{S(x, t)\}| \neq 0$ для любых $x \in D_0 \setminus \{0\}$, $t \geq 0$ и хотя бы одно из следующих условий выполнено:

(i) функция $\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{|\nabla\{S(x, t)\}|f(x, t)\}$ интегрируема в области

$V = \{x \in D_0, t \geq 0 : S(x, t) \leq C\}$ и

$\int_V \left[\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{|\nabla\{S(x, t)\}|f(x, t)\} \right] dV < 0$ для любых $C > 0$;

(ii) функция $\frac{\partial S^{-1}(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{|\nabla\{S^{-1}(x,t)\}|f(x,t)\}$ интегрируема в области $V_{inv} = \{x \in D_0, t \geq 0 : S^{-1}(x,t) \geq C\}$ и $\int_{V_{inv}} \left[\frac{\partial S^{-1}(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{|\nabla\{S^{-1}(x,t)\}|f(x,t)\} \right] dV_{inv} > 0$ для любых $C > 0$.

Доказательство. Согласно [94, Theorem 3.13], если матрица Якоби $[\partial f / \partial x]$ ограничена в $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ и равномерно ограничена по t , а также траектории системы (5.36) удовлетворяют $|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0)$ для любых $x(t_0) \in D_0$ и $t \geq t_0 \geq 0$, тогда существует такая функция $S(x, t) : [0, \infty) \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}$, что выполнено неравенство $\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla\{S(x,t)\}^T f(x,t) \leq -\alpha(|x|)$. Здесь функция $\alpha(|\cdot|)$ из класса $\mathcal{K}$ в области $[0, r_0]$.

Обозначим F_1 – поток векторного поля $|\nabla\{S(x,t)\}|f(x,t)$ через поверхность $\Gamma = \{x \in D_0, t \geq 0 : S(x,t) = C\}$ с единичным вектором нормали $\frac{1}{|\nabla\{S(x,t)\}|} \nabla\{S(x,t)\}$. Также обозначим F_2 – поток векторного поля $|\nabla\{S^{-1}(x,t)\}|f(x,t)$ через поверхность $\Gamma_{inv} = \{x \in D_0, t \geq 0 : S^{-1}(x,t) = C\}$ с единичным вектором нормали $\frac{1}{|\nabla\{S^{-1}(x,t)\}|} \nabla\{S^{-1}(x,t)\}$.

Случай (i). Если $\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla\{S(x,t)\}^T f(x,t) < 0$ для любых $x \in D_0 \setminus \{0\}$ и $t \geq 0$, тогда $\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{|\nabla\{S(x,t)\}|} \nabla\{S(x,t)\}^T |\nabla\{S(x,t)\}|f(x,t) < 0$. Принимая во внимание [193], вычислим поток F_1 в виде

$$F_1 = \int_V \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} dV + \int_\Gamma \frac{1}{|\nabla\{S(x,t)\}|} \nabla\{S(x,t)\}^T |\nabla\{S(x,t)\}|f(x,t) d\Gamma < 0.$$

Используя теорему Гаусса, получим $F_1 = \int_V \left[\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{|\nabla\{S(x,t)\}|f(x,t)\} \right] dV < 0$.

Случай (ii). Если $\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla\{S(x,t)\}^T f(x,t) < 0$ для любых $x \in D_0 \setminus \{0\}$ и $t \geq 0$, тогда $\frac{\partial S^{-1}(x,t)}{\partial t} + \nabla\{S^{-1}(x,t)\}^T f(x,t) = -S^{-2}(x,t) \left[\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x,t)\}^T f(x,t) \right] > 0$. С другой стороны,

$\nabla\{S^{-1}(x, t)\}^T f(x, t) = \frac{1}{|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}|} \nabla\{S^{-1}(x)\}^T |\nabla\{S^{-1}(x)\}| f(x, t)$. Следовательно, следующее условие выполнено

$$F_2 = \int_{V_{inv}} \frac{\partial S^{-1}(x, t)}{\partial t} dV_{inv} + \oint_{\Gamma_{inv}} \frac{1}{|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}|} \nabla\{S^{-1}(x, t)\}^T |\nabla\{S^{-1}(x, t)\}| f(x, t) d\Gamma_{inv} > 0.$$

Согласно теореме Гаусса, получим $F_2 = \int_{V_{inv}} \left[\frac{\partial S^{-1}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}| f(x, t)\} \right] dV_{inv} > 0$. Теорема 5.5 доказана.

Аналогично как [30, 99, 204, 205], введем вспомогательную функцию $\mu(x, t)$ для улучшения результатов Теоремы 5.5.

Теорема 5.6 Пусть матрица Якоби $[\partial f / \partial x]$ ограничена в $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r, r > 0\}$ и равномерно ограничена по t , траектории системы (5.36) удовлетворяют $|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0)$ и $|f(x, t)| \leq c_0|x|^\gamma$, $c_0 > 0$, $\gamma > 0$ для любых $x(t_0) \in D_0$ и $t \geq t_0 \geq 0$, где $\beta(\cdot, \cdot)$ из класса $\mathcal{KL}$ функций, $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r_0, r_0 > 0\}$ и $\beta(r_0, 0) < r$. Тогда существует дважды дифференцируемая функция $S(x, t) : D_0 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывно дифференцируемая функция $\mu(x, t) : D_0 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, которые удовлетворяют $w_1(x) \leq S(x, t) \leq w_2(x)$ и $c_1|x| \leq \mu(x, t) \leq c_2|x|$, $w_1(x)$ и $w_2(x)$ – положительно определенные функции, $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, $|\nabla\{S(x, t)\}| \neq 0$ для любых $x \in D_0 \setminus \{0\}$, $t \geq 0$ и хотя бы одно из условий выполнено:

- (i) функция $\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{\mu(x, t)|\nabla\{S(x, t)\}|f(x, t)\}$ интегрируема в области $V = \{x \in D_0, t \geq 0 : S(x, t) \leq C\}$ и $\int_V \left[\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{\mu(x, t)|\nabla\{S(x, t)\}|f(x, t)\} \right] dV < 0$ для любых $C > 0$;
- (ii) функция $\frac{\partial S^{-1}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{\mu(x, t)|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}|f(x, t)\}$ интегрируема в области $V_{inv} = \{x \in D_0, t \geq 0 : S^{-1}(x, t) \geq C\}$ и $\int_{V_{inv}} \left[\frac{\partial S^{-1}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{\mu(x, t)|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}|f(x, t)\} \right] dV_{inv} < 0$ для любых $C > 0$;

$$\{\mu(x, t)|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}|f(x, t)\}\Big]dV_{inv} > 0 \text{ для любых } C > 0.$$

Доказательство. Согласно [94, Теорема 3.13], если матрица Якоби $[\partial f/\partial x]$ ограничена в $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ и равномерно ограничена по t , а также траектории (5.36) удовлетворяют $|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t-t_0)$ для любых $x(t_0) \in D_0$ и $t \geq t_0 \geq 0$, тогда существует функция $S(x, t) : D_0 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ которая удовлетворяет следующим неравенствам

$$\begin{aligned} S(x, t) &\leq \alpha_1(x), \quad \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla\{S(x, t)\}^T f(t, x) \leq -\alpha_2(x), \\ |\nabla\{S(x, t)\}| &\leq \alpha_3(x). \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ и $\alpha_3(x)$ из класса $\mathcal{K}$ функций в $[0, r_0]$. Если $\alpha_1(x) = c_3|x|^\chi$, $\chi > 0$, тогда $\alpha_2(x) = c_4|x|^{\chi+\gamma-1}$ и $\alpha_3(x) = c_5|x|^{\chi-1}$. Рассмотрим следующее соотношение

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla\{S(x, t)\}^T \mu(x, t)f(x, t) \leq \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla\{S(x, t)\}^T f(x, t) \\ &+ |\nabla\{S(x, t)\}^T \mu(x, t)f(x, t)| + |\nabla\{S(x, t)\}^T f(x, t)| \\ &\leq -\alpha_2(x) + |\nabla\{S(x, t)\}^T| |\mu(x, t)| |f(x, t)| + |\nabla\{S(x, t)\}^T| |f(x, t)| \\ &\leq -(c_4 - c_0 c_5 - c_0 c_2 c_5 |x|) |x|^{\chi+\gamma-1}. \end{aligned}$$

Выбирая $r = \frac{c_4 - c_0 c_5}{c_0 c_2 c_5}$ и $r_0 < r$, получим $\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla\{S(x, t)\}^T \mu(x, t)f(x, t) \leq 0$.

Случай (i). Так как $\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla\{S(x, t)\}^T \mu(x, t)f(x, t) < 0$ для любых $x \in D_0 \setminus \{0\}$ и $t \geq 0$, тогда

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_V \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} dV + \\ &+ \oint_\Gamma \frac{1}{|\nabla\{S(x, t)\}|} \nabla\{S(x, t)\}^T \mu(x, t) |\nabla\{S(x, t)\}| f(x, t) d\Gamma < 0. \end{aligned}$$

Используя теорему Гаусса, $F_1 = \int_V \left[\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{|\nabla\{S(x, t)\}| \mu(x, t) f(x, t)\} \right] dV < 0$.

Случай (ii). Так как $\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla\{S(x,t)\}^T \mu(x,t)f(x,t) < 0$ для любых $x \in D_0 \setminus \{0\}$ и $t \geq 0$, тогда $\frac{\partial S^{-1}(x,t)}{\partial t} + \nabla\{S^{-1}(x,t)\}^T \mu(x,t)f(x,t) = -S^{-2}(x,t) \left[\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla\{S(x,t)\}^T \mu(x,t)f(x,t) \right] > 0$.

С другой стороны, $\nabla\{S^{-1}(x,t)\}^T \mu(x,t)f(x,t) = \frac{1}{|\nabla\{S^{-1}(x,t)\}|} \nabla\{S^{-1}(x,t)\}^T |\nabla\{S^{-1}(x,t)\}| \mu(x,t)f(x,t)$. Значит, следующие

соотношения выполнены

$$F_2 = \int_{V_{inv}} \frac{\partial S^{-1}(x,t)}{\partial t} dV_{inv} + \oint_{\Gamma_{inv}} \frac{1}{|\nabla\{S^{-1}(x,t)\}|} \nabla\{S^{-1}(x,t)\}^T |\nabla\{S^{-1}(x,t)\}| \mu(x,t)f(x,t) d\Gamma_{inv} > 0.$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса, получим $F_2 = \int_{V_{inv}} \left[\frac{\partial S^{-1}(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{|\nabla\{S^{-1}(x,t)\}| \mu(x,t)f(x,t)\} \right] dV_{inv} > 0$. Теорема 5.6 доказана.

Замечание 5.3 Рассмотрим несколько физических моделей, которые соответствуют полученным результатам в Теореме 5.6. Перепишав интегральные неравенства из теоремы 5.6 как $\int_V \left[\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{\mu(x,t)|\nabla\{S(x,t)\}|f(x,t)\} \right] dV = -\Sigma$ или $\int_{V_{inv}} \left[\frac{\partial S^{-1}(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{\mu(x,t)|\nabla\{S^{-1}(x,t)\}|f(x,t)\} \right] dV_{inv} = \Sigma$, $\Sigma \geq 0$, получим интегральную форму уравнения непрерывности с источником в точке равновесия, см. [102]. Например,

(a) выбирая $\mu(x,t)$ так что $|\nabla\{S(x,t)\}| \mu(x,t) = S(x,t)$ или $|\nabla\{S^{-1}(x,t)\}| \mu(x,t) = S^{-1}(x,t)$, получим уравнение непрерывности в динамике жидкости [193], где S – плотность жидкости и f – поток вектора скорости.

(b) в теории электромагнетизма [158], $\mu(x,t)|\nabla\{S(x,t)\}|f(x,t)$ и $\mu(x,t)|\nabla\{S^{-1}(x,t)\}|f(x,t)$ обозначает плотность тока и S – плотность заряда.

(с) согласно закону сохранения энергии [193], $\mu(x, t)|\nabla\{S(x, t)\}|f(x, t)$ или $\mu(x, t)|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}|f(x, t)$ – вектор потока энергии и S – локальная плотность энергии.

(d) в квантовой механике [180] S – функция плотности вероятности и $\mu(x, t)|\nabla\{S(x, t)\}|f(x, t)$ или $\mu(x, t)|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}|f(x, t)$ – вероятность тока.

Замечание 5.4 Если $\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{\mu(x, t)|\nabla\{S(x, t)\}|f(x, t)\}$ или $\frac{\partial S^{-1}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{\mu(x, t)|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}|f(x, t)\}$ интегрируема и $\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{\mu(x, t)|\nabla\{S(x, t)\}|f(x, t)\} = -\sigma$ или $\frac{\partial S^{-1}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{\mu(x, t)|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}|f(x, t)\} = \sigma$, $\sigma \geq 0$ выполнено для любых $x \in D_0 \setminus \{0\}$ и $t \geq 0$, тогда соответствующее интегрально соотношение удовлетворяет теореме 5.6. Согласно [102, 158, 180, 193] и Замечанию 5.3, получим соответствующие дифференциальные формы уравнений непрерывности с источниками в области V (или V_{inf}).

Замечание 5.5 Согласно [205], если соотношение $\frac{\partial S^{-1}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S^{-1}(x, t)f(x, t)\} > 0$ выполнено, тогда почти все решения (5.36) стремятся к точке равновесия. Тогда, результат [205] – частный случай теоремы 5.6 для $|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}|\mu(x, t) = S^{-1}(x, t)$.

Теперь сформулируем достаточное условие устойчивости (5.36).

Теорема 5.7 Пусть $S(x, t) : D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция такая, что $w_1(x) \leq S(x, t) \leq w_2(x)$ для любых $t \geq 0$ и $x \in D$, где $w_1(x)$ и $w_2(x)$ – положительно определенные непрерыв-

но дифференцируемые функции. Тогда $x = 0$ – равномерно устойчивая, если хотя бы одно из следующих условий выполнено:

- (i) $\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x,t)f(x,t)\} \leq S(x,t)\nabla \cdot \{f(x,t)\}$ для любых $t \geq 0$ и $x \in D$;
- (ii) $\frac{\partial S^{-1}(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S^{-1}(x,t)f(x,t)\} \geq 0$ и $\nabla \cdot \{f(x,t)\} \leq 0$ для любых $t \geq 0$ и $x \in D$;
- (iii) $2\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x,t)f(x,t)\} \leq 0$ и $\nabla \cdot \{S^{-1}(x,t)f(x,t)\} \geq 0$ для любых $t \geq 0$ и $x \in D$.

Если в случаях (i)-(iii) неравенства строгие, тогда $x = 0$ – равномерно асимптотически устойчивая.

Доказательство. Доказательство асимптотической устойчивости опускаем, поскольку оно аналогично доказательству устойчивости, но с учетом знака строгого неравенства.

Случай (i). Рассмотрим соотношение $\nabla \cdot \{S(x,t)f(x,t)\} - \nabla \cdot \{f(x,t)\}S(x,t) = \nabla\{S(x,t)\}^T f(x,t)$. Если $\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x,t)f(x,t)\} \leq \nabla \cdot \{f(x,t)\}S(x,t)$, тогда $\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla\{S(x,t)\}^T f(x,t) \leq 0$ для любых $x \in D \setminus \{0\}$ и $t \geq 0$. Согласно теореме Ляпунова [94], система (5.36) устойчива.

Случай (ii). Рассмотрим следующее выражение $S^{-2}(x,t)\nabla\{S(x,t)\}^T f(x,t) = S^{-1}(x,t)\nabla \cdot \{f(x,t)\} - \nabla \cdot \{S^{-1}(x,t)f(x,t)\}$. Если $\frac{\partial S^{-1}(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S^{-1}(x,t)f(x,t)\} \geq 0$ и $\nabla \cdot \{f(x,t)\} \leq 0$, тогда $\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla\{S(x,t)\}^T f(x,t) \leq 0$ для любых $x \in D \setminus \{0\}$ и $t \geq 0$.

Случай (iii). Случай (iii) – это комбинация (i), (ii). Введем $\beta(x, t) \geq 1$ для любых $x \in D \setminus \{0\}$ и $t \geq 0$. Суммируя $\beta(x, t) \nabla \{S(x, t)\}^T f(x, t) = \beta(x, t) S(x, t) \nabla \cdot \{f(x, t)\} - \beta(x, t) S^2(x, t) \nabla \cdot \{S^{-1}(x, t) f(x, t)\}$ и $\nabla \{S(x, t)\}^T f(x, t) = \nabla \cdot \{S(x, t) f(x, t)\} - \nabla \cdot \{f(x, t)\} S(x, t)$, получим

$$(1 + \beta(x, t)) \nabla \{S(x, t)\}^T f(x, t) = \nabla \cdot \{S(x, t) f(x, t)\} - \beta(x, t) S^2(x, t) \nabla \cdot \{S^{-1}(x, t) f(x, t)\} + (\beta(x, t) - 1) S(x, t) \nabla \cdot \{f(x, t)\}.$$

Если

$$\nabla \cdot \{S(x, t) f(x, t)\} + (\beta(x, t) - 1) S(x, t) \nabla \cdot \{f(x, t)\} \leq \beta(x, t) S^2(x, t) \nabla \cdot \{S^{-1}(x, t) f(x, t)\},$$

тогда $\nabla \{S(x, t)\}^T f(x, t) \leq 0$. Let $\beta(x, t) = 1$. Если $2 \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x, t) f(x, t)\} \leq 0$ и $\nabla \cdot \{S^{-1}(x, t) f(x, t)\} \geq 0$, тогда $\nabla \{S(x, t)\}^T f(x, t) \leq 0$ выполнено для любых $x \in D \setminus \{0\}$ и $t \geq 0$. Теорема 5.7 доказана.

Результаты [30, 99, 229] применимы только для автономных систем второго порядка. Далее мы рассмотрим примеры для систем третьего порядка. В примерах решения дифференциальных уравнений получены в MATLAB с использованием оператора *ode45*.

Пример 1. Рассмотрим ситему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g(t)x_2 - \varphi_1(t)x_1x_3^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \varphi_2(t)x_2x_3^2, \\ \dot{x}_3 &= -\varphi_3(t)x_3^3 \end{aligned} \tag{5.37}$$

с точкой равновесия $(0, 0, 0)$. Функция $g(t) > 0$ ограничена и $\dot{g}(t) < 0$ для любых $t \geq 0$. Функции $\varphi_1(t) > 0$, $\varphi_2(t) > 0$ и $\varphi_3(t) > 0$ – непрерывны и гораничены для любых $t \geq 0$.

Выберем $S(x, t) = (x_1^2 + g(t)x_2^2 + x_3^2)^\alpha$, где α – натуральное число. Проверим условия теоремы 5.6, где $\mu(x, t)$ выбирается так, что $|\nabla\{S(x, t)\}|\mu(x, t) = S(x, t)$ or $|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}|\mu(x, t) = S^{-1}(x, t)$. Условие

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x, t)f(x, t)\} \\ &= -2\alpha(x_1^2 + g(t)x_2^2 + x_3^2)^{\alpha-1}[x_3^2(\varphi_1 x_1^2 + g\varphi_2 x_2^2 + \varphi_3 x_3^2) - 0.5\dot{g}x_2^2] < 0 \end{aligned}$$

выполнено для любых α , $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$ и $t \geq 0$. Соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S^{-1}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S^{-1}(x)f(x, t)\} = (x_1^2 + g(t)x_2^2 + x_3^2)^{-\alpha-1} \times \\ & (x_3^2[(2\alpha\varphi_1 - \varphi_0)x_1^2 + g(2\alpha\varphi_2 - \varphi_0)x_2^2 + (2\alpha\varphi_3 - \varphi_0)x_3^2] - \alpha\dot{g}x_2^2) > 0 \end{aligned}$$

выполнено для любых $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$, $t \geq 0$ и $\alpha \geq 0.5 \sup_t \left\{ \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_1(t)}, \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_2(t)}, \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_3(t)} \right\}$.

Значит, условия теоремы 5.6 выполнены. Так как функция $\nabla \cdot \{S^{-1}(x, t)f(x, t)\}$ интегрируема в $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq 1\}$, тогда условия теоремы 1 и Следствия 1 в [205] (сходимсоть почти всех решений (5.37)) выполнены также.

Теперь проверим условия теоремы 5.7. Соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x, t)f(x, t)\} - S(x, t)\nabla \cdot \{f(x, t)\} \\ &= -2\alpha(x_1^2 + g(t)x_2^2 + x_3^2)^{\alpha-1}[x_3^2(\varphi_1 x_1^2 + g\varphi_2 x_2^2 + \varphi_3 x_3^2) - 0.5\dot{g}x_2^2] < 0 \end{aligned}$$

выполнено для любых α , $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$ и $t \geq 0$. С другой стороны,

$\nabla \cdot \{f(x, t)\} = -\varphi_0 x_3^2 < 0$, $\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + 3\varphi_3$ и условие

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S^{-1}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S^{-1}(x)f(x, t)\} = (x_1^2 + g(t)x_2^2 + x_3^2)^{-\alpha-1} \times \\ & (x_3^2[(2\alpha\varphi_1 - \varphi_0)x_1^2 + g(2\alpha\varphi_2 - \varphi_0)x_2^2 + (2\alpha\varphi_3 - \varphi_0)x_3^2] - \alpha\dot{g}x_2^2) > 0 \end{aligned}$$

выполнено для любых $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$, $t \geq 0$ и $\alpha \geq 0.5 \sup_t \left\{ \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_1(t)}, \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_2(t)}, \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_3(t)} \right\}$.

Соотношения

$$\begin{aligned}
& 2\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x,t)f(x,t)\} \\
& = -2\alpha(x_1^2 + g(t)x_2^2 + x_3^2)^{\alpha-1}[x_3^2(\varphi_1 x_1^2 + g\varphi_2 x_2^2 + \varphi_3 x_3^2) - \dot{g}x_2^2] < 0, \\
& \nabla \cdot \{S^{-1}(x)f(x,t)\} = (x_1^2 + g(t)x_2^2 + x_3^2)^{-\alpha-1} \times \\
& \left(x_3^2 \left[(2\alpha\varphi_1 - \varphi_0)x_1^2 + g(2\alpha\varphi_2 - \varphi_0)x_2^2 + (2\alpha\varphi_3 - \varphi_0)x_3^2 \right] \right) > 0
\end{aligned}$$

выполнены для любых $x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, t \geq 0$ и $\alpha \geq 0.5 \sup_t \left\{ \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_1(t)}, \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_2(t)}, \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_3(t)} \right\}$.

Все три случая (i)-(iii) теоремы 5.7 дали одинаковые результаты. Значит, $x = 0$ – равномерно асимптотически устойчивая для любых начальных условий с $x_3(0) \neq 0$. Если начальные условия содержат $x_2(0) = x_3(0) = 0$, то $x = 0$ – равномерно устойчивая.

Траектории (5.37) изображены на рис. 5.8 для $\varphi_1 = 2 + \sin(2t)$, $\varphi_2 = 1.5 + \cos(3t)$, $\varphi_3 = \frac{t}{t+1}$, $g = \frac{1}{t+1}$ (левая картинка) или $g = 1$ (правая картинка) и начальных условий $(1, -1, 1)$, $(-1, 0, 0)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, -1, -1)$ и $(1, -1, -1)$. На рис. 5.8 цикл получен для начальных условий $x_2(0) = x_3(0) = 0$, сходящиеся к нулю траектории получены при $x_2(0) \neq 0$ и $x_3(0) \neq 0$.

В результате, предложенная теорема 5.6 и следствие 1 из [205] дают положительный ответ об устойчивости (5.37). Однако условия теоремы 5.7 позволяют дополнительно установить, что $x = 0$ – равномерно асимптотически устойчивая или равномерно устойчивая точка равновесия в зависимости от начальных условий.

Пример 2. Рассмотрим систему

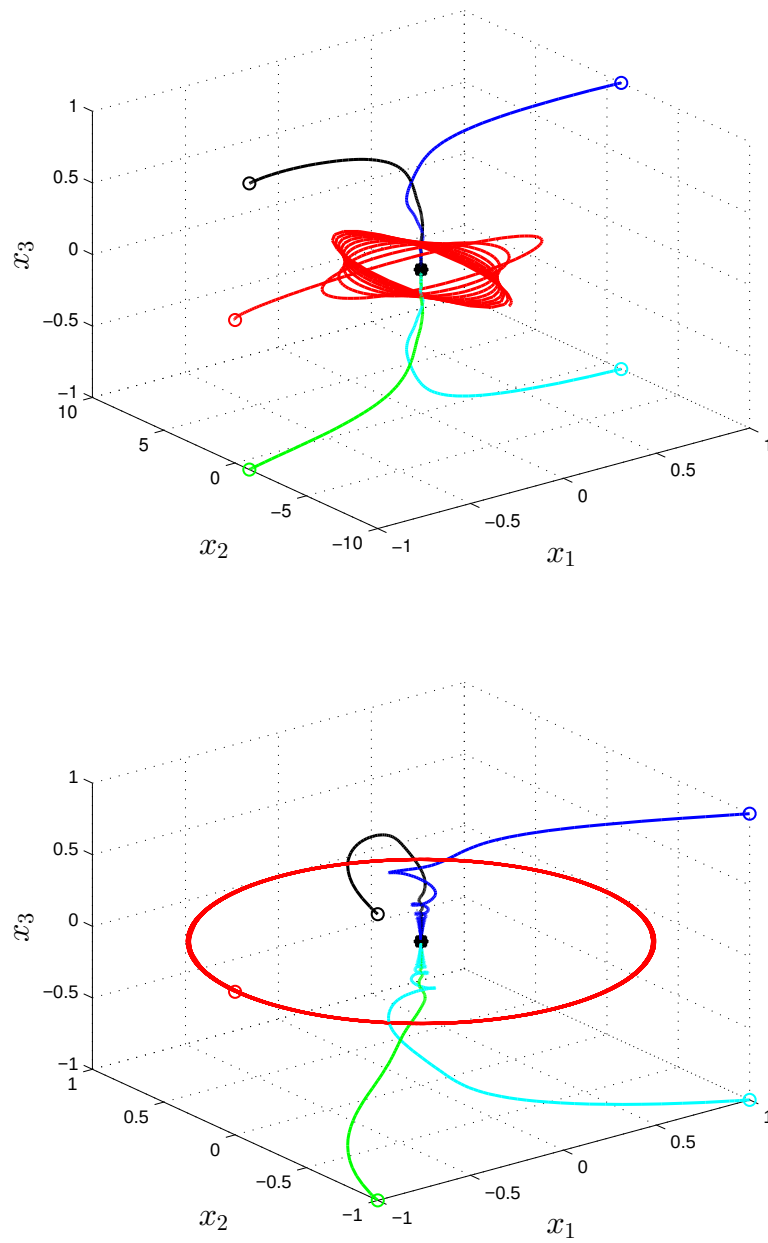


Рисунок 5.8 — Траектории системы (5.37) при $g = \frac{1}{t+1}$ (слева) и $g = 1$ (справа).

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^2 - \frac{1}{g(t)}x_2^2 - x_3^2, \\
 \dot{x}_2 &= -x_2 + 2x_1x_2, \\
 \dot{x}_3 &= -x_3 + 2x_1x_3
 \end{aligned}
 \tag{5.38}$$

с двумя точками равновесия $(0, 0, 0)$ и $(1, 0, 0)$. Функция $g(t) > 0$ ограничена и $\dot{g}(t) < 0$ для любых $t \geq 0$. Все траектории системы сходятся к точке $(0, 0, 0)$ за исключением тех, что начинаются на полуоси $x_1 \geq 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ (см. рис. 5.9 при $g(t) = \frac{1}{t+1}$ и начальных условиях $(1.2, 0, 0)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, -1, -1)$, $(1, -1, -1)$). Пусть $S(x, t) = (gx_1^2 + x_2^2 + gx_3^2)^\alpha$, α – натуральное число и $\mu(x, t)$ в теореме 5.6 выбрано так, что $|\nabla\{S(x, t)\}|\mu(x, t) = S(x, t)$ или $|\nabla\{S^{-1}(x, t)\}|\mu(x, t) = S^{-1}(x, t)$. Тогда неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^{-1}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S^{-1}(x) f(x, t)\} &= -\alpha(gx_1^2 + x_2^2 + gx_3^2)^{-\alpha-1} \dot{g}(x_1^2 + x_2^2 + gx_3^2) \\ &+ (gx_1^2 + x_2^2 + gx_3^2)^{-\alpha} [2\alpha - 3 + 2x_1(3 - \alpha)] > 0 \end{aligned}$$

выполнено для $\alpha = 3$. Функция $\nabla \cdot \{f(x, t)\} = -3 + 6x_1$ не удовлетворяет условию $\nabla \cdot \{f(x, t)\} \leq 0$ при $x_1 > 0.5$. Соотношение $\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x, t) f(x, t)\} \leq S(x, t) \nabla \cdot \{f(x, t)\}$ и $2\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x, t) f(x, t)\} \leq 0$ из теоремы 5.7 не выполнено тоже. В результате, условия теоремы 5.6 (и условия следствия 1 [205]) выполнены в примере, но условия теоремы 5.7 не выполнены.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -4x_1x_2^2 - \varphi_1(t)x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= g_1(t)x_1^2x_2 - \varphi_2(t)x_2^3 - g_2(t)x_2x_3^2, \\ \dot{x}_3 &= -\varphi_3(t)x_3^3 + 8x_2^2x_3 \end{aligned} \tag{5.39}$$

с точкой равновесия $(0, 0, 0)$. Функции $g_1(t) > 0$ и $g_2(t) > 0$ ограниченные, $\dot{g}_1(t) < 0$ и $\dot{g}_2(t) < 0$ для любых $t \geq 0$. Функции $\varphi_1(t) > 0$, $\varphi_2(t) > 0$ и $\varphi_3(t) > 0$ непрерывные и ограниченные для любых $t \geq 0$.

Выберем $S(x, t) = (\frac{1}{8}g_1x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{16}g_2x_3^2)^\alpha$, α – натуральное число.

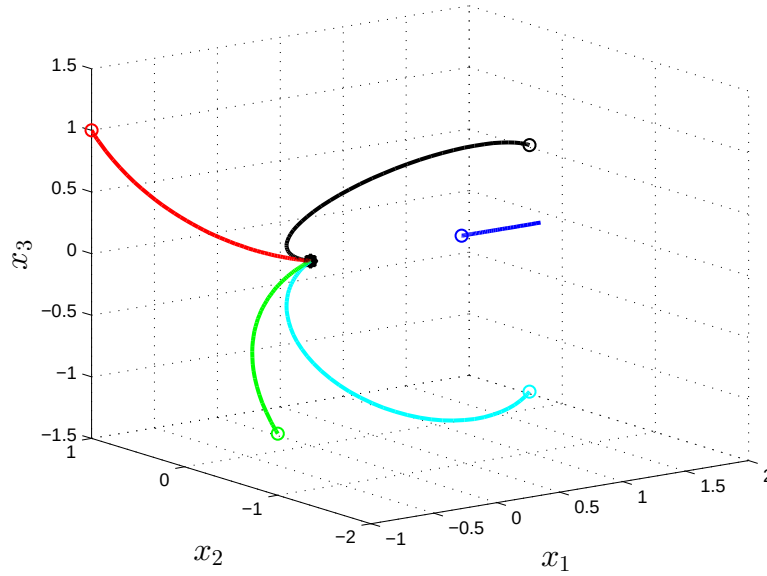


Рисунок 5.9 — Траектории системы (5.38) с двумя точками равновесия.

Проверим условия теоремы 5.7. Соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x,t)f(x)\} - S(x,t)\nabla \cdot \{f(x,t)\} = \\ & -\alpha \left(\frac{1}{8}g_1x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{16}g_2x_3^2 \right)^{\alpha-1} \times \\ & \times \left[\frac{1}{4}g_1\varphi_1x_1^4 + \varphi_2x_2^4 + \frac{1}{8}g_2x_3^4 - \frac{1}{8}\dot{g}_1x_1^2 - \frac{1}{16}\dot{g}_2x_3^2 \right] \end{aligned}$$

выполнено для любых α и $x \neq 0$. Функция $\nabla \cdot \{f(x,t)\} = (g_1 - 3\varphi_1)x_1^2 + (4 - 3\varphi_2)x_2^2 - (3\varphi_3 + g_2)x_3^2$ не отрицательно определенная для $g_1 > 3\varphi_1$ и/ог $\varphi_2 < \frac{4}{3}$. Значит, утверждение 2 и следствие 1 из [205], а также случай (ii) теоремы 5.7 не выполнены. Условия $2\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x,t)f(x,t)\} < 0$ и $\nabla \cdot \{S^{-1}(x,t)f(x,t)\} > 0$ выполнены для любых α , $x \neq 0$, $\varphi_2 > \frac{4}{2\alpha+3}$ и $g_1 < (2\alpha + 3)\varphi_1$.

Рис. 5.10 иллюстрирует траектории системы при $\varphi_1(t) = 2 + \sin(t)$, $\varphi_2(t) = 1.5 + \cos(3t)$, $\varphi_3(t) = 1 + 0.5 \cos(2t)$, $g_1(t) = \frac{t}{t+1}$ и $g_2(t) = \frac{1}{t+1}$ при начальных условиях из примера 1. Принимая во внимание теорему 5.6, условие $\int_V \left[\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x,t)f(x,t)\} \right] dV < 0$ выполнено для любых C и

α . Другие условия теоремы 5.6 и следствия 1 в [205] не выполнены.

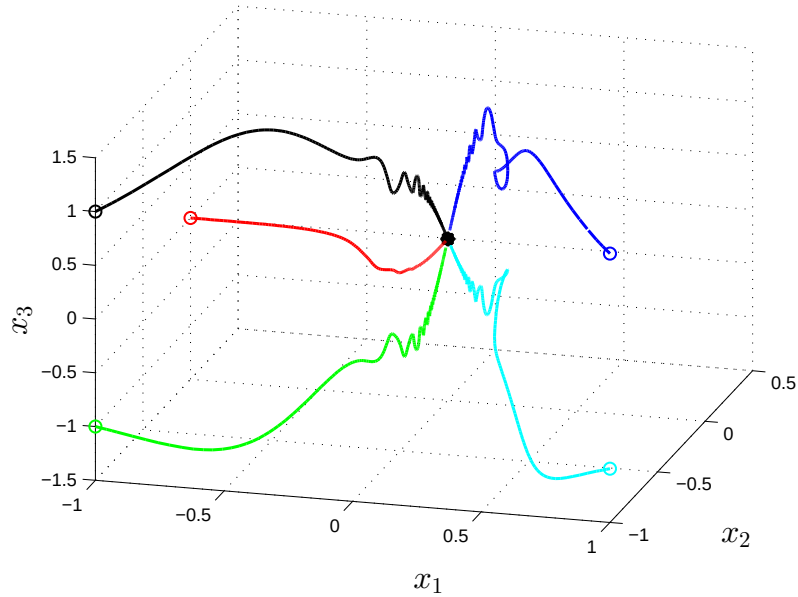


Рисунок 5.10 — Траектории системы (5.39).

В результате, условия теорем 5.6, 5.7 выполнены для системы (5.39). Значит, $(0, 0, 0)$ – равномерно асимптотически устойчивая точка равновесия. Условия Следствия 1 [205] не выполнены, поэтому не можем заключить о сходимости почти всех решений (5.39) к $(0, 0, 0)$.

Пример 4. Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть $S(x, t) = (x^T P(t)x)^\alpha$, где $\alpha > 0$, функция $P(t)$ дифференцируема и $P(t) = P^T(t) > 0$. Рассмотрим случай (iii) теоремы 5.7. Соотношение

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x, t)f(x)\} &= \alpha(x^T P x)^{\alpha-1} \times \\ &\times x^T [2\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \frac{1}{\alpha} \text{trace}(A(t))P(t)]x < 0, \\ \nabla \cdot \{S^{-1}(x)f(x, t)\} &= -\alpha(x^T P x)^{-\alpha-1} \times \\ &\times x^T [A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - \frac{1}{\alpha} \text{trace}(A(t))P(t)]x > 0 \end{aligned}$$

выполнено, если

$$2\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \frac{1}{\alpha}\text{trace}(A(t))P(t) < 0,$$

$$A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - \frac{1}{\alpha}\text{trace}(A(t))P(t) < 0$$

выполнены одновременно. Сумма данных неравенств дает неравенство Ляпунова $\dot{P}(t) + A(t)^T P(t) + P(t)A(t) < 0$.

5.6 Управление неавтономными системами

Рассмотрим неавтономную систему в виде

$$\dot{x} = \xi(x, t) + g(x, t)u(x, t), \quad (5.40)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{R}^m$ – сигнал управления. Функции $\xi(x, t) : D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x, t) : D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ и $u(x, t) : D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывные в t и непрерывно-дифференцируемые по x в $D \times [0, \infty)$. Открытое множество $D \subset \mathbb{R}^n$ содержит точку $x = 0$ и $\xi(t, 0) + g(t, 0)u(t, 0) = 0$ для любых $t \geq 0$. Система (5.40) стабилизируема в D для любых $t \geq 0$.

Теорема 5.8 Пусть $S(x, t) : D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция такая, что $w_1(x) \leq S(x, t) \leq w_2(x)$ для любых $t \geq 0$ и $x \in D$, где $w_1(x)$ и $w_2(x)$ – положительно определенные непрерывные функции. Тогда точка равновесия $x = 0$ замкнутой системы равномерно устойчива, если закон управления $u(x, t)$ выбран так, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (i) $\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x, t)(\xi(x, t) + g(x, t)u(x, t))\} \leq S(x, t)\nabla \cdot \{\xi(x, t) + g(x, t)u(x, t)\}$ для любых $x \in D \setminus \{0\}$ и $t \geq 0$;

$$(ii) \quad \frac{\partial S^{-1}(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S^{-1}(x,t)(\xi(x,t) + g(x,t)u(x,t))\} \geq 0 \text{ и } \nabla \cdot \{\xi(x,t) + g(x,t)u(x,t)\} \leq 0 \text{ для любых } x \in D \setminus \{0\} \text{ и } t \geq 0;$$

$$(iii) \quad 2\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S(x,t)(\xi(x,t) + g(x,t)u(x,t))\} \leq 0 \text{ и } \nabla \cdot \{S^{-1}(x,t)(\xi(x,t) + g(x,t)u(x,t))\} \geq 0 \text{ для любых } x \in D \setminus \{0\} \text{ и } t \geq 0.$$

Если закон управления $u(x, t)$ выбран так, что в случаях (i)-(iii) неравенства строгие, тогда $x = 0$ – равномерно асимптотически устойчивая.

Так как система (5.40) стабилизируема в области D , тогда доказательство теоремы 5.8 подобно доказательству теоремы 5.7 (с учетом обозначения $f(x, t) = \xi(x, t) + g(x, t)u(x, t)$).

Пример 5. Для иллюстрации результатов раздела 5.6, рассмотрим следующую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \frac{g(t)x_1}{1+x_2^2}, \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned} \tag{5.41}$$

где функция $g(t)$ неизвестна, но $0 < \underline{g} < g(t) < \bar{g} < \infty$ и границы $\underline{g}$, $\bar{g}$ известны. Требуется разработать закон управления u , обеспечивающий равномерную асимптотическую устойчивость $x = 0$.

Выбирая $S(x, t) = (x_1^2 + x_2^2)^\alpha$, α – натуральное число, рассмотрим случай

(ii) теоремы 5.8:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S^{-1}(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S^{-1}(x,t)(\xi(x,t) + g(x,t)u(x,t))\} = \\ &= (x_1^2 + x_2^2)^{-\alpha-1} \times \\ &\times \left[-2\alpha x_1 x_2 + 2\alpha \frac{g x_1^2}{1+x_2^2} - 2\alpha u x_2 + \right. \\ &\left. + (x_1^2 + x_2^2) \left(-\frac{g}{1+x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right], \\ &\nabla \cdot \{\xi(x, t) + g(x, t)u(x, t)\} = -\frac{g}{1+x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Согласно случаю (ii) теоремы 5.8, $\nabla \cdot \{\xi(x, t) + g(x, t)u(x, t)\} = \frac{g}{1+x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \leq 0$. Пусть

$$\frac{g}{1+x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\gamma-g}{1+x_2^2}, \quad (5.43)$$

где $\gamma > \bar{g}$. Тогда

$$u = -\gamma \operatorname{atan}(x_2) - x_1 \quad (5.44)$$

одно из решений (5.43). Подставляя (5.44) в первое уравнение (5.42), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S^{-1}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S^{-1}(x, t)(\xi(x, t) + g(x, t)u(x, t))\} \\ &= (x_1^2 + x_2^2)^{-\alpha-1} \left[\frac{(2\alpha g - g - \gamma)x_1^2}{1+x_2^2} + 2\alpha\gamma x_2 \operatorname{atan}(x_2) - \frac{(g+\gamma)x_2^2}{1+x_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Неравенство $\frac{(2\alpha g - g - \gamma)x_1^2}{1+x_2^2} > 0$ выполнено для любых x_1, x_2 и $\alpha \geq \frac{\gamma}{\bar{g}}$. Теперь рассмотрим следующую функцию $L(x_2) = cx_2 \operatorname{atan}(x_2) - \frac{x_2^2}{1+x_2^2}$, где $c = \frac{2\alpha\gamma}{g+\gamma}$.

Вычислив первую производную $L_2(x_2)$, получим $\frac{dL}{dx_2}|_{x_2=0} = c \operatorname{atan}(x_2) + \frac{cx_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_2}{(1+x_2^2)^2}|_{x_2=0} = 0$. Вычислив вторую производную $L_2(x_2)$, получим

$$\frac{d^2 L}{dx_2^2} = \frac{(6+2c)x_2^2 + 2c-2}{(1+x_2^2)^3} > 0 \text{ для любых } x_2 \text{ и } c > 1. \text{ Значит, функция } L(x_2) = 0$$

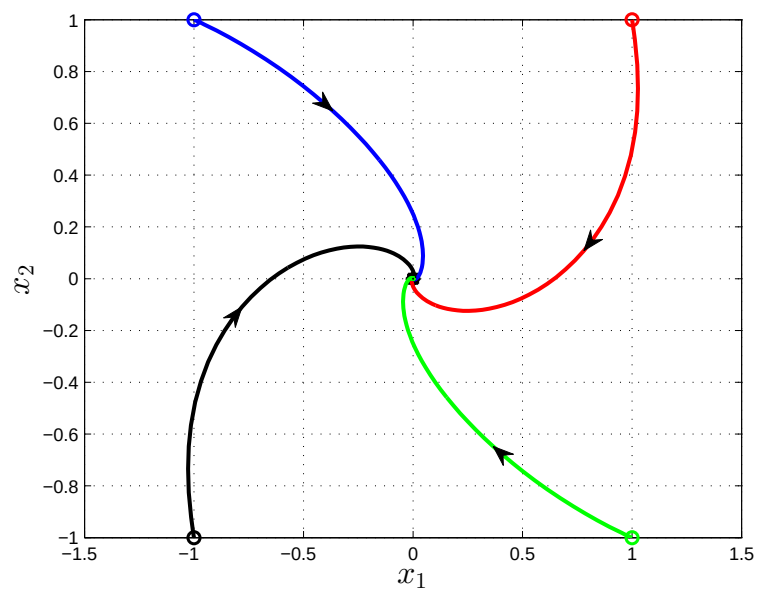
имеет единственный глобальный минимум в точке $x_2 = 0$. С учетом $c = \frac{2\alpha\gamma}{g+\gamma}$

и $c > 1$, оценим γ в виде $\gamma > \frac{g}{2\alpha-1}$. Так как $\frac{g}{2\alpha-1} < \bar{g}$, то величина γ должна

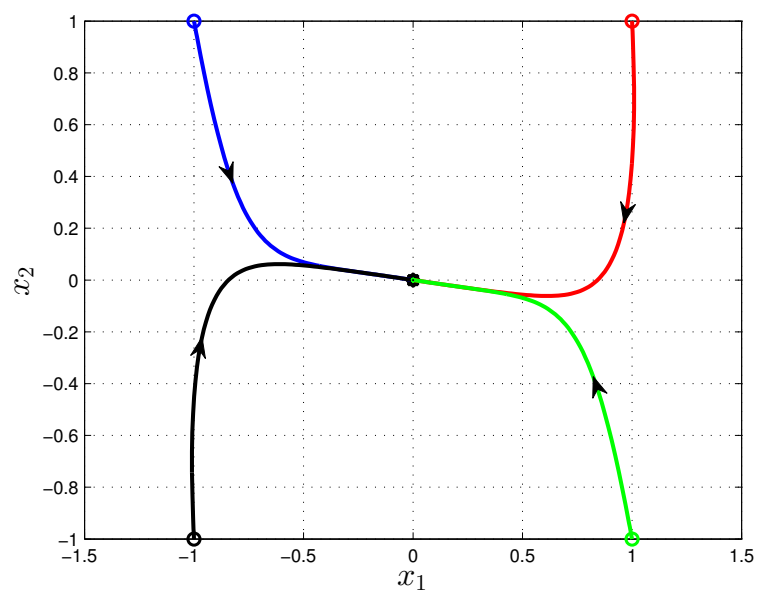
быть выбрана из условия $\gamma > \bar{g}$. Значит, $\frac{\partial S^{-1}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{S^{-1}(x, t)(\xi(x, t) + g(x, t)u(x, t))\} > 0$ для любых ненулевых x_1, x_2 и $\gamma > \bar{g}$.

Траектории замкнутой системы изображены на рис. 5.11 для $g(t) = 1 + 0,95 \sin(t)$, $\gamma = 2$ (рис. 5.11,а), $\gamma = 10$ (рис. 5.11,б) и начальных условий $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ и $(1, -1)$.

З а м е ч а н и е 5.6 Согласно теореме 5.8, закон управления выбирается из решения дифференциального неравенства. Это может дать но-



a



b

Рисунок 5.11 — Траектории системы (5.39) при $\gamma = 2$ (a) и $\gamma = 10$ (b).

вые возможности для разработки закона управления, например, см. пример 5. Тогда как если построение закона управления основано на методе функций Ляпунова, то требуется решить алгебраическое неравенство

$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla\{V\}(f + gu) < 0$ по отношению к u . На пример, из посленего алгебраического неравенства (5.44) для $V(x, t) = S(x, t)$ не очевиден закон управления (5.44).

5.7 Заключение по главе 5

- Предложен новый метод для исследования экспоненциальной устойчивости автономных динамических систем с использованием нового дивергентного метода [65]. Свойство экспоненциальной устойчивости позволяет повысить устойчивость системы к некоторым видам возмущений и неопределенностей. Новые необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости выводятся из [65].
- Предложенный метод обобщен на исследование неавтономных систем. Получены отдельно необходимые и достаточные условия устойчивости
- Сформулированные необходимые и достаточные условия имеют вид уравнения неразрывности, что широко используется в механике и физике, а также в некоторых промышленных задачах. Трудности заключаются в выборе функции плотности такой, чтобы выполнялись полученные условия. Эта задача эквивалентна задаче нахождения функции Ляпунова.
- Предложенные достаточные условия применяются для синтеза закона управления с обратной связью по состоянию. Показано, что закон управления находится как решение дифференциального неравенства,

а закон управления, основанный на методе функций Ляпунова, находится как решение алгебраического неравенства.

Глава 6 Управление электроэнергетической сетью

В теории автоматического управления не теряет актуальности задача повышения надежности и эффективности управления процессами генерации электроэнергии. Согласно [11, 24], общая надежность функционирования энергосети обеспечивается за счет надежности энергоснабжения, для чего необходимо поддерживать бесперебойность поставки электроэнергии конечным потребителям и синхронное взаимодействие всех составляющих электроэнергетической системы. Эффективность работы сети можно повысить путем повышения качества регулирования компонентов сети, в частности, электрических генераторов. Это позволит снизить требуемые резервы мощностей и уменьшить вероятность возникновения блэкаута (blackout).

На сегодняшний день предложено достаточно больше количество подходов, реализующих качественное управление сетью электрических генераторов. Рассмотренный в работе [157] децентрализованный алгоритм управления использует линеаризацию обратной связью и робастный алгоритм управления для стабилизации сети генераторов. Работа [105] посвящена стабилизации электрического генератора путем снижения полной энергии системы. В [36] используется синергетический подход для синтеза нелинейного адаптивного управления, которое обеспечивает поддержание уровня вырабатываемого напряжения независимо от величины расхода электроэнергии, вызванного изменением нагрузки. Авторы в [120] проводят аналогию между генераторами, подключенными к общей шине, и связанными маятниками и предлагают алгоритм синхронизации сети за

счет ограничения разности поворота углов роторов, основанный на энергетическом подходе. В [60, 79] решена задача синхронизации сети в условиях параметрической неопределенности и измерении только части вектора состояния генераторов.

Однако алгоритмы [36, 60, 79, 105, 120, 157] могут оказаться малоэффективными в условиях дефицита измерительной информации и помех измерения. Проблема заключается в том, что при расчете сигнала управления искомое значение оценки производной регулируемой переменной может существенно отличаться от ее истинного значения. При этом ошибка накапливается при последующей оценке производных. Данная проблема связана как с дифференцированием высокочастотного шума, так и с наличием большого коэффициента усиления в системе управления при построении робастных систем управления [43, 100, 103, 108, 125, 196, 209, 219].

В настоящей главе синтезирован алгоритм робастной синхронизации электроэнергетической сети с неизвестными параметрами и в условиях измерения только углов нагрузки с аддитивно наложенной высокочастотной помехой. Для синтеза системы управления будет предложен подход, позволяющий независимо управлять качеством фильтрации помехи и качеством ошибки стабилизации выходной переменной. Получены условия, гарантирующие устойчивость системы. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие эффективность разработанного алгоритма.

6.1 Модель электроэнергетической сети

Будем рассматривать модель электроэнергетической сети [60, 79, 101, 120, 157], в которой электромеханическая модель сети генераторов описывается следующей системой уравнений:

1) уравнения движения роторов:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\delta}_i(t) &= \omega_i(t), \\ 2H_i\dot{\omega}_i(t) &= -D_i\omega_i(t) - \omega_0\Delta P_{ei}(t), \quad i = \overline{1, k};\end{aligned}\tag{6.1}$$

2) уравнения контуров возбуждения

$$\begin{aligned}\tau'_{d0i}\dot{E}'_{qi}(t) &= E_{fi}(t) - E'_{qi}(t) - (x_{di} - x'_{di})I_{di}(t), \\ \tau'_{q0i}\dot{E}'_{di}(t) &= -E'_{di}(t) + (x_{qi} - x'_{di})I_{qi}(t), \quad i = \overline{1, k};\end{aligned}\tag{6.2}$$

3) уравнения статорных контуров:

$$\begin{aligned}I_{qi}(t) &= E'_{qi}(t)G_{ii} + E'_{di}(t)B_{ii} + \\ &+ \sum_{j \in N_i} (E'_{qj}(t)G_{ij} + E'_{dj}(t)B_{ij}) \cos(\delta_i(t) - \delta_j(t)) + \\ &+ \sum_{j \in N_i} (E'_{qj}(t)B_{ij} - E'_{dj}(t)G_{ij}) \sin(\delta_i(t) - \delta_j(t)), \\ I_{di}(t) &= -E'_{qi}(t)B_{ii} + E'_{di}(t)G_{ii} + \\ &+ \sum_{j \in N_i} (-E'_{qj}(t)B_{ij} + E'_{dj}(t)G_{ij}) \cos(\delta_i(t) - \delta_j(t)) + \\ &+ \sum_{j \in N_i} (E'_{qj}(t)G_{ij} + E'_{dj}(t)B_{ij}) \sin(\delta_i(t) - \delta_j(t)), \\ V_{ti}(t) &= \sqrt{(E'_{qi}(t) - I_{di}(t)x'_{di})^2 + (I_{qi}(t)x_{qi})^2}, \\ E_{fi}(t) &= k_{ci}u_{fi}(t), \\ \Delta P_{ei}(t) &= P_{ei}(t) - P_{mi}(t), \\ P_{ei}(t) &= E'_{qi}(t)I_{qi}(t) + E'_{di}(t)I_{di}(t), \\ Q_{ei}(t) &= E'_{qi}(t)I_{di}(t) - E'_{di}(t)I_{qi}(t) - (I_{qi}^2(t) + I_{di}^2(t))x'_{di}, \\ &i = \overline{1, k}.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Здесь k – количество генераторов в сети, N_i – множество генераторов, смежных с i -м генератором. Следующие обозначения представлены для

каждого i -го генератора: $\Delta\delta_i(t) = \delta_i(t) - \delta_i^0$; $\delta_i(t)$ – угол поворота ротора относительно его синхронной оси вращения (угол нагрузки), рад; δ_i^0 – угол нагрузки генератора в рабочем режиме, рад; $\omega_i(t)$ – относительная скорость ротора, рад/с; ω_0 – скорость ротора в синхронном режиме, рад/с; H_i – коэффициент инерции, с; D_i – коэффициент демпфирования, отн. ед.; $P_{ei}(t)$ – активная электрическая мощность, отн. ед.; $P_{mi}(t)$ – механическая мощность, отн. ед.; τ'_{d0i} – переходная постоянная времени вдоль продольной оси при разомкнутом статоре, с; τ'_{q0i} – переходная постоянная времени вдоль поперечной оси при разомкнутом статоре, с; $E'_{qi}(t)$ – переходная ЭДС вдоль поперечной оси, отн. ед.; $E'_{di}(t)$ – переходная ЭДС вдоль продольной оси, отн. ед.; $E_{fi}(t)$ – эквивалентная ЭДС возбуждения, отн. ед.; $I_{qi}(t)$ – ток вдоль поперечной оси, отн. ед.; $I_{di}(t)$ – ток вдоль продольной оси, отн. ед.; G_{ii} и B_{ii} – собственные активная и реактивная проводимости i -ого генератора, отн. ед.; G_{ij} и B_{ij} – взаимные активная и реактивная проводимости между i -м и j -м генераторами, отн. ед.; x'_{di} – переходное реактивное сопротивление вдоль продольной оси, отн. ед.; x_{di} – реактивное сопротивление вдоль продольной оси, отн. ед.; x_{qi} – реактивное сопротивление вдоль поперечной оси, отн. ед.; $V_{ti}(t)$ – напряжение на зажимах статора, отн. ед.; k_{ci} – коэффициент усиления напряжения возбуждения, отн. ед.; $u_{fi}(t)$ – напряжение на обмотке возбуждения ротора, отн. ед.; $Q_{ei}(t)$ – реактивная мощность, отн. ед.

Отметим, что уравнения (6.1)-(6.3) получены с учетом ряда модельных предположений и упрощений. На практике динамика работы генераторного агрегата может оказаться сложнее, чем (6.1)-(6.3).

Рассмотрим случай, когда в электроэнергетической сети доступны из-

мерению зашумленные углы нагрузки генераторов, то есть

$$e_i(t) = \delta_i(t) + \vartheta_i(t), \quad i = \overline{1, k}, \quad (6.4)$$

где $\vartheta_i(t) \in \mathbb{R}$ – ограниченная высокочастотная помеха измерения.

Требуется разработать алгоритм управления, который обеспечит подстройку работы каждого генератора под свой участок сети, чтобы исключить их перегрузку. С этой целью предлагается использовать непрерывный децентрализованный закон управления, который обеспечит выполнение следующего целевого условия

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\Delta \delta_i(t)| < \Delta_1 \quad \text{для любых } i = \overline{1, k}, \quad (6.5)$$

где $\Delta_1 > 0$, $\delta_i(t) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Кроме того, остальные характеристики генераторов должны лежать в допустимых пределах.

Сформулированная задача решается с учетом следующих предположений.

Предположение 6.1 *Неизвестные параметры D_i , H_i , τ'_{d0i} , τ'_{q0i} , x_{di} , x_{qi} , x'_{di} , k_{ci} , G_{ij} , B_{ij} модели (6.1)-(6.3) принадлежат известному ограниченному множеству Ξ .*

Предположение 6.2 *Аварийные режимы связаны с внезапным изменением проводимости линий передачи.*

Предположение 6.3 *Орграф, ассоциированный с сетью, имеет ориентированное остовное дерево.*

6.2 Преобразование модели сети

Выпишем уравнения производных активной $\Delta P_{ei}(t)$ и реактивной $Q_{ei}(t)$ мощностей согласно уравнениям (6.2), (6.3):

$$\begin{aligned}\Delta \dot{P}_{ei}(t) = & -\left(\frac{1}{\tau'_{d0i}} + \frac{1}{\tau'_{q0i}}\right)\Delta P_{ei}(t) + \frac{1}{\tau'_{d0i}}k_{ci}I_{qi}(t)u_{fi}(t) + \\ & + E'_{qi}(t)\dot{I}_{qi}(t) + E'_{di}(t)\dot{I}_{di}(t) + \gamma_{1i}(t), \\ \dot{Q}_{ei}(t) = & -\left(\frac{1}{\tau'_{d0i}} + \frac{1}{\tau'_{q0i}}\right)Q_{ei}(t) + \frac{1}{\tau'_{d0i}}k_{ci}I_{di}(t)u_{fi}(t) - \\ & - (2I_{qi}(t)x'_{di} + E'_{di}(t))\dot{I}_{qi}(t) - \\ & - (2I_{di}(t)x'_{di} - E'_{qi}(t))\dot{I}_{di}(t) + \gamma_{2i}(t),\end{aligned}\tag{6.6}$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_{1i}(t) = & \frac{1}{\tau'_{d0i}}E'_{di}(t)I_{di}(t) + \frac{1}{\tau'_{q0i}}E'_{qi}(t)I_{qi}(t) - \\ & - \left(\frac{x_{di}-x'_{di}}{\tau'_{d0i}} - \frac{x_{qi}-x'_{di}}{\tau'_{q0i}}\right)I_{qi}(t)I_{di}(t) - \left(\frac{1}{\tau'_{d0i}} + \frac{1}{\tau'_{q0i}}\right)P_{mi}(t), \\ \gamma_{2i}(t) = & -\frac{1}{\tau'_{d0i}}E'_{di}(t)I_{qi}(t) + \frac{1}{\tau'_{q0i}}E'_{qi}(t)I_{di}(t) - \\ & - \left(\frac{x_{di}}{\tau'_{d0i}} + \frac{x'_{di}}{\tau'_{q0i}}\right)I_{di}^2(t) - \left(\frac{x_{qi}}{\tau'_{q0i}} + \frac{x'_{di}}{\tau'_{d0i}}\right)I_{qi}^2(t).\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
z_i(t) &= [\Delta\delta_i(t), \omega_i(t), \Delta P_{ei}(t), Q_{ei}(t)]^T, \\
U_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{D_i}{2H_i} & -\frac{\omega_0}{2H_i} & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{\tau'_{d0i}} + \frac{1}{\tau'_{q0i}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{\tau'_{d0i}} + \frac{1}{\tau'_{q0i}}\right) \end{bmatrix}, \\
V_{1i}(t) &= [0, 0, k_{ci}I_{qi}(t)/(\tau'_{d0i}), 0]^T, \\
V_{2i}(t) &= [0, 0, 0, k_{ci}I_{di}(t)/(\tau'_{d0i})]^T, \\
W &= [1, 0, 0, 0], \\
\zeta_{1i}(t) &= \frac{\tau'_{d0i}}{k_{ci}I_{qi}(t)} [E'_{qi}(t)\dot{I}_{qi}(t) + E'_{di}(t)\dot{I}_{di}(t) + \gamma_{1i}(t)], \\
\zeta_{2i}(t) &= \frac{\tau'_{d0i}}{k_{ci}I_{di}(t)} \left[- (2I_{qi}(t)x'_{di} + E'_{di}(t)) \dot{I}_{qi}(t) - \right. \\
&\quad \left. - (2I_{di}(t)x'_{di} - E'_{qi}(t)) \dot{I}_{di}(t) + \gamma_{2i}(t) \right].
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (6.4), перепишем уравнения (6.1) и (6.6) в форме

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i(t) &= U_i z_i(t) + V_{1i}(t)(u_{fi}(t) + \zeta_{1i}(t)) + \\
&\quad + V_{2i}(t)(u_{fi}(t) + \zeta_{2i}(t)), \\
\Delta\delta_i(t) &= W z_i(t), \\
e_i(t) &= \delta_i(t) + \vartheta_i(t), \quad i = \overline{1, k}.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Перепишем уравнение (6.7) в операторной форме на базе тройки матриц (U_i, V_{1i}, W)

$$\begin{aligned}
Q_i(p)\Delta\delta_i(t) &= R_{1i}(p, t)(u_{fi}(t) + \zeta_{1i}(t)), \\
e_i(t) &= \delta_i(t) + \vartheta_i(t), \quad i = \overline{1, k}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Здесь $Q_i(p)$, $R_{1i}(p, t)$ – дифференциальные операторы, полученные при переходе от (6.7) к (6.8) при фиксированном t , $\deg Q_i(p) = 4$, $\deg R_{1i}(p, t) = 1$, $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

З а м е ч а н и е 6.1 Представление уравнения (6.7) в операторной форме на базе тройки матриц (U_i, V_{2i}, W) приводит к дифференциальному оператору $R_{2i}(p, t) \equiv 0$, поэтому функция $\zeta_{2i}(t)$ исключена из рассмотрения.

Разложим $R_{1i}(p, t)$ на следующие составляющие:

$$R_{1i}(p, t) = R_{i0}(p) + \Delta R_i(p, t), \quad i = \overline{1, k}, \quad (6.9)$$

где $R_{i0}(p)$ – линейный дифференциальный оператор первого порядка такой, что $R_{i0}(\lambda)$ – гурвицевый, λ – комплексная переменная, коэффициент. Подставив (6.9) в (6.8), получим

$$\begin{aligned} Q_i(p) \Delta \delta_i(t) &= R_{i0}(p) u_{fi}(t) + \beta_i(t), \\ e_i(t) &= \delta_i(t) + \vartheta_i(t), \quad i = \overline{1, k}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где $\beta_i(t) = \Delta R_i(p, t) u_{fi}(t) + R_{1i}(p, t) \zeta_{1i}(t)$ – функция, содержащая в себе неопределенности модели i -го генератора.

6.3 Алгоритм фильтрации и закон управления

Ради простоты обоснования работоспособности фильтра высокочастотных помех измерения, предположим в разделе 2.1, что $\delta_i(t)$ – ограниченный сигнал. Для выделения информации о сигнале $\delta_i(t)$ из сигнала $e_i(t)$, рассмотрим алгоритм вида (2.41). Зададим закон управления в форме (2.58).

Т е о р е м а 6.1 Пусть выполнены условия Предположений 6.1-6.3, сигнал $\vartheta_i(t)$ ограничен, если $r \geq 2$, и ограничен вместе с его $2 - r$ производными, если $r < 2$. Тогда существуют числа $\alpha > 0$ и $h > 0$ такие, что система

управления, представленная алгоритмом фильтрации помехи (2.41) и законом управления (2.58) обеспечивает выполнение целевого условия (6.5) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

6.4 Пример управления в условиях помех измерения

Рассмотрим электроэнергетическую сеть S , состоящую из трех электрических генераторов (см. рис. 6.1). На рис. 6.1 Γ_i – генератор, T_i – трансформатор, K_i – выключатель фидера генератора, K_{ij} – выключатель линии передачи; $i, j = \{1, 2, 3, H\}$, H – нагрузка.

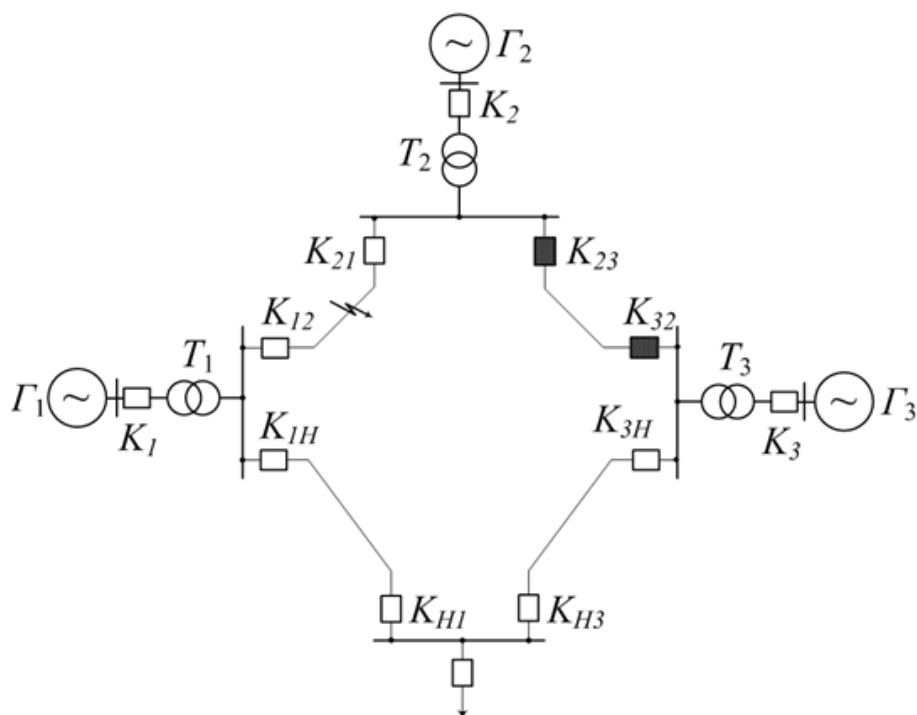


Рисунок 6.1 — Схема электроэнергетической сети.

При моделировании рассмотрим аварийную ситуацию, связанную с из-

менением сопротивления линии электропередач, проходящую по следующему сценарию:

- 1) до момента времени $t_1 = 5$ с матрицы активной и реактивной проводимости сети равны

$$G^0 = \begin{bmatrix} 0,846 & 0,287 & 0,21 \\ 0,287 & 0,42 & 0,213 \\ 0,21 & 0,213 & 0,277 \end{bmatrix}, B^0 = \begin{bmatrix} -2,988 & 1,513 & 1,226 \\ 1,513 & -2,724 & 1,088 \\ 1,226 & 1,088 & -2,368 \end{bmatrix};$$

- 2) в момент времени $t_1 = 5$ с происходит обрыв линий электропередач, приводящий к короткому замыканию; сеть разбивается на две подсети: S_1 , состоящую из генераторов Γ_1 и Γ_3 , и S_2 , которую составляет генератор Γ_2 . Матрицы активной и реактивной проводимости соответственно равны

$$G^1 = \begin{bmatrix} 0,657 & 0 & 0,07 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,07 & 0 & 0,174 \end{bmatrix}, B^1 = \begin{bmatrix} -3,816 & 0 & 0,631 \\ 0 & -5,486 & 0 \\ 0,631 & 0 & -2,796 \end{bmatrix};$$

- 3) спустя девять периодов обращения роторов генераторов в аварийном режиме в момент времени $t_2 = 5,18$ с происходит восстановление исходной топологии сети путем включения резервной линии ключами K_{23} и K_{32} . Матрицы активной и реактивной проводимости соответственно равны

$$G^2 = \begin{bmatrix} 0,181 & 0,138 & 0,191 \\ 0,138 & 0,389 & 0,199 \\ 0,191 & 0,199 & 0,273 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} -2,229 & 0,726 & 1,079 \\ 0,726 & -1,953 & 1,229 \\ 1,079 & 1,229 & -2,342 \end{bmatrix}.$$

Математические модели генераторов Γ_i , $i = 1, 2, 3$, сети S определены уравнениями (6.1)-(6.3), для которых класс неопределенностей Ξ задан неравенствами: $1 \leq D_i \leq 5$ отн. ед.; $1 \leq H_i \leq 25$ с; $5 \leq \tau'_{d0i} \leq 9$ с; $0,001 \leq \tau'_{q0i} \leq 0,7$ с; $0,1 \leq x_{di} \leq 1,5$ отн. ед.; $0,05 \leq x_{qi} \leq 1,5$ отн. ед.; $0,05 \leq x'_{di} \leq 0,2$ отн. ед.; $1 \leq k_{ci} \leq 3$ отн. ед.; $0 \leq G_{ij}^k \leq 1$ отн. ед.; $-6 \leq B_{ij}^k \leq 2$ отн. ед.; $i, j = 1, 2, 3$; $k = 0, 1, 2$.

Для фильтрации помехи используем алгоритм (2.41)

$$\hat{e}_i(t) = \frac{1}{(0,01p + 1)^4} e_i(t), \quad i = \overline{1,3}.$$

Пусть $\alpha_i = 0,4$; $d_{0i} = 2$; $d_{1i} = 3,5$; $d_{2i} = 1$; $i = 1,2,3$. Тогда закон управления (2.58) можно записать в виде

$$u_{fi}(t) = -0,4(2\bar{e}_i(t) + 3,5\bar{e}_i^{(1)}(t) + \bar{e}_i^{(2)}(t)), \quad i = \overline{1,3}.$$

Для реализации наблюдателя (2.60) выберем параметр $h = 1/50$:

$$\begin{aligned} \bar{e}_i(t) &= \hat{e}_i(t), \quad \bar{e}_i^{(1)}(t) = 0,02[\bar{e}_i(t) - \bar{e}_i(t - 1/50)], \\ \bar{e}_i^{(2)}(t) &= 0,02[\bar{e}_i^{(1)}(t) - \bar{e}_i^{(1)}(t - 1/50)], \quad i = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

Зададим параметры генераторов Γ_i , $i = 1,2,3$ сети S : общий $\omega_0 = 314,159$ рад/с и отдельные:

- 1) генератор Γ_1 : $D_1 = 2$ отн. ед.; $H_1 = 23,64$ с; $\tau'_{d01} = 8,96$ с;
 $\tau'_{q01} = 0,001$ с; $x_{d1} = 0,1460$ отн. ед.; $x_{q1} = 0,0969$ отн. ед.;
 $x'_{d1} = 0,0608$ отн. ед.; $k_{e1} = 1$ отн. ед.; $P_{m1} = 0,7169$ отн. ед.; $P_{e1}(0) = 0,7169$ отн. ед.; $E'_{q1}(0) = 1,0563$ отн. ед.; $E'_{d1}(0) = 0,0242$ отн. ед.;
 $\delta_1(0) = 3,5859$; $\omega_1(0) = 0$ рад/с;
- 2) генератор Γ_2 : $D_2 = 2$ отн. ед.; $H_2 = 6,4$ с; $\tau'_{d02} = 6,00$ с;
 $\tau'_{q02} = 0,535$ с; $x_{d2} = 0,8958$ отн. ед.; $x_{q2} = 0,8645$ отн. ед.;
 $x'_{d2} = 0,1198$ отн. ед.; $k_{e2} = 1$ отн. ед.; $P_{m2} = 1,6294$ отн. ед.; $P_{e2}(0) = 1,6294$ отн. ед.; $E'_{q2}(0) = 0,7887$ отн. ед.; $E'_{d2}(0) = 0,6934$ отн. ед.;
 $\delta_2(0) = 61,0532$; $\omega_2(0) = 0$ рад/с;

3) генератор Γ_3 : $D_3 = 2$ отн. ед.; $H_3 = 3,01$ с; $\tau'_{d03} = 5,89$ с;
 $\tau'_{q03} = 0,600$ с; $x_{d3} = 1,3125$ отн. ед.; $x_{q3} = 1,2578$ отн. ед.;
 $x'_{d3} = 0,1813$ отн. ед.; $k_{c3} = 1$ отн. ед.; $P_{m3} = 0,8506$ отн. ед.; $P_{e3}(0) =$
 $0,8506$ отн. ед.; $E'_{q3}(0) = 0,7688$ отн. ед.; $E'_{d3}(0) = 0,6657$ отн. ед.;
 $\delta_3(0) = 54,0626$; $\omega_3(0) = 0$ рад/с.

Помеха измерения представляет собой сигнал следующего вида

$$\vartheta_i(t) = 0,5 \sin(10^5 t) + 0,5 \cos(10^5 t) + 0,05 \eta_i(t), \quad i = \overline{1,3},$$

где $\eta_i(t)$ – сигнал, моделируемый в Matlab Simulink с помощью блока «Band-limited white noise» со спектральной плотностью $\eta_i = 10^{-5}$ рад²/Гц. На рис. 6.2, 6.3 приведены переходные процессы по углам роторов $\delta_i(t)$ (а), относительным угловым скоростям $\omega_i(t)$ (б) и напряжениям на зажимах статоров $V_{ti}(t)$, $i = 1, 2, 3$.

В течение интервала времени с $t_3 = 20$ с по $t_4 = 25$ с моделирование проводилось при отсутствии помехи измерения $w_i(t)$. В момент времени $t_4 = 25$ с снова появляются помехи, содержащие только гармоническую составляющую, т.е. $w_i(t) = \eta_i(t)$. Из рис. 6.3 видно, что при $\eta_i(t) = 0$ улучшается качество напряжения на зажимах статора $V_{ti}(t)$. Также видно, что эффект наличия гармонической помехи успешно устранен.

Результаты моделирования показали, что синтезированная система управления сетью электрических генераторов, когда измерению доступны только зашумленные показания углов нагрузки, обеспечивает лучшие показатели качества переходных процессов по сравнению со схемами работ [2, 5], где измерению доступен весь вектор состояния и частично

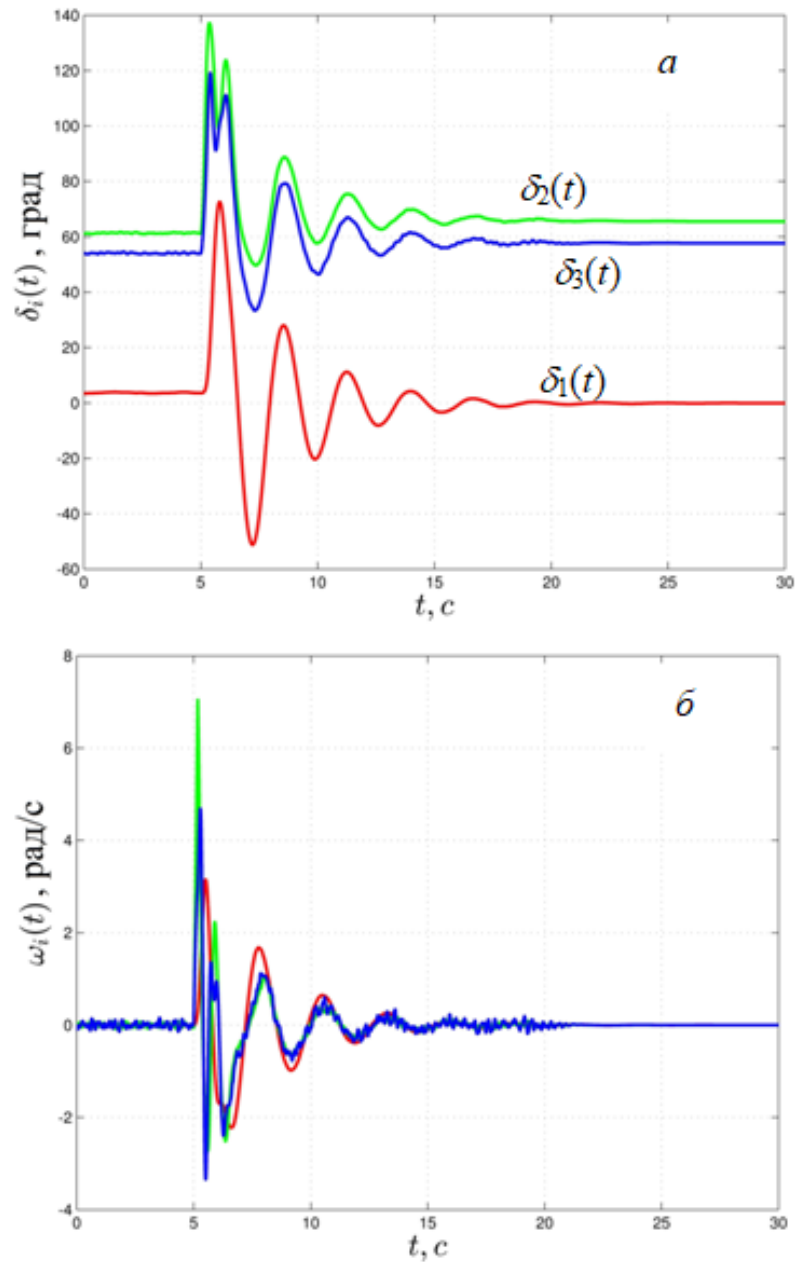


Рисунок 6.2 — Переходные процессы по углам роторов $\delta_i(t)$ (а) и относительным угловым скоростям $\omega_i(t)$ (б).

известны параметры модели генераторов. Моделирование также показало, что предложенный алгоритм обеспечивает устойчивость замкнутой системы при наличии в (6.1)-(6.3) немоделируемой динамики такой, что $\deg Q_i(p) - \deg R_{1i}(p, t) \leq 3$ в (6.8). Также отметим, что в условиях случай-

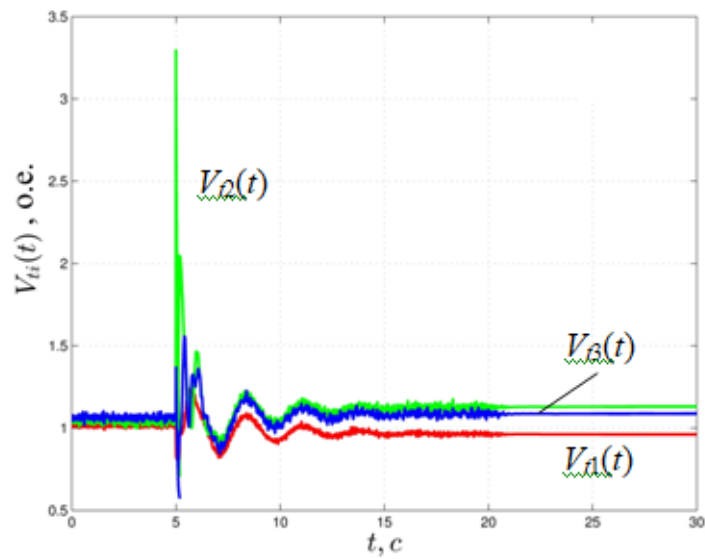


Рисунок 6.3 — Переходный процесс напряжениям на зажимах статоров $V_{ti}(t)$.

ных помех измерения нельзя гарантировать цель управления (6.3) в силу неограниченности помехи, однако результаты моделирования иллюстрируют удовлетворительные качества переходных процессов при ненулевых случайных сигналах $\eta_i(t)$.

6.5 Испытание схемы управления на «10-Machine New-England Power System IEEE benchmark»

Протестируем полученные алгоритмы на тестовом примере электроэнергетической сети Новой Англии («10-Machine New-England Power System IEEE benchmark», см. [237]). Тестовый пример состоит из 10 генераторов, 39 шин и 19 нагрузочных элементов (см. рис. 6.4).

0,3 с.

На рис. 6.5-6.7 показаны переходные процессы по углам нагрузки, частотам вращения роторов и выходному напряжению. Результаты моделирования показали, что разработанный алгоритм управления обеспечивает компенсацию неизвестных параметров системы в штатном режиме и в аварийных ситуациях.

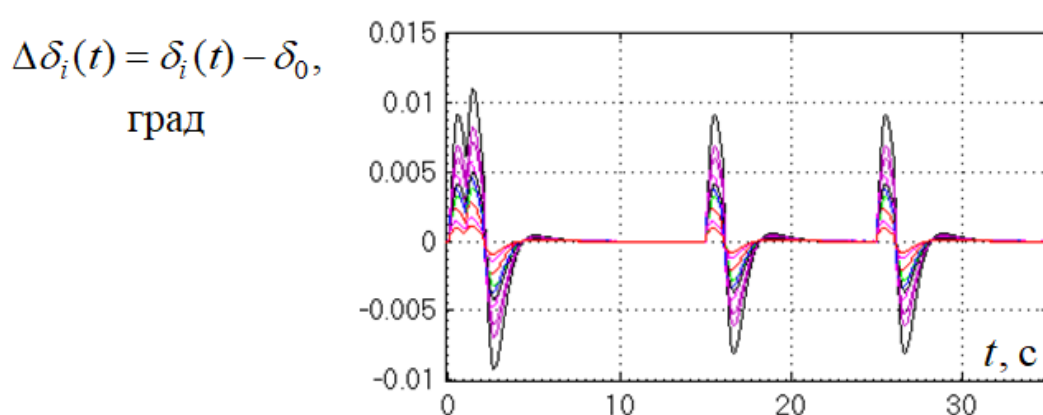


Рисунок 6.5 — Переходные процессы по углам нагрузки.

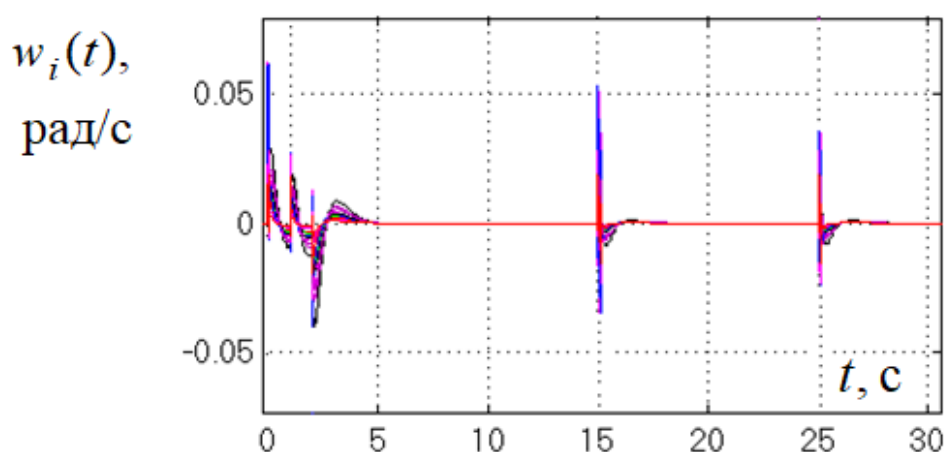


Рисунок 6.6 — Переходные процессы по частоте вращения роторов.

$$\Delta V_i(t) = V_i(t) - V_0,$$

о.е.

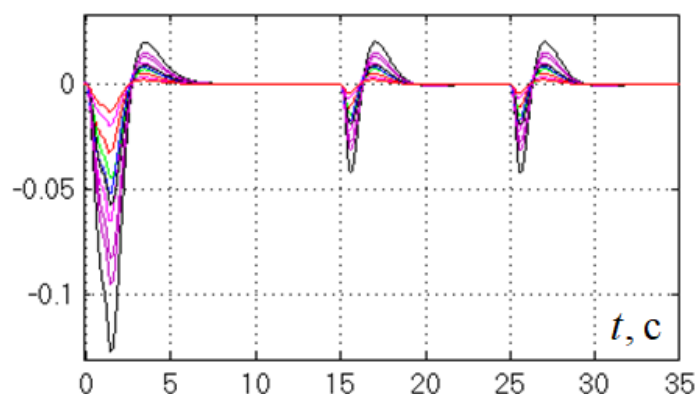


Рисунок 6.7 — Переходные процессы по выходному напряжению на генераторах.

6.6 Экспериментальное исследование

6.6.1 Описание экспериментального стенда

Экспериментальное исследование полученных алгоритмов управления проводили на «Энергетическом стенде ЭС-1» (см. рис. 6.8), разработанном и расположенном в Институте проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН, г. Санкт-Петербург). Экспериментальный стенд является уникальной установкой по изучению и исследованию систем управления электроэнергетической сетью. Данный стенд позволяет исследовать существующие алгоритмы управления сетью электрических генераторов в штатном режиме их работы и аварийных ситуациях, связанных с внезапным изменением нагрузки в сети.

Объектами управления являются три электрических генератора (модель 371.3701), каждый из которых имеет (см. рис. 6.9):

- прямую механическую связь с электрическим двигателем (модель



Рисунок 6.8 — Энергетический стенд ЭС-1.

5АИЕ 71 В2) для приведения генератора в движение;

- обмотку возбуждения ротора для управления вырабатываемой генератором энергии;
- 3 фазы выходного тока для снятия нагрузки.

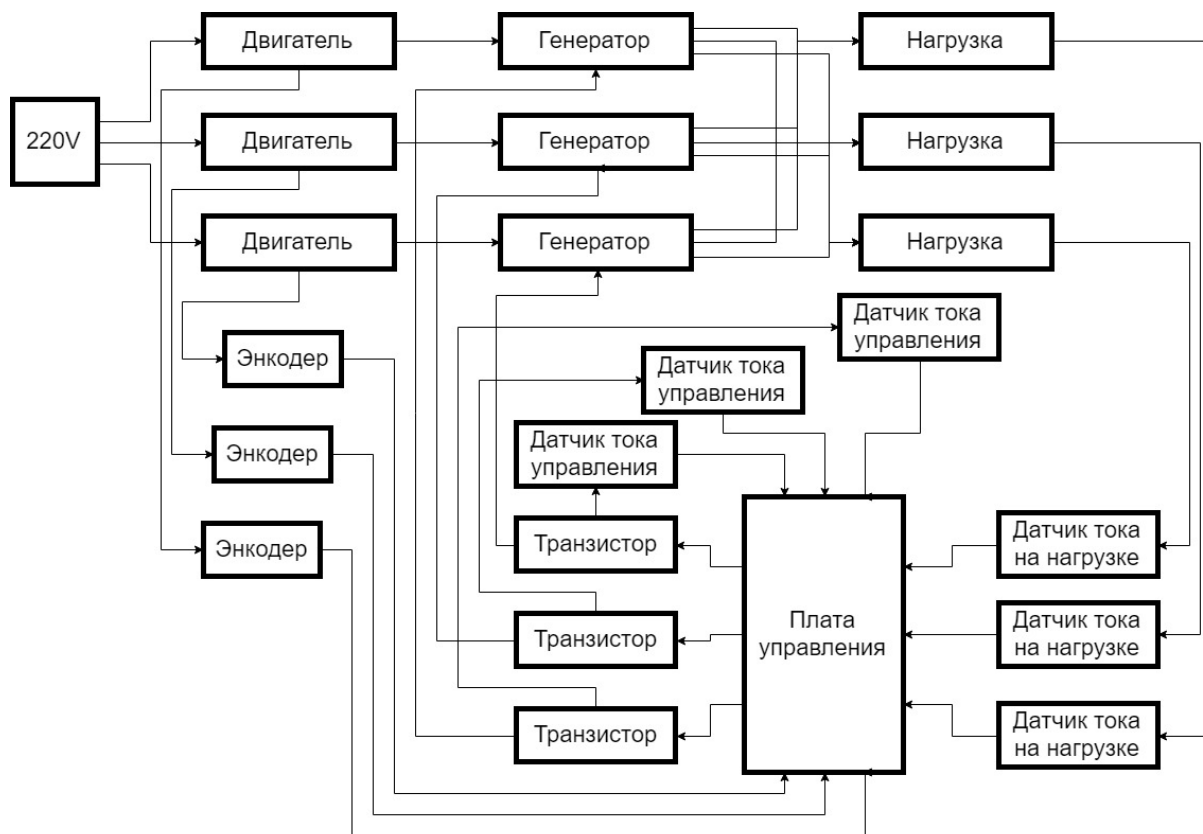


Рисунок 6.9 — Функциональная схема «Энергетического стенда ЭС-1».

Роль источника механического воздействия на генераторы играют электрические двигатели переменного тока, питающиеся от сети 220 Вольт. Вал двигателя и генератора соединен гибкой муфтой, на которой закреплен диск для работы оптического энкодера (модель FC-03). Энкодер служит для получения данных о скорости вращения вала генератора. Полученные данные передаются напрямую в плату управления (модель STM32).

Для снятия нагрузки генераторов используются балластные реостаты (модель РБ - 302) и катушки индуктивности со сварочных аппаратов. При этом одинаковые фазы с 3 генераторов соединены и подключены к 3 разным нагрузочным устройствам. На вторую клемму нагрузочного устройства подключен общий «0» объединенный с трех генераторов.

Получение данных о токе, протекающем через нагрузку обеспечивают 3 датчика переменного тока (модель ACS712) подключенные каждый к соответствующей нагрузке, сигнал с датчиков идет на плату управления.

Плата управления состоит из двух устройств, связанных между собой через UART. Роль вычислительной машины, на которой идет расчет управляющих сигналов выполняет персональный компьютер с установленным пакетом программ MATLAB/Simulink. Вторая плата STM32 предназначена для сбора информации с датчиков, обмена информацией с персональным компьютером и генерации ШИМ-сигнала управления транзисторами. MOSFET транзисторы обеспечивают прохождение необходимого тока через обмотку управления ротора генератора. Имеют внешнее питание 12 Вольт. Для настройки работы транзисторов используются датчики тока в цепи обмотки возбуждения, сигнал с которых идет на плату управления.

Перечень основного оборудования экспериментального стенда, содержащего наименование и основные характеристики приборов:

- Генератор 371.3701. Максимальная мощность 770 Вт, номинальное напряжение 14 В, максимальная сила тока 55 А, частота вращения ротора, соответствующая номинальному напряжению под нагрузкой – 2000 об/мин, 14 В, 35 А.
- Электрический двигатель 5АИЕ 71 В2 (асинхронный). Мощность 750 Вт, номинальная скорость вращения 3000 об/мин.
- Датчик оборотов FC-03 на базе микросхемы LM393. Интерфейс или тип выходного сигнала энкодера: цифровой TTL.

- Датчик тока обмотки возбуждения ACS712 на 20 А.
- Датчик тока на нагрузке линейный AC/DC 57A, CSLA1CD. Максимальный ток измерения – 57 А.
- Нагрузочные устройства. Реостат балластный «РБ-302», который позволяет рассеять до 315 А при напряжении 75 В. На данном реостате нагрузка включается ступенчато, с помощью 6 рубильников, каждый из которых отвечает за свою нагрузочную цепь. Для имитации индуктивной нагрузки используются катушки индуктивности, предназначенные для сварочных аппаратов с пропускной способностью тока до 300 А.
- Блоки питания. Для подключения электроники минимально необходимо постоянное напряжение 12 В (используется компьютерный блок питания 200-400 Вт). Для стенда используется блок питания FSPGroupATX-350PNR на 5 В. Блок питания Faraday 100W/24V используется для обмотки возбуждения на каждом генераторе.
- Компьютер на архитектуре x86. Данное устройство необходимо для запуска и использования Matlab/Simulink.
- Отладочная плата на базе микроконтроллеров Atmega и STM. Данное решение полностью перекрывает необходимые параметры, к тому же позволяет подключиться кабелем USB – microUSB к ПК и передавать данные напрямую с помощью UART

Перечень выполняемых типовых работ:

- Испытание алгоритмов управления сетью электрических генераторов в нормальном режиме работы сети
- Испытание алгоритмов управления сетью электрических генераторов при внезапном изменении активной и реактивной нагрузок в сети.
- Отладка алгоритмов управления электроэнергетической сетью.
- Исследование работы сети электрических генераторов при постоянной и переменной нагрузки в сети.

Перечень применяемых методик измерений:

- Измерение, обработка получаемых сигналов, визуализация и управление осуществляется в реальном времени с применением компьютеризованных средств и привлечения лицензированного программного обеспечения MatLab Simulink RealTime 2015.
- Минимально достижимый период квантования времени составляет 0,5 сек.
- Измерение углов поворота ротора - 3 измерения за полный оборот.
- Измерение токов нагрузки, номинальный интервал 40-50 А.
- На каждой из трех фаз находятся по 6 рубильников, ступенчато меняющих сопротивление нагрузки.

6.6.2 Результаты эксперимента

На рис. 6.10 приведены результаты переходных процессов по частоте вращения роторов генераторов при различных изменениях нагрузки в сети с использованием балластных реостатов.

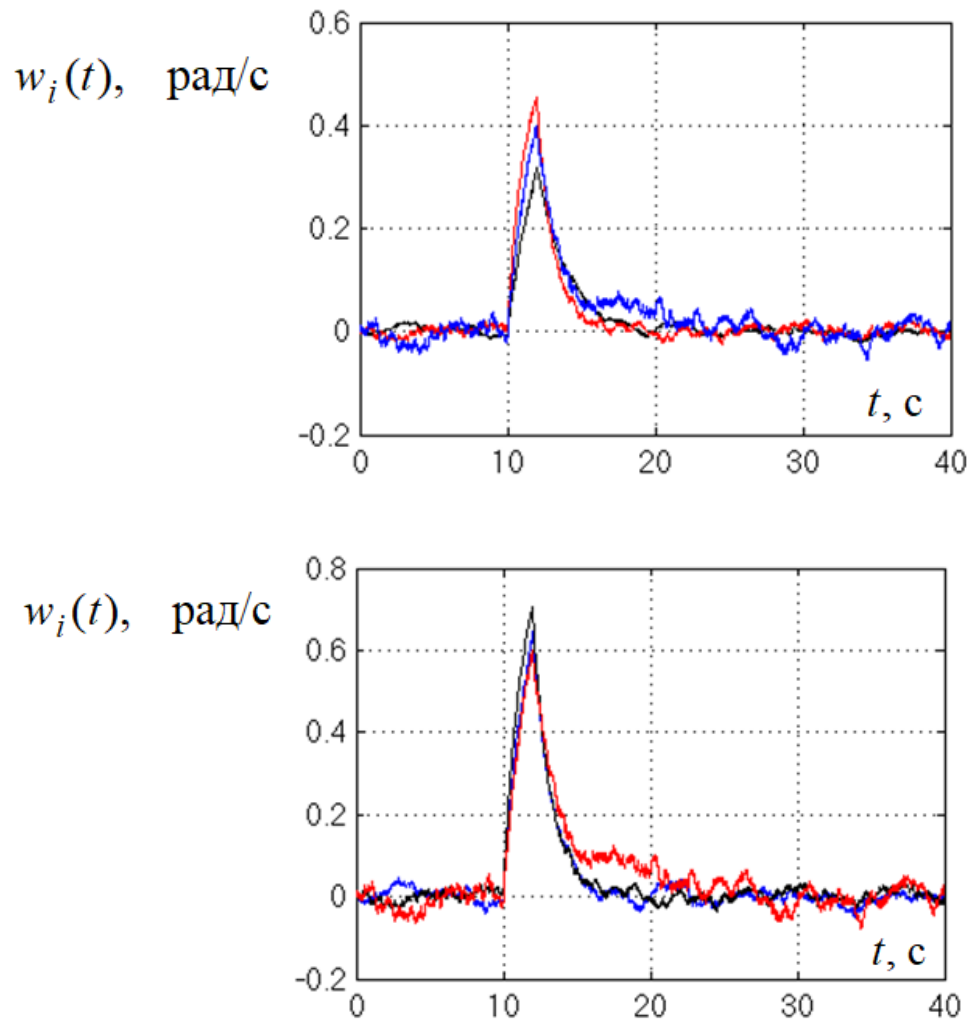


Рисунок 6.10 — Переходные процессы по частоте вращения роторов генераторов при различных изменениях нагрузки в сети.

6.7 Заключение по главе 6

- Синтезированы робастные алгоритмы синхронизации электроэнергетической сети в условиях параметрической неопределенности, высокочастотных помех в измерениях выходной переменной и неизвестном коммуникационном запаздывании.
- Предложенные подходы позволяют независимо управлять качеством фильтрации помехи и качеством ошибки синхронизации электроэнергетической сети.
- Приведены результаты моделирования и эксперимента, иллюстрирующие эффективность разработанного алгоритма.

Заключение

В диссертационной работе решена крупная научная проблема, связанная с разработкой новых методов и алгоритмов управления, гарантирующих заданное качество регулирования в установившемся и переходном режимах в условиях неопределенности. Решены крупные взаимосвязанные задачи, а именно:

1. Разработаны методы и алгоритмы управления, гарантирующие заданное качество регулирования в установившемся режиме.
2. Полученные методы и алгоритмы развиты на задачи с гарантией заданного качества регулирования в любой момент времени.
3. Разработаны методы и алгоритмы управления электроэнергетическими сетями.

При решении задач получены следующие результаты:

1. Синтезированы алгоритмы управления линейными объектами с запаздывающим входным сигналом при наличии внешних возмущений. Первый алгоритм основан на использовании предикторов регулируемой величины и возмущения. Второй алгоритм базируется на

использовании субпредикторов регулируемой величины и возмущения. Показано, что использование принципа компенсации возмущений позволяет существенно уменьшить влияние возмущений на качество переходных процессов по сравнению с методами подавления возмущений. Получены достаточные условия устойчивости замкнутой системы в виде разрешимости ЛМН.

2. Разработан алгоритм управления с обратной связью по выходу с компенсацией возмущений и помех измерения в нелинейных системах с несколькими входами и выходами. Размерность помехи может быть равна размерности выхода объекта, помехи и возмущения независимы, а закон управления имеет только один настраиваемый параметр μ . Достаточные условия, сформулированные в терминах линейных матричных неравенств, обеспечивают устойчивость замкнутой системы. Точность в установившемся режиме зависит от возмущения, одной составляющей помехи и ее первой производной. Численные примеры иллюстрируют эффективность предложенного метода при наличии гладких и случайных помехах и возмущениях.
3. Синтезирован робастный алгоритм управления в условиях параметрической неопределенности, внешних ограниченных возмущений и высокочастотных помех в измерениях выходной переменной. Для синтеза системы управления используются подход, позволяющий независимо управлять качеством фильтрации помехи и качеством ошибки стабилизации выходной переменной. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие эффективность разработанного

алгоритма по сравнению с классическим наблюдателем с большим коэффициентом усиления и наблюдателем с большим коэффициентом усиления в условиях помех измерения.

4. Разработан новый метод управления динамическими системами, позволяющий гарантировать нахождение выходной переменной объекта управления в заданном множестве. Для решения задачи предложена специальная замена координат, позволяющая свести исходную задачу с ограничениями к задаче исследования на устойчивость по вход-состоянию новой расширенной динамической системы без ограничений. Приведены примеры замены координат и алгоритмы управления линейными объектами и динамическими системами с секторной нелинейностью. Полученные результаты сопровождаются моделированием, иллюстрирующим эффективность предложенного метода и подтверждающими аналитические выводы.
5. Далее метод развит на динамические системы с произвольным соотношением числа управлений и выходных сигналов и гарантией их нахождения в заданных множествах. Разработанный метод применяется для решения задач управления по состоянию и по выходу линейными системами с учетом ограничений на сигнал управления и выходные переменные, где размерность регулируемых переменных больше размерности сигнала управления. Устойчивость замкнутой системы и синтез параметров регулятора сформулированы в терминах разрешимости ЛМН.
6. Предложен дискретный по пространственной переменной закон

управления скалярными линейными дифференциальными уравнениями параболического и гиперболического типов с интервально неопределенными параметрами и внешними ограниченными возмущениями. Для синтеза закона управления используется конечный набор измерений выходного сигнала. Закон управления зависит от функции, зависящей от пространственной координаты и текущего измерения. Данная функция позволяет достигать разных свойств, например, обеспечивать пониженные затраты на управление или реализовывать управление близкое к граничному. Доказана экспоненциальная устойчивость замкнутых систем и робастность по отношению к параметрам и внешним возмущениям. Численные примеры моделирования подтвердили результаты расчетов и показали эффективность предложенного алгоритма по сравнению с существующими результатами в том смысле, что при меньших затратах на управление можно достичь выше скорость сходимости решений и качество регулирования в установившемся режиме.

7. Предложен новый метод для исследования экспоненциальной устойчивости автономных динамических систем с использованием нового дивергентного метода. Свойство экспоненциальной устойчивости позволяет повысить устойчивость системы к некоторым видам возмущений и неопределенностей.
8. Достоинством предлагаемого метода является то, что сформулированные необходимые и достаточные условия имеют вид уравнения неразрывности, что широко используется в механике и физике, а так-

же в некоторых промышленных задачах.

9. Предложенные достаточные условия применяются для синтеза закона управления с обратной связью по состоянию. Показано, что закон управления находится как решение дифференциального неравенства, а закон управления, основанный на методе функций Ляпунова, находится как решение алгебраического неравенства.
10. Синтезированы робастные алгоритмы синхронизации электроэнергетической сети в условиях параметрической неопределенности, высокочастотных помех в измерениях выходной переменной и неизвестном коммуникационном запаздывании. Предложенные подходы позволяют независимо управлять качеством фильтрации помехи и качеством ошибки синхронизации электроэнергетической сети. Приведены результаты моделирования и эксперимента, иллюстрирующие эффективность разработанного алгоритма.

Список литературы

1. Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 9. – С. 15–43.
2. Андриевский Б.Р., Бобцов А.А., Фрадков А.Л. Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. – Ижевск: Ин-т компьют. ис-след., 2018.
3. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М: Высш. шк., 2003.
4. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М: Физматлит, 2007.
5. Баландин Д.В., Коган М.М., Метод функций Ляпунова в синтезе законов управления при интегральном и фазовых ограничениях // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Том 45, №. 5, – С. 655–664.
6. Барабанов А.Е. Синтез минимаксных регуляторов. –СПб.: Изд-во С.–Петербурб. университета, 1996. – 222 с.
7. Барабанов А.Е., Граничин О.Н. Оптимальный регулятор линейного

- объекта с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика. – 1984. – № 5. – С. 39–46.
8. Беляев А.Н., Смоловик С.В., Фрадков А.Л., Фуртат И.Б. Робастное управление электрическим генератором при нестационарной механической мощности // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2013. – № 5. – С. 78–86.
 9. Бобцов А.А. Робастное управление по выходу линейной системой с неопределенными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 11. – С. 108–117.
 10. Бобцов А.А. Алгоритм робастного управления в задаче слежения за эталонным сигналом // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 6. – С. 104–113.
 11. Борцов Ю.А., Поляхов Н.Д., Путов В.В. Электро-механические системы с адаптивным и модальным управлением. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1984. – 216 с.
 12. Браммер К., Зиффлинг Г. Детерминированное наблюдение и стохастическая фильтрация. – М: Наука, 1982.
 13. Буков В.Н. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. – Калуга: Изд-во научн. лит-ры. Н.Ф. Бочкаревой, 2006.
 14. Буяхияуй К., Григорьев Л.И., Лаауад Ф., Хелласи А. Оптимальное нечеткое управление для снижения энергопотребления в дистилля-

- ционных колоннах // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 2. – С. 36–45.
15. Ван Ц., Арановский С.В., Бобцов А.А., Пыркин А.А. Компенсация мультисинусоидального возмущения на основе параметризации Юлы–Кучеры // Автоматика и телемеханика/ – 2017. – Vol. 9, – Р. 19–33.
 16. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М: Наука, 1973.
 17. Викторов А.С., Гущин П.А., Фуртат И.Б. Адаптивное управление процессом адсорбции // Башкирский химический журнал. – 2011. – Том 18. – № 4. – С. 152-155.
 18. Граничин О.Н., Фомин В.Н. Адаптивное управление с использованием пробных сигналов // Автоматика и телемеханика. – 1986. – № 2. – С. 100–112.
 19. Граничин О.Н., Фомин В.Н. Метод динамического программирования в задаче минимаксного управления // Вестник Ленингр. ун-та – 1986. – Сер. 1, вып. 1. – С. 26–30.
 20. Граничин О.Н. Построение дискретного субоптимального регулятора непрерывного объекта с нерегулярной ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 3. – С. 86–94.
 21. Гущин П.А., Винокуров В.А., Фуртат И.Б. Робастное управление ректификационной колонной с компенсацией возмущений // Технологии

- нефти и газа. Научно-технологический журнал. – 2011. – № 3. – С. 36-40.
22. Гусев С.В., Лихтарников А.Л. Очерк истории леммы Калмана-Попова-Якубовича и S-процедуры // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 11. – С. 77-121.
23. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М: Наука, 1990.
24. Дорофеев В.В., Макаров А.А. Активно-адаптивная сеть – новое качество ЕЭС России // Энергоэксперт. – 2009. – №. 4. – С. 28–35.
25. Дружинина О.В. Индекс, дивергенция и функции Ляпунова в качественной теории динамических систем. – М: Изд. группа URSS, 2013.
26. Жежеленко И.В. Высшие гармоники в системах электроснабжения промпредприятий. – М: Энергоатомиздат, 1984.
27. Жуков В.П., Об одном методе качественного исследования устойчивости нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 6. – С. 11–15.
28. Жуков В.П., К методу источников для исследования устойчивости нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 3. – С. 12–17.
29. Жуков В.П., Необходимые и достаточные условия неустойчивости нелинейных автономных динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 12. – С. 59–65.

30. Жуков В.П. Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 7. – С. 34–43.
31. Zubov В.И. Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. – М: Высш. шк., 1984.
32. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М: Наука, 1968.
33. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В. Блочный синтез управления механическими системами в условиях неопределенности // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2009. – № 6. – С. 41–54.
34. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В. Блочный синтез систем управления роботами-манипуляторами в условиях неопределенности. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 208 с.
35. Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. Векторные поля на плоскости. М.: Физматлит, 1963.
36. Кузьменко А.А. Нелинейное адаптивное управление турбогенератором // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – №. 1. – С. 112–119
37. Летов А.М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. – М: Физматгиз, 1962.
38. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. –М-Л: ГИТТЛ, 1950.

39. Малкин И. Теория устойчивости движения. – М: Наука, 1966.
40. Никифоров В.О. Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – Р. 69–73.
41. Масина О.Н., Дружинина О.В. Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. – М: ВЦ РАН, 2011.
42. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления. – М: Изд-во МТТУ им. Н.Э. Баумана, под ред. Егупова Н.Д., 2002.
43. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000.
44. Павлов Г.М., Меркурьев Г.В. Автоматика энергосистем.– СПб: Издание Центра подготовки кадров РАО “ЕЭС России”, 2001.
45. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. – М: Наука, 1986.
46. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М: Наука, 2002.
47. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 5. – С. 72–90.

48. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. – М: Ленанд, 2014.
49. Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 6. – С. 18–41.
50. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления, учебное пособие. – М: Ленанд, 2019.
51. Проскурников А.В., Якубович В.А. Универсальные регуляторы в задачах оптимального управления с эталонной моделью при неизвестных внешних сигналах // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2012. – № 2. – С. 49.
52. Пыркин А.А. Адаптивное управление в условиях запаздывания, неполной информации о параметрах и переменных состояния системы. – СПб: Университет ИТМО. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – 347 С.
53. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М: Наука, 1987.
54. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Под ред. А. А. Воронова. – М: Высш. шк., 1986.

55. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. – М: Советское радио, 1970.
56. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том.1. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
57. Фомин В.Н. Методы управления линейными дискретными объектами. –Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 336 с.
58. Фомичев В.В., Ильин А.В., Коровин С.К. Методы робастного обращения динамических систем. – М: Физматлит, 2009.
59. Фракдов А.Л., Синтез адаптивной системы сабилизации линейного динамического объекта // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 12. – С. 96–103.
60. Фрадков А.Л., Фуртат И.Б. Робастное управление сетью электрических генераторов // Автоматика и телемеханика – 2013. – №. 11. – С. 100–113
61. Фуртат И.Б. Исследование устойчивости динамических систем с использованием свойств потока вектора фазовой скорости через замкнутую выпуклую поверхность // Науч.-технич. вестн. информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – Том. 83, №. 1, – С. 23–27.
62. Фуртат И.Б. Робастный статический алгоритм управления линейными объектами // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 3. – С. 94–107.

63. Фуртат И.Б. Алгоритмы скользящей аппроксимации // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2017. – Vol. 18, no. 3, – P. 147–158.
64. Фуртат И.Б. Алгоритм робастного управления линейными объектами с векторными входами-выходами в условиях насыщения сигнала управления // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2016. – Том 17. – С. 579–587.
65. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 4. – С. 121-139.
66. Фуртат И.Б., Гущин П.А., Перегудин А.А. Алгоритм управления по выходу нелинейными системами с компенсацией возмущений и помех измерения // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Том 20, № 1. – С. 3-15.
67. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Алгоритм управления объектами с запаздывающим входным сигналом на базе субпредикторов регулируемой величины и возмущения // Автоматика и телемеханика. – 2019. – № 2. – С. 3-23 (переводная версия Furtat I.B., Gushchin P.A. A Control Algorithm for an Object with Delayed Input Signal Based on Subpredictors of the Controlled Variable and Disturbance // Automation and Remote Control. – 2019. – Vol. 80, no. 2. – P. 201-216).
68. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Алгоритм управления в условиях насыщения сигнала управления и его производных // Управление большими системами. – 2019. – Т. 77. – С. 47-69.

69. Фуртат И.Б., Гущин П.А., Перегудин А.А. Подавление возмущений с минимизацией эллипсоидов, ограничивающих фазовые траектории системы в переходном и установившемся режимах // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – Том 21. – № 4. – С. 195-199. <https://doi.org/10.17587/mau.21.195-199>
70. Фуртат И.Б., Нехороших А.Н., Гущин П.А., Чугина Ю.В. Синхронизация электроэнергетической сети в условиях высокочастотных помех измерения // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – Том 21. – №10. – С. 584-594. <https://doi.org/10.17587/mau.21.584-594>
71. Фуртат И.Б., Нехороших А.Н., Гущин П.А. Робастная стабилизация линейных объектов при наличии возмущений и высокочастотных помех измерения // Управление большими системами. – Выпуск 86. М.: ИПУ РАН, 2020. С.32-54. DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2020.86.2> (переводная версия Furtat I.B., Nekhoroshikh A.N., Gushchin P.A. Robust Stabilization of Linear Plants in the Presence of Disturbances and High-Frequency Measurement Noise // Automation and Remote Control. – 2021. – Vol. 82, No. 7. – P. 1248-1261. <https://doi.org/10.1134/S0005117921070080>)
72. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Дискретное по пространственной переменной управление скалярными линейными распределенными объектами параболического и гиперболического типов // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 3. – С. 77-97 (переводная версия Furtat I.B., Gushchin P.A. Spatially Discrete Control of Scalar Linear Distributed Plants of Parabolic and Hyperbolic Types // Automation

and Remote Control. – 2021. – Vol. 82, no. 3. – P. 433-448.
<https://doi.org/10.1134/S0005117921030048>)

73. Фуртат И.Б., Гущин П.А., Нгуен Ба Хю. Управление динамическими системами при ограничениях на входные и выходные сигналы // Автоматика и телемеханика. – 2023. – № 4. – С. 45-63.
74. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Алгоритм управления нелинейными системами на базе наблюдателей входных и выходных возмущений // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления. – 2019. – Москва, Россия. – С. 269-273.
75. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Алгоритм управления сетевыми системами на базе субпредикторов регулируемой величины и возмущения // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления. – Москва, Россия, 17-20 июня 2019 г. – С. 674-678.
76. И.Б. Фуртат, П.А. Гущин, А.Н. Нехороших, Е.А. Тупичин, С.А. Вражевский, А.А. Перегудин, Ю.В. Чугина. Квантованное по пространственной переменной управление некоторым классом распределенных систем // Материалы докладов XIV Всероссийской мультиконференции по проблемам управления МКПУ-2021, 27 сентября - 02 октября 2021 г., с. Дивноморское, г. Геленджик, Краснодарский край.
77. И.Б. Фуртат, П.А. Гущин, А.Н. Нехороших, Е.А. Тупичин, С.А. Вражевский, А.А. Перегудин, Ю.В. Чугина. Управление динамическими системами с гарантией заданного качества регулирования в любой момент времени // Материалы докладов XIV Всероссийской мульти-

конференции по проблемам управления МКПУ-2021, 27 сентября - 02 октября 2021 г., с. Дивноморское, г. Геленджик, Краснодарский край.

78. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Методы анализа и синтеза линейных и нелинейных систем управления при наличии возмущений и запаздывания. – Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2021. – 194 с.
79. Фуртат И.Б., Чугина Ю.В. Компенсация возмущений в задаче управления сетью электрических генераторов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2016. – № 1. – С. 124–133.
80. Фуртат И.Б., Гущин П.А., Вражевский С.А., Ананьевский М.С., Чугина Ю.В., Плотников С.А. Дискретное управление сетевыми системами с компенсацией возмущений, помех измерения и запаздывания // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2019616562. Дата регистрации: 24.05.2019. Номер и дата поступления заявки: 2019613501 02.04.2019. Дата публикации: 24.05.2019
81. Фуртат И.Б., Гущин П.А., Вражевский С.А. Программа для оптимального управления ректификационной колонной как системой с распределенными параметрами // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2020660760. Дата регистрации: 10.09.2020. Номер и дата поступления заявки: 2020619960 03.09.2020. Дата публикации: 10.09.2020.
82. Фуртат И.Б., Гущин П.А., Ананьевский М.С. Интеллектуальное управ-

ление распределенными системами при использовании цифровых каналов связи // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2021665150. Дата регистрации: 21.09.2021. Номер и дата поступления заявки: 2021664417 15.09.2021. Дата публикации: 21.09.2021

83. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Адаптивно-робастное управление электро-энергетическими сетями через цифровые каналы связи // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2022668536. Дата регистрации: 07.10.2022. Номер и дата поступления заявки: 2022668025 03.10.2022. Дата публикации: 07.10.2022
84. Фуртат И.Б., Гущин П.А., Нехороших А.Н. Программа для оптимального управления системами большой размерности в условиях неопределенностей и возмущений // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2020662771. Дата регистрации: 19.10.2020. Номер и дата поступления заявки: 2020619949 03.09.2020. Дата публикации: 19.10.2020.
85. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Программа для расчета наименьшего количества датчиков и управляющих устройств и их размещение при управлении распределенными системами // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2020660761. Дата регистрации: 10.09.2020. Номер и дата поступления заявки: 2020619958 03.09.2020. Дата публикации: 10.09.2020.

86. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Программа для интеллектуального управления комплексом энергомашин // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2020660734. Дата регистрации: 10.09.2020. Номер и дата поступления заявки: 2020619961 03.09.2020. Дата публикации: 10.09.2020.
87. Фуртат И.Б., Гущин П.А., Ананьевский М.С. Программа для оптимального управления распределенными системами в условиях неопределенностей и возмущений // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2020660718. Дата регистрации: 10.09.2020. Номер и дата поступления заявки: 2020619970 03.09.2020. Дата публикации: 10.09.2020.
88. Фуртат И.Б., Гущин П.А., Вражевский С.А. Интеллектуальное управление процессом ректификации с гарантией заданного качества выходных продуктов // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2021665670. Дата регистрации: 30.09.2021. Номер и дата поступления заявки: 2021664407 15.09.2021. Дата публикации: 30.09.2021.
89. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Интеллектуальное управление электроэнергетической сетью при наличии больших возмущений // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2021665520. Дата регистрации: 28.09.2021. Номер и дата поступления заявки: 2021664406 15.09.2021. Дата публикации: 28.09.2021.

90. Фуртат И.Б., Гущин П.А., Нехороших А.Н. Цифровое управление электроэнергетическими сетями // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2021665151. Дата регистрации: 21.09.2021. Номер и дата поступления заявки: 2021664418 15.09.2021. Дата публикации: 21.09.2021.
91. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Цифровое управление сетевыми системами // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2021665149. Дата регистрации: 21.09.2021. Номер и дата поступления заявки: 2021664416 15.09.2021. Дата публикации: 21.09.2021.
92. Фуртат И.Б., Гущин П.А., Вражевский С.А. Интеллектуальное управление распределенными системами с гарантией заданного качества регулирования в установившемся режиме // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2022668541. Дата регистрации: 07.10.2022. Номер и дата поступления заявки: 2022668024 03.10.2022. Дата публикации: 07.10.2022.
93. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Адаптивно-робастное управление сетевыми системами с гарантией заданного качества регулирования в условиях параметрической неопределенности и внешних возмущений // Государственная регистрация программ для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2022668535. Дата регистрации: 07.10.2022. Номер и дата поступления заявки: 2022668023 03.10.2022. Дата публикации: 07.10.2022.

94. Халил Х.К. Нелинейные системы. – М-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2009.
95. Цыкунов А.М., Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 7. – С. 103–115.
96. Цыкунов А.М. Робастное управление с компенсацией возмущений. – М.: Физматлит, 2012.
97. Цыпкин Я.З. Скользящая аппроксимация и принцип поглощения // Доклады академии наук. – 1997. – Vol. 357, no. 6, – P. 750–751.
98. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. – М.: 1955.
99. Шестаков А.А., Степанов А.Н. Индексные и дивергентные признаки устойчивости особой точки автономной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Том 15, № 4, – P. 650–661.
100. Ahrens J., Khalil K. High-gain observers in the presence of measurement noise: A switched-gain approach // Automatica. – 2009. – Vol. 45, – P. 936–943.
101. Anderson P.M., Fouad A.A. Power system control and stability. – Iowa: Iowa State University Press, 1977.
102. Arnold V.I. Collected Works. Hydrodynamics, Bifurcation Theory, and Algebraic Geometry 1965-1972. – Springer, 2014.

103. Astolfi D., Marconi L., A high-gain nonlinear observer with limited gain power // IEEE Transaction on Automatic Control. – 2015. – Vol. 60, no. 11. – P. 3059–3064.
104. Baillieul J. Feedback Coding for Information-Based Control: Operating Near the Data Rate Limit // Proc. of the 41st IEEE Conf. Decision Control, Las Vegas, Nevada, USA. – 2002. – P. 3229–3236.
105. Barabanov A., Dib W., Lamnabhi-Lagarrigue F., Ortega R., On transient stabilization of multi-machine power systems: a «globally» convergent controller for structure-preserving models Proc. of the 17th World Congress, IFAC, Seoul, 2008. –P. 9398–9403.
106. Barforooshan M., Ostergaard J., Derpich M.S. Interplay between transmission delay, average data rate, and performance in output feedback control over digital communication channels // Proc. of the 2017 American Control Conference (ACC), Seattle, WA, USA, 2017.
107. Bechlioulis C.P., Rovithakis G.A. Robust Adaptive Control of Feedback Linearizable MIMO Nonlinear Systems With Prescribed Performance. IEEE Trans. Autom. Control. – 2008. – Vol. 53, no. 9. – P. 2090–2099.
108. Boizot N., Busvelle E., Gauthier J. An adaptive high-gain observer for nonlinear systems // Automatica. – 2010. – Vol. 46. – P. 1483–1488
109. Bikdash M.U., Layton R.A. An Energy-Based Lyapunov Function for Physical Systems // FAC Proc. – 2000. – Vol. 33, no. 3, – P. 81–86.

110. Brauchli H.I. Index, divergenz und Stabilität in Autonomen equations. – Zürich: Abhandlung Verlag, 1968.
111. Brockett R.W., Liberzon D. Quantized feedback stabilization of linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2000. – Vol. 45, – P. 1279–1289.
112. Bu X., He G., Wei D. A new prescribed performance control approach for uncertain nonlinear dynamic systems via back-stepping. Journal of the Franklin Institute. – 2018. – Vol. 355, no. 17. – P. 8510–8536.
113. Candogan U.O., Ozbay H., Ozaktas H.M. Controller Implementation for a Class of Spatially-varying Distributed Parameter Systems // IFAC Proceedings Volumes (Proc. of the 17th IFAC world congress). – 2008. – Vol. 41, no. 2, – P. 7755–7760.
114. Castañeda Á., Robledo G. Differentiability of Palmer's Linearization Theorem and Converse Result for Density Functions // J. Diff. Equat.. – 2015. – Vol. 259, no. 9, – P. 4634–4650.
115. Chen Y., Liu F., Mei S., Ma J. Toward adaptive robust state estimation based on MCC by using the generalized Gaussian density as kernel functions // Electr. Power Energy Syst.. – 2015. – Vol. 71. – P. 297–304.
116. Cheng M.B., Radisavljevic V., Chang C.C., Lin C.F., Su W.C. A sampled data singularly perturbed boundary control for a diffusion conduction system with noncollocated observation // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2009. – Vol. 54, no. 4, – P. 1345–1369.

117. Curtain R., Zwart H. An introduction to infinite-dimensional linear systems theory. – New York: Springer-Verlag, 1995.
118. Delchamps D.F. Extracting State Information from a Quantized Output Record // System & Control Letters. – 1989. – Vol. 13, – P. 365–372.
119. Demetriou M.A. Guidance of mobile actuator-plus-sensor networks for improved control and estimation of distributed parameter systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2010. – Vol. 55, – P. 1570–1584.
120. Dib W., Ortega R., Hill D. Transient stability enhancement of multi-machine power systems: synchronization via immersion of pendular system // Asian Journal of Control. – 2014 – Vol. 16, no. 1. – P. 50–58
121. Du P., Zhou Q., Liang H. Neural adaptive prescribed performance control for interconnected nonlinear systems with output dead zone // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2019.
122. Dugard L., Verriet E. Stability and Control of Time-delay Systems. – London: Springer, 1997.
123. Engelborghs K., Dambrine M., Rose D. Limitations of a class of stabilization methods for delay systems // IEEE Trans. Autom. Control. – 2001. – Vol. AC-46, no. 2, – P. 336–339.
124. Estrada A., Fridman L., Iriarte R. Combined backstepping and HOSM control design for a class of nonlinear MIMO systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2017. – Vol. 27, no. 4, – P. 566–581.

125. Esfandiari F., Khalil H.K., Output feedback stabilization of fully linearizable systems // International Journal of Control. – 1992. – Vol. 56, no. 5. – C. 1007–1037.
126. Fedele G., Ferrise A. Biased Sinusoidal Disturbance Compensation With Unknown Frequency // IEEE Transaction on Automatic Control. – 2013. – Vol. 58, no. 12. – P. 3207–3212.
127. Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O. Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. – Kluwer: Dordrecht, 1999.
128. Fridman E., A refined input delay approach to sampled-data control // Automatica. – 2010. – Vol. 46, – P. 421–427.
129. Fridman E., Blighovsky A. Robust sampled-data control of a class of semilinear parabolic systems // Automatica. – 2012. – Vol. 48, – P. 826–836.
130. Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems. Analysis and Control. – Birkhauser, 2014.
131. Fronteau J. Le théorème de Liouville et le problème général de la stabilité. – Genève: CERN, 1965.
132. Furtat I.B., Fradkov A.L., Liberzon D. Compensation of disturbances for MIMO systems with quantized output // Automatica. – 2015. – Vol. 60. – P. 239–244.
133. Furtat I., Fridman E., Fradkov A. Disturbance Compensation With Finite

Spectrum Assignment for Plants With Input Delay // IEEE Trans. Autom. Control. – 2018. – Vol. 63, no. 1, – P. 298–305.

134. Furtat I.B., Vrazhevsky S.A., Kremlev A.S., P.A. Gushchin. Robust Control Algorithm under Mismatched Disturbances // Proc. of the 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). – 2017. November 6 - 8, Munich, Germany. – P. 61-66.
135. Furtat I., Gushchin P. Tracking control algorithms for plants with input time-delays based on state and disturbance predictors and sub-predictors // Journal of the Franklin Institute. – 2019. – Vol. 356. – P. 4496–4512.
136. Furtat I.B., Gushchin P.A., Nekhoroshikh A.N., Vrazhevsky S.A., Tarasov M.S., Chugina J.V. Algorithms for Prediction of Smooth Bounded Signals // Proc. of the IEEE 2019 International Conference on Control, Decision and Information Technologies, Paris, France, April 23-26, 2019.
137. Furtat I.B., Gushchin P.A., Nekhoroshikh A.N., Vrazhevsky S.A., Chugina J.V. Modified Backstepping Algorithm for Plants under Mismatched Disturbances and Varying Time-Delay // Proc. of the IEEE 2019 International Conference on Control, Decision and Information Technologies, Paris, France, April 23-26, 2019.
138. Furtat I., Gushchin P., Konovalov D., Vrazhevsky S. Compensation of Mismatched Disturbances for Nonlinear Plants with Distributed Time-delay // Proc. of the 16th International Conference on Informatics

- in Control, Automation and Robotics (INSTICC2019). Prague, Czech Republic, 29-31 July, 2019. – P. 269-275
139. Furtat, I., Tupichin, E., Gushchin, P., Peregudin, A. Control study of multi-machine power systems under variations of mechanical input power and communication delay // *Cybernetics and Physics*. – 2019. – Vol. 8, no. 4. – P. 235-243.
 140. Furtat I., Gushchin P. Control of Dynamical Systems with Given Restrictions on Output Signal with Application to Linear Systems // *Proc. of the 21st International Federation on Automatic Control World Congress (WC IFAC 2020)*, Berlin, Germany, 12-17 July 2020.
 141. Furtat I., Gushchin P. Divergence Conditions for Stability Study of Autonomous Nonlinear Systems // *Proc. of the 21st International Federation on Automatic Control World Congress (WC IFAC 2020)*, Berlin, Germany, 12-17 July 2020.
 142. Furtat I., Gushchin, P., Nekhoroshikh, A., Peregudin, A. Output control of linear time-invariant systems under input and output disturbances // *IFAC-PapersOnLine*. – 2020. – Vol. 53, no. 2. – P. 4534-4539.
 143. Furtat I., Gushchin P. Tracking Control of Nonlinear Systems under Input and Output Disturbances with Applications // *Proc. of the 2020 28th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, 15-18 September 2020, Saint-Raphael, France. DOI: 10.1109/MED48518.2020.9183156

144. Furtat I., Gushchin P. Stability study and control of nonautonomous dynamical systems based on divergence conditions // Journal of the Franklin Institute. – 2020. – Vol. 357, no. 18. – P. 13753-13765. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2020.10.025>
145. Furtat I., Gushchin P. Nonlinear feedback control providing plant output in given set // International Journal of Control. – 2021. <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>
146. Furtat I.B., Gushchin P.A. Stability/Instability Study and Control of Autonomous Dynamical Systems: Divergence Method // IEEE Access. – 2021. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3056942>
147. Furtat I., Gushchin P. Output feedback control with disturbance compensation in nonlinear MIMO systems under measurement noises // Journal of Control and Decision. – 2021. <https://doi.org/10.1080/23307706.2021.1906771>
148. Furtat I.B., Gushchin P.A. Observers of Disturbances and Measurement Noises for Sector-bound Nonlinear System // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1864/1/012026>
149. Furtat I., Gushchin P. Sampled-data in space nonlinear control of scalar semilinear parabolic and hyperbolic systems // Journal of the Franklin Institute. – 2021. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2021.11.010>
150. Furtat I., Nekhoroshikh A., Gushchin P. Synchronization of multi-machine power systems under disturbances and measurement errors // International

- Journal of Adaptive Control and Signal Processing. – 2022. – Vol. 36, no. 6. – P. 1272-1284. <https://doi.org/10.1002/acs.3372>
151. Furtat I.B., Gushchin P.A., Huy N.B. Control of Electrical Generators Based on Low-pass Filter and Artificial Time-delay // IFAC-PapersOnLine. – 2022. – Vol. 55, no. 12. – P. 353–358. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.07.337> (Proc of the Baltic Forum: Neuroscience, Artificial Intelligent and Complex Systems (BF-NAICS 2022), September 14-16, 2022, Kaliningrad, Russia)
152. Furtat I., Gushchin P., Huy N.B. State feedback control with providing inputs and outputs in given sets // Proc. of the 30th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2022, June 28 – July 1, 2022, Athens, Greece. – P. 217-220. <https://doi.org/10.1109/MED54222.2022.9837181>
153. Furtat, I.B. Gushchin P.A. Divergence Method for Exponential Stability Study of Autonomous Dynamical Systems // IEEE Access. – 2022. – Vol. 10. – P. 49088-49094. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3172415>
154. Furtat, I.B., Gushchin, P.A. Divergence Method for Stability Study and Control of Dynamical Systems // Advanced Structured Materials. – 2022. – Vol. 164. – P. 227-235.
155. Furtat, I., Gushchin, P., Huy, N.B. Experimental Study of Robust Control Law Designed for Synchronization of Electrical Generator Network // Proceedings - 6th Scientific School «Dynamics of Complex Networks and their Applications», DCNA 2022, pp. 93-96.

156. Furtat I., Gushchin P. Nonlinear feedback control providing plant output in given set // *Int. J. Control.* – 2022. – Vol. 95, no. 6. – P. 1533-1542, <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>
157. Gordon M., Hill D.J. Global transient stability and voltage regulation for multimachine power systems // *IEEE Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century*, 2008. –P. 1–8.
158. Griffiths D.J. *Introduction to Electrodynamics (4th Edition)*. – Cambridge University Press, 2017.
159. Guckenheimer J., Holmes P. *Collected Works. Hydrodynamics, Bifurcation Theory, and Algebraic Geometry 1965-1972*. – Springer, 2014.
160. Guo G., Hill D.J., Wang Y. Nonlinear output stabilization control for multimachine power systems // *IEEE Trans. Circuit. Syst.* 1. – 2000. – Vol. 58, no. 47. – P. 46–53.
161. Gushchin P., Furtat I., Nekhoroshikh A., Chugina J., Vrazhevsky S., Tarasov M. Control of distillation column under perturbations: A case study // *Cybernetics and Physics*. – 2020. – Vol. 9, no. 4. – P. 182-186.
162. Hagen G., Mezic I. Spillover stabilization in finite-dimensional control and observer design for dissipative evolution equations // *SIAM Journal on Control and Optimization*. – 2003. – Vol. 42, no. 2, – P. 746–768.
163. Hardy G. H., Littlewood J.E., Polya G. *Inequalities*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

164. Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations. – New York: Springer-Verlag, 1993.
165. Ivanov D., Granichin O., Pankov V., Volkovich Z. Design of l_1 new suboptimal fractional delays controller for discrete non-minimum phase system under unknown-but-bounded disturbance // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, no. 1. – P. 69. <https://doi.org/10.3390/math10010069>.
166. Isidori A. Nonlinear Control Systems. Springer, 1995.
167. Karabacak Ö., Wisniewski R., Leth J. On the Almost Global Stability of Invariant Sets // Proc. of the 2018 Eur. Control Conf. (ECC 2018). Limassol, Cyprus. – 2018. – P. 1648–1653.
168. Khapalov A.Y. Continuous observability for parabolic system under observations of discrete type // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1993. – Vol. 38, no. 9, – P. 1388–1391.
169. Kolmanovski V.B., Nosov V.R. Stability of functional differential equations. – New York: Academic Press, 1986.
170. Krasnova S.A., Antipov A.S., Krasnov D.V., Utkin A.V. Cascade Synthesis of Observers of Mixed Variables for Flexible Joint Manipulators Tracking Systems under Parametric and External Disturbances // Electronics. – 2023. – Vol. 12, Iss. 8. – P. 1930 (1–25) <https://www.mdpi.com/2079-9292/12/8/1930>.
171. Krasnov D.V., Utkin A.V. Reduced-Order Observer for Estimating Mixed Variables in Tracking Systems under Unmatched Exogenous Disturbances

- // Differential Equations. – 2020. – Vol. 56, no. 12. – P. 1635–1648 (DOI 10.1134/S0012266120120137).
172. Krstic M. Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems. – Birkhauser, 2009.
 173. Krstic M., Smyshlyaev A. Adaptive boundary control for unstable parabolic PDEs-part I: Lyapunov design // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2008. – Vol. 53, – P. 1575–1591.
 174. Liu X., Gu G., Zhou K. Robust stabilization of MIMO nonlinear systems by backstepping // Automatica. – 1999. – Vol. 35, – P. 987–992.
 175. Liu K., Fridman E., Xia Y. Networked Control Under Communication Constraints: A Time-Delay Approach. – Springer International Publishing, Advances in Delays and Dynamics, 2020.
 176. Logemann H., Rebarber R., Townley S. Generalized sampled-data stabilization of well-posed linear infinite-dimensional systems // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2005. – Vol. 44, no. 4, – P. 1345–1369.
 177. Loizou S.G., Jadbabaie A. Density Functions for Navigation-Function-Based Systems // IEEE Transaction on Automatic Control. – 2008. – Vol. 53, no. 2, – P. 612–617.
 178. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Trans. Autom. Control. – 1979. – Vol. AC-24, no. 53, – P. 541–553.

179. Mazenc F., Niculescu S.-I., Krstić M. Lyapunov-Krasovskii functionals and application to input delay compensation for linear time-invariant systems // Automatica. – 2012. – Vol. 48, – P. 1317–1323.
180. McMahon D. Quantum Mechanics Demystified, 2nd Edition. – McGraw-Hill Education, 2013.
181. Miller D.E., Davison E.J. An Adaptive Controller Which Provides an Arbitrarily Good Transient and Steady-State Response. IEEE Trans. Autom. Control. – 1991. – Vol. 36, no. 1. – P. 68–81.
182. Ming L., Jia Y. Observer-based controller design for networked control systems with sensor quantisation and random communication delay // Journal International Journal of Systems Science. – 2012. – Vol. 43, no. 10. – P. 1901–1912.
183. Mondié S., Dambrine M., Santos O. Approximation of control laws with distributed delays: a necessary condition for stability // Kybernetika. – 2002. – Vol. 38, no. 5, – P. 541–551.
184. Mondié S., Michiels W. Finite Spectrum Assignment of Unstable Time-Delay Systems With a Safe Implementation // IEEE Trans. Autom. Control. – 2003. – Vol. 48, no. 12, – P. 2207–2212.
185. Monzon P., On Necessary Conditions for Almost Global Stability // IEEE Transaction on Automatic Control. – 2003. – Vol. 48, no. 4, – P. 631–634.
186. Najafi M., Hosseinnia S., Sheikholeslam F., Karimadini M. Closed-loop

- control of dead time systems via sequential sub-predictors // International Journal of Control. – 2013. – Vol. 86, no. 4, – P. 599–609.
187. Nekhoroshikh A., Furtat I. Robust Stabilization of Linear Plants under Uncertainties and High-Frequency Measurement Noises // Proc. of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation, Malta, 2017.
 188. Nikiforov V., Gerasimov D. Adaptive Regulation Reference Tracking and Disturbance Rejection. Springer, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 2022.
 189. Pakshin P., Emelianova J., Galkowski K., Rogers E. Iterative learning control under parameter uncertainty and failures // Proc. of the 2012 IEEE International Symposium on Intelligent Control, 2012. – P. 1249–1254.
 190. Emelianova J., Pakshin P., Galkowski K., Rogers E. Vector Lyapunov Function based Stability of a Class of Applications Relevant 2D Nonlinear Systems // Proc. of the 19th IFAC World Congress, Cape Town, South Africa. 23 - 28 Aug 2014.
 191. Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E. Dissipativity and stabilization of nonlinear repetitive processes // Systems & control letters. – 2016. – Vol. 91. – P. 14–20.
 192. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. – New York: Springer-Verlag, 1983.
 193. Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. – Springer Verlag, 1979.

194. Popescu D., Gharbi A., Stefanoiu D., Borne P. Process Control Design for Industrial Applications. – John Wiley and Sons, 2017.
195. Polyak B.T. Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // J. Optim. Theory Appl. – 1998. – Vol. 99. – P. 553-583.
196. Prasov A. Khalil H., A nonlinear high-gain observer for systems with measurement noise in a feedback control framework // IEEE Transaction on Automatic Control. – 2013. – Vol. 58, no. 3. – P. 569–580.
197. Putov V.V., Sheludko V.N., Putov A.V., Stotckaia A.D. Adaptive control system of transport wheels electromechanical braking // International Review of Automatic Control. – 2014. – Vol. 7, no. 5. – P. 492–499.
198. Putov V.V., Sheludko V.N., Kuznetsov A.A., Chernyshev M.A. Adaptive robust control of an uncertain multi-degree-of-freedom elastically deformable electromechanical plant with adaptive compensation for an unknown disturbance
2021 10th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO), 2021. – P. 1-6.
199. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. The compensation of a harmonic perturbation under conditions of a delay in control // J. Comput. Syst. Sci. Int. – 2008. – Vol. 47, no. 4. – P. 513–518.
200. Pyrkin A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Rejection of sinusoidal disturbance of unknown frequency for linear system with input delay // Proc. ACC, Baltimore, MD, Jun. 30–Jul. 2, 2010. – P. 5688-5693.

201. Bobtsov A., Pyrkin A. Cancellation of unknown multiharmonic disturbance for nonlinear plant with input delay // Int. J. Adapt. Control Signal Process. – 2012. – Vol. 26. – P. 302–315.
202. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. Adaptive controller for linear system with input delay and output disturbance // The proc. of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control, Firenze, Italy, 2013. – P. 5577–5582.
203. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. Adaptive Controller for Linear System With Input Delay and Output Disturbance // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2016. – Vol. 61, no. 12. – P. 4229–4234.
204. Rantzer A., Parrilo P.A. On Convexity in Stabilization of Nonlinear Systems // Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control. Sydney, Australia. – 2000. – P. 2942–2946.
205. Rantzer A., A Dual to Lyapunov's Stability Theorem. System & Control Letters. – 2001. – Vol. 42, – C. 161–168.
206. Ray W.H. Advanced Process Control. – New York: McGraw-Hill, 1981.
207. Ruderman M., Krettek J., Hoffmann F., Bertram T. Optimal State Space Control of DC Motor // Proc. of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control, Seoul, Korea. – 2008. – P. 5796–5801.
208. Saleem O., Mahmood-ul-Hasan K. Adaptive State-space Control of Under-actuated Systems Using Error-magnitude Dependent Self-tuning of Cost Weighting-factors // Int. J. Control, Automat. Syst. – 2021. – Vol. 19. – P. 931-941.

209. Sanfelice R., Praly L. On the preformance of highgain observers with gain adaptation under measurement noise // *Automatica*. – 2011 – Vol. 47. – P. 2165–2176
210. Sanz R., Garcia P., Albertos P. Enhanced disturbance rejection for a predictor-based control of LTI systems with input delay // *Automatica*. – 2016. – Vol. 72, – P. 205–208.
211. Selivanov A., Fridman E. Observer-based input-to-state stabilization of networked control systems with large uncertain delays // *Automatica*. – 2016. – Vol. 74, – P. 63–70.
212. Smagina E., Sheintuch M., Using Lyapunov's direct method for wave suppression in reactive systems // *Systems & Control Letters*. – 2006. – Vol. 55, no. 7, – P. 566–572.
213. Smyshlyaev A., Krstic M. On control design for PDEs with spacedependent diffusivity or time-dependent reactivity // *Automatica*. – 2005. – Vol. 41, – P. 1601–1608.
214. Smith J.M. Closer control of loops with dead time // *Chem. Eng. Prog.*. – 1959, no. 53, – P. 2217–219.
215. Spong M., Corke P., Lozano R. Nonlinear control of the reaction wheel pendulum // *Automatica*. – 2001. Vol. 37. – P. 1845-1851.
216. Sun W., Su S.F., Xia J., Wu Y. Adaptive tracking control of wheeled inverted pendulums with periodic disturbances // *IEEE Trans. Cybernetics*. – 2020. – Vol. 50, no. 5. – P. 1867-1876.

217. Tao G. Adaptive Control Design and Analysis. John Wiley & Sons, 2003.
218. Tao G., Kokotovic P.V. Adaptive control of systems with actuator and sensor nonlinearities. – New York: Wiley, 1996.
219. Wang L., Astolfi D., Hongye S., Marconi L., Isidori A. Output stabilization for a class of nonlinear systems via high-gain observer with limited gain power // Proc. 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems, MICNON 2015, Saint Petersburg, Russia. IFAC-PapersOnLine. – 2015. – Vol. 48, no. 11. – P. 730–735.
220. Wang X., Lemmon M.D. Self-triggered feedback control systems with finite-gain L_2 stability // IEEE Trans. Autom. Control. – 2009. – Vol. 54, no. 3, – P. 452–467.
221. Whidborne J.F., Amar N. Computing the Maximum Transient Energy Growth // BIT Numerical Math. – 2011. – Vol. 51, no. 2. – P. 447–557.
222. Willems J.C. Dissipative Dynamical Systems. Part I: General Theory. Part II: Linear Systems with Quadratic Supply Rates // Arch. Rational Mech. Anal. – 1972. – Vol. 45, no. 5, – P. 321–393.
223. Van Assche V., Dambrine M., Lafay J.F., Richard J.P. Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws // Proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control, Phoenix.
224. Xiao S.-P., Lian H.-H., Teo K.L., Zeng H.-B., Zhang X.-H. A new Lyapunov functional approach to sampled-data synchronization control for delayed

- neural networks // Journal of the Franklin Institute. – 2018. – DOI: 10.1016/j.jfranklin.2018.09.022. – 1999.
225. Yakubovich V. S-procedure in nonlinear control theory // Vestn. Leningr. Univ. – 1971. – No. 1.– P. 62-77.
 226. Yan J., Xia Y., Wen C. Quantized stabilization of switched systems with switching delays and packet loss // Journal of the Franklin Institute. – 2018. – Vol. 355, no. 13. – P. 5351–5366.
 227. Yin Z., Luo J., Wei C. Robust Prescribed Performance Control for Euler-Lagrange Systems with Practically Finite-Time Stability // European Journal of Control. – 2020. – Vol. 52. – P. 1–10.
 228. Yuan R., Ma Y.-A., Yuan B., Ao P. Lyapunov Function as Potential Function: A Dynamical Equivalence // Chin. Phys. B.. – 2014. – Vol. 23, no. 1, – P. 010505.
 229. Zaremba S.K. Divergence of Vector Fields and Differential Equations // Amer. J. Math. – 1954. – Vol. LXXV. – P. 220–234.
 230. Zhang D., Han Q.-L., Jia X. Network-based output tracking control for T-S fuzzy systems using an event-triggered communication scheme // Fuzzy Sets and Systems. – 2015. – Vol. 273. – P. 26–48.
 231. Zhang X.-M., Han Q.-L., Ge X., Ding D. An overview of recent developments in Lyapunov-Krasovskii functionals and stability criteria for recurrent neural networks with time-varying delays // Neurocomputing. – 2018. – Vol .313. –P. 392–401.

232. Zhang B.-L., Han Q.-L., Zhang X.-M., Yu X. Sliding Mode Control With Mixed Current and Delayed States for Offshore Steel Jacket Platforms // IEEE Trans. Control Systems Technology. – 2014. – Vol. 24. –P. 1769–1783.
233. Zhang B.L., Han Q.L., Zhang X.M. Recent advances in vibration control of offshore platforms // Nonlinear Dynamics. – 2017. – Vol. 89. – P. 755–771.
234. Zhang Y., Wang Q., Dong C., Jiang Y. H_{∞} output tracking control for flight control systems with time-varying delay // Chinese Journal of Aeronautics. – 2013. – Vol. 26, no. 5. – P. 1251–1258.
235. Zheng B.-C., Yang G.-H. Quantized output feedback stabilization of uncertain systems with input nonlinearities via sliding mode control // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2012. – Vol. 24, no. 2, – P. 228–246.
236. Jiang Z., Shen X., Wang H. Throughput of underwater acoustic networks with significant multipath delays // Journal of the Franklin Institute. – 2018. – Vol. 355, no. 10. – P. 4473–4492.
237. 10-Machine New-England Power System IEEE benchmark:
<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/54771-10-machine-new-england-power-system-ieee-benchmark>