Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем машиноведения
Российской академии наук

На правах рукописи

Грекова Елена Федоровна

Динамика редуцированных сред Коссера и гироконтинуумов

1.1.8 — механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2023

Оглавление

Введение **9**

1 Аналитический обзор. **19**

1.1 Модели акустических метаматериалов. 20

1.2 Микрополярные среды без больших скоростей вращения. 30

1.2.1 Необходимость модификации микрополярной теории для описания зернистых и блоковых сред. Первые работы по редуцированной среде Коссера. 31

1.2.2 Роль поворотных степеней свободы в динамических процессах и перестройке структуры геосред и сыпучих материалов. Наличие запрещенных зон. 33

1.2.3 Анизотропия геосред и консолидированных сыпучих материалов. 37

1.2.4 Вязкоупругие микрополярные среды. 39

1.3 Среда Кельвина. 41

1.4 Выводы и постановка задачи. 44

2 Линейный редуцированный сложный континуум как акустический метаматериал. **47**

2.1 Уравнения Лагранжа линейной упругой редуцированной среды. 50

2.2 Дисперсионные соотношения линейной упругой редуцированной анизотропной среды. 53
2.2.1 Запрещенная зона для плоских волн при взаимосвязи «деформация несущего континуума – координата динамического гасителя». 54
2.2.2 Запрещенная зона для плоских волн при взаимосвязи между обобщенными координатами несущего континуума и динамического гасителя. 56
2.3 Дисперсионные соотношения изотропной линейной упругой редуцированной среды для случая трехмерных субконтинуумов. . 57
2.3.1 Уравнения Кристоффеля и продольная волна для изотропного материала. 57
2.3.2 Поперечные плоские волны при взаимосвязи «деформация несущего континуума – координата динамического гасителя». 63
2.3.3 Запрещенная зона для плоских волн при взаимосвязи между обобщенными координатами несущего континуума и динамического гасителя. 65
2.3.4 Фазовая скорость. 66
2.4 Дисперсионные соотношения гиротропного линейного упругого редуцированного материала для случая трехмерных субконтинуумов с комбинированной взаимосвязью. 67
2.5 Редуцированные упругие континуумы с поворотными степенями свободы. Примеры. 72

2.5.1 Линейная редуцированная среда Коссера — единожды отрицательный акустический метаматериал с взаимосвязью «деформация несущего континуума – координата динамического гасителя». 72
2.5.2 Биротационный материал с анизотропной перевязкой между деформацией несущего континуума и координатой динамического гасителя. 76
2.5.3 Биротационный изотропный материал — единожды отрицательный акустический метаматериал с взаимосвязью между обобщенными координатами несущего континуума и динамического гасителя. 77
2.6 Уравнения Лагранжа линейной вязкоупругой редуцированной среды. 80
2.7 Уравнение Кристоффеля для вязкоупругой линейной редуцированной среды. 82
2.8 Уравнение Кристоффеля для линейных вязкоупругих изотропной и гиротропной редуцированных сред. 84
2.9 Изотропная линейная вязкоупругая редуцированная среда. Примеры. 86
2.9.1 Редуцированная линейная вязкоупругая среда Коссера. . 87
2.9.2 Биротационный материал. 89
2.10 Продольная волна в линейной изотропной вязкоупругой редуцированной среде. 98
2.10.1 Дисперсионное соотношение. 98
2.10.2 Вязкость в упругом основании несущего континуума. . . 99
2.10.3 Вязкость в материале несущего континуума. 105

2.10.4 Вязкость в упругом основании распределенного динамического гасителя. 111
2.11 Поперечная волна в линейной вязкоупругой изотропной редуцированной среде. Случай взаимосвязи между обобщенными координатами гасителя и несущего континуума. 117
2.12 Поперечная волна в линейной вязкоупругой изотропной редуцированной среде. Взаимосвязь между векторной обобщенной координатой гасителя и деформацией несущего континуума. . . 118
2.12.1 Вязкость в упругом основании несущего континуума. . . 118
2.12.2 Вязкость в материале несущего континуума. 120
2.12.3 Вязкость в перевязочном члене. 124
2.12.4 Вязкость в упругом основании несущего континуума. . . 127
2.13 Гармонические волны в линейной вязкоупругой гиротропной редуцированной среде с комбинированным типом взаимосвязи субконтинуумов. 129
2.14 Заключение. 131

3 Редуцированная среда Коссера. 137
3.1 Основные уравнения упругой редуцированной среды Коссера. . 143
3.1.1 Нелинейная редуцированная среда Коссера. 143
3.1.2 Основные уравнения. 144
3.1.3 Линеаризация основных уравнений вблизи нелинейного равновесия. 146
3.1.4 Линеаризация вблизи состояния всестороннего растяжения – сжатия для изотропного однородного материала. . 151
3.1.5 Линеаризация вблизи трансверсально-изотропного напряженного состояния для изотропной среды. 153

3.1.6 Линейная редуцированная среда Коссера. 154
3.1.7 Уравнения вблизи натурального состояния. 154
3.1.8 Изотропный материал. 159
3.1.9 Материал с перевязкой между трансляционными и поворотными деформациями. 160
3.1.10 Редуцированная псевдосреда Коссера. Основные уравнения. 162
3.2 Распространение волн в линейной упругой редуцированной среде Коссера. 167
3.2.1 Скрытые движения: влияние поворотных степеней свободы на динамику трансляционных. 167
3.2.2 Изотропный материал с шаровым тензором инерции тел-точек. 174
3.2.3 Материал с трансверсально-изотропной перевязкой деформации сдвига-вращения и объемной деформации с шаровым тензором инерции тел-точек. 191
3.2.4 Материал с трансверсально-изотропной перевязкой деформации сдвига-вращения и трансляционной деформации с шаровым тензором инерции тел-точек. Особые направления распространения волн. 214
3.2.5 Изотропный материал с трансверсально-изотропным тензором инерции тел-точек. 220
3.2.6 Плоские волны в редуцированной упругой псевдосреде Коссера. 224
3.3 Волновые процессы и устойчивость в упругой редуцированной среде Коссера вблизи нелинейного напряженного состояния. . . 231

3.3.1 Изотропный материал вблизи состояния всестороннего растяжения – сжатия. 231
3.3.2 Изотропный материал вблизи трансверсально-изотропного напряженного состояния. 239
3.4 Редуцированные среды Коссера с неупругими определяющими соотношениями или под действием неупругих нагрузок. 244
3.4.1 Изотропная упругая редуцированная среда Коссера под действием вязкоупругого следящего момента. 245
3.4.2 Вязкоупругая изотропная линейная редуцированная среда Коссера. 265
3.4.3 Вязкоупругая изотропная редуцированная среда Коссера со стесненным вращением. 288
3.4.4 Пластическая редуцированная среда Коссера. 300
3.5 Эксперимент по прохождению ультразвуковой волны в когезивных порошках. 302
3.5.1 Экспериментальная установка. 302
3.5.2 Модель Кельвина – Фойгта. 305
3.5.3 Модель Максвелла. 306
3.5.4 Взаимодействие твердой и газообразной фаз. 308
3.5.5 Модель Гусева – Алешина – Турна. 309
3.5.6 Влияние внутренних степеней свободы: модели редуцированных континуумов. 311
3.6 Заключение. 318

4 Уравнения упругих гироконтинуумов. 321

4.1 Неоднородная среда Кельвина. 322

4.2 Динамика простейших упругих редуцированных среды Кельвина и гироконтинуума. 326
4.2.1 Основные уравнения простейших редуцированных среды Кельвина и гиростатической среды. 328
4.2.2 Динамика под действием внешнего объемного следящего момента при отсутствии внешней объемной силы. 334
4.2.3 Режим регулярной прецессии. 336
4.2.4 Гармонические волны сдвига–вращения. Уравнение Кристоффеля. 337
4.2.5 Распространение волн ортогонально начальному спину. 339
4.2.6 Распространение волн вдоль начального спина. 343
4.2.7 Распространение волн в произвольном направлении. . . 347
4.3 Заключение. 349

Заключение **353**

Введение.

В диссертации рассмотрены континуумы сложной структуры, условно представимые в виде «несущего континуума», оснащенного в каждой точке «распределенным динамическим гасителем», от деформации которого не зависит упругая энергия среды. Эти два субконтинуума могут иметь различную природу. Показано, что данные среды, названные редуцированными, в линейном случае могут служить моделью акустических метаматериалов. Подробно рассмотрены такие среды с вращательными степенями свободы — редуцированная среда Коссера и редуцированная среда Кельвина.

Под акустическими метаматериалами в работе понимаются среды с эффективными отрицательными параметрами (плотностью и/или некоторым модулем упругости) с точки зрения распространения волн. Это явление имеет место в определенной частотной области. Если и упругие, и инерционные эффективные частотно-зависимые параметры отрицательны, такой акустический метаматериал называется дважды отрицательным. Он обладает аномальным преломлением в данной зоне частот, что в терминах дисперсионных соотношений соответствует падающему участку дисперсионной кривой. Если только один из эффективных частотно-зависимых параметров отрицателен, то это единожды отрицательный акустический метаматериал, и график дисперсионных соотношений соответствующей гармонической волны имеет запрещенную зону. Акустические метаматериалы являются, как пра-

вило, искусственными композитами, чей характерный размер микроструктурного элемента намного меньше длины волны их рабочего режима. Такие среды используют, например, для управления фронтами волн, потоками энергии, фокусировки звука, защиты от разрушительных вибраций, звукоизоляции или для акустической маскировки объектов.

Среда Коссера, или микрополярная среда, представляет собой континуум, тела-точки которого обладают трансляционными и поворотными степенями свободы. Последние становятся важны на мезоуровне во многих сложных средах, например, зернистых материалах, композитах, жидких кристаллах, магнитоупругих средах. Среда Кельвина — особый вид среды Коссера, частицы которой обладают осевой симметрией и быстро вращаются вокруг своих осей, не вызывая напряжений. В динамическом члене баланса моментов среды Кельвина превалирует гироскопическая сила. Существует аналогия между уравнениями среды Кельвина и уравнениями упругих магнитных материалов. Различные варианты редуцированной среды Коссера предложены соискателем для описания зернистых и консолидированных сыпучих сред, сред с жесткими включениями, блоковых сред и других сред с неупорядоченной структурой поворотов. Модель редуцированной среды Кельвина может быть применима для акустических метаматериалов с гироскопическими элементами и магнитострикционных сред со слабым обменным взаимодействием.

Структура работы. Первая глава посвящена аналитическому обзору литературы (разделы 1.1–1.3) и постановке задачи (раздел 1.4). Целью диссертационной работы является развитие теории континуумов сложной структуры, в том числе с поворотными степенями свободы, обладающих свойствами акустических метаматериалов, при помощи феноменологических методов механики сплошной среды.

Были поставлены следующие **задачи диссертационной работы**:

1. Предложить новый класс континуумов, демонстрирующих свойства акустических метаматериалов, в том числе континуумов с поворотными степенями свободы.

2. Исследовать влияние параметров континуума (свойств симметрии, упругих, диссипативных и инерционных констант) на свойства дисперсионных соотношений метаматериала для различных типов волн.

3. Предложить континуальные модели с поворотными степенями свободы для зернистых, блоковых, консолидированных сыпучих сред и композитов с жесткими включениями, в которых нет упорядоченной структуры поворотов, обладающие свойствами акустических метаматериалов, в том числе учитывающие нелинейность, произвольные внешние нагрузки, локальную и иную анизотропию, диссипацию.

4. Найти особенности динамики и устойчивости данных сред.

5. Найти зависимость волновых свойств этих континуумов от диссипативных параметров и параметров анизотропии, предварительного напряженного состояния.

6. Предложить модели среды Кельвина или иного гироконтинуума, обладающие свойствами акустических метаматериалов. Исследовать влияние параметров континуума на дисперсионные соотношения и возможность управления рабочими зонами метаматериала при помощи внешней нагрузки.

Вторая глава посвящена решению задач 1,2. В ней введено понятие редуцированной среды и рассмотрены общие закономерности поведения линей-

ных упругих и вязкоупругих редуцированных сред произвольной природы без конечного динамического спина. Показано, что при некоторых условиях континуумы данного класса могут служить моделями акустических метаматериалов. Исследовано влияние характеристик континуума (свойств симметрии, взаимосвязи субконтинуумов и наличия вязкости) на рабочие зоны метаматериала. Показано, как можно менять тип метаматериала, управляя взаимосвязью субконтинуумов или при помощи внешнего воздействия. Наиболее важным параметром, позволяющим изменять тип акустического метаматериала, оказывается взаимосвязь «деформация несущего континуума — координата динамического гасителя», или она же в сочетании со связью обеих обобщенных координат, когда симметрия разрешает оба типа взаимосвязи. Особое внимание уделено влиянию диссипации на поглощение волны в запрещенных зонах, соответствующих упругому материалу, которое может заключаться в улучшении или ухудшении прохождения волны в зависимости от типа диссипации и частот.

Третья глава посвящена решению задач 3–5.

В ней рассмотрены редуцированные среды Коссера различного типа. В роли несущего континуума выступают трансляционные степени свободы, в роли динамического гасителя — поворотные. По сравнению со второй главой рассмотрен более широкий круг явлений: нелинейные среды, устойчивость по отношению к всестороннему растяжению и сжатию, особенности волны Рэлея, реакция упругой изотропной среды на сосредоточенную гармоническую нагрузку, которая свидетельствует о локализации части решения для определенного диапазона частот. В первой части получены уравнения для различных редуцированных упругих сред Коссера и проведена их линеаризация для различных вариантов симметрии среды и предварительного напряженного состояния. Во второй части главы исследуется устойчивость и волновые

процессы в данных редуцированных средах Коссера. Получены и исследованы аналитически дисперсионные соотношения для различных типов сред, в частности, с анизотропной перевязкой между разными типами деформации, со стесненным вращением, с диссипацией. Получение дисперсионных соотношений представляет собой в этих случаях отдельную непростую задачу. Исследовано асимптотическое поведение для малого параметра диссипации и вблизи характеристических частот. Показано, что для определенных типов волн данные среды являются акустическими метаматериалами, рабочими зонами которых можно управлять при помощи предварительного напряженного состояния или внешнего воздействия. Обнаружен новый механизм неустойчивости материала, возникающей при всестороннем растяжении, для большого класса редуцированных сред Коссера с выпуклой энергией, отсутствующий в классических средах. Этот результат соответствует известному факту о течении зернистых сред при растяжении. Дана интерпретация экспериментов по распространению ультразвука в когезивном порошке, проведенных при участии соискателя, в терминах редуцированной среды Коссера.

Четвертая глава посвящена решению задачи 6. В ней предложены нелинейная и линейная модели редуцированной среды Кельвина — гироконтинуума, частицы которого вращаются с большой скоростью вокруг своих осей, при этом не вызывая напряжений в среде, и модель редуцированной среды из контейнеров с гиростатами. В обеих средах градиент осей тел-точек не вызывает напряжений. Существует аналогия между средой Кельвина и магнитоупругими материалами. Уравнения данных сред не укладываются в общую схему, обсуждаемую во второй главе, в силу важных отличий в динамическом члене баланса моментов и особенностей определяющих уравнений. Исследованы плоские волны для простейшего вида данных редуцированных гироконтинуумов в линейном приближении. Для большинства направлений распро-

странения волны обладают эллиптической частотно-зависимой поляризацией, дисперсионные соотношения весьма сложны. Обе среды оказываются акустическими метаматериалами для волн сдвига, поляризованных противоположно собственному вращению тел-точек (то есть при условии, что скорость вращения вектора перемещения распространяющейся волны при скалярном умножении на угловую скорость собственного вращения тел-точек дает отрицательную величину). При помощи внешнего следящего момента оказывается возможным изменять рабочую зону и тип акустического метаматериала.

В **заключении** перечислены основные результаты работы. Все результаты являются **новыми и актуальными**, получены автором самостоятельно.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Введено понятие и развита теория упругих редуцированных сред типа «несущий континуум + распределенный динамический гаситель», упругая энергия которых не зависит от градиента обобщенной координаты гасителя. Показано, что линейные упругие редуцированные среды являются акустическими метаматериалами вне зависимости от природы своих степеней свободы, то есть их дисперсионные кривые обладают запрещенными зонами или падающими участками.

2. Показано, как, управляя взаимосвязью субконтинуумов или внешним следящим воздействием, можно изменять рабочие зоны метаматериала и их тип. Наиболее эффективно управлять волновыми свойствами изотропного материала позволяет взаимосвязь «градиент координаты несущего континуума – координата динамического гасителя», а гиротропного — она же в сочетании со взаимосвязью обеих координат.

3. Добавление линейной диссипации к упругим связям редуцированной сре-

ды обеспечивает существование бегущей затухающей волны почти на всех частотах. Малая диссипация почти всегда способствует уменьшению поглощения волны в запрещенной зоне и превращает ее часть в падающий участок — рабочую зону дважды отрицательного акустического метаматериала.

4. Предложены различные модели редуцированных сред Коссера. Показано, что при линейных колебаниях они являются акустическими метаматериалами, рабочими зонами которых можно управлять при помощи нелинейного напряженно-деформированного состояния, малой диссипации и внешнего следящего момента.

5. Для сосредоточенных гармонических нагрузок в неограниченной изотропной упругой линейной редуцированной среде Коссера получена функция Грина, вид которой свидетельствует о возможности резонансных или локализованных вблизи источника решений.

6. Найден новый механизм неустойчивости нелинейных изотропных упругих сред Коссера с выпуклой энергией деформации при большом всестороннем растяжении, отсутствующий у классических сред.

7. Предложены модели простейшей редуцированной среды Кельвина, имеющей аналогию с магнитоупругими материалами, и простейшей гиростатической среды. Показано, что обе среды являются акустическими метаматериалами, рабочую зону и тип которых можно менять при помощи внешнего следящего момента.

Результаты 1–3 получены в главе 2, результаты 4–6 в главе 3, результат 7 в главе 4.

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в представлении нового направления — теории редуцированных сложных сред, которая открывает возможности к поиску и разработке умных акустических метаматериалов различной природы. Редуцированные среды Коссера могут служить в качестве моделей для различных сред с неупорядоченной структурой поворотов (геосреда, среды блоковой и зернистой структуры, композиты с включениями и др.), в ротационной сейсмологии. Результаты, полученные в рамках данных моделей, перспективны с точки зрения сейсморазведки. Редуцированные гироконтинуумы применимы в качестве модели для акустических материалов с гироскопическими элементами, разрабатываемых в последние годы для управления волновыми фронтами. Также они могут служить моделью для магнитострикционных сред со слабым обменным взаимодействием, например, для материалов, созданных на основе терфенола-D.

Метод исследования основан на применении фундаментальных законов баланса механики, принципа материальной объективности, тензорной алгебры и анализа, асимптотических разложений, дисперсионного анализа. При построении нелинейной модели редуцированной среды Коссера используется закон баланса энергии в форме Жилина.

Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается корректным использованием математических методов и фундаментальных законов механики, подтверждается сравнением аналитических и численных результатов, качественным совпадением эффектов, предсказанных теорией, с реальными и численными динамическими экспериментами для композитов с включениями и сыпучих сред.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались более чем на 50 международных конференци-

ях в России и за рубежом, были представлены на семинарах ИПМаш РАН, СПбПУ Петра Великого, рабочих встречах исследовательской группы Shell E.&P. и Санкт-Петербургского научного кластера, семинаре исследовательской группы университета Севильи «Электродинамика и механика когезивных сыпучих сред», семинаре под руководством Ж.А. Можена лаборатории «Моделирование в механике» (университет Пьера и Марии Кюри), семинаре лаборатории Навье (университет Густава Эйфеля, Национальная школа мостов и французский Национальный центр научных исследований), семинаре лаборатории Школы машиностроения и электротехники (Технологический институт Харбина).

По теме диссертации соискатель работала в рамках следующих проектов:

- Совместный проект компании Шелл (Shell E.&P.) и РАН «Волны в сложных средах» (2003–2006), руководителем которого с российской стороны являлась соискатель.

- «Мелкодисперсный порошок как нелинейная полярная среда: межчастичное взаимодействие и континуальная теория», персональный грант РАН для молодых ученых N 95 (2000–2002);

- «Нелинейные упругие полярные среды: аналогии и выбор тензоров деформации», персональный грант фонда «Молодые ученые России», 2001

- «Электрогидродинамика суспензий и реология когезивных сыпучих сред», грант правительства Андалузии в категории «выдающиеся проекты», 2006–2009 (исполнитель);

- три гранта правительства Испании, посвященных механике и физике сыпучих и текучих сред (2007–2011, 2011–2014, 2014–2018, участник);

- два гранта РФФИ (1999–2001, 2017–2019, участник).

Работа выполнена при поддержке Правительства Российской Федерации (госзадание «FSEG-2020-0021»).

Результаты работы **опубликованы в 28 работах, индексируемых в Scopus** и/или Web of Science, из них 9 работ в квартиле Q1, 4 работы в квартиле Q2 по рейтингу Scimago. Опубликованные работы достаточно полно отражают содержание диссертации и полученные результаты. Работы [99–109, 285, 286] написаны без соавторов. В работе [57] автору принадлежит постановка задачи и вывод нелинейных определяющих уравнений редуцированной среды Кельвина, в работах [110, 112, 113, 115, 116] — аналитические результаты, в работе [90] — аналитическая часть тестовой задачи, в работах [116, 206] — постановка задачи, асимптотика для вещественной части волнового числа, в работе [212] — частичный анализ решения в континуальном приближении, в работе [61] — идея экспериментальной установки для воспроизводимого измерения динамических свойств когезивного порошка, анализ отличия роли магнитного поля во время процесса упаковки и при применении к созданной упаковке, в работе [114] — аналитическая часть решения для безграничной редуцированной среды Коссера и характеристика дисперсионных кривых волны Рэлея, в работах [144, 300] — изучение асимптотических свойств дисперсионных кривых волны Рэлея в редуцированной среде Коссера, в работе [126] — уравнения динамики пластической редуцированной среды Коссера. В совместных работах анализ результатов производился в сотрудничестве с соавторами.

Глава 1

Аналитический обзор.

Современная механика сплошных сред часто использует в качестве тела-точки (частицы) континуума не материальную точку, как в ньютоновской механике, а более сложный бесконечно малый объект, обладающий дополнительными степенями свободы: вращательными, деформационными и другими. Подобные модели необходимы в междисциплинарных областях науки: биомеханике, теории электромагнитных сплошных сред [72–74, 78, 293], а также для описания современных материалов, чья микроструктура играет роль в динамических процессах — жидких кристаллов, зернистых сред, различных композитов, в том числе акустических метаматериалов, многофазных сред [84, 97, 273, 289]. Микроструктура материала играет важную роль в процессах динамического разрушения, например, наличие пор, не соединенных между собой [280], при их достаточном количестве обеспечивает новый механизм разрушения образца, приводя к его асимметричному повреждению. По-видимому, энергия волны при этом локализуется на разделенных основным материалом неоднородностях. Возможно, аналогичные процессы, связанные с микроструктурными степенями свободы, ответственны за динамическое разрушение, характеризуемое инкубационным временем, концепция

которого развита в работах [59, 187, 205, 313] и др.

Природа сложных сред может быть различной. Нередко в таких средах существенны вращательные степени свободы [12, 73, 78, 204, 214, 226, 292].

1.1 Модели акустических метаматериалов.

Важным примером сред с микроструктурой являются акустические метаматериалы. Это материалы с эффективными отрицательными упругими и/или инерционными характеристиками в определенной зоне частот, обладающие необычными волновыми свойствами или демонстрирующие парадоксальную реакцию на квазистатическую деформацию: они могут иметь отрицательный коэффициент Пуассона или расширяться в ответ на сжимающую нагрузку [53, 79, 193].

В. Веселаго в работе [281] исследовал волновые свойства электромагнитного материала с отрицательными магнитной и диэлектрической проницаемостью. В таких материалах возникали запрещенные зоны частот и зоны, где фазовая скорость была направлена противоположно групповой. Данная работа рассматривалась как сугубо теоретическое упражнение, приложения которого на практике невозможны, до тех пор, пока не были созданы электромагнитные метаматериалы с резонаторами, чьи эффективные характеристики в определенных областях частот обладали подобными свойствами [85, 86, 165]. Одна из первых работ по акустическим метаматериалам принадлежит Кушвахе, Халеви, Добжиньскому и Джафари-Рухани (1993) [5], где аналогичное волновое поведение было теоретически предсказано для некоторых упругих композитов периодической структуры. В дальнейшем такие материалы стали создаваться на практике [247, 262–264], их создание и исследование стало актуальным направлением [47, 54].

Одна из первых экспериментальных работ на эту тему — исследование Лиу и соавторов [159], которые исследовали прохождение звукового сигнала через кубический образец с длиной ребра около 15 см, состоящий из свинцовых шаров радиусом 5 мм в упругой силиконовой оболочке, помещенных в матрицу из эпоксидной смолы. Для такого образца в интервале частот от 0.3 кГц до 2 кГц существуют зоны, где прохождение сигнала резко ухудшается. Эта область исследований была развита во многих работах. В литературе термин «акустический метаматериал» употребляется в разных смыслах. Некоторые авторы, как видно из обзора [155] и работ [44, 53, 201], называют акустическими метаматериалами среды, парадоксально реагирующие на статическую нагрузку, например, ауксетики — материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона. Способность таких материалов к поглощению энергии используется, например, для защиты от ударных воздействий [323]. Часть ауксетиков при динамической нагрузке может при этом демонстрировать наличие запрещенных зон или зон аномального преломления, а часть — нет. Это связано с тем, что существование объемной волны налагает более мягкое условие на упругие модули, чем условие положительности квадратичной формы энергии деформации. Существуют материалы, в которых объемная и сдвиговая волны в безграничной среде распространяются и не приводят к неустойчивости ($(\lambda + 2\mu)/\rho > 0,\ \mu/\rho > 0$, где λ, μ — параметры Ламе, ρ — плотность среды), но коэффициент Пуассона $\nu = (2(1+\mu/\lambda))^{-1}$ отрицателен. Это происходит при $-2\mu < \lambda < -\mu$. Существуют материалы, которые являются устойчивыми по отношению к малым продольным колебаниям, однако расширяются при всестороннем сжатии, поскольку их модуль объемного сжатия $K = \lambda + 2\mu/3$ отрицателен [257]. У таких материалов выполняется ограничение на параметры Ламе $-2\mu < \lambda < -2\mu/3$. Кажущееся противоречие объясняется тем, что при распространении продольной волны в среде возни-

кает не только объемная деформация, но и сдвиг, и поэтому соответствующие ограничения на упругие параметры различны. В исследовании [1] предлагается метаматериал-ауксетик, обладающий запрещенными зонами частот, которыми можно управлять при помощи внешних растягивающих нагрузок, приводящих к изменению конфигурации ячейки метаматериала за счет его ауксетических свойств.

В данной работе мы будем говорить об акустических метаматериалах в динамическом смысле.

Акустические метаматериалы, демонстрирующие эффективные отрицательные упруго-инерционные свойства в динамике, делятся на два типа: единожды отрицательные — обладающие запрещенными зонами частот (с отрицательной «эффективной плотностью»), и дважды отрицательные (с отрицательными эффективными упругим модулем и плотностью), у которых имеются падающие участки дисперсионных кривых, что соответствует зонам аномального преломления, где групповая скорость направлена противоположно фазовой [154, 193]. Эти необычные волновые свойства наблюдаются для тех волн, чьи длины существенно превосходят характерные размеры дискретной структуры. Соответствующие области частот называются рабочими зонами метаматериала. Нижнюю границу запрещенной зоны называют граничной частотой, а верхнюю — частотой отсечки [216].

Разработано и исследовано множество акустических метаматериалов, служащих для звукоизоляции и фокусировки звуковых сигналов. Акустические метаматериалы могут использоваться, например, для подавления вибраций, шумоизоляции [6, 264] или для изменения направления распространения волн [47, 119], что может быть важно в практических приложениях [7, 161, 193]. В обзоре [50] приведены различные примеры метаматериалов, например, леса, служащие для поглощения сейсмических волн, композит из силикона со

сферическими металлическими включениями, покрытыми слоем резины, и другие. Заметим, что в цитируемом обзоре дискретная модель метаматериала всегда представляет собой структуру из объектов «масса в массе» (рис. 2.3.1): массивная частица, внутри которой содержится резонатор — еще одна частица, соединенная с ней упругой связью, реагирующей на разность координат центров масс. Такая модель представляется оправданной не во всех случаях. Например, для описания распространения волн в композите со включениями необходимо учесть реакцию на разницу микро- и макроповоротов (поворот включения относительно матрицы), что соответствует связи между градиентом перемещения матрицы и поворотом включения. Различные типы поглотителей описаны в [279].

В работе [193] отмечается, что падающие участки дисперсионных кривых связаны с наличием дипольного резонанса: резонаторами служат не включения, а пары включений. Имеет значение также градиент свойств материала. Это указывает на то, что тело-точка в соответствующей континуальной модели должно обладать большим богатством свойств, чем «масса в массе».

Продольные волны в упругой матрице со случайным распределением жестких сферических включений моделируются в [185], авторы получают при наличии диссипации падающий участок дисперсионной кривой, а в чисто упругом случае — две ветви, причем частота отсечки одной из них совпадает с граничной частотой другой.

Выводу уравнений акустических метаматериалов на основе их периодической дискретной структуры посвящены работы [44, 128, 213, 277] и книга [79], где рассматриваются как линейные, так и нелинейные акустические метаматериалы. Дискретное моделирование акустических метаматериалов — двумерных периодических структур с высокими контрастами и анизотропией, а также переход к континуальной модели, которая оказывается неклассиче-

ской, хотя, по выражению авторов, неклассические степени свободы (повороты) входят в уравнения в скрытом виде, представлены в статье [43]. Среди работ по акустическим метаматериалам можно отметить [31, 62, 197, 278]. В статье [252] рассмотрены волновые фильтры, возникающие в двумерных решетках Коссера. В работе [213] для линейной модели «масса в массе» после перехода к континуальной модели показано существование локализованных решений, характер которых зависит как от параметров начального возмущения, так и от модуля линейной упругой связи, реагирующей на разность координат макро- и микроструктуры. При определенных параметрах наблюдается локализованное вблизи центра начального возмущения стоячее решение, при других — движущееся. Нелинейным акустическим метаматериалам также посвящены работы [75, 76, 78, 195, 196, 210, 211]. Сыпучие среды также являются акустическими метаматериалами, на их основе можно создавать сейсмические барьеры, заполняя сыпучим материалом вертикальные траншеи [152, 186, 224], подавлять вибрации различного происхождения [319]. Различные механизмы могут быть ответственны за захват энергии набегающей волны: нелинейное поведение сыпучего материала, пластические процессы при перестройке его структуры, контраст упруго-инерционных свойств, разномодульность конструкции. Вертикальные и горизонтальные сейсмические барьеры предлагаются в работе [147]. Их размеры должны быть сравнимы с длиной сейсмической волны, а захват энергии обеспечивается за счет контраста упруго-инерционных свойств в вертикальном направлении. Отметим, что барьеры имеют слоистую структуру, слои с мало отличающимися свойствами не контактируют непосредственно.

Метаматериалам с поворотными степенями свободы в литературе уделяется не столь большое внимание, как с трансляционными, однако данное направление также развивается в последние годы. Упругие характеристи-

ки кристаллов с поворотными степенями свободы получены в [79]. Авторы книги называют все данные среды метаматериалами, поскольку те демонстрируют необычное поведение. Они будут являться динамическими единожды или дважды отрицательными метаматериалами в смысле, употребляемом в [47, 119, 154, 193] при условии равенства нулю констант, ответственных за реакцию на градиент поворота частиц. В работе [325] рассматривается периодическая структура — упругая матрица со сферическими жесткими включениями. Предлагается дискретная модель, которую можно было бы назвать «твердое тело в твердом теле», учитывающей относительное смещение центров масс включения и окружающей матрицы и поворот включения относительно матрицы, при этом присоединенная к включению часть матрицы также моделируется твердым телом. После перехода к континуальной модели получаются эффективные упруго-инерционные характеристики и дисперсионные соотношения. Для поперечной волны имеется две запрещенных зоны. В определенной области параметров может существовать падающий участок дисперсионной кривой. В работе [244] в рамках классической упругости предлагается рассмотреть метаматериал, включающий работающие на поворот пружины, однако авторы не получают в результате осреднения микрополярную среду, хотя и указывают, что полученные результаты не укладываются в рамки классической упругости. Изгибные волны в пластине с включениями, обладающими поворотными степенями свободы, рассматриваются в работе [122], за счет вращательных степеней свободы резонаторов удается получить не только запрещенные зоны частот, но и область аномального преломления, в которой среда ведет себя как дважды отрицательный акустический метаматериал. Хиральные акустические метаматериалы, симметрия которых не включает в себя отражения, так что объемная деформация может вызывать поворот частицы, демонстрируют разнообразие волнового

поведения [240, 248]. В таких материалах наблюдается круговая поляризация поперечной волны, затухание в зонах с поглощением для различно поляризованных волн отличается [241]. Анизотропный акустический метаматериал с ротационными резонаторами предлагается в [91], за счет анизотропии поворотные степени свободы обеспечивают наличие запрещенных зон для всех трансляционных волн. В работе [15] отмечается, что анизотропные, в том числе гиротропные континуумы с поворотными степенями свободы — весьма перспективная модель для описания различных акустических метаматериалов. Теоретическая работа [8] посвящена волновым свойствам жидкости с вращающимися цилиндрическими включениями, также состоящими из жидкости, но отделенными от основной части невесомой тонкой оболочкой. Такая среда проявляет свойства акустического метаматериала, причем его характеристики существенно зависят от скорости вращения включений.

Вязкоупругие метаматериалы исследуются в работах [82, 88, 142, 143, 258]. В работах [142,143] рассматриваются сферические металлические включения, покрытые сжимаемой или несжимаемой резиной, в матрице из эпоксидной смолы, проводится численное и экспериментальное исследование. Характеристики покрытия сильно влияют на величину и расположение запрещенных зон. Можно заключить, что взаимосвязь резонаторов и матрицы — один из ключевых параметров, определяющих характеристики метаматериала. В работе [152] рассматриваются сейсмические барьеры из вязкоупругих метаматериалов различной природы — из сред с внутренними полостями, упругих матриц с включениями в виде полых цилиндров, заполненных сыпучей средой, упругих матриц с включениями в виде металлических или бетонных цилиндров в резиновой оболочке. Последние используются для генерации коротковолновых зон непропускания. Отмечено, что толщина и характер резиновой оболочки, отвечающей за взаимодействие распределенных включений с

матрицей, существенно влияют на свойства метаматериала. Интересный пример метаматериала с низкочастотными рабочими зонами (176–248 Гц) описан в [181], где он разработан при помощи численного моделирования, а затем его свойства проверены экспериментально. Образец среды представляет собой периодическую нейлоновую структуру, состоящую из шаров радиусом 3.9 мм, прикрепленных к балкам, длина ребра кубической ячейки 30 мм. В вязкоупругом случае [143,152] в зонах, где сигнал в упругом случае не распространялся, возникают бегущие затухающие волны, наблюдаются падающие участки дисперсионных кривых для вещественной части волнового числа в части зон, где для упругого случая она равнялась нулю, то есть бегущие волны отсутствовали. Поглощение волны в таких средах носит немонотонный характер. Несмотря на то, что в зоне с существенным поглощением волны затухают быстро, их возможно измерить на не очень большом расстоянии от начального возмущения. Также существуют устройства, созданные на основе метаматериалов, которые позволяют усиливать сильно затухающие волны и превращать их в распространяющиеся, и наоборот [9, 184], что используется при ультразвуковых исследованиях для определения формы объекта. В цитируемых выше работах указывается важность диссипативных эффектов, однако в них не проводится аналитического исследования о влиянии диссипации на волновые свойства метаматериала. Роль диссипации в поглощении волн в метаматериалах между тем остается недостаточно изученной: хотя большинство авторов предполагает, не проводя дополнительных исследований, что диссипация ухудшает прохождение затухающих волн, в работе [258] утверждается, что диссипация уменьшила поглощение в зонах непропускания, ухудшив его в зонах прозрачности. Аналогичный эффект упоминается в [88].

Созданию и предсказанию свойств акустических материалов с аперио-

дической структурой посвящены работы [199, 267]. В работе [267] создается блоковая «поликристаллическая» структура, в узлах кубической решетки которых расположены ячейки, соответствующие различным периодическим акустическим метаматериалам. В исследовании [199] при помощи метода машинного обучения оптимизируются расстояния между резонаторами и их размеры, являющиеся переменными величинами.

Особо интересной представляется возможность контроля характеристик акустического метаматериала при помощи внешних воздействий. В исследованиях [48, 162, 227] описываются умные акустические метаматериалы, которые могут перестраиваться под действием внешних полей, например, магнитных, меняя свои параметры и рабочие зоны. Несмотря на свою практическую и теоретическую ценность, данные исследования не обладают общностью, будучи применимыми лишь для конкретных структур.

Заметим, что почти вся литература по акустическим метаматериалам посвящена выводу уравнений сред, микроструктура которых известна. Работы, в которых применялся бы прямой феноменологический подход, то есть предлагался бы класс континуумов, чьи волновые свойства соответствовали бы свойствам акустических метаматериалов, весьма немногочисленны. Среди них можно отметить [180, 259, 268, 269], рассматривающих микроморфную среду особого типа («ослабленную микроморфную среду»), в которой присутствуют как макро-, так и микродеформации. В данной среде упругая энергия зависит от микродеформации, но не зависит от ее дивергенции. По-видимому, именно эта особенность рассматриваемого континуума ведет к возникновению запрещенных зон.

В целом остается мало исследованным вопрос о том, какого типа континуумы, в том числе те, которые моделируют аморфные среды, являются метаматериалами, и какими свойствами данных континуумов определяют-

ся характеристики метаматериала. Требуются современные континуальные теории, позволяющие резюмировать накопленную в многочисленных исследованиях микроструктурных моделей информацию, вывести общие закономерности зависимостей рабочих зон метаматериала от упругих и диссипативных параметров континуума, его свойств симметрии, указать пути создания новых, в том числе умных, метаматериалов. Особенно актуальным направлением представляется создание моделей акустических метаматериалов с поворотными степенями свободы и разнообразием волновых свойств. Итак, можно резюмировать:

1. Моделирование акустических метаматериалов и различных сред с микроструктурой, особенно с поворотными степенями свободы, является актуальной областью исследований, важной в практическом и теоретическом отношении.

2. Существует множество моделей акустических метаматериалов, построенных на основе их дискретной структуры. Работы, где предлагается класс континуумов, проявляющих свойства метаматериалов, весьма немногочисленны.

3. Влияние диссипации на распространение волн в акустических метаматериалах важно с практической точки зрения, но исследовано лишь для конкретных структур, его роль в поглощении волн недостаточно изучена.

4. Количество работ, где рассматриваются акустические метаматериалы с поворотными степенями свободы, а также поперечные волны, относительно невелико, хотя именно в этих случаях можно наблюдать разнообразие волнового поведения.

1.2 Микрополярные среды без больших скоростей вращения.

Вращательные степени свободы тела-точки были введены Л. Эйлером в теории стержней. Впервые трехмерная теория континуума с поворотными степенями свободы частиц была предложена братьями Эженом и Франсуа Коссера в 1909 г. [46]. В течение последующего полувека данные работы были забыты, а затем интерес к ним вновь возник в механическом научном сообществе. Этот интерес был продиктован как логикой развития фундаментальной науки, так и необходимостью описать в рамках механики сложные среды и новые материалы (жидкие кристаллы, электромагнитные среды и др.) Средам Коссера, иначе называемым микрополярными средами, были посвящены работы Аэро [274, 275], Пальмова [311], Грина и Нахди [96], Новацкого [306], Эриксена [69], Ерофеева [290], Еремеева, Альтенбаха [10, 11]. Особо стоит отметить работы Эрингена и Кафадара по трехмерным нелинейным средам Коссера [71, 140] и работы Жилина и Альтенбаха по двумерным нелинейным моментным средам [266, 271]. В работах Эрингена и Кафадара предложена полная трехмерная теория сред Коссера. П.А. Жилин, в частности, предложил метод получения определяющих уравнений двумерной среды Коссера, основанный на фундаментальных законах баланса механики [271].

Основы теории сред Коссера и ее развитие можно найти в книгах [36, 65, 73, 80]. Термоупругие среды Коссера рассматривались в работах [77, 130, 164, 219]. Пространственный подход к средам Коссера и возможность возникновения и разрушения частиц развиты в работах [136–139, 176, 192, 255]. Данные работы вдохновлены в том числе идеями П.А. Жилина [12, 292]. Сложные частицы с вращательными степенями свободы, иногда мультикомпонентные, используются в работах [136, 137] для моделирования тепловых и электромагнитных

явлений, а в работе [83] — для описания сыпучих сред.

Различные нелокальные теории, в том числе при помощи которых можно описать сложные континуумы, развиты в [160, 174, 228, 237] при использовании микроструктурного подхода. Уравнения микрополярной среды исходя из дискретной модели кристалла с учетом моментных взаимодействий, а также упругие характеристики такой среды получены в работах [79, 295, 296, 299, 309, 314]. Моментным средам и другим обобщенным континуумам посвящены книги [19, 36, 73, 80, 135, 292, 307]. Микрополярные среды являются актуальной темой исследований в связи с широким использованием современных материалов, в которых важны микроструктурные степени свободы.

1.2.1 Необходимость модификации микрополярной теории для описания зернистых и блоковых сред. Первые работы по редуцированной среде Коссера.

Развитая в цитируемых выше работах теория предполагает реакцию среды на градиент поворота, стремящуюся его уменьшить, и может быть применима в материалах, где имеется упорядоченная структура поворотов, таких, как жидкие кристаллы или магнитные материалы. Однако существует большой класс сред, где данное взаимодействие отсутствует. Для них необходимо предложить иную модель. Впервые идея среды, в которой присутствуют повороты, но не возникает напряжений в качестве реакции на градиент поворота, была предложена Ж. Манделем [163] для пластического материала: «La rotation relative de deux microéléments contigus est rendue possible par les discontinuités et n'implique pas l'existence de couples de contraintes. Par exemple deux grains de sable contigus peuvent tourner l'un par rapport à l'autre; on sait qu'il existe en leur point de contact des couples résistant à la rotation relative

mais ils sont tout à fait négligeables. Dans le cas de grains d'un métal, sans méconnaitre ia possibilité de couples de contraintes... il parait légitime de les négliger en premiere approximation à l'échelle de l'élément polycristallin». («Относительный поворот двух смежных микроэлементов оказывается возможным из-за разрывов и не влечет существования моментных напряжений. Например, две соседних песчинки могут поворачиваться одна относительно другой; известно, что в точке их контакта существуют моменты, оказывающие сопротивление относительному повороту, но они полностью пренебрежимы. В случае зерен металла, не отрицая возможности наличия моментных напряжений... представляется обоснованным пренебречь ими в первом приближении на масштабном уровне поликристаллического элемента».) Однако, несмотря на указание на близость подобной теории к микрополярной, Мандель предлагает классическую модель с векторными параметрами-директорами, отвечающими за направление «микроэлемента».

В работе Шварца, Джонсона и Фенга (1984) [223] для описания сыпучих сред данная идея получила развитие: ими был предложен особый вариант упругой линейной изотропной упругой среды Коссера, в которой перемещения и повороты являются независимыми кинематическими характеристиками, однако градиент поворота не вызывает напряжений в среде. Авторы работы получили на основе дискретной модели дисперсионные соотношения для распространения волн вдоль одной из осей кубической гранецентрированной решетки и длинноволновое приближение для уравнений динамики в изотропном случае, не указывая, что данная теория является микрополярной. Дисперсионные соотношения, полученные авторами для рассмотренной дискретной модели, обладают запрещенной зоной, то есть данная решетка проявляет свойства акустического метаматериала.

В работе [166] для кирпичной кладки при помощи перехода от дискрет-

ной структуры к континуальной были получены различные модели линейных упругих микрополярных сред, в том числе среды, в которой напряжения не совершают работы на градиенте поворота. Авторы назвали эту среду «редуцированной средой Коссера» (reduced Cosserat medium) в случае, когда тензор силовых напряжений симметричен, а именно в статическом равновесии и при отсутствии объемных моментов. Данный случай является вырожденной ситуацией. Можно показать, что для изотропной среды это означает равенство микроповорота (поворота тела-точки) и макроповорота (вихревой деформации среды), а для анизотропной — принятие некоторой более сложной специфической для материала связи между микроповоротом и трансляционной деформацией. При этом напряженное состояние в теле окажется таким же, как и в классическом случае, с точностью до определения тензора упругости. В работе [166] также рассмотрен частный вариант такой среды, при котором микроповорот тождественно равен макроповороту, то есть среда является также средой Коссера со стесненным вращением [178], однако для анизотропного случая эта ситуация невозможна, на что авторы работы [166] не указали. Случай динамики, внешних объемных моментов, асимметрии тензора силовых напряжений, нелинейных определяющих уравнений представляется гораздо более важным, однако он не был рассмотрен в цитируемом исследовании.

1.2.2 Роль поворотных степеней свободы в динамических процессах и перестройке структуры геосред и сыпучих материалов. Наличие запрещенных зон.

В ротационной сейсмологии и динамике сыпучих сред на момент начала работы над диссертацией требовались модели континуумов с поворотными

степенями свободы, в которых бы не было взаимодействия, противодействующему относительному повороту тел-точек. Действительно, в геосреде и сыпучих материалах не наблюдается упорядоченной структуры поворотов или реакции, направленной на уменьшение взаимного поворота соседних блоков или частиц. В то же время, поскольку учет поворотных степеней свободы оказывается важным, различные континуумы с вращательными степенями свободы используются для моделирования сыпучих консолидированных материалов [179, 209, 223, 246], блоковых и зернистых сред [23, 56], сред с контрастами материальных свойств, в том числе геоматериалов и биоматериалов [24, 55, 256, 270, 316–318], причем в последней работе предполагается, что микровращения ответственны за изменение структуры материала: тензоры, отвечающие за упругие свойства, поворачиваются в результате моментных воздействий. Повороты зерен оказываются важными в пластических процессах, перестройках зернистых сред [27, 28, 45, 56, 92, 93, 123, 182, 183, 191, 249], в процессах диффузии и развития повреждений [17]. Повороты малых зерен могут служить механизмом релаксации напряжений, тем самым замедляя развитие трещины и укрепляя материал [200, 229], а могут при этом приводить к изменению структуры материала при ударной нагрузке [173], причем вращательные движения происходят на разных масштабах. Учет поворотных степеней свободы особенно важен при описании процессов сдвига, которые вызывают при малой интенсивности вращательные колебания частиц, а при увеличивающейся интенсивности прилагаемой нагрузки вращения на частоте отсечки [218, 250]. Упругопластические модели Коссера необходимы для корректного описания полос сдвига в сыпучих консолидированных и зернистых средах, каменных кладках и геосредах [95, 156, 157, 204, 230, 231, 245, 249].

В зернистых средах при всестороннем растяжении или близком к нему состоянии наблюдается пластическое течение и перестройка материала [288,

315]. Начало пластического течения или иные изменения структуры могут быть связаны с неустойчивостью нелинейного упругого материала [16, 203], однако классическая упругая изотропная нелинейная упругая среда с выпуклой энергией становится неустойчивой при всестороннем сжатии, но не при всестороннем растяжении [243]. В связи с этим возникает вопрос: могут ли поворотные степени свободы быть ответственны за наличие нового по сравнению с классической нелинейной средой механизма неустойчивости упругого материала? Необходимо исследование устойчивости при всестороннем растяжении и сжатии более сложной, например, микрополярной среды.

Геосреда является сложной структурой. Учет поворотных степеней свободы блоков, включений, агрегатов может быть важен на разных масштабах [3, 4, 141]. Ротационная сейсмология, развивающаяся в последние десятилетия, пытается объяснить явления, происходящие вблизи разломов при сдвиге тектонических плит, апеллируя к поворотным степеням свободы [131]. Безусловно, теории с вращательными степенями свободы могут здесь служить лишь как модели эффективных сред, подобно тому, как трансверсально-изотропная упругая среда служит эффективной моделью для слоистого грунта. Поворотные степени свободы блоков геосреды могут быть важны для описания динамики в ближнем поле и поверхностных волн [30, 38, 234]. Активно развивающаяся в течение последних десятилетий ротационная сейсмология [120, 131, 153] предлагает в качестве моделей различные, хотя не всегда строгие, теории сплошных сред с поворотными степенями свободы частиц и асимметричным тензором напряжений. Какая именно модель Коссера является наиболее подходящей для описания динамики геосреды, является предметом дискуссий в литературе. В некоторых работах рассматриваются лишь макроповороты среды, то есть вихревая трансляционная деформация, определяемая ротором перемещений [225, 239, 308]. Такие модели без внесения модифи-

каций не могут описывать реальные материалы, так как не удовлетворяют принципу материальной объективности [194]: при жестком повороте образца материала напряжения не поворачиваются вместе с ним. В классической среде макроповорот не вызывает напряжений, и поэтому в ней не существует поворотных волн, однако в реальности они наблюдаются и измеряются сейсмологами [131]. Следовательно, для описания геосреды необходима модель континуума с более сложной частицей, чем материальная точка. Присутствие в геосреде медленных волн [60] является аргументом в пользу модели со свойствами акустического метаматериала.

Теории с поворотными степенями свободы тел-точек также важны при описании динамики сыпучих сред и некоторых композитных сред с включениями [2,3,171,172,189,235]. Дисперсионные соотношения, построенные на основе численных и экспериментальных исследований, свидетельствуют о том, что классическая теория не может описать распространение волн в сыпучей среде на высоких частотах не только для сред с регулярным строением, то есть зернистых кристаллов [171,172], но и для сред с неупорядоченной упаковкой [29, 221]. В сыпучей среде при распространении волн, содержащих высокочастотные составляющие, возникают локализованные решения [63]. Слабая локализация волн наблюдается в эксперименте вблизи сейсмических источников [260].

В работах [188–190] численные эксперименты в монодисперсной или слабо неоднородной изотропной среде из круглых частиц показывают, что волна сдвига имеет горизонтальную асимптоту, то есть над некоторой частотой расположена запрещенная зона, иными словами, среда ведет себя как акустический метаматериал. Аналогичный результат получается в работе [231] на основе микроструктурного подхода при описании кирпичной кладки. Такая зона отсутствует в полной линейной изотропной среде Коссера [73]. Та-

ким образом, для описания реальной дискретной структуры необходимо рассмотреть модификацию среды Коссера. Хотя авторы работ [94] и [209] согласны между собой в том, что для сыпучих сред осреднение при помощи статистических методов дает неклассические модели, в [94] получено, что при отсутствии внешних объемных моментов и моментного взаимодействия в межзеренном контакте повороты зерен в квазистатическом режиме не дают «эффектов Коссера», как это получается и в результате анализа статической модели редуцированной среды Коссера без внешних моментов для кирпичной кладки [166].

Как отмечалось выше, среды с включениями нередко представляют собой акустические метаматериалы [142, 143, 152, 325], а структура некоторых метаматериалов [181] аналогична структуре когезивных сыпучих сред. Сыпучие среды широко используются для подавления вибраций, их эффективные инерционные характеристики сильно зависят от частоты и могут быть отрицательными и комплексными [58, 254]. Таким образом, предлагаемая новая континуальная модель должна также демонстрировать свойства метаматериала при определенных параметрах.

1.2.3 Анизотропия геосред и консолидированных сыпучих материалов.

Грунты являются континуумами сложной структуры, их моделированию посвящено большое количество работ. Среди них есть работы, учитывающие в терминах эффективной упругой среды микроструктурные особенности грунта, в частности, трещины и включения [129]. Данные анизотропные среды заменяют классическую неоднородную среду на однородную эффективную. Анизотропия может возникать в результате действия силы тяжести, ко-

торая приводит к образованию слоистой структуры, приближенно описываемой как однородный трансверсально-изотропный материал с вертикальной осью симметрии. Рассматриваемое приближение хорошо работает для квазистатических нагрузок, однако не учитывает частотную зависимость эффективных характеристик, отсутствующую в классической теории упругости, но присутствующую в грунтах [124]. Для ее учета, как было упомянуто выше, необходима модель более сложной среды. В сборнике [308] геосреда моделируется как гиротропный или иной анизотропный континуум с реакцией на макроповорот, однако, как обсуждалось, используемые модели противоречат принципу материальной объективности.

В сыпучих средах и грунтах, помимо анизотропии, связанной с наличием силы тяжести или какого-либо воздействия в процессе упаковки, например, потока газа или магнитного поля для чувствительных к нему частиц, существует так называемая локальная анизотропия. Это типичная особенность зернистых сред, связанная с процессами на микроструктурном уровне [35, 198, 265]. Данная анизотропия не оказывает заметного влияния на свойства среды в длинноволновом приближении, однако на малых масштабах приводит к связи объемной деформации с другими ее видами, например, поворотной или сдвиговой. Такая связь отсутствует в изотропных безграничных классических средах, поскольку перекрестный член в энергии деформации отсутствует в силу требований симметрии [303]. Рассматривая классическую линейную анизотропную среду, получим связь различных деформаций на любых частотах, а плоские волны в безграничной среде будут смешанными, за исключением особых случаев, но недисперсивными. Скорость их распространения будет зависеть не только от упруго-инерционных характеристик среды, но и от их направления [298, 301], однако локальную анизотропию подобной моделью описать нельзя. Регулярная дискретная структура также

может быть анизотропной на малых масштабах, но описываться при переходе к континуальной модели на больших масштабах уравнениями изотропной среды сложной структуры [18].

В работе [231] рассматривается кирпичная кладка. От дискретной периодической модели авторы статьи переходят к континуальной трехмерной анизотропной среде Коссера, заменяя конечные разности на производные. Такой способ осреднения соответствует длинноволновому приближению [202]. Однако после выражения параметров континуума через параметры решетки в работе [231] дисперсионные кривые для дискретной структуры и для среды Коссера имеют качественные отличия: для решетки все оптические ветви горизонтальны или имеют легкий наклон вниз, то есть дискретная модель проявляет свойства акустического метаматериала, а для принятой авторами континуальной модели групповые скорости всех оптических ветвей положительны, хотя и невелики.

Таким образом, для учета данных особенностей необходима не только анизотропная теория Коссера, в которой отсутствует реакция на градиент поворота, но и теория, которая бы позволяла рассматривать материал как изотропный на больших масштабах, и при этом учитывать связь различных видов деформаций, возникающую вследствие анизотропии на малых масштабах или на высоких частотах.

1.2.4 Вязкоупругие микрополярные среды.

В плотных суспензиях различного типа повороты частиц также могут иметь значение. Один из вариантов моделирования суспензий и жидкокристаллических сред — вязкоупругая микрополярная жидкость, то есть такой изотропный континуум Коссера с памятью, который нечувствителен к изме-

нению отсчетной конфигурации при условии, что оно оставляет плотность неизменной [294]. В работе [12] авторы предлагают описывать суспензию из волокон в вязкой жидкости при помощи двухфазного континуума, причем волокна описываются при помощи микрополярного континуума, а жидкость является классической, однако в соответствующем ей тензоре напряжений возникает антисимметричная часть из-за присутствия волокон. Учет диссипации и поворотных степеней свободы, как отмечалось выше, необходим при рассмотрении вязкоупругих композитов с включениями [142, 143, 152].

Оценка эффективной вязкости геосреды имеет очень важное значение для предсказания землетрясений, поскольку перед заметными сейсмическими событиями и сразу после них вязкость существенно уменьшается [284, 326]. Предлагая неклассическую модель для описания геосреды, необходимо получить оценку влияния диссипации на характер распространения волн.

Таким образом, можно сформулировать следующие выводы:

1. Необходима модификация микрополярных моделей для описания зернистых, сыпучих, блоковых сред и композитов с жесткими включениями, в которых нет упорядоченной структуры поворотов.

2. Зернистые, блоковые и консолидированные сыпучие среды часто демонстрируют свойства акустических метаматериалов.

3. Поворотные степени свободы могут играть роль в достижении неустойчивого состояния и перестройке структуры таких сред. Классическая теория упругости с выпуклой энергией не объясняет неустойчивость материала при всестороннем растяжении, наблюдаемую в зернистых средах.

4. В зернистых средах, грунтах, средах с включениями и блоковых средах нередко важен учет анизотропии, в том числе локальной, и диссипации.

1.3 Среда Кельвина.

П.А. Жилин в 1995 году ввел в механику понятие среды Кельвина — сплошной среды из осесимметричных тел-точек, свободно вращающихся вокруг своих осей с большой скоростью. В среде Кельвина, как линейной, так и нелинейной, гироскопическая сила превалирует в динамическом члене баланса моментов. Рассматривается быстрое собственное вращение тел-точек и малый тензор инерции частицы, так что проекция динамического спина на ось тела-точки является конечной величиной. Остальные перемещения и повороты вызывают силовые и моментные напряжения в среде. П.А. Жилин назвал данный континуум средой Кельвина, так как, по свидетельству Г. Лоренца [302], лорд Кельвин предложил идею подобной среды для моделирования электродинамических явлений. Интерес к таким средам возникал в то время у многих известных ученых, однако эти идеи не были воплощены математически [261, 302]. Хотя среда Кельвина является особым случаем среды Коссера, ее динамика отличается от обычной среды Коссера из-за наличия гироскопической силы и особенностей определяющих уравнений, поскольку напряжения в среде не должны зависеть от угла собственного вращения частиц и его градиента. Данное требование приводит к аналогу шестого уравнения равновесия в оболочках и накладывает ограничения на систему независимых материально объективных тензоров деформации, характеризующих кинематику среды. С.Н. Гаврилов под руководством П.А. Жилина получил линейные уравнения данной среды для случая малых перемещений и малых углов нутации тел-точек [283]. В кандидатской работе автора под руководством П.А. Жилина были получены полные нелинейные уравнения упругой среды Кельвина и установлена их аналогия с уравнениями упругих непроводящих ферромагнетиков в состоянии магнитного насыще-

ния в приближении квазимагнитостатики, предложенных Ж.А. Моженом и А.Дж. Эрингеном [74, 167, 169, 170, 305], и показана возможность существования дополнительных механизмов взаимосвязи упругой и магнитной подсистем, учет которых необходим для корректного описания магнитоакустического резонанса [98, 118]. Метод получения определяющих уравнений для среды Кельвина — тот же, что использовался в двумерном случае в теории неклассических оболочек Х. Альтенбахом и П.А. Жилиным [271]. Кроме среды Кельвина, существуют и другие гироконтинуумы — среды, в которых присутствуют быстрые вращения, не вызывающие напряжений [32], например, среды, где частицы представляют собой оснащенные гиростатами контейнеры. Гироконтинуумы также исследовались в работах [33, 127, 133, 134]. Позднее термин «среда Кельвина» вошел в словарь современной неклассической механики сплошных сред, составленный Ж.А. Моженом [168]. Данная среда обладает группой симметрии, которая предопределяет выбор возможных мер деформации и вид определяющих уравнений. Обсуждение влияния групп симметрии сред Коссера на выбор естественных мер деформации можно найти в [64, 66, 207].

Волновые процессы в среде Кельвина весьма сложны даже в линейном случае (для малых углов нутации), поскольку анизотропия, наличие гироскопической силы и взаимосвязи между поворотными и трансляционными степенями свободы приводят к тому, что дисперсионные соотношения для плоских волн в безграничной среде удается получить аналитически лишь для частных случаев направления распространения волны [98]. Запрещенная зона в рассмотренных случаях отсутствует. Однако существуют структуры, оснащенные гиростатами, ведущие себя как акустические метаматериалы, например, упругая треугольная решетка с волчками в вершинах треугольников, в которой волны с определенными частотами могут проходить лишь

в одном направлении [34, 327], причем характеристики волнового поведения можно регулировать, задавая скорость вращения волчков. Другой материал с неупорядоченным расположением гироскопов позволяет направлять нужным образом поверхностную волну [13]. В антиферромагнетиках [287] и магнитоупругих композитах [20] существуют зоны непропускания для магнитоупругих волн. Энергия деформации для антиферромагнетика, предлагаемая в [287], имеет особую структуру, а именно, она зависит от полусуммы намагниченности подрешеток, но не зависит от градиента этой величины. Однако предлагаемая в работе [287] модель требует уточнения, поскольку рассматриваемая авторами в нелинейной модели энергия не обладает свойством материальной объективности, а после модификации, требуемой для исправления этого недостатка, в линеаризованных уравнениях возникнут дополнительные слагаемые. В композитах, рассматриваемых в [20], используется терфенол-D — магнитострикционный материал, обладающий весьма малой константой обменного взаимодействия, так что в среде практически не возникает реакции на градиент намагниченности, хотя сама намагниченность существенно влияет на напряжения. Существуют и иные современные магнитострикционные материалы, например, галфенолы (сплавы железа и галлия) различной структуры. Для некоторых из них обменное взаимодействие уменьшается при увеличении концентрации атомов галлия [324]. Данное направление исследований является весьма актуальным и важным с практической точки зрения, поскольку открывает широкие возможности для создания умных материалов. Сформулируем выводы этого раздела:

1. Существуют механические и магнитоупругие структуры с гироскопическими и магнитными элементами, являющиеся метаматериалами, однако неясно, какой тип континуальных моделей им соответствует.

2. Требуются модели умных гироконтинуумов со свойствами акустических метаматериалов и возможностью ими управлять при помощи внешнего воздействия.

1.4 Выводы и постановка задачи.

Резюмируя сказанное выше, можно сделать следующие выводы:

1. Моделирование акустических метаматериалов и различных сред с микроструктурой, особенно с поворотными степенями свободы, является актуальной областью исследований, важной в практическом и теоретическом отношении.

2. Существует множество моделей акустических метаматериалов, построенных на основе их дискретной структуры. Работы, где предлагается класс континуумов, проявляющих свойства метаматериалов, весьма немногочисленны.

3. Влияние диссипации на распространение волн в акустических метаматериалах важно с практической точки зрения, но исследовано лишь для конкретных структур. Ее роль в поглощении колебаний остается недостаточно изученной.

4. Количество работ, где рассматриваются акустические метаматериалы с поворотными степенями свободы, а также поперечные волны, относительно невелико, хотя именно в этих случаях можно наблюдать разнообразие волнового поведения.

5. Необходима модификация микрополярных моделей для описания зернистых, сыпучих, блоковых сред и композитов с жесткими включениями, в

которых нет упорядоченной структуры поворотов.

6. Зернистые, блоковые и консолидированные сыпучие среды часто демонстрируют свойства акустических метаматериалов.

7. Поворотные степени свободы могут играть роль в достижении неустойчивого состояния и перестройке структуры таких сред. Классическая теория упругости с выпуклой энергией не объясняет неустойчивость материала при всестороннем растяжении, наблюдаемую в зернистых средах.

8. В зернистых средах, грунтах, средах с включениями и блоковых средах нередко важен учет анизотропии, в том числе локальной, и диссипации.

9. Существуют механические и магнитоупругие структуры с элементами гироскопической или магнитной природы, являющиеся акустическими метаматериалами, однако неясно, какой тип континуальных моделей им соответствует.

10. Требуются гироконтинуальные модели акустических метаматериалов с возможностью управления их свойствами.

Это позволяет сформулировать **цель диссертационной работы**:

- Развитие теории континуумов сложной структуры, в том числе с поворотными степенями свободы, обладающих свойствами акустических метаматериалов, при помощи феноменологических методов механики сплошной среды.

В связи с этим поставлены следующие **задачи диссертационной работы**:

1. Предложить новый класс континуумов, демонстрирующих свойства акустических метаматериалов, в том числе континуумов с поворотными степенями свободы.

2. Исследовать влияние параметров континуума (свойств симметрии, упругих, диссипативных и инерционных констант) на свойства дисперсионных соотношений метаматериала для различных типов волн.

3. Предложить континуальные модели с поворотными степенями свободы, обладающие свойствами акустических метаматериалов, в том числе учитывающие нелинейность, произвольные внешние нагрузки, локальную и иную анизотропию, диссипацию для зернистых, блоковых, консолидированных сыпучих сред и композитов с жесткими включениями, в которых нет упорядоченной структуры поворотов.

4. Найти особенности динамики и устойчивости данных сред.

5. Найти зависимость волновых свойств этих континуумов от диссипативных параметров и параметров анизотропии, предварительного напряженного состояния.

6. Предложить модели среды Кельвина или иного гироконтинуума, обладающие свойствами акустических метаматериалов, и исследовать влияние свойств континуума на дисперсионные соотношения и возможность управления рабочими зонами метаматериала при помощи внешней нагрузки.

Глава 2

Линейный редуцированный сложный континуум как акустический метаматериал.

Результаты данной главы изложены в работах [101, 108, 109, 286], где соискатель является единственным автором. Глава посвящена решению следующих задач, поставленных в разделе 1.4:

1. Найти новый класс линейных сложных континуумов общего вида, являющихся акустическими метаматериалами, в том числе с поворотными степенями свободы.

2. Определить влияние параметров (симметрии, упругих, диссипативных, инерционных) данных сложных континуумов на характеристики акустических метаматериалов и возможность управления их свойствами при помощи внешних воздействий.

Как обсуждалось в разделе 1.1, существует мало работ, в которых предлагается класс континуумов, проявляющих свойства метаматериалов [180, 259,

268, 269]. Общая черта этих специфических микроморфных сред — зависимость упругой энергии от некоторой микродеформации и отсутствие зависимости от ее дивергенции.

В данной главе предлагается другой класс сложных сплошных сред с тем же свойством, часть из которых является к тому же дважды отрицательными метаматериалами в иных областях частот.

Отметим, что в различных практических реализациях метаматериалов включения–резонаторы или области с резким контрастом упруго-инерционных свойств не соединены друг с другом непосредственно. Эти соображения приводят нас к введению понятия «редуцированная среда».

Редуцированная упругая среда — это среда, состоящая из двух взаимосвязанных субконтинуумов («несущего континуума» и связанного с ним «распределенного динамического гасителя»), такая, что упругая энергия среды не зависит от деформации одного из них («распределенного динамического гасителя»).

Иными словами, на скорости деформации одного из них («распределенного динамического гасителя») в среде не производится мощности.

Данное определение означает, что упругая энергия зависит от совокупности некоторых кинематических характеристик — многомерной векторной обобщенной координаты «динамического гасителя», но не зависит от ее градиента.

Идея редуцированной среды имеет общие черты с континуально-дискретным (структурным) подходом, рассматривающим сплошную среду с внедренными в нее дискретными элементами, причем их динамика взаимосвязана [21,22]. В отличие от континуально-дискретной структуры, в редуцированной среде псевдо-дискретные элементы (тела-точки динамического гасителя) распределены непрерывным образом, однако они не связаны непосредствен-

но, а взаимодействуют лишь через несущий континуум. Это важное свойство также присутствует в [22] и приводит к существованию резонансного поглощения на парциальной частоте распределенного динамического гасителя.

Можно распространить определение редуцированной среды на случай линейной вязкоупругой среды, требуя, чтобы упругая энергия не зависела от градиента деформации динамического гасителя, а диссипативная функция Рэлея — от скорости этой деформации. Иными словами, лишь к любой существующей линейной упругой связи можно добавить линейную диссипативную. Будем рассматривать линейные вязкоупругие редуцированные среды с определенными ограничениями на их характеристики. Не уточняя природу составляющих редуцированную среду субконтинуумов, будем полагать, что среда подчиняется уравнениям Лагранжа. Это дает возможность применения данной схемы для поиска и управления свойствами акустических метаматериалов самого различного вида. Будем требовать, чтобы кинетическая энергия являлась квадратичной формой скоростей векторных обобщенных координат, так что инерциальные члены в законах динамики пропорциональны их вторым производным. Это исключает из рассмотрения среды с конечным динамическим спином, например, материалы с гироскопическими элементами.

В данной главе будет показано, при каких условиях дисперсионные зависимости линейных редуцированных сред обладают запрещенными зонами либо падающими участками дисперсионных кривых, то есть являются акустическими метаматериалами, как меняется тип метаматериала в зависимости от его свойств симметрии и наличия диссипации. Вначале будут рассмотрены чисто упругие модели, затем к одной из существующих упругих связей будет добавляться диссипативный параметр и рассматриваться его влияние.

Следуя [298, 305], будем называть задачу на нахождение дисперсионных соотношений и собственных векторов для гармонических волн в безграничной

среде уравнением Кристоффеля. При этом оно может быть записано не в терминах фазовой скорости, а в терминах частоты и волнового вектора.

2.1 Уравнения Лагранжа линейной упругой редуцированной среды.

Рассмотрим линейную сплошную среду произвольной природы, подчиняющуюся уравнениям Лагранжа. Пусть ее тело-точка описывается обобщенными координатами $q_i, i = \overline{0,n}$. Тело-точка может содержать элементы различной природы с упругими или жесткими соединениями: материальные точки, бесконечно малые твердые тела и др. Связи голономны и идеальны. Предполагается, что принцип материальной объективности выполняется (это необходимо проверять при конкретном выборе обобщенных координат и задании энергии). Уравнения Лагранжа справедливы, в частности, для классической упругой среды [297], микрополярной упругой среды, в том числе со стесненным вращением [232, 233], для микроморфного упругого континуума [68], псевдо-жестких континуумов (деформация которых всегда однородна) [37]. Уравнения Лагранжа для изотропного градиентного континуума получены путем континуализации в работе [175], при этом потребовалось согласовать процедуру континуализации для лагранжиана и для напряжений в среде. Модифицированные уравнения Лагранжа для сплошной среды записываются следующим образом ($\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$, $\mathcal{K}$ — массовая плотность кинетической энергии, $\mathcal{U}$ — массовая плотность упругой энергии):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla q_i} = 0. \tag{2.1}$$

В терминах векторных обобщенных координат можно записать то же уравнение как

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{q}} = 0. \tag{2.2}$$

Здесь введен вектор в пространстве обобщенных координат $\mathbf{q} = q_s \mathbf{i}^s$, где $\mathbf{i}^s$ — ортонормальный базис в данном пространстве, $s = 1, \ldots, n$.

Пусть существует векторная обобщенная координата $\mathbf{q}_0$ размерности n_0, такая, что $\mathcal{U}$ зависит от нее, но не зависит от ее градиента. Будем называть такую обобщенную координату «особой». Для нее последний член в левой части (2.2) равен нулю, как для дискретных систем. Вблизи ее парциальной частоты, как будет показано далее, динамика $\mathbf{q}_0$ может начать превалировать в системе, способствуя захвату энергии волн. Этот эффект, связанный с отсутствием упругой реакции на $\nabla \mathbf{q}_0$, можно назвать эффектом «распределенного динамического гасителя». Совокупность остальных обобщенных координат будем обозначать многомерным вектором $\mathbf{q}_1$ размерности n_1. Уравнения динамики (2.2) для редуцированной среды принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_1} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{q}_1} = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_0} = 0. \tag{2.4}$$

Континуум, в котором существует особая векторная обобщенная координата — «динамический гаситель», будем называть *редуцированным* континуумом. Природа обобщенных координат может быть различной, тело-точка — весьма сложным. Пример такой среды показан на рисунке 2.1.

Рассмотрен частный случай, когда массовые плотности упругой и кинети-

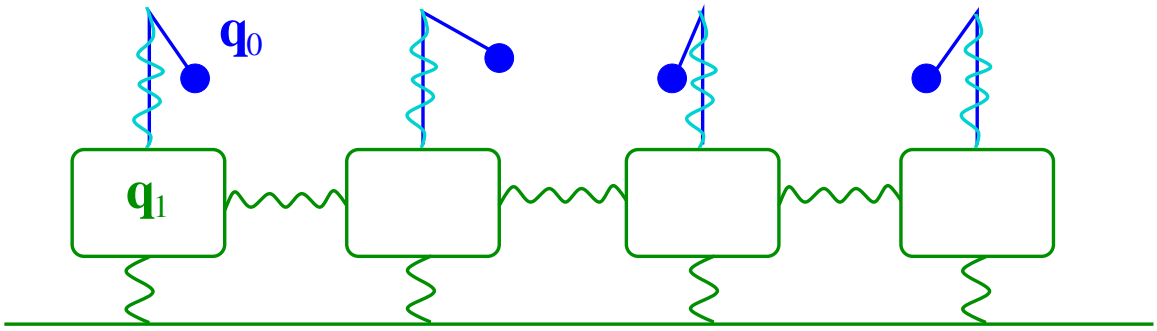

Рис. 2.1: Редуцированный континуум

ческой энергии линейного редуцированного упругого материала имеют вид

$$\mathcal{U} = \nabla\mathbf{q}_1^\top \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{K} \cdot\cdot \nabla\mathbf{q}_1/2 + C_{11}\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_1/2 + \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{C}_{00} \cdot \mathbf{q}_0/2 + \\ + \nabla\mathbf{q}_1^\top \cdot\cdot\, {}^3\mathbf{N}_{10} \cdot \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{C}_{10} \cdot \mathbf{q}_0, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{K} = \dot{\mathbf{q}}_0 \cdot \mathbf{A}_{00} \cdot \dot{\mathbf{q}}_0/2 + A_{11}\dot{\mathbf{q}}_1 \cdot \dot{\mathbf{q}}_1/2. \quad (2.6)$$

Здесь ${}^4\mathbf{K}$, C_{11}, $\mathbf{C}_{00}$, $\mathbf{N}_{10}$, $\mathbf{C}_{10}$ — упругие характеристики, $\mathbf{A}_{00}$, A_{11} и $\mathbf{A}_{10}$ — инерционные. Операция свертки тензоров $\cdot\cdot$ определяется следующим образом: для полиад $\boldsymbol{\lambda}_1 \ldots \boldsymbol{\lambda}_{n-1}\boldsymbol{\lambda}_n \cdot\cdot\, \boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2 \ldots \boldsymbol{\zeta}_n = \boldsymbol{\lambda}_1 \ldots (\lambda_{n-1} \cdot \boldsymbol{\zeta}_2)(\boldsymbol{\lambda}_n \cdot \boldsymbol{\zeta}_1)\boldsymbol{\zeta}_3 \ldots \boldsymbol{\zeta}_n$, и операция линейна по своим аргументам.

Потребуем $\mathbf{C}_{00} = \omega_0^2\mathbf{A}_{00}$, то есть существования единственной парциальной частоты ω_0 особой координаты. Обозначим парциальную частоту несущей координаты $\omega_1 = \sqrt{C_{11}/A_{11}}$.

Уравнения динамики (2.3), (2.4) для данных $\mathcal{K}$,$\mathcal{U}$ можно записать в виде

$$\mathbf{A}_{00} \cdot (\ddot{\mathbf{q}}_0 + \omega_0^2\mathbf{q}_0) + \nabla\mathbf{q}_1^\top \cdot\cdot\, {}^3\mathbf{N}_{10} + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{C}_{10} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

$$A_{11}(\ddot{\mathbf{q}}_1 + \omega_1^2\mathbf{q}_1) + \mathbf{C}_{10} \cdot \mathbf{q}_0 - \nabla \cdot ({}^4\mathbf{K} \cdot\cdot \nabla\mathbf{q}_1 + {}^3\mathbf{N}_{10} \cdot \mathbf{q}_0) = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

Рассматриваются два различных случая:

1) ${}^3\mathbf{N}_{10} \neq \mathbf{0}, \mathbf{C}_{10} = \mathbf{0}$;

2) ${}^3\mathbf{N}_{10} = \mathbf{0}, \mathbf{C}_{10} \neq \mathbf{0}$.

Частота ω_0 является особой для системы в обоих рассматриваемых случаях.

1) ${}^3\mathbf{N}_{10} \neq \mathbf{0}, \mathbf{C}_{10} = \mathbf{0}$. В этом случае при $\omega = \omega_0$ возможен «режим независимых осцилляторов» $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{0}, \mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t}$, если $\nabla \cdot ({}^3\mathbf{N}_{10} \cdot \mathbf{Q}_0) = \mathbf{0}$ (например, при не зависящей от точки пространства амплитуде $\mathbf{Q}_0$).

2) ${}^3\mathbf{N}_{10} = \mathbf{0}, \mathbf{C}_{10} \neq \mathbf{0}$. В этом случае для невырожденного $\mathbf{C}_{10}$ при $\omega = \omega_0$ не существует k, в том числе комплексного: уравнения движения (2.7), (2.8) дают тривиальное решение.

2.2 Дисперсионные соотношения линейной упругой редуцированной анизотропной среды.

Будем искать решение задачи (2.7), (2.8) в виде $\mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}$, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{Q}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}$, где ω — частота, $\mathbf{k}$ — волновой вектор. Тогда

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\mathbf{A}_{00} \cdot \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 \cdot (i\mathbf{k} \cdot {}^3\mathbf{N}_{10} + \mathbf{C}_{10}) = \mathbf{0}, \tag{2.9}$$

$$(\mathbf{k} \cdot {}^4\mathbf{K} \cdot \mathbf{k} + (-\omega^2 + \omega_1^2)A_{11}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}_1 + (\mathbf{C}_{10} - i\mathbf{k} \cdot {}^3\mathbf{N}_{10}) \cdot \mathbf{Q}_0 = \mathbf{0}. \tag{2.10}$$

Если $\omega \neq \omega_0$, и тензор $\mathbf{A}_{00}$ невырожденный (нет безынерционных координат), выразим $\mathbf{Q}_0$ через $\mathbf{Q}_1$ из уравнения (2.9) и подставим это выражение в (2.10):

$$\mathbf{Q}_0 = (\omega^2 - \omega_0^2)^{-1}\mathbf{A}_{00}^{-1} \cdot (\mathbf{C}_{10} + i\mathbf{k} \cdot {}^3\mathbf{N}_{10})^\top \cdot \mathbf{Q}_1, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}&(\mathbf{k} \cdot {}^4\mathbf{K} \cdot \mathbf{k} + (-\omega^2 + \omega_1^2)A_{11}\mathbf{E} + \\ &+ (\mathbf{C}_{10} - i\mathbf{k} \cdot {}^3\mathbf{N}_{10}) \cdot (\omega^2 - \omega_0^2)^{-1}\mathbf{A}_{00}^{-1} \cdot (\mathbf{C}_{10} + i\mathbf{k} \cdot {}^3\mathbf{N}_{10})^\top) \cdot \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) с точностью до умножения на k^2, где $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$, $|\hat{\mathbf{k}}| = 1$, k — волновое число, $\hat{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, представляет собой редуцированное уравнение Кристоффеля (задачу на нахождение дисперсионных соотношений и собственных векторов) [298, 305] для несущего континуума $\mathbf{q}_1$.

2.2.1 Запрещенная зона для плоских волн при взаимосвязи «деформация несущего континуума – координата динамического гасителя».

При $\mathbf{C}_{10} = \mathbf{0}, \mathbf{N}_{10} \neq \mathbf{0}$ и $\omega \neq \omega_0$ редуцированное уравнение Кристоффеля (2.8) сводится к

$$(A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2)\mathbf{E} + k^2(\boldsymbol{\mathcal{K}} + (\omega^2 - \omega_0^2)^{-1}\boldsymbol{\mathcal{N}})) \cdot \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}, \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{k}}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{N}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}_{10} \cdot \mathbf{A}_{00}^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}_{10})^{\top} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}_i \mathbf{e}_i \, \mathbf{e}_i, \tag{2.14}$$

$\mathcal{N}_i \geqslant 0$ — собственные числа $\boldsymbol{\mathcal{N}}$, зависящие от упруго-инерционных характеристик и от направления распространения волн , $\mathbf{e}_i$ — ортонормальный базис, формируемый собственными векторами $\boldsymbol{\mathcal{N}}$.

Будем рассматривать положительно определенную энергию деформации. Для рассматриваемой гармонической волны имеем

$$\begin{aligned} 2U &= k^2 \mathbf{q}_1 \mathbf{k} \cdot \cdot \mathbf{K} \cdot \cdot \mathbf{k} \mathbf{q}_1 + 2\mathbf{k}\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{N}_{10} \cdot \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{C}_{00} \cdot \mathbf{q}_0 = \\ &= k^2 \mathbf{q}_1 \cdot \boldsymbol{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{q}_1 + 2k\mathbf{q}_1 \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}_{10}) \cdot \mathbf{q}_0 + + \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{C}_{00} \cdot \mathbf{q}_0 = \\ &= (\mathbf{C}_{00}^{1/2} \cdot \mathbf{q}_0 + k\mathbf{q}_1 \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}_{10}) \cdot \mathbf{C}_{00}^{1/2})^2 + k^2 \mathbf{q}_1 \cdot (\boldsymbol{\mathcal{K}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}_{10}) \cdot \mathbf{C}_{00}^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}_{10})^{\top}) \cdot \mathbf{q}_1 \\ &= (\mathbf{C}_{00}^{1/2} \cdot \mathbf{q}_0 + k\mathbf{q}_1 \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}_{10}) \cdot \mathbf{C}_{00}^{1/2})^2 + k^2 \mathbf{q}_1 \cdot (\boldsymbol{\mathcal{K}} - \omega_0^{-2} \boldsymbol{\mathcal{N}}) \cdot \mathbf{q}_1 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Таким образом, положительная определенность энергии означает положи-

тельность собственных чисел тензора $\boldsymbol{\mathcal{K}} - \omega_0^{-2}\boldsymbol{\mathcal{N}}$.

Рассмотрим приближения для дисперсионного соотношения (2.13) вблизи ω_0 и вблизи ω_1. В окрестности ω_0 при $\omega_0 \neq \omega_1$, $\mathcal{N}_i > 0$ дисперсионная ветвь $k_i(\omega)$, соответствующая собственному числу N_i, имеет вид

$$k_i^2 \approx (\omega - \omega_0) 2A_{11}\omega_0(\omega_0^2 - \omega_1^2)/\mathcal{N}_i. \tag{2.16}$$

Действительно, при $\omega \to \omega_0$ собственные числа $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ много меньше $\mathcal{N}_i/(\omega^2 - \omega_0^2)$, и редуцированное уравнение Кристоффеля (2.13) можно записать как

$$(A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2)\mathbf{E} + k^2((\omega^2 - \omega_0^2)^{-1}\boldsymbol{\mathcal{N}})) \cdot \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}, \tag{2.17}$$

откуда и получаем (2.16). Если направление распространения волн не является особым для тензоров инерционных и упругих характеристик, то есть $\mathcal{N}_i > 0$, то все (n_1) дисперсионные ветви имеют запрещенную зону, ограниченную ω_0 (ниже ω_0 при $\omega_0 > \omega_1$, выше при $\omega_0 < \omega_1$). Тензор $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ может оказаться вырожденным, если тензор упругости в перекрестном члене имеет высокую группу симметрии.

При $\omega_0 = \omega_1$ из (2.17) следует, что $k_i^2 \approx A_{11}(\omega^2 - \omega_0^2)^2/\mathcal{N}_i$ вблизи этой частоты для всех n_1 ветвей, то есть запрещенной зоны нет.

Вблизи ω_1, напротив, $A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2)$ много меньше собственных чисел тензора $\boldsymbol{\mathcal{K}} + (\omega_1^2 - \omega_0^2)^{-1}\boldsymbol{\mathcal{N}}$, если только параметры не подобраны так, что данный тензор является вырожденным. Поэтому в окрестности ω_1 из (2.13) получаем $k \approx 0$, точнее,

$$\omega - \omega_1 \approx k^2 \frac{\xi_i}{2\omega_1}, \tag{2.18}$$

где ξ_i — собственные числа тензора $\boldsymbol{\mathcal{K}} - \boldsymbol{\mathcal{N}}/(\omega_0^2 - \omega_1^2)$. Таким образом, положительное решение для k^2 также исчезает при переходе через ω_1. От знака ξ_i

зависит, снизу или сверху от ω_1 находится полоса непропускания. В частном случае $\omega_1 = 0$ (при отсутствии упругого основания несущего континуума) из положительности энергии следует $\xi_i > 0$, но вместо формулы (2.18) получаем из (2.13) линейную зависимость $\omega(k) = k\sqrt{\xi_i/A_{11}}$ вблизи $\omega = 0$.

Детальный анализ (2.13) показывает, что при $\omega_0 < \omega_1$ запрещенные зоны (или зона) находятся ниже ω_1 и выше ω_0, при этом ниже ω_0 имеется падающий участок дисперсионной кривой, то есть для этих частот среда ведет себя как акустический дважды отрицательный метаматериал.

При $\omega_0 > \omega_1$, если обе частоты достаточно близки (или перевязка обобщенных координат достаточно сильна), запрещенные зоны (или зона) находятся между ними, а ниже ω_1 имеется падающий участок дисперсионной кривой. Если обе парциальные частоты равны ($\omega_1 = \omega_0$), запрещенная зона вблизи ω_0 отсутствует, но имеется падающий участок дисперсионной кривой ниже ω_0. В обратном случае существуют две запрещенные зоны — ниже каждой из парциальных частот.

2.2.2 Запрещенная зона для плоских волн при взаимосвязи между обобщенными координатами несущего континуума и динамического гасителя.

Уравнение Кристоффеля (2.11), (2.12) в данном случае выглядит следующим образом:

$$(A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2)\mathbf{E} + (\omega^2 - \omega_0^2)^{-1}\mathbf{C}_{10} \cdot \mathbf{A}_{00}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{10}^{\top} + k^2\boldsymbol{\mathcal{K}}) \cdot \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}, \tag{2.19}$$

$$\mathbf{Q}_0 = -\mathbf{A}_{00}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{10}^{\top} \cdot \mathbf{Q}_1/(\omega^2 - \omega_0^2). \tag{2.20}$$

Вблизи ω_0 имеем n_1 дисперсионных ветвей с запрещенной зоной выше ω_0:

$$k_i^2 = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\chi_i. \tag{2.21}$$

Здесь χ_i — собственные числа тензора $\boldsymbol{\mathcal{K}}^{-1/2} \cdot \mathbf{C}_{10} \cdot \mathbf{C}_{00}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{10}^{\top} \cdot \boldsymbol{\mathcal{K}}^{-1/2}$, они неотрицательны при неотрицательно определенной энергии деформации. Мы рассматриваем случай, когда они отличны от нуля.

Вблизи $\omega = 0$ редуцированное уравнение Кристоффеля (2.19) можно приблизить следующим образом:

$$(k^2\boldsymbol{\mathcal{K}} - \omega^2(A_{11}\mathbf{E} + \omega_0^{-2}\mathbf{C}_{10} \cdot \mathbf{C}_{00}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{10}^{\top}) + C_{11}\mathbf{E} - \mathbf{C}_{10} \cdot \mathbf{C}_{00}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{10}^{\top}) \cdot \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}. \tag{2.22}$$

В окрестности $\omega = 0$ решения для k^2 отрицательны, таким образом, имеется запрещенная зона от 0 до некоторой частоты отсечки.

У изотропного материала такого рода также имеется две запрещенные зоны частот (рис. 2.6). Это будет показано в разделе 2.3.1.

2.3 Дисперсионные соотношения изотропной линейной упругой редуцированной среды для случая трехмерных субконтинуумов.

2.3.1 Уравнения Кристоффеля и продольная волна для изотропного материала.

Некоторые обобщенные координаты могут соответствовать полярным величинам (не меняющимся при замене правила буравчика), а другие — ак-

сиальным (меняющим знак при замене ориентации системы отсчета) [291]. Упругий модуль, отвечающий за перевязку обобщенных координат субконтинуумов, должен быть таким, чтобы энергия деформации представляла собой полярный скаляр.

Не будем в данной работе рассматривать вопрос, возможно ли существование трехмерных векторов обобщенных координат смешанного типа (то есть включающих в себя как аксиальные, так и полярные величины), равно как и тензоров, отвечающих за взаимодействие этих координат, и какие бы последствия это повлекло. Придумать пример такой изотропной среды оказалось затруднительным. Ограничимся рамками более обычной ситуации, когда вектор специальных обобщенных координат и вектор несущих обобщенных координат представляют собой реальные физические объекты, то есть каждый из них является либо полярным, либо аксиальным. Заметим, что величины $\mathbf{q}_1, \nabla\mathbf{q}_1$ либо обе полярны, либо обе аксиальны. Тогда если $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{q}_1$ — одного типа, то тензор второго ранга $\mathbf{C}_{10}$ должен быть полярным, равно как и тензор третьего ранга $\mathbf{N}_{10}$, а если $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$ — разного типа, то $\mathbf{C}_{10}, \mathbf{N}_{10}$ аксиальны. Однако единственный изотропный тензор второго ранга — полярный тензор, пропорциональный $\mathbf{E}$, а единственный изотропный тензор третьего ранга — аксиальный тензор, пропорциональный тензору Леви–Чивиты $-\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ [282].

Для изотропного материала, тело-точка которого характеризуется трехмерными векторными обобщенными координатами несущего континуума и динамического гасителя, имеем

$$\mathbf{A}_{00} = A_{00}\mathbf{E}, \quad \mathbf{C}_{10} = C_{10}\mathbf{E}, \quad \mathbf{N}_{10} = N\mathbf{E}\times\mathbf{E}, \tag{2.23}$$

$$\mathbf{K} = \lambda\mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{i}^m\mathbf{i}^n)^S(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^S + 2\alpha(\mathbf{i}^m\mathbf{i}^n)^S(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^A, \tag{2.24}$$

где $\mathbf{i}_m$ — некоторый ортонормальный базис. Константы λ, μ, α соответствуют

упругим характеристикам несущего континуума. В случае, когда он является классической упругой средой, λ и μ имеют смысл коэффициентов Ламе. При этом $C_{10}N = 0$ в силу соображений о полярности и аксиальности $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$. Уравнения движения (2.7), (2.8) для изотропной среды таковы:

$$A_{00}(\ddot{\mathbf{q}}_0 + \omega_0^2 \mathbf{q}_0) - N\nabla \times \mathbf{q}_1 + C_{10}\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}, \tag{2.25}$$

$$A_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1 + C_{11}\mathbf{q}_1 + C_{10}\mathbf{q}_0 - (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{q}_1 + (\mu + \alpha)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{q}_1) - N\nabla \times \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}. \tag{2.26}$$

Как и в общем случае, при $C_{10} = 0, N \neq 0$ возможен режим $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega_0 t}$, если $\nabla \times \mathbf{Q}_0 = \mathbf{0}$. При $N = 0, C_{10} \neq 0$, напротив, для $\omega = \omega_0$ существует лишь тривиальное решение.

Уравнения Кристоффеля (2.25), (2.26) после преобразования Фурье записываются в следующем виде:

$$\mathbf{Q}_0 = \frac{-iN\mathbf{k} \times \mathbf{Q}_1 + C_{10}\mathbf{Q}_1}{A_{00}(\omega^2 - \omega_0^2)}, \tag{2.27}$$

$$(A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2) + \frac{C_{10}^2}{A_{00}}\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2})\mathbf{Q}_1 + (\lambda + 2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}_1 + \\ - (\mu + \alpha + \frac{N^2}{A_{00}}\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2})\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}_1) - i\frac{NC_{10}}{A_{00}}\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\mathbf{k} \times \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}. \tag{2.28}$$

Заметим, что (2.28) позволяет легко получить дисперсионное соотношение для продольной волны $\mathbf{Q}_1 = Q_1\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{Q}_0 = Q_0\hat{\mathbf{k}}$:

$$c_P^2 k^2 = \omega^2 - \omega_1^2 - \frac{\hat{\omega}^4}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{\omega^2 - \omega_0^2}, \tag{2.29}$$

где

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_0^2 + \omega_1^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2}{4} + \frac{C_{10}^2}{A_{00}A_{11}}}, \tag{2.30}$$

$$c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{A_{11}}, \quad \hat{\omega}^4 = \frac{C_{10}^2}{A_{00}A_{11}}. \tag{2.31}$$

Будем рассматривать лишь положительно определенную энергию деформации. При положительно определенной по $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$ энергии деформации имеем $C_{10}^2 < C_{11}C_{00}$, откуда $\omega_0^2\omega_1^2 > \hat{\omega}^4$, следовательно,

$$\omega_+^2 > \omega_-^2 \geqslant 0, \quad \omega_+ > \omega_0 > \omega_-, \quad \omega_+ > \omega_1 > \omega_-. \tag{2.32}$$

В случае, когда все участвующие в выражении (2.30) упруго-инерционные характеристики отличны от нуля, имеем две зоны непропускания для дисперсионного соотношения (2.29): $[0;\omega_-)$ и $(\omega_-;\omega_0]$. Нижняя ветвь дисперсионной кривой стремится к асимптоте $\omega = \omega_0 - 0$. В запрещенных зонах континуум является единожды отрицательным акустическим метаматериалом для волн растяжения–сжатия.

График дисперсионного соотношения показан на рисунке 2.2. Существует две запрещенные зоны: $[0;\omega_-)$ и $[\omega_0;\omega_+)$. Имеем $k \to +\infty$ при $\omega \to \omega_0 - 0$, и $\omega \to c_P k$ при $k \to \infty$.

В частном случае $C_{10} = 0, C_{11} \neq 0$, как легко видеть из (2.29), дисперсионная кривая продольной волны в изотропном материале представляет собой параболу $\omega^2 = c_P^2 k^2 + \omega_1^2$. Если $C_{11} = 0$, то продольная волна недисперсивна.

Масса в массе. Рассмотрим в контексте данной схемы с целью иллюстрации наиболее популярную в литературе по акустическим метаматериалам модель «масса в массе» (рис. 2.3.1). Ее линейное длинноволновое приближение дает следующие уравнения динамики ($(\cdot)'$ — производная по пространствен-

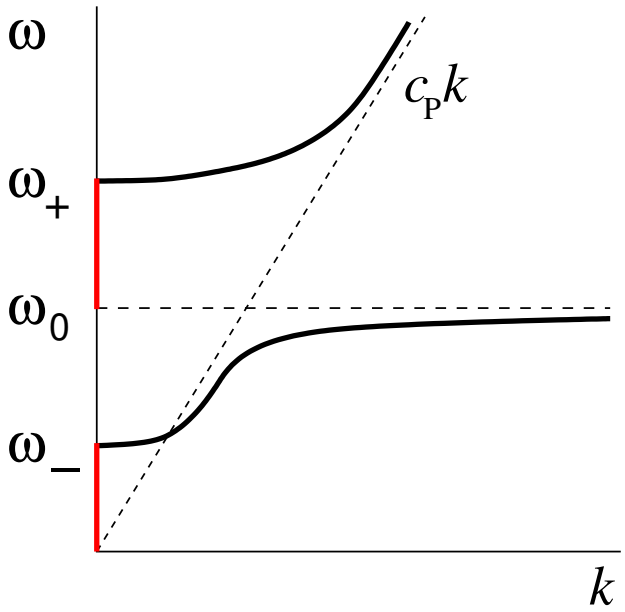

Рис. 2.2: График дисперсионного соотношения для продольной волны в упругом изотропном материале, $C_{10} \neq 0$.

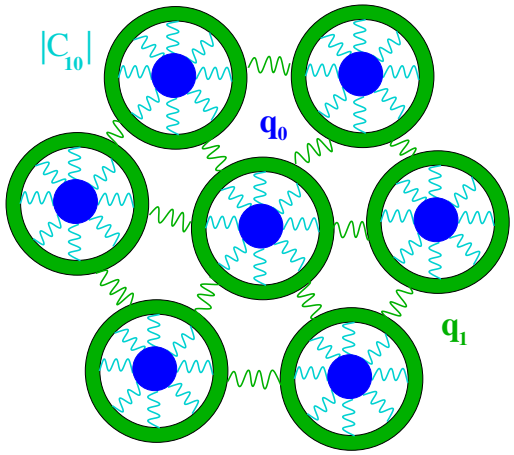

Рис. 2.3: Масса в массе — широко используемая дискретная модель метаматериала.

ной координате) в одномерном случае [213]:

$$\ddot{q}_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{A_{11}} q_1'' + \frac{|C_{10}|}{A_{11}}(q_1 - q_0), \tag{2.33}$$

$$\ddot{q}_0 = -\frac{|C_{10}|}{A_{00}}(q_1 - q_0). \tag{2.34}$$

Обобщая ситуацию на трехмерный случай при условии, что материал реагирует лишь на растяжение и сжатие, имеем

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(\nabla \cdot \mathbf{q}_1)^2 + \frac{1}{2}|C_{10}|(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_0^2) - |C_{10}|\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_0, \tag{2.35}$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(A_{00}\dot{\mathbf{q}}_0^2 + A_{11}\dot{\mathbf{q}}_1^2), \tag{2.36}$$

$\omega_0^2 = |C_{10}|/A_{00}, \quad \omega_1^2 = |C_{10}|/A_{11}, \; N = 0.$

Уравнения Лагранжа записываются в следующем виде:

$$A_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1 = (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{q}_1 - |C_{10}|(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0), \tag{2.37}$$

$$A_{00}\ddot{\mathbf{q}}_0 = |C_{10}|(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0). \tag{2.38}$$

Получается следующее дисперсионное соотношение для продольных волн:

$$c_P^2 k^2 = \omega^2 \frac{\omega^2 - \omega_+^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \tag{2.39}$$

$$\omega_0^2 = |C_{10}|/A_{00}, \quad \omega_- = 0, \quad \omega_+^2 = |C_{10}|(A_{00}^{-1} + A_{11}^{-1}). \tag{2.40}$$

В данном частном случае, когда $\omega_- = 0$, нижняя запрещенная зона отсутствует, а скорость продольных волн на низких частотах $c_p \neq 0$ (рис. 2.4). Скорость на высоких частотах по-прежнему стремится к c_P. Легко получить, что отношение квадратов скоростей волн на низких и высоких частотах таково:

$$\frac{c_p^2}{c_P^2} = \frac{A_{11}}{A_{00} + A_{11}}. \tag{2.41}$$

Вернемся к общему случаю изотропного линейного редуцированного материала. Как обсуждалось выше, в изотропных материалах один из модулей C_{10}, N равен 0. Рассмотрим поперечную гармоническую волну в этих случаях

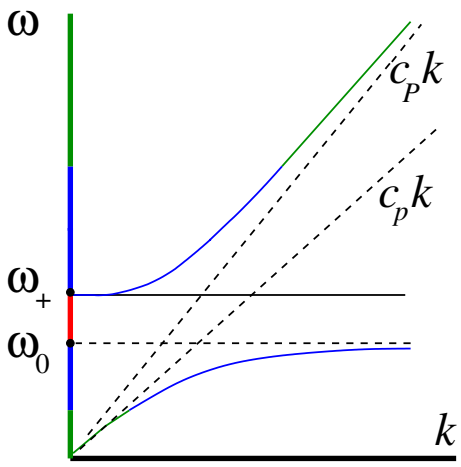

Рис. 2.4: Дисперсионные кривые продольных волн в метаматериале «масса в массе». Красным выделена запрещенная зона, синим — участки существенной дисперсии, зеленым — участки незначительной дисперсии.

по отдельности.

2.3.2 Поперечные плоские волны при взаимосвязи «деформация несущего континуума – координата динамического гасителя».

Редуцированное уравнение Кристоффеля (2.28) для поперечных волн при $C_{10} = 0$ принимает вид

$$[A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2) + k^2(\mu + \alpha + \frac{N^2}{A_{00}}\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2})](\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}. \tag{2.42}$$

Таким образом, дисперсионное соотношение для поперечной волны имеет вид

$$c_{S\alpha}^2 k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega^2 - \omega_*^2}, \tag{2.43}$$

где

$$c_{S\alpha}^2 = \frac{\mu + \alpha}{A_{11}}, \qquad \omega_*^2 = \omega_0^2 - \frac{N^2}{(\mu + \alpha)A_{00}}. \tag{2.44}$$

Графики дисперсионных кривых поперечных волн показаны на рис. 2.5. У

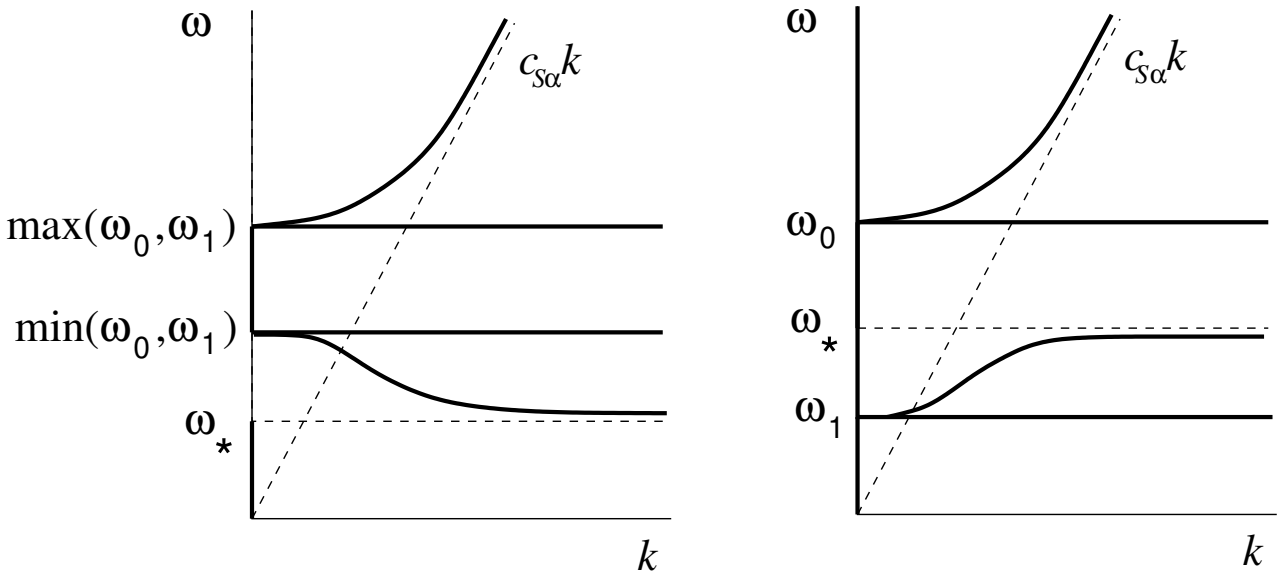

Рис. 2.5: Дисперсионные кривые поперечной волны в изотропном материале, $C_{10} = 0$. Частота $\omega_* < \omega_0$ уменьшается при увеличении перевязки между обобщенными координатами. $c_{S\alpha}^2 = (\mu + \alpha)/A_{11}$.

дисперсионного соотношения существует две запрещенные зоны частот, где континуум является единожды отрицательным акустическим метаматериалом для волн сдвига. Для достаточно большого значения параметра N, отвечающего за перевязку обобщенных координат, появляется падающий участок дисперсионной кривой. В этой области частот континуум является дважды отрицательным акустическим метаматериалом для поперечных волн. Отметим, что в данной рабочей зоне эффективный упругий параметр редуцированного уравнения Кристоффеля (2.42)

$$\mu + \alpha + \frac{N^2}{A_{00}(\omega^2 - \omega_0^2)} < 0, \tag{2.45}$$

и эффективный инерционный параметр $A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2)/\omega^2 < 0$, что согласуется с термином «дважды отрицательный акустический метаматериал», предложенному из энергетических соображений в [154].

2.3.3 Запрещенная зона для плоских волн при взаимосвязи между обобщенными координатами несущего континуума и динамического гасителя.

Заметим, что продольная волна в изотропном материале не зависит от упругого модуля N, определяющего перевязку координаты гасителя и градиента несущей координаты в энергии деформации. Таким образом, дисперсионное соотношение в данном случае совпадает с выражением (2.29).

Получаем из (2.28) уравнение Кристоффеля для поперечных волн в несущем континууме:

$$(\omega_1^2 - \omega^2 + \frac{\hat{\omega}^4}{\omega^2 - \omega_0^2})(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{Q}_1 - c_{S\alpha}^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}_1) = \mathbf{0}. \tag{2.46}$$

Отсюда получаем дисперсионное соотношение

$$c_{S\alpha}^2 k^2 = \omega^2 - \omega_1^2 + \frac{\hat{\omega}^4}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{2.47}$$

Оно совпадает с дисперсионным соотношением для продольной волны (2.29) с единственным отличием: характерная скорость c_P (скорость продольной волны на высоких частотах) заменяется на скорость $c_{S\alpha}$ (скорость поперечной волны на высоких частотах). Запрещенные зоны для обеих волн совпадают. В этих областях частот среда является единожды отрицательным акустическим метаматериалом для всех типов волн. Их дисперсионные кривые показаны на рисунке 2.6.

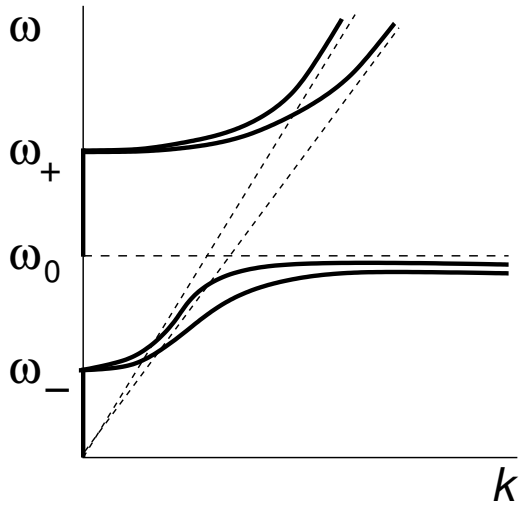

Рис. 2.6: Дисперсионные кривые для изотропного материала, $N = 0$. Частоты ω_- и ω_+ определяются параметрами среды, $\omega_- - \omega_+$ увеличивается при возрастании параметра, отвечающего за перевязку обобщенных координат.

2.3.4 Фазовая скорость.

Заметим, что в изотропном случае как продольная, так и поперечная волны имеют дисперсионное соотношение вида

$$c_{\text{inf}}^2 k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_a^2)(\omega^2 - \omega_b^2)}{\omega^2 - \omega_c^2} \tag{2.48}$$

Здесь c_{inf} — скорость на высоких частотах (c_P для продольных волн, $c_{S\alpha}$ — для волн сдвига – вращения), $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ — характеристические частоты (в зависимости от случая это могут быть частоты ω_*, ω_0, ω_1, $\omega_\pm$). Квадрат фазовой скорости, таким образом, равен

$$c_f^2 = c_{\text{inf}}^2 \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_c^2)}{(\omega^2 - \omega_a^2)(\omega^2 - \omega_b^2)}. \tag{2.49}$$

На высоких частотах групповая и фазовая скорости стремятся к c_{inf}.

Допустим, что ω_a — наибольшая из трех критических частот, и что мы

рассматриваем область $\omega \gg \omega_b$, $\omega \gg \omega_c$. Тогда

$$c_f \approx c_{\text{inf}} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_a^2}} \left(1 + \frac{\omega_b^2 - \omega_c^2}{2\omega^2}\right). \tag{2.50}$$

При $\omega \gg \omega_a$ получаем

$$c_f \approx c_{\text{inf}} \left(1 + \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2 - \omega_c^2}{2\omega^2}\right). \tag{2.51}$$

Заметим, что вблизи ω_a (выше нее) фазовая скорость пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{\Delta\omega}}$, где $\Delta\omega = \omega - \omega_a$. А именно,

$$c_f \approx \frac{c_{\text{inf}}}{\sqrt{\Delta\omega}} \sqrt{\frac{\omega_a(\omega_a^2 - \omega_c^2)}{2(\omega_a^2 - \omega_b^2)}}. \tag{2.52}$$

2.4 Дисперсионные соотношения гиротропного линейного упругого редуцированного материала для случая трехмерных субконтинуумов с комбинированной взаимосвязью.

В изотропной среде хотя бы один из тензоров $\mathbf{C}_{10}$ и $\mathbf{N}_{10}$ равен нулю. Однако в гиротропной среде, где не требуется симметрии по отношению к отражениям, оба они могут оказаться ненулевыми (за счет выбора полярного или аксиального скаляра — коэффициента при $\mathbf{E}, \mathbf{E} \times \mathbf{E}$). Сейсмологи полагают [308], что грунт представляет собой гиротропный сложный континуум.

Если $C_{10}N \neq 0$ (это возможно лишь если одна из констант в произведении аксиальна, а другая полярна), соотношение для продольной волны, как и в изотропном случае, легко получается из задачи (2.28). Оно совпадает с

дисперсионным соотношением для продольной волны в изотропном редуцированном упругом континууме сложной структуры (2.29).

Что касается поперечной волны, ее поведение существенно меняется. Как можно увидеть из (2.28), существует волна с круговой поляризацией, чей собственный вектор равен $\mathbf{Q}_1 = \hat{\mathbf{l}} + i\hat{\mathbf{m}}$, где $\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{k}}$ — ортонормальный базис, а дисперсионное соотношение выглядит следующим образом:

$$k^2\kappa_2 + (-\omega^2 + \omega_1^2)A_{11} + \frac{C^2 + k^2\hat{N}^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = k\frac{2C\hat{N}}{\omega^2 - \omega_0^2}, \tag{2.53}$$

Здесь введены константы $C = C_{10}/\sqrt{A_{00}}$, $\hat{N} = N/\sqrt{A_{00}}$, $\kappa_2 = \mu + \alpha$. Мы получаем при $\omega \neq \omega_0$

$$k^2(\kappa_2(\omega^2 - \omega_0^2) + \hat{N}^2) - 2kC\hat{N} + C^2 + (-\omega^2 + \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_0^2)A_{11} = 0. \tag{2.54}$$

Если потребовать, чтобы $\mathcal{U}$, определяемая формулой (2.5), была положительно определена, будет выполняться $\omega_0^2 > \hat{N}^2/\kappa_2$. Таким образом, на частоте ω_*, определяемой, как и ранее, выражением

$$\omega_*^2 = \omega_0^2 - \frac{\hat{N}^2}{\kappa_2} = \omega_0^2 - \frac{N^2}{(\mu + \alpha)A_{00}}, \tag{2.55}$$

уравнение для k становится линейным и имеет единственное решение

$$k(\omega_*) = \frac{C^2\kappa_2 + A_{11}\hat{N}^2(\omega_*^2 - \omega_1^2)}{2C\kappa_2\hat{N}^2}. \tag{2.56}$$

Для других частот ω решение уравнения (2.54) таково:

$$k_\pm = \frac{C\hat{N} \pm \sqrt{C^2\hat{N}^2 + (A_{11}(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_1^2) - C^2)\kappa_2(\omega^2 - \omega_*^2)}}{\kappa_2(\omega^2 - \omega_*^2)} \tag{2.57}$$

Данное выражение может быть записано в следующем виде:

$$c_{S\alpha}k_{\pm} = \frac{C\hat{N}/(A_{11}c_{S\alpha}) \pm \sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_{+*}^2)(\omega^2-\omega_{-*}^2)}}{\omega^2-\omega_*^2} \tag{2.58}$$

Здесь $c_{S\alpha}^2 = \kappa_2/A_{11}$, как и ранее, а частоты

$$\omega_{\pm*}^2 = \frac{\omega_1^2+\omega_*^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2-\omega_*^2}{2}\right)^2 + \frac{C^2}{A_{11}}} \geqslant 0 \tag{2.59}$$

вводятся аналогично частотам $\omega_{\pm}$, но при этом ω_*^2 входит в выражение вместо ω_0^2. Заметим, что скорость поперечных волн на высоких частотах и в этом случае стремится к $c_{S\alpha}$. Легко показать, что

$$\min(\omega_*^2,\omega_1^2) - \frac{C}{\sqrt{A_{11}}} < \omega_{-*}^2 < \min(\omega_*^2,\omega_1^2) < \\ < \max(\omega_*^2,\omega_1^2) < \omega_{+*}^2 < \max(\omega_*^2,\omega_1^2) + \frac{C}{\sqrt{A_{11}}}, \tag{2.60}$$

$$\omega_{-*}^2 < \omega_*^2 < \omega_0^2. \tag{2.61}$$

Различные знаки перед квадратным корнем в (2.58) соответствуют разной поляризации волны. Численный пример показан на рис. 2.7. Поведение кривых существенно зависит от параметров, и, изменяя их, мы можем заставить появляться и исчезать различные зоны отрицательного преломления.

Видим из (2.58), что $\pm c_{S\alpha}k \to \omega$ при $\omega \to \infty$. Если выражение под знаком квадратного корня, т.е. дискриминант квадратного уравнения, больше нуля, то существует два бегущих синусоидальных решения $k \in \mathbb{R}$. В противоположном случае имеется также бегущее (если $C\hat{N} \neq 0$, всегда существует $\Re k \neq 0$), но существенно затухающее решение ($\Im k \neq 0$). Видим, что при $C\hat{N} \neq 0$ волновое число k всегда имеет вещественную часть, то есть все волны являются

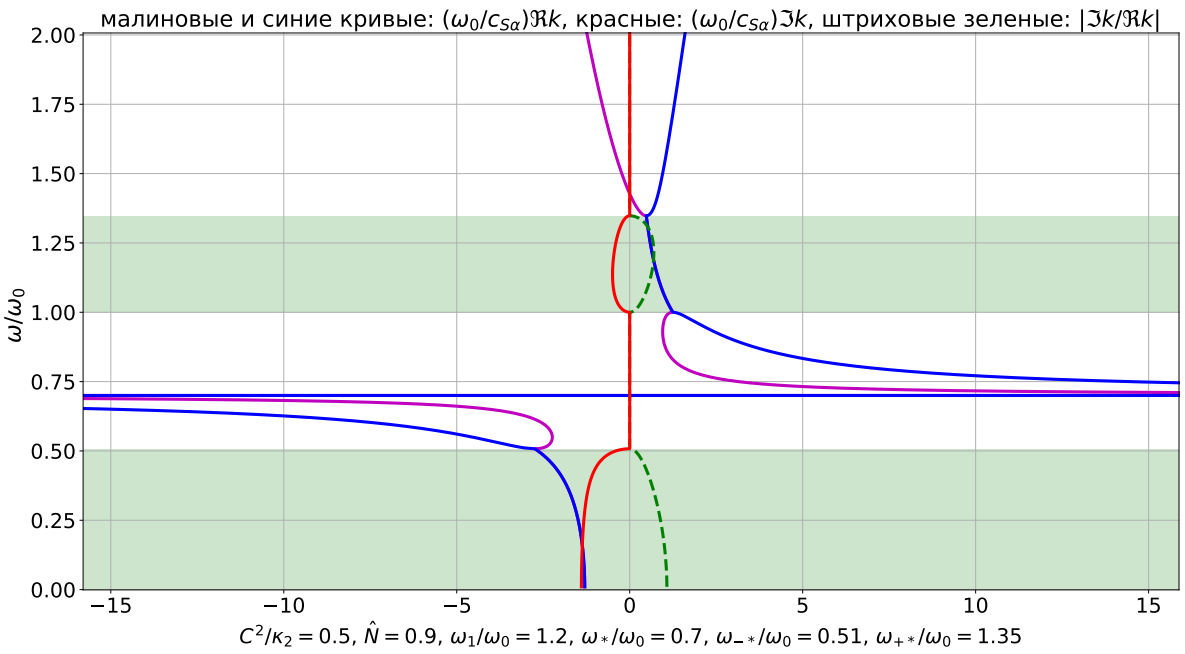

Рис. 2.7: Дисперсионные кривые для поляризованной волны сдвига в упругой гиротропной редуцированной среде, $\hat{N} > 0$. Зоны $(0;\omega_-)$ и $(\omega_0;\omega_+)$, где бегущие решения существуют, но обе поляризованные волны затухают, показаны зеленым цветом. В этой области они имеют одну и ту же длину волны для заданной частоты.

бегущими, включая убывающие по амплитуде. Это поведение отличается от поведения волны растяжения – сжатия, которая имеет запрещенные зоны и является плоской. Это отличие связано с тем, что упругая перевязка $\hat{N}$ влияет на волну сдвига, но не на волну растяжения – сжатия. Мы видим, что волна сдвига более чувствительна к присутствию микроструктурной степени свободы (моделируемой $\mathbf{q}_0$).

Поведение дисперсионных кривых качественно меняется в зависимости от параметров. Существует две зоны затухающих волн: зона $\omega < \omega_{-*}$ и зона $\omega \in (\min(\omega_0;\omega_{+*});\max(\omega_0;\omega_{+*}))$. Существует горизонтальная асимптота для обеих веток дисперсионных кривых $\omega = \omega_*$.

Поведение этих дисперсионных кривых довольно необычно, разнообразно

и заслуживает отдельного рассмотрения, которое выходит за рамки данной работы. Ограничимся лишь доказательством следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Рассматриваемая упругая среда по отношению к поперечным волнам также является дважды отрицательным акустическим метаматериалом в определенных зонах, в частности, в некоторой зоне выше* ω_*.

Доказательство. Вначале рассмотрим незатухающие решения дисперсионного соотношения (2.58) $k \in \mathbb{R}$. При $\omega \to \omega_*$ имеем $k \sim \frac{1}{\omega - \omega_*}$. Если $\hat{N} > 0$, для ветви со знаком «плюс» зона выше ω_* является зоной аномального преломления. Если $\hat{N} < 0$, это так для ветви со знаком «минус». Могут присутствовать, вообще говоря, другие зоны аномального преломления, например, в окрестности ω_0 и ω_{+*}. В этой области ветви «плюс» и «минус» дают то одно и то же значение k, т.е. одну и ту же фазовую скорость, но нередко соответствующие групповые скорости обладают разными знаками (особенно если $c_{S\alpha}$ достаточно велико).

Обсудим поведение $\Re k$ для затухающих решений. В областях, где дискриминант отрицателен, легко получить из уравнения (2.58), что $\Re k(\omega)$ убывает, и групповая скорость направлена противоположно фазовой скорости в верхней зоне, если $\hat{N} > 0$, и в нижней зоне, если $C\hat{N} < 0$ (рис. 2.8). Это означает, что области частот, где волны с круговой поляризацией затухают, также соответствуют аномальному преломлению, т.е. среда в этой области частот является дважды отрицательным акустическим метаматериалом.

Также, за исключением особых случаев, ось $k = 0$ разделяет зону нормального и аномального преломления. □

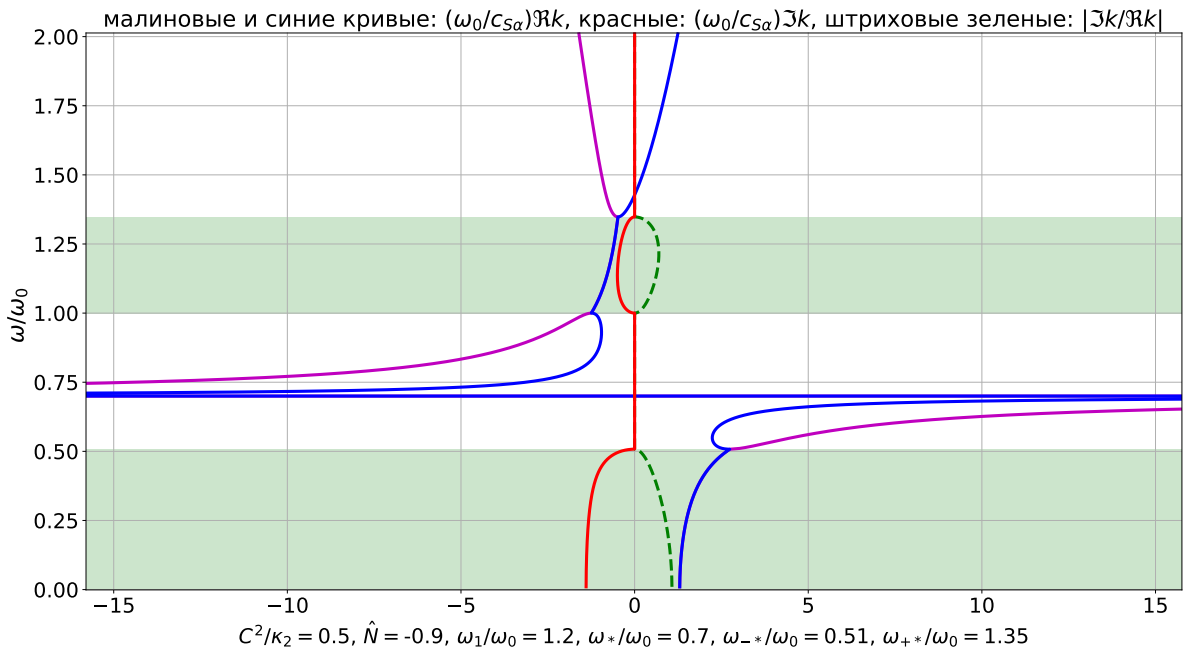

Рис. 2.8: Дисперсионные кривые для поляризованной волны сдвига в упругой гиротропной редуцированной среде, $C\hat{N} < 0$. Зоны $(0;\omega_-)$ и $(\omega_0;\omega_+)$, где бегущие решения существуют, но обе поляризованные волны затухают, указаны зеленым цветом. В этой области обе волны имеют одну и ту же длину для заданной частоты.

2.5 Редуцированные упругие континуумы с поворотными степенями свободы. Примеры.

2.5.1 Линейная редуцированная среда Коссера — единожды отрицательный акустический метаматериал с взаимосвязью «деформация несущего континуума – координата динамического гасителя».

Примером рассмотренного выше редуцированного континуума может служить линейная изотропная упругая редуцированная среда Коссера, уравнения которой были впервые предложены в [223] для описания консолидиро-

ванных сыпучих сред (рис. 2.9). Более подробно она будет рассмотрена в главе 3. Это линейный континуум, состоящий из бесконечно малых твердых тел, обладающих поворотными и трансляционными степенями свободы, подверженный действию сил и моментов. В качестве инерционных характеристик выступают массовая плотность ρ и плотность тензора инерции $\rho\mathbf{I}$. Мы будем рассматривать шаровой тензор инерции: $\mathbf{I} = I\mathbf{E}$.

Редуцированная среда Коссера является континуумом частного вида, поскольку мы требуем, чтобы среда не реагировала на градиент поворотов телточек. Пусть $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\theta}$ — малые векторы трансляционных и угловых перемещений,

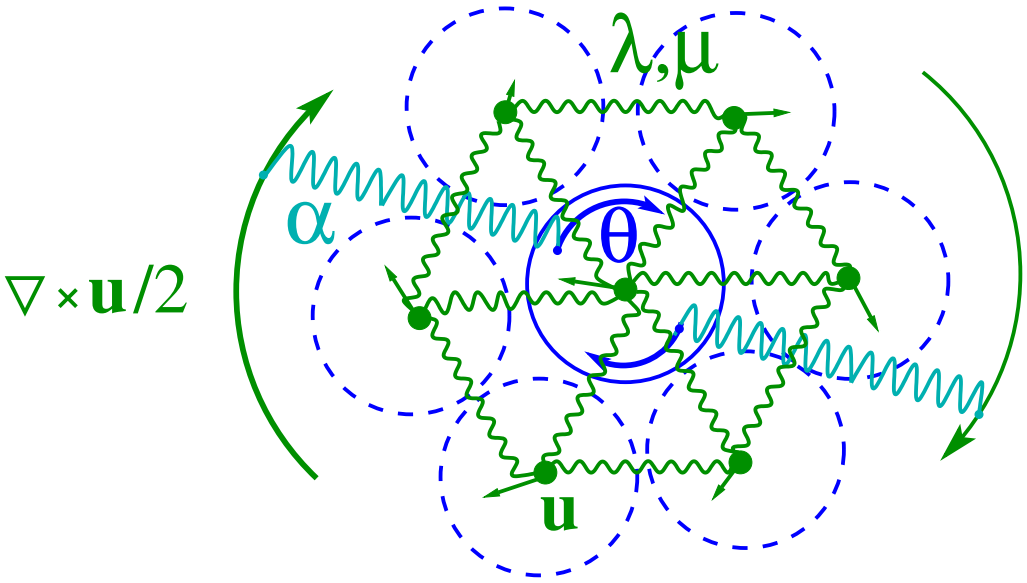

Рис. 2.9: Редуцированная изотропная линейная среда Коссера. Константы Ламе λ, μ отвечают за упругую реакцию на трансляционные деформации. Модуль упругости Коссера α ответствен за упругую реакцию на поворот телаточки относительно его окрестности $\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2$

соответственно. В изотропной редуцированной среде Коссера

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\rho\dot{\mathbf{u}}^2 + \rho I\dot{\boldsymbol{\theta}}^2), \tag{2.62}$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u})^S \cdot\cdot (\lambda\mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{i}^m\mathbf{i}^n)^S(\mathbf{i}^m\mathbf{i}^n)^S) \cdot\cdot (\nabla\mathbf{u})^S + \frac{1}{2}\alpha(\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2)^2. \tag{2.63}$$

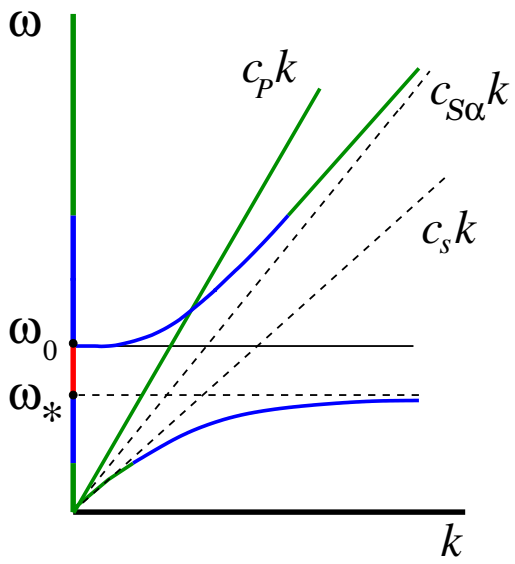

Рис. 2.10: Дисперсионные кривые изотропной линейной редуцированной упругой среды Коссера. Зеленым показаны области частот с малой дисперсией, синим — с существенной дисперсией, красным — запрещенная зона.

Здесь λ, μ — параметры Ламе, α — упругий модуль Коссера, ответственный за реакцию на разность микроповорота $\boldsymbol{\theta}$ и макроповорота $\nabla \times \mathbf{u}/2$. Видим, что данная среда является редуцированной в смысле определения, предложенного выше в разделе 2.1, поскольку ее упругая энергия зависит от микроповорота $\boldsymbol{\theta}$, но не зависит от $\nabla\boldsymbol{\theta}$. Роль несущего континуума выполняют трансляционные степени свободы ($\mathbf{q}_1 = \mathbf{u}$), роль распределенного динамического гасителя — поворотные ($\mathbf{q}_0 = \boldsymbol{\theta}$). Данная среда является примером материала, рассмотренного в пункте 2.3.2, поскольку взаимосвязь $\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}$ отсутствует, но в энергии деформации присутствует перекрестный член, связывающий $\nabla\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\theta}$. Таким образом, мы можем применить здесь полученные выше результаты. В данной среде $\omega_1 = 0$, таким образом, первая частота отсечки отсутствует, и в этом частном случае групповая скорость при $\omega = \omega_1 = 0$ отлична от нуля, в противоположность средам с ненулевой частотой ω_1. Аналогичный эффект в связи с отсутствием частоты отсечки наблюдается и для метаматериала «масса в массе». Подставив данные материальные параметры

в дисперсионные соотношения для изотропной линейной упругой редуцированной среды (2.29), (2.43), получим следующее. Продольная волна в среде Коссера оказывается такой же, как в классической упругой среде (без дисперсии), а волна сдвига – вращения удовлетворяет соотношению

$$c_{S\alpha}^2 k^2 = \omega^2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_*^2}, \tag{2.64}$$

график которого представлен на рисунке 2.10. Здесь $c_s^2 = \mu/\rho$ — квадрат скорости волн сдвига – вращения на малых частотах, $c_{S\alpha}^2 = (\mu+\alpha)/\rho$ — квадрат скорости волн сдвига – вращения на высоких частотах, $\omega_0^2 = 4\alpha/(\rho I)$ — квадрат частоты отсечки, $\omega_*^2 = \omega_0^2/(1+\alpha/\mu)$. Данные обозначения совпадают по смыслу с введенными выше для редуцированных сред общего вида. Для волн сдвига – вращения существует запрещенная зона $[\omega_*; \omega_0)$. Заметим, что дисперсионное соотношение для волн сдвига – вращения совпадает с соотношением для продольных волн для метаматериала «масса в массе» (2.40) с точностью до замены в последнем c_P на $c_{S\alpha}$, ω_0 на ω_*, ω_+ на ω_0.

Режим «независимых осцилляторов» $\mathbf{u} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}_0 e^{i\omega t}$ существует при $\omega = \omega_0$, $\nabla \times \boldsymbol{\Theta}_0 = \mathbf{0}$.

Фазовая скорость в данной среде удовлетворяет соотношению

$$c_f^2 = c_{S\alpha}^2 \frac{\omega^2 - \omega_*^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \to c_{S\alpha}^2 \quad \text{при } \omega \to \infty, \tag{2.65}$$

для оптической ветви при малом $\Delta\omega = \omega - \omega_0 > 0$ имеем

$$c_f \approx c_{S\alpha} \sqrt{\frac{\omega_0^2 - \omega_*^2}{2\omega_0 \Delta\omega}} = \frac{c_{S\alpha}}{\sqrt{2(1+\mu/\alpha)\Delta\omega/\omega_0}}. \tag{2.66}$$

2.5.2 Биротационный материал с анизотропной перевязкой между деформацией несущего континуума и координатой динамического гасителя.

Рассмотрим среду, каждое тело-точка которой содержит два малых твердых тела (две субчастицы) с шаровыми тензорами инерции, чьи плотности равны $\rho_0 I_0 \mathbf{E}$, $\rho_1 I_1 \mathbf{E}$, присоединенными упругими спиральными пружинами к жесткому континууму центров масс. Назовем ее биротационным материалом. Обозначим малые векторы поворота субчастиц $\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1$. Пусть плотности кинетической и упругой энергии материала записываются в виде

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\rho I_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}_0^{\,2} + \rho I_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_1^{\,2}), \tag{2.67}$$

$$\mathcal{U} = \frac{\kappa}{2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}(c_0 \boldsymbol{\theta}_0^2 + c_1 \boldsymbol{\theta}_1^2) + N \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}_0. \tag{2.68}$$

Здесь $\mathbf{K} = \kappa \mathbf{E}\mathbf{E}, \mathbf{N}_{10} = N\mathbf{E}\mathbf{n}$. Условие $\mathcal{U} \geqslant 0$ выполняется при $\kappa c_0 \geqslant N^2$.

Уравнения динамики такого материала выглядят следующим образом:

$$\rho I_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_0 + c_0 \boldsymbol{\theta}_0 + N \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{n} = \mathbf{0}, \tag{2.69}$$

$$\rho I_1 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 + c_1 \boldsymbol{\theta}_1 - \kappa \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_1 - N \nabla \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}. \tag{2.70}$$

Разыскивая их решение в виде $\boldsymbol{\theta}_{1,2} = \boldsymbol{\Theta}_{1,2} e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, получаем уравнение Кристоффеля:

$$((\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_1^2)(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})$$
$$+ ((\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_1^2) - k^2\kappa(\omega^2 - \omega_*^2)/(\rho I_1))\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \boldsymbol{\Theta}_1 = \mathbf{0}.$$
$$\rho I_0(\omega_0^2 - \omega^2)\boldsymbol{\Theta}_0 = -i\mathbf{n}\,\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1 N$$

Здесь $\omega_0^2 = \frac{c_0}{\rho I_0}$, $\omega_1^2 = \frac{c_1}{\rho I_1}$. Обозначим $\omega_*^2 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0^2 - N^2/(\kappa\rho I_0)$. В силу $\mathcal{U} \geqslant 0$ имеем $\omega_*^2 \geqslant 0$, и в силу определения $\omega_0^2 > \omega_*^2$.

Возможны два режима «независимых осцилляторов»:

1. $\omega = \omega_0$, $\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\Theta}_0 e^{i\omega_0 t}$, где $\nabla\boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$, и

2. $\omega = \omega_1$, $\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\Theta}_1 e^{i\omega_1 t}$, где $\nabla \cdot \boldsymbol{\Theta}_1 = \mathbf{0}$.

Поперечные волны в таком материале не распространяются, последний режим соответствует вырожденной поперечной волне.

Для продольной волны $\boldsymbol{\Theta}_1 = \Theta_1\hat{\mathbf{k}}, \quad \boldsymbol{\Theta}_0 = -iNk\Theta_1\mathbf{n}, \quad c_P^2 = \kappa/(\rho I_1)$

$$(c_P k)^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_1^2)}{\omega^2 - \omega_*^2}, \tag{2.71}$$

График дисперсионного соотношения представлен на рисунке 2.5, поскольку дисперсионное соотношение оказывается таким же, как для поперечной волны в изотропном случае.

2.5.3 Биротационный изотропный материал — единожды отрицательный акустический метаматериал с взаимосвязью между обобщенными координатами несущего континуума и динамического гасителя.

Рассмотрим аналогичный материал с другим типом взаимосвязи субконтинуумов. Тело-точка, как и в предыдущем примере, содержит два малых твердых тела (две субчастицы) со сферическими тензорами инерции, а центры масс тел-точек неподвижны.

Плотности тензоров инерции обозначим $\rho I_0\mathbf{E}$, $\rho I_1\mathbf{E}$. Субчастицы присоединены упругими поворотными пружинами к континууму центров масс тел-

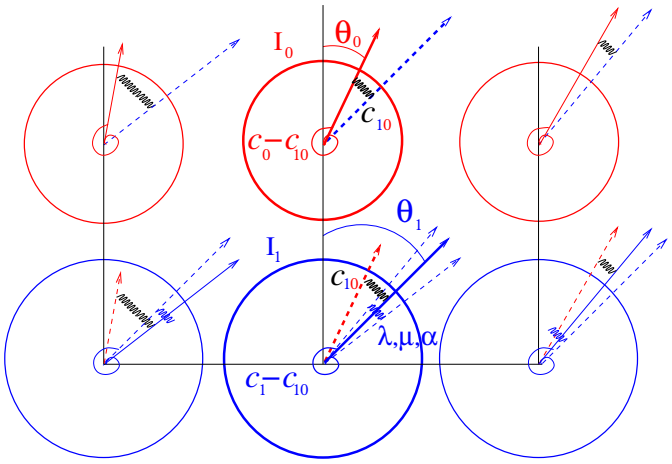

Рис. 2.11: Биротационный материал. Тела-точки несущего континуума (синего цвета) взаимодействуют между собой, за это отвечают упругие модули λ, μ, α. Они также взаимодействуют с телами-точками распределенного динамического гасителя (показаны красным), за взаимодействие отвечает упругий параметр c_{10}. Упругая константа c_1 ответственна за реакцию среды на поворот тел-точек несущего континуума относительно основания, а c_0 играет ту же роль для распределенного динамического гасителя. Среда трехмерна, однако схематически изображена в одном измерении.

точек. Малые векторы поворота субчастиц, как и ранее, обозначим $\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1$. Упругое взаимодействие между субчастицами определяется упругой константой C_{10}. Пусть плотности кинетической и упругой энергии заданы выражениями

$$\mathcal{K} = \frac{\rho}{2}(I_0\dot{\boldsymbol{\theta}}_0^2 + I_1\dot{\boldsymbol{\theta}}_1^2), \tag{2.72}$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{\theta}_1 \cdot\cdot\, (\lambda\mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^S(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^S + 2\alpha(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^A(\mathbf{i}_n\mathbf{i}_m)^A) \cdot\cdot\, \nabla\boldsymbol{\theta}_1^\top + \frac{1}{2}c_1\boldsymbol{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}c_0\boldsymbol{\theta}_0^2 + c_{10}\boldsymbol{\theta}_1 \cdot \boldsymbol{\theta}_0, \tag{2.73}$$

энергия деформации $\mathcal{U} \geqslant 0$ при $c_0\, c_1 > c_{10}^2$. Уравнения динамики (2.26) выглядят следующим образом:

$$\rho I_0\ddot{\boldsymbol{\theta}}_0 + c_0\boldsymbol{\theta}_0 + c_{10}\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{0}, \tag{2.74}$$

$$\rho I_1 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 + c_1 \boldsymbol{\theta}_1 + c_{10} \boldsymbol{\theta}_0 = \nabla \cdot (\lambda \mathbf{E} \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_1 + 2\mu \nabla \boldsymbol{\theta}_1^S + 2\alpha \nabla \boldsymbol{\theta}_1^A). \qquad (2.75)$$

Мы можем получить все параметры дисперсионного соотношения, подставляя в формулы (2.29), (2.47) $A_{00} = \rho I_0, A_{11} = \rho I_1, C_{00} = c_0, C_{11} = c_1, C_{10} = c_{10}$.

Итак, в разделах 2.1–2.5 было показано, что если упругий линейный континуум с голономными идеальными связями является редуцированным, то есть его упругая энергия не зависит от градиента части обобщенных координат, при определенных условиях, налагаемых на упруго-инерционные характеристики, континуум имеет полосу (или полосы) непропускания (где является единожды отрицательным акустическим метаматериалом), и в некоторых случаях падающий участок дисперсионной характеристики (где он является дважды отрицательным акустическим метаматериалом). Особая векторная обобщенная координата, от градиента которой не зависит упругая энергия, соответствует «распределенному динамическому гасителю», который на частотах, близких к парциальным, существенно меняет динамику системы. Полоса или полосы непропускания имеются во всех невырожденных случаях. Показано, что при наличии достаточно сильной перевязки между градиентом несущей координаты и особой координатой либо в случае, когда парциальная частота особой координаты («гасителя» ω_0) ниже парциальной частоты несущей координаты ω_1, появляется падающий участок дисперсионной кривой для волны сдвига. Для изотропного материала с $\omega_0 > \omega_1$ он тем больше, чем больше упругий модуль, отвечающий за перевязку.

2.6 Уравнения Лагранжа линейной вязкоупругой редуцированной среды.

Основные результаты данного раздела изложены в [109]. В случае вязкоупругой среды, описанной двумя обобщенными векторными координатами произвольной размерности: «особой» координаты $\mathbf{q}_0$ и координаты «несущего континуума» $\mathbf{q}_1$, уравнения Лагранжа для данного сложного континуума записываются следующим образом

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_1} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{q}_1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} + \nabla \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \nabla \dot{\mathbf{q}}_1}, \tag{2.76}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_0} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}}_0}. \tag{2.77}$$

Здесь Φ — диссипативная функция Рэлея, являющаяся квадратичной функцией $\dot{\mathbf{q}}_0, \dot{\mathbf{q}}_1, \nabla\dot{\mathbf{q}}_1$. Эти уравнения — обобщение уравнений Лагранжа для упругого континуума, которые приведены в [297], векторная форма уравнений в случае редуцированного упругого континуума приведена выше (2.2). Рассматривается линейный материал, поэтому коэффициенты в квадратичной форме не зависят от обобщенных координат. Диссипативная функция не зависит от $\nabla\dot{\mathbf{q}}_0$, поскольку мы рассматриваем редуцированный континуум. Математически это означает, что тензоры, описывающие материальные свойства, являются вырожденными в части, соответствующей зависимости от $\nabla\mathbf{q}_0$ и $\nabla\dot{\mathbf{q}}_0$.

Модифицируя таким образом рассмотренную выше упругую редуцированную среду, мы получим вязкоупругий материал с вязкостью типа Кельвина – Фойгта [312] со специфическими энергией деформации, кинетической

энергией и диссипативной функцией:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \frac{1}{2}\nabla\mathbf{q}_1^\top \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{K} \cdot\cdot \nabla\mathbf{q}_1 + \frac{1}{2}C_{11}\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{C}_{00}\cdot\mathbf{q}_0 + \\
&\qquad + \nabla\mathbf{q}_1^\top \cdot\cdot\, {}^3\mathbf{N}_{10}\cdot\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1\cdot\mathbf{C}_{10}\cdot\mathbf{q}_0, \\
\Phi &= \frac{1}{2}\nabla\dot{\mathbf{q}}_1 \cdot\cdot\, \boldsymbol{\beta}_{11} \cdot\cdot \nabla\dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{1}{2}B_{11}\dot{\mathbf{q}}_1\cdot\dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_0\cdot\mathbf{B}_{00}\cdot\dot{\mathbf{q}}_0 + \\
&\qquad + \nabla\dot{\mathbf{q}}_1^\top\cdot\boldsymbol{\nu}_{10}\cdot\dot{\mathbf{q}}_0 + \dot{\mathbf{q}}_1\cdot\mathbf{B}_{10}\cdot\dot{\mathbf{q}}_0, \\
\mathcal{K} &= \dot{\mathbf{q}}_0\cdot\mathbf{A}_{00}\cdot\dot{\mathbf{q}}_0/2 + A_{11}\dot{\mathbf{q}}_1\cdot\dot{\mathbf{q}}_1/2.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Тензоры и скаляры ${}^4\mathbf{K}$, C_{11}, $\mathbf{C}_{00}$, $\mathbf{N}_{10}$, $\mathbf{C}_{10}$ характеризуют упругие свойства среды, ${}^4\boldsymbol{\beta}_{11}$, B_{11}, $\mathbf{B}_{00}$, $\boldsymbol{\nu}_{10}$, $\mathbf{B}_{10}$ ее вязкие свойства, а $\mathbf{A}_{00}$, A_{11} — инерционные. Требуем, чтобы $\mathbf{A}_{00}$ был невырожденным тензором, т.е. существовал бы $\mathbf{A}_{00}^{-1}$. Для простоты полагаем

$$\mathbf{C}_{00} = \omega_0^2\mathbf{A}_{00}, \qquad \mathbf{B}_{00} = b_0\mathbf{A}_{00}, \tag{2.79}$$

где ω_0 представляет собой единственную парциальную частоту особой координаты $\mathbf{q}_0$, b_0 — скалярный параметр диссипации упругого основания «распределенного динамического гасителя» $\mathbf{q}_0$. Если $\mathbf{A}_{00} = A_{00}\mathbf{E}$, $\mathbf{B}_{00} = B_{00}\mathbf{E}$, то $b_0 = B_{00}/A_{00}$.

Парциальная частота «несущей координаты» $\mathbf{q}_1$ равна

$$\omega_1 = \sqrt{C_{11}/A_{11}}, \tag{2.80}$$

а соответствующий коэффициент диссипации упругого основания «несущего континуума» обозначим за $b_1 = B_{11}/A_{11}$.

Запишем уравнения динамики (2.76), (2.77) в явной форме:

$$A_{11}(\ddot{\mathbf{q}}_1 + b_1\dot{\mathbf{q}}_1 + \omega_1^2\mathbf{q}_1) + \mathbf{B}_{10}\cdot\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{C}_{10}\cdot\mathbf{q}_0 \\ -\nabla\cdot({}^4\mathbf{K}\cdot\cdot\nabla\mathbf{q}_1 + {}^4\boldsymbol{\beta}_{11}\cdot\cdot\nabla\dot{\mathbf{q}}_1 + {}^3\boldsymbol{\nu}_{10}\cdot\dot{\mathbf{q}}_0 + {}^3\mathbf{N}_{10}\cdot\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}. \tag{2.81}$$

$$\mathbf{A}_{00}\cdot(\ddot{\mathbf{q}}_0 + b_0\dot{\mathbf{q}}_0 + \omega_0^2\mathbf{q}_0) + \nabla\dot{\mathbf{q}}_1^\top\cdot\cdot\,{}^3\boldsymbol{\nu}_{10} + \nabla\mathbf{q}_1^\top\cdot\cdot\,{}^3\mathbf{N}_{10} \\ + \dot{\mathbf{q}}_1\cdot\mathbf{B}_{10} + \mathbf{q}_1\cdot\mathbf{C}_{10} = \mathbf{0}. \tag{2.82}$$

2.7 Уравнение Кристоффеля для вязкоупругой линейной редуцированной среды.

Будем искать решение уравнений (2.82), (2.81) в виде $\mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}$, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{Q}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}$. Частота ω будет вещественной, волновой вектор $\mathbf{k}$ — мнимым. Здесь векторы $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$ имеют размерности m_0, m_1, соответственно. Получаем

$$(ib_0\omega - \omega^2 + \omega_0^2)\mathbf{A}_{00}\cdot\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1\cdot(i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{N}_{10} + i\omega\boldsymbol{\nu}_{10}) + \mathbf{C}_{10} + i\omega\mathbf{B}_{10}) = \mathbf{0}, \tag{2.83}$$

$$(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{K} + i\omega\boldsymbol{\beta}_{11})\cdot\mathbf{k} + (ib_1\omega - \omega^2 + \omega_1^2)A_{11}\mathbf{E})\cdot\mathbf{Q}_1 \\ +(\mathbf{C}_{10} + i\omega\mathbf{B}_{10} - i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{N}_{10} + i\omega\boldsymbol{\nu}_{10}))\cdot\mathbf{Q}_0 = \mathbf{0}. \tag{2.84}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичный тензор размерности m_1. Если $\mathbf{A}_{00}$ невырожден (т.е. все обобщенные координаты инерционны), можно выразить $\mathbf{Q}_0$ через $\mathbf{Q}_1$ из уравнения (2.83) и подставить это выражение в (2.84):

$$\mathbf{Q}_0 = (\omega^2 - \omega_0^2 - ib_0\omega)^{-1}\mathbf{A}_{00}^{-1}\cdot(\mathbf{C}_{10} - \omega\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\nu}_{10} + i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{N}_{10} + \omega\mathbf{B}_{10}))^\top\cdot\mathbf{Q}_1, \tag{2.85}$$

$$(\mathbf{k}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{k}+i\omega\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\beta}_{11}\cdot\mathbf{k}+(ib_1\omega-\omega^2+\omega_1^2)A_{11}\mathbf{E}+$$
$$+(\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega)^{-1}(\mathbf{C}_{10}+\omega\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\nu}_{10}+i(-\mathbf{k}\cdot{}^3\mathbf{N}_{10}+\omega\mathbf{B}_{10}))\cdot$$
$$\mathbf{A}_{00}^{-1}\cdot(\mathbf{C}_{10}-\omega\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\nu}_{10}+i(\mathbf{k}\cdot{}^3\mathbf{N}_{10}+\omega\mathbf{B}_{10}))^{\top})\cdot\mathbf{Q}_1=\mathbf{0}. \quad (2.86)$$

Уравнение (2.86) представляет собой редуцированное уравнение Кристоффеля «несущей» обобщенной координаты $\mathbf{q}_1$.

Обозначим

$$\mathbb{K}=\mathbf{K}+i\omega\boldsymbol{\beta}_{11}, \qquad \mathbb{C}=(\mathbf{C}_{10}+i\omega\mathbf{B}_{10})\cdot\mathbf{A}_{00}^{-1/2}, \quad (2.87)$$
$$\mathbb{N}=\hat{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{N}_{10}+i\omega\boldsymbol{\nu}_{10})\cdot\mathbf{A}_{00}^{-1/2}. \quad (2.88)$$

Здесь $\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{k}/k$, $k=|\mathbf{k}|$. Мы также можем записать редуцированное уравнение Кристоффеля (2.86) как

$$\left(\mathbf{k}\cdot\mathbb{K}\cdot\mathbf{k}+(-\omega^2+\omega_1^2+ib_1\omega)A_{11}\mathbf{E}+\frac{(\mathbb{C}-ik\mathbb{N})\cdot(\mathbb{C}+ik\mathbb{N})^{\top}}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega}\right)\cdot\mathbf{Q}_1=\mathbf{0}, \quad (2.89)$$

или

$$\left(\mathbf{k}\cdot\mathbb{K}\cdot\mathbf{k}+(-\omega^2+\omega_1^2+ib_1\omega)A_{11}\mathbf{E}+\frac{\mathbb{C}\cdot\mathbb{C}^{\top}+k^2\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}^{\top}}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega}-ik\frac{2(\mathbb{N}\cdot\mathbb{C}^{\top})^A}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega}\right)\cdot\mathbf{Q}_1=\mathbf{0}. \quad (2.90)$$

В частном случае, если мы рассмотрим трехмерный вектор $\mathbf{q}_1$, используя тот факт, что для каждого трехмерного симметричного тензора второго ранга $\mathbf{S}$ и антисимметричного тензора $\mathbf{A}$ с сопутствующим вектором $\mathbf{a}$ (т.е. $\mathbf{a}=$

$-\mathbf{A}_\times/2$, где векторный инвариант $[A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n]_\times = A_{mn}\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n$, см. [291])

$$\det(\mathbf{S}+\mathbf{A}) = \det\mathbf{S} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{a}, \tag{2.91}$$

получаем из (2.86) дисперсионное соотношение

$$\det\left(k^2\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbb{K}\cdot\hat{\mathbf{k}} + A_{11}(\omega_1^2-\omega^2+ib_1\omega)\mathbf{E} + \frac{\mathbb{C}\cdot\mathbb{C}^\top + k^2\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}^\top}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega}\right)$$
$$+ k^2\mathbf{n}\cdot\left(k^2\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbb{K}\cdot\hat{\mathbf{k}} + A_{11}(\omega_1^2-\omega^2+ib_1\omega)\mathbf{E} + \frac{\mathbb{C}\cdot\mathbb{C}^\top + k^2\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}^\top}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega}\right)\cdot\mathbf{n} = 0, \tag{2.92}$$

где $\mathbf{n} = [\mathbb{N}\cdot\mathbb{C}^\top]_\times$, $\quad \mathbf{n}\times\mathbf{E} = -2(\mathbb{N}\cdot\mathbb{C}^\top)^A$, что, если $\omega^2 - ib_0\omega - \omega_0^2 \neq 0$, можно переписать в виде

$$\det((\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega)(k^2\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbb{K}\cdot\hat{\mathbf{k}} + A_{11}(-\omega^2+\omega_1^2+ib_1\omega)\mathbf{E}) + \mathbb{C}\cdot\mathbb{C}^\top + k^2\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}^\top))$$
$$+ k^2(\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega)^2\mathbf{n}\cdot((\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega)(k^2\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbb{K}\cdot\hat{\mathbf{k}} + A_{11}(-\omega^2+\omega_1^2+ib_1\omega)\mathbf{E})$$
$$+ \mathbb{C}\cdot\mathbb{C}^\top + k^2\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}^\top)\cdot\mathbf{n} = 0. \tag{2.93}$$

2.8 Уравнение Кристоффеля для линейных вязкоупругих изотропной и гиротропной редуцированных сред.

Далее мы предположим, что трехмерные векторы $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{q}_1$ описывают движение изотропной редуцированной оснащенной среды или иной редуцированной среды со всеми изотропными характеристиками, кроме одной, меняющей знак при отражении (например, особой гиротропной среды, обсуждавшейся в разделе 2.4).

Если среда изотропна по своим упругим и инерционным характеристикам, принцип Кюри – Неймана [49] позволяет упростить редуцированное уравнение Кристоффеля (2.90). Действительно, тензоры $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ и $\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\beta}_{11} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ в этом случае могут зависеть только от вектора $\hat{\mathbf{k}}$ и, следовательно, симметричный тензор $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbb{K} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ имеет вид

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbb{K} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \kappa_1(1 + i\beta_1\omega)\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} + \kappa_2(1 + i\beta_2\omega)(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}), \tag{2.94}$$

где κ_1, κ_2 описывают упругие свойства среды, а β_1, β_2 — вязкие. Напомним, что $\kappa_1 = \lambda + 2\mu, \kappa_2 = \mu + \alpha$. Используя те же соображения симметрии, что и выше, запишем для изотропных тензорных характеристик

$$\mathbf{N}_{10} = N\mathbf{E} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\nu}_{10} = n\mathbf{N}_{10}. \tag{2.95}$$

Учитывая, что $\mathbb{N} = \hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{N}_{10} + i\omega\boldsymbol{\nu}_{10}) \cdot \mathbf{A}_{00}^{-1/2}$, и в силу изотропии $\mathbf{A}_{00} = A_{00}\mathbf{E}$, получим

$$\mathbb{N} = \hat{N}(1 + in\omega)\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}, \qquad \mathbb{N} \cdot \mathbb{N}^\top = \hat{N}^2(1 + in\omega)^2(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}). \tag{2.96}$$

Для изотропной среды $\mathbf{C}_{10} = C_{10}\mathbf{E}$, $\mathbf{B}_{10} = b_{10}\mathbf{C}_{10}$,

$$\mathbb{C} \cdot \mathbb{C}^\top = C^2(1 + ib_{10}\omega)^2\mathbf{E}. \tag{2.97}$$

Здесь мы ввели диссипативные параметры n, b_{10}. Если $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$ — два полярных или два аксиальных вектора, то N — аксиальный скаляр, а C_{10} — полярный. Если одна из обобщенных векториальных координат $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$ полярна, а другая аксиальна, то N — полярный скаляр, а C_{10} — аксиальный. Заметим, что их произведение — всегда аксиальный скаляр. Коэффициенты n, b_{10} полярны,

поскольку полярная или аксиальная природа соответствующих диссипативных параметров — такая же, как у упругих модулей, служащих перевязкой между теми же объектами, и определяется произведением Nn, $C_{10}b_{10}$.

Тензор, влекущий существование поляризованных волн в упругом случае для гиротропного континуума, для изотропной среды равен 0:

$$(\mathbb{N}\cdot\mathbb{C}^{\top})^{A} = C\hat{N}(1+ib_{10}\omega)(1+in\omega)\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}, \tag{2.98}$$

при этом, так как $C_{10}N$ аксиален, равно как и операция векторного произведения, а $A_{00}, b_{10}, n, \omega$ полярны, данный тензор третьего ранга является полярным. Таких изотропных тензоров (кроме нулевого) не существует, но в гиротропной среде он может присутствовать.

Подставляя данные выражения в редуцированное уравнение Кристоффеля (уравнение (2.90)), в случае изотропных тензорных характеристик получаем

$$\Bigg(k^2(\kappa_1(1+i\beta_1\omega)\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} + \kappa_2(1+i\beta_2\omega)(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})) + (-\omega^2+\omega_1^2+ib_1\omega)A_{11}\mathbf{E} + \frac{C^2(1+ib_{10}\omega)^2\mathbf{E} + k^2\hat{N}^2(1+in\omega)^2(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega} - ik\frac{2C\hat{N}(1+ib_{10}\omega)(1+in\omega)}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}\Bigg)\cdot\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}. \tag{2.99}$$

2.9 Изотропная линейная вязкоупругая редуцированная среда. Примеры.

Степени свободы $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$ могут иметь любую природу. Здесь мы упомянем лишь два примера трехмерных сред, соответствующих рассматриваемой схеме, однако возможно сконструировать множество других материалов, вы-

бирая параметры среды так, чтобы получить интересные волновые свойства.

2.9.1 Редуцированная линейная вязкоупругая среда Коссера.

В качестве примера трехмерной изотропной среды рассмотрим изотропную линейную вязкоупругую среду Коссера (подробно она будет исследована в разделе 3.4, где получены уравнения данной среды). Этот пример иллюстрирует формальную схему, которая будет обсуждаться ниже в данном разделе. Итак, упругое взаимодействие в среде заменяется на вязкоупругое. Упругой постоянной Ламе λ сопутствует диссипативная $\lambda\varkappa$, модулю сдвига μ — диссипативный параметр $\mu\nu$, а упругому модулю Коссера α — диссипативная константа $\alpha\beta$.

Вязкоупругая редуцированная среда Коссера (рис. 2.9) была рассмотрена в работах соискателя [110, 116, 206]. Уравнения в перемещениях выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+2\alpha\nabla\times(\boldsymbol{\theta}-\nabla\times\mathbf{u}/2)\\ +(\lambda\varkappa+2\mu\nu)\nabla\nabla\cdot\dot{\mathbf{u}}-\mu\nu\nabla\times(\nabla\times\dot{\mathbf{u}})\\ +2\alpha\beta\nabla\times(\boldsymbol{\theta}-\nabla\times\mathbf{u}/2)^{\cdot}=\rho\ddot{\mathbf{u}},\end{aligned}\quad(2.100)$$

$$-4\alpha(\boldsymbol{\theta}-\nabla\times\mathbf{u}/2)-4\alpha\beta(\boldsymbol{\theta}-\nabla\times\mathbf{u}/2)^{\cdot}=\rho I\ddot{\boldsymbol{\theta}},\quad(2.101)$$

где λ,μ — параметры Ламе, α — упругий модуль Коссера, ответственный за реакцию на различие микро- и макроповорота $\boldsymbol{\theta}-\nabla\times\mathbf{u}/2$ (т.е. на поворот тела-точки относительно окрестности). Мы полагаем в этом разделе, что тензор инерции тел-точек — шаровой, а его плотность равна $\rho I\mathbf{E}$. Редуцированная среда Коссера не реагирует на $\nabla\boldsymbol{\theta}$ или его производные по времени.

В данном примере $\mathbf{q}_0 = \boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}_1 = \mathbf{u}$,

$$A_{11} = \rho, \quad A_{00} = \rho I, \quad C_{11} = 0, \quad C = 0, \quad C_{00} = 4\alpha, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{4\alpha}{\rho I},$$
$$\kappa_1 = \lambda + 2\mu, \quad \kappa_2 = \mu, \quad \hat{N} = -\frac{2\alpha}{\sqrt{\rho I}},$$
$$b_1 = 0, \quad b_0 = \beta, \quad b_{10} = 0, \quad n = \beta, \quad \beta_1 = \frac{\lambda\varkappa + 2\mu\nu}{\lambda + 2\mu}, \quad \beta_2 = \nu. \tag{2.102}$$

Все материальные константы здесь являются полярными.

Продольная волна является классической, поскольку мы имеем вырожденный случай $C = 0$. Пример дисперсионных кривых для поперечной волны показан на рис. 2.12. Мы видим, что в данном численном примере на

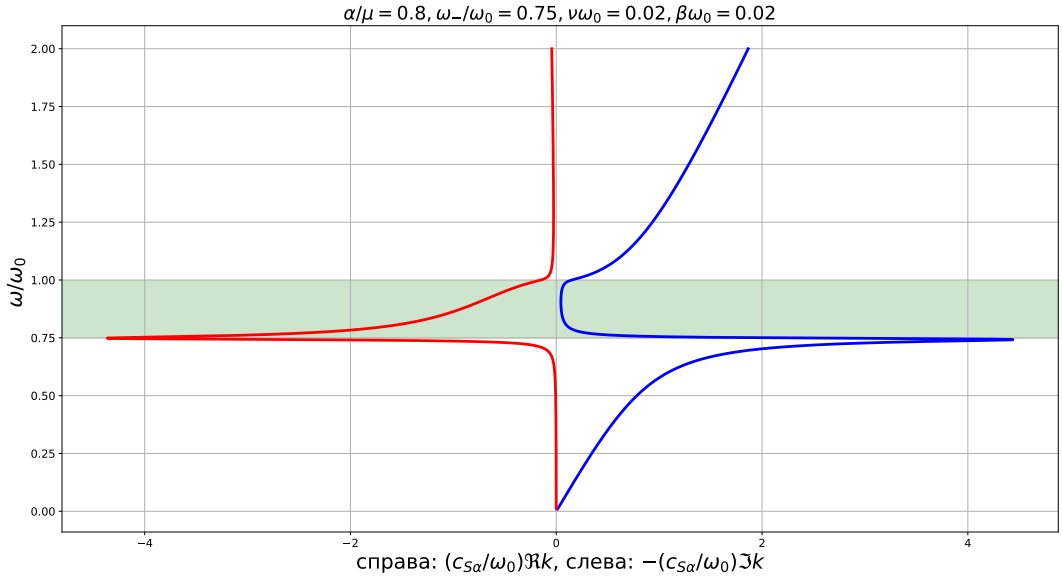

Рис. 2.12: Дисперсионные кривые для вязкоупругой редуцированной среды Коссера. Запрещенная зона в упругой среде закрашена зеленым цветом. Кривые для $\Re k$ вне запрещенной зоны в упругом случае близки к дисперсионным кривым для вязкоупругой среды с малой диссипацией, нижняя кривая обладает горизонтальной асимптотой $\omega = \omega_- = \sqrt{\frac{\mu}{\mu+\alpha}}\omega_0$, $\Im k = 0$ вне запрещенной зоны упругого материала.

всех частотах существует бегущая волна. Полоса непропускания в упругом материале превращается в зону аномального преломления. В зависимости от параметров это может иметь место во всей запрещенной зоне упругого материала или лишь в ее части. Влияние двух различных видов диссипации было исследовано аналитически. Показано, что запрещенная зона $(\omega_0\sqrt{\frac{\mu}{\mu+\alpha}};\omega_0)$, существующая в упругом случае [114], преображается под действием малой вязкости ν или β, полностью или частично, в зону аномального преломления [116], [206]. Поэтому интересно исследовать, производит ли малая вязкость подобный эффект и в других редуцированных средах.

2.9.2 Биротационный материал.

Посвятим этот раздел вязкоупругому биротационному материалу с малой диссипацией в перевязке между «несущим континуумом» и «распределенным динамическим гасителем». Эта схема в будущем будет применена к общему случаю для других сред и типов диссипации. Модель аналогична рассмотренному в разделе 2.5.3 биротационному континууму (рис. 2.11), с тем отличием, что в упругие связи добавлена малая линейная диссипация.

Уравнения движения среды имеют вид

$$\rho I_0\ddot{\boldsymbol{\theta}}_0 + c_0\boldsymbol{\theta}_0 + \rho I_0 b_0\dot{\boldsymbol{\theta}}_0 - c_{10}\boldsymbol{\theta}_1 - c_{10}b_{10}\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \mathbf{0}, \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}\rho I_1\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 + c_1\boldsymbol{\theta}_1 + \rho I_1 b_1\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 - c_{10}\boldsymbol{\theta}_0 - c_{10}b_{10}\dot{\boldsymbol{\theta}}_0 \\ = \nabla\cdot(\lambda\mathbf{E}\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}_1 + 2\mu\nabla\boldsymbol{\theta}_1^S + 2\alpha\nabla\boldsymbol{\theta}_1^A) \\ + \nabla\cdot(\lambda\varkappa\mathbf{E}\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + 2\mu\nu\nabla\dot{\boldsymbol{\theta}}_1^S + 2\alpha\beta\nabla\dot{\boldsymbol{\theta}}_1^A).\end{aligned} \tag{2.104}$$

Здесь

$$A_{00} = \rho I_0, \quad A_{11} = \rho I_1, \quad C_{00} = c_0, \quad C_{11} = c_1, \quad C = -\frac{c_{10}}{\sqrt{I_0}}, \quad \hat{N} = 0,$$
$$\omega_0^2 = \frac{c_0}{I_0}, \quad \omega_1^2 = \frac{c_1}{I_1}, \quad \kappa_1 = \lambda + 2\mu, \quad \kappa_2 = \mu + \alpha,$$
$$\beta_1 = \frac{\lambda\varkappa + \mu\nu}{\lambda + 2\mu}, \quad \beta_2 = \frac{\mu\nu + \alpha\beta}{\mu + \alpha}, \tag{2.105}$$

b_i имеют тот же смысл, что и в общей схеме для вязкоупругого континуума. Упругая среда такого рода оказалась единожды отрицательным акустическим метаматериалом. Ее дисперсионные кривые имеют горизонтальную асимптоту $\omega = \omega_0$, полосу непропускания выше нуля и еще одну выше ω_0. Кроме данного раздела, к описанию этого материала будут также применимы результаты разделов 2.10 и 2.11. Все материальные константы, введенные выше в данном разделе, являются полярными.

Будем искать гармоническое решение уравнений движения: $\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\Theta}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, $\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\Theta}_1 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$. Мы получим уравнение Кристоффеля

$$\rho I_0(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\omega b_0)\boldsymbol{\Theta}_0 - c_{10}(1 + i\omega b_{10})\boldsymbol{\Theta}_1 = \mathbf{0}, \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}\rho I_1(-\omega^2 + \omega_1^2 + i\omega b_1)\boldsymbol{\Theta}_1 - c_{10}(1 + i\omega b_{10})\boldsymbol{\Theta}_0 \\ = -\mathbf{k}\cdot(\lambda\mathbf{E}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Theta}_1 + 2\mu\mathbf{k}\boldsymbol{\Theta}_1^S + 2\alpha\mathbf{k}\boldsymbol{\Theta}_1^A) \\ - i\omega\mathbf{k}\cdot(\lambda\varkappa\mathbf{E}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Theta}_1 + 2\mu\nu\mathbf{k}\boldsymbol{\Theta}_1^S + 2\alpha\beta\mathbf{k}\boldsymbol{\Theta}_1^A).\end{aligned} \tag{2.107}$$

Из первого уравнения получаем

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = -\frac{c_{10}}{\rho I_0}\frac{1 + ib_{10}\omega}{\omega^2 - \omega_0^2 - ib_0\omega}\boldsymbol{\Theta}_1. \tag{2.108}$$

Тогда второе уравнение дает

$$\begin{aligned}
&\rho I_1(-\omega^2+\omega_1^2+i\omega b_1+\frac{c_{10}^2}{\rho^2 I_0 I_1}\frac{(1+ib_{10}\omega)^2}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega})\mathbf{\Theta}_1\\
&=-\mathbf{k}\cdot(\lambda\mathbf{E}\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}_1+2\mu\mathbf{k}\mathbf{\Theta}_1^S+2\alpha\mathbf{k}\mathbf{\Theta}_1^A)-i\omega\mathbf{k}\cdot(\lambda\varkappa\mathbf{E}\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}_1+2\mu\nu\mathbf{k}\mathbf{\Theta}_1^S+2\alpha\beta\mathbf{k}\mathbf{\Theta}_1^A)\\
&=-(\lambda(1+i\omega\varkappa)+2\mu(1+i\omega\nu))\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}_1-(\mu(1+i\omega\nu)+\alpha(1+i\omega\beta))(k^2\mathbf{E}-\mathbf{k}\mathbf{k})\cdot\mathbf{\Theta}_1.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

В данной среде могут распространяться две волны: продольная и поперечная. Рассмотрим продольную волну $\mathbf{\Theta}_0=\Theta_0\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{\Theta}_1=\Theta_1\hat{\mathbf{k}}$. Мы получим следующее дисперсионное соотношение:

$$\rho I_1(\omega^2-\omega_1^2-i\omega b_1-\frac{c_{10}^2}{\rho^2 I_0 I_1}\frac{(1+ib_{10}\omega)^2}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega})=k^2(\lambda(1+i\omega\varkappa)+2\mu(1+i\omega\nu)). \tag{2.110}$$

Для поперечной волны ($\mathbf{\Theta}_1\cdot\mathbf{k}=\mathbf{\Theta}_2\cdot\mathbf{k}=0$) имеем аналогичное выражение, но с другими упругими и диссипативными константами

$$\rho I_1\left(\omega^2-\omega_1^2-i\omega b_1-\frac{c_{10}^2}{\rho^2 I_0 I_1}\frac{(1+ib_{10}\omega)^2}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega}\right)=k^2(\mu(1+i\omega\nu)+\alpha(1+i\omega\beta)). \tag{2.111}$$

Видим, что оба дисперсионных соотношения имеют следующую структуру:

$$A_{11}\left(\omega^2-\omega_1^2-i\omega b_1-\frac{C^2}{A_{11}}\frac{(1+ib_{10}\omega)^2}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega}\right)=k^2(\kappa_i(1+i\beta_i\omega)), \tag{2.112}$$

где κ_i,β_i определяются формулами (2.105).

2.9.2.1 Вязкость в перевязке между несущим континуумом и распределенным динамическим гасителем.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда все диссипативные коэффициенты, за исключением b_{10}, равны нулю. Тогда (2.112) принимает следующую форму

$$A_{11}\left(\omega^2 - \omega_1^2 - \frac{C^2}{A_{11}}\frac{(1+ib_{10}\omega)^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right) = k^2\kappa_i. \tag{2.113}$$

Мы можем переписать это в виде

$$\omega^2 - \omega_1^2 - \frac{C^2/A_{11}}{\omega^2-\omega_0^2}(1 - b_{10}^2\omega^2 + 2ib_{10}\omega) = c_i^2k_i^2, \qquad c_i^2 = \kappa_i/A_{11}. \tag{2.114}$$

Примеры дисперсионных кривых для упругого и вязкоупругого случая представлены на рис. 2.13. Применим здесь тот же метод, что и далее для более

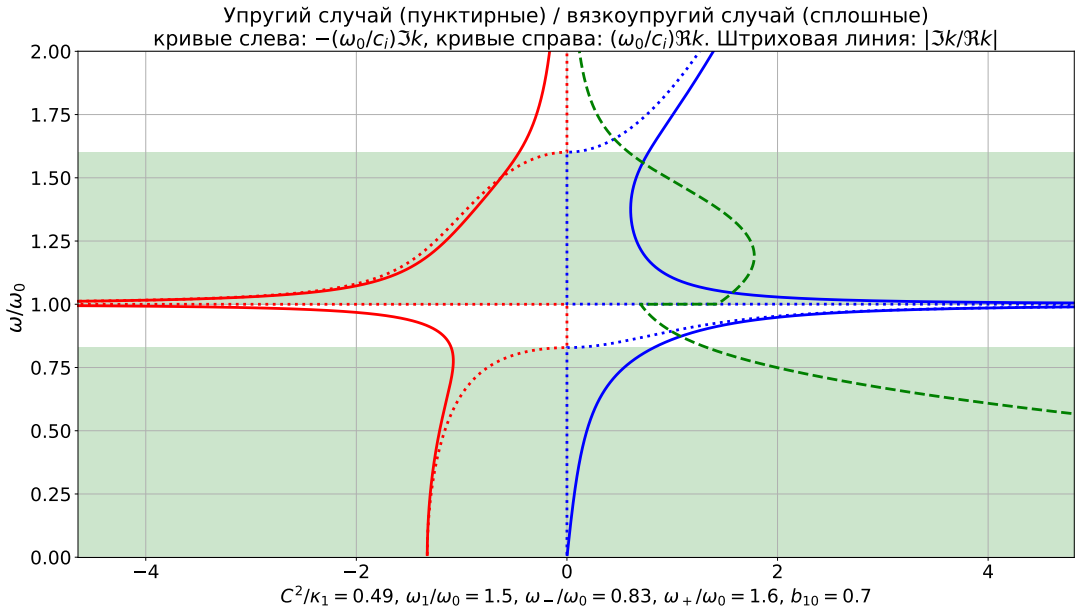

Рис. 2.13: Биротационный материал с вязкостью b_{10} в перевязке между $\boldsymbol{\Theta}_1$ и $\boldsymbol{\Theta}_0$. Пунктирные кривые соответствуют упругому случаю, сплошные линии — вязкоупругой среде, штриховая кривая — график $\Im k/\Re k$ для вязкоупругого континуума. Для упругого материала $\Im k/\Re k$ бесконечен в зеленых (запрещенных) зонах и равен 0 вне них.

общего случая. Запишем уравнение (2.114) в виде

$$k^2 = \tilde{K}(1 + i\varepsilon), \tag{2.115}$$

где $\tilde{K}$ — вещественная часть k^2 и $\tilde{K}\varepsilon$ — вещественная часть k^2 являются функциями ω. В этом случае имеем

$$\tilde{K} = c_i^{-2}\left(\omega^2 - \omega_1^2 - \frac{C^2/A_{11}}{\omega^2 - \omega_0^2}(1 - b_{10}^2\omega^2)\right), \tag{2.116}$$

$$\varepsilon = -2b_{10}\omega\frac{C^2}{A_{11}(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_1^2) - C^2 + C^2 b_{10}^2\omega^2} \tag{2.117}$$

В упругом случае

$$\tilde{K} = \tilde{K}_e = c_i^{-2}\left(\omega^2 - \omega_1^2 - \frac{C^2/A_{11}}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) = c_i^{-2}\frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{\omega^2 - \omega_0^2}, \tag{2.118}$$

где

$$\omega_\pm^2 = \frac{\omega_0^2 + \omega_1^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2}{4} + \frac{C_{10}^2}{A_{00}A_{11}}}, \tag{2.119}$$

$$0 < \omega_-^2 < \min(\omega_1^2, \omega_0^2) \leqslant \omega_0^2 \leqslant \max(\omega_1^2, \omega_0^2) < \omega_+^2. \tag{2.120}$$

Как и было получено ранее в разделе 2.5.3, в упругом случае есть две запрещенных зоны: $[0; \omega_-)$ и $[\omega_0; \omega_+)$.

Представив k как $\Re k + i\Im k$, получим

$$(\Re k)^2 - (\Im k)^2 = \tilde{K}, \tag{2.121}$$

$$2\Re k\Im k = \tilde{K}\varepsilon, \tag{2.122}$$

и, решив биквадратное уравнение, получим в области $\tilde{K} > 0$ выражения

$$(\Re k)^2 = \frac{\tilde{K}}{2}(1 + \sqrt{1+\varepsilon^2}), \qquad (\Im k)^2 = \frac{\tilde{K}}{2}(-1 + \sqrt{1+\varepsilon^2}), \tag{2.123}$$

а в области $\tilde{K} < 0$

$$(\Im k)^2 = -\frac{\tilde{K}}{2}(1 + \sqrt{1+\varepsilon^2}), \qquad (\Re k)^2 = \frac{\tilde{K}}{2}(1 - \sqrt{1+\varepsilon^2}). \tag{2.124}$$

Рассмотрим случай малой диссипации $b_{10} = o(1)$ и частоту ω, не слишком близкую к характеристическим частотам ω_0, ω_+, ω_-, таким что

$$\frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{\omega_0^4}\frac{A_{11}}{C^2} \gg b_{10}^2, \qquad \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2}\frac{A_{11}}{C^2} \gg b_{10}^2. \tag{2.125}$$

Заметим, что

$$\tilde{K} = \tilde{K}_e + b_{10}^2 \frac{C^2}{c_i^2 A_{11}} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{2.126}$$

Таким образом, для малого b_{10} область $\tilde{K} < 0$ соответствует, с точностью до малых порядка $O(b_{10}^2)$, запрещенным зонам в упругом случае.

Можем записать приближение

$$\begin{aligned} \varepsilon = -\frac{2b_{10}\omega C^2/A_{11}}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_1^2) - C^2/A_{11}} + O(b_{10}^3) \\ = -\frac{2b_{10}\omega C^2}{A_{11}(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} + O(b_{10}^3) \end{aligned} \tag{2.127}$$

Легко вычислить приближения для $\Re k, \Im k$, используя разложения

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{K}}{2}(\sqrt{1+\varepsilon^2} - 1) = \frac{1}{2}\left(\tilde{K}_e + b_{10}^2 \frac{C^2}{c_i^2 A_{11}} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) - 1) = \\ = \frac{1}{4}\tilde{K}_e(\varepsilon^2 + O(b_{10}^4)) = \frac{b_{10}^2 \omega^2 C^4}{c_i^2 A_{11}^2 (\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} + O(b_{10}^4), \end{aligned} \tag{2.128}$$

$$\frac{\tilde{K}}{2}(\sqrt{1+\varepsilon^2}+1)=\frac{1}{2}\left(\tilde{K}_e+b_{10}^2\frac{C^2}{c_i^2A_{11}}\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon^2+O(\varepsilon^4)+1\right)=$$

$$\left(\tilde{K}_e+b_{10}^2\frac{C^2}{c_i^2A_{11}}\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2+O(b_{10}^4)\right)$$

$$=\tilde{K}_e\left(1+b_{10}^2\frac{C^2}{A_{11}}\frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}+\frac{b_{10}^2\omega^2C^4}{A_{11}^2(\omega^2-\omega_+^2)^2(\omega^2-\omega_-^2)^2}\right)+O(b_{10}^4)$$

$$=\tilde{K}_e\left(1+b_{10}^2\frac{C^2}{A_{11}}\frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}\left(1+\frac{C^2}{A_{11}(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}\right)\right)+O(b_{10}^4)$$

$$=\tilde{K}_e\left(1+b_{10}^2\frac{C^2}{A_{11}}\frac{\omega^2(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)}{(\omega^2-\omega_+^2)^2(\omega^2-\omega_-^2)^2}\right)+O(b_{10}^4) \quad (2.129)$$

Таким образом, для малой диссипации b_{10} и частот, не слишком близких к характеристическим частотам $\omega_0, \omega_-, \omega_+$ (при условии (2.125)), получаем следующие приближения:

- Вне запрещенных зон $(0;\omega_-)$, $(\omega_0;\omega_+)$

$$c_i\Re k=\left|\frac{(\omega^2-\omega_-^2)(\omega^2-\omega_+^2)}{\omega^2-\omega_0^2}\right|^{\frac{1}{2}}\left(1+b_{10}^2\frac{C^2}{2A_{11}}\frac{\omega^2(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)}{(\omega^2-\omega_+^2)^2(\omega^2-\omega_-^2)^2}\right)+O(b_{10}^4), \quad (2.130)$$

$$c_i\Im k=b_{10}\frac{C^2}{A_{11}}\frac{\omega}{|(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)|^{1/2}}+O(b_{10}^3), \quad (2.131)$$

$$\frac{\Im k}{\Re k}=\frac{b_{10}\frac{C^2}{A_{11}}\omega}{|(\omega^2-\omega_-^2)(\omega^2-\omega_+^2)|}(1+O(b_{10}^2)). \quad (2.132)$$

Видим, что вне зон непропускания для упругого случая малая диссипация оказывает предсказуемое влияние, а именно, ухудшает прохождение волны на заданном расстоянии и на расстоянии, равном длине волны ($|\Im k|$ и логарифмический декремент $2\pi|\Im k/\Re k|$ возрастают как функции b_{10}). Действительно, $|\Im k|$ показывает, насколько убывает амплитуда волны при ее продвижении на некоторое расстояние.

Вещественная часть волнового числа меняется мало, волны могут стать

длиннее (в области $(\omega_1;\omega_0)$, если $\omega_1 < \omega_0$) или короче (во всех других случаях).

- внутри зон непропускания $(0;\omega_-)$, $(\omega_0;\omega_+)$

$$c_i\Re k = b_{10}\frac{C^2}{A_{11}}\frac{\omega}{|(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)|^{1/2}} + O(b_{10}^3), \tag{2.133}$$

$$c_i\Im k = \left|\frac{(\omega^2-\omega_-^2)(\omega^2-\omega_+^2)}{\omega^2-\omega_0^2}\right|^{1/2}\left(1 + b_{10}^2\frac{C^2}{2A_{11}}\frac{\omega^2(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)}{(\omega^2-\omega_+^2)^2(\omega^2-\omega_-^2)^2}\right) + O(b_{10}^4), \tag{2.134}$$

$$\frac{\Im k}{\Re k} = \frac{|(\omega^2-\omega_-^2)(\omega^2-\omega_+^2)|}{b_{10}\frac{C^2}{A_{11}}\omega}(1 + O(b_{10}^2)). \tag{2.135}$$

Внутри верхней запрещенной зоны упругого материала выше ω_0 (если соблюдено условие (2.125)) наблюдаем падающий участок дисперсионной кривой $\Re k(\omega)$, убывающий, как гипербола. Поскольку $\max(\omega_0,\omega_1) < \omega_+$, в случае $\omega_1 > \omega_0$ бесконечно малая диссипация уменьшает затухание волны с расстоянием в области частот $(\omega_0;\omega_1)$, что можно видеть на рис. 2.13. Мы также видим, что независимо от характеристических частот логарифмический декремент $2\pi|\Im k/\Re k|$ обратно пропорционален малому диссипативному параметру b_{10} внутри зон непропускания для упругой среды, т.е. поглощение на длине волны убывает как функция малой переменной b_{10}. Это примечательное поведение, которое мы будем наблюдать и во многих других случаях, вероятно, связано с тем фактом, что поглощение в запрещенных зонах не связано с диссипацией, но скорее отражает возможность явлений локализации.

Можно сделать следующие выводы:

- При всех $\omega \neq \omega_0$ параметр диссипации b_{10} обеспечивает существование бегущей гармонической затухающей плоской волны ($\Re k \neq 0$, $\Im k \neq 0$).

- Для малого параметра b_{10} существует убывающий участок дисперсионной кривой в нижней части верхней запрещенной зоны упругого материала (над ω_0). Данное утверждение справедливо при выполнении условия (2.125).

- Логарифмический декремент в бывших запрещенных для бегущего решения зонах убывает при возрастании малого параметра b_{10}, т.е. малая диссипация улучшает прохождение волны на расстоянии, равном ее длине.

- В случае $\omega_1 > \omega_0$ существует зона частот в нижней части бывшей верхней запрещенной зоны, где малая диссипация улучшает прохождение сигнала на заданном расстоянии. Это зона $(\omega_0; \omega_1)$.

Рис. 2.13 подтверждает эти заключения.

Результаты этого раздела непосредственно применимы в более общем случае, исследованном далее, для того же типа вязкости в перекрестном члене, поскольку уравнение Кристоффеля для биротационного материала имеет ту же форму, что и в общей схеме. Поэтому, чтобы избежать повторения, мы не будем рассматривать далее этот случай отдельно.

2.10 Продольная волна в линейной изотропной вязкоупругой редуцированной среде.

2.10.1 Дисперсионное соотношение.

Как и можно было ожидать, в силу изотропии задачи для продольной и поперечной волн в уравнении Кристоффеля вязкоупругой линейной редуцированной среды общего вида (2.99) разделяются. Для продольной волны $\mathbf{Q}_1 = Q_1\hat{\mathbf{k}}$, и дисперсионное соотношение принимает вид

$$k^2\kappa_1(1+i\beta_1\omega) + (-\omega^2+\omega_1^2+ib_1\omega)A_{11} + \frac{C^2(1+ib_{10}\omega)^2}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega} = 0. \tag{2.136}$$

Перевязка между $\nabla\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_0$ или их производными не влияет на данную волну.

В упругом случае при $\omega \neq \omega_0$, как было показано выше (см. уравнение (2.29)),

$$c_P^2k_e^2 = \frac{(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}{\omega^2-\omega_0^2}, \tag{2.137}$$

где k_e — волновое число в упругом случае,

$$c_P^2 = \kappa_1/A_{11}, \tag{2.138}$$

$$\omega_\pm^2 = \frac{\omega_0^2+\omega_1^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2}{4} + \frac{C_{10}^2}{A_{00}A_{11}}}, \tag{2.139}$$

$$0 < \omega_-^2 < \min(\omega_1^2,\omega_0^2) \leqslant \omega_0^2 \leqslant \max(\omega_1^2,\omega_0^2) < \omega_+^2. \tag{2.140}$$

Если $C_{10} = 0$, существует лишь одна ветвь с частотой отсечки ω_0. В противоположном случае имеется две зоны непропускания: $[0;\omega_-]$ и $[\omega_0;\omega_+)$. В этих областях среда является единожды отрицательным акустическим метаматериалом.

Различные параметры вязкости по-разному влияют на распространение волн. Рассмотрим их влияние по отдельности.

2.10.2 Вязкость в упругом основании несущего континуума.

Следующий численный пример (рис. 2.14) показывает, что качественно новые эффекты в данном случае — это существование бегущего решения на всех частотах и убывание логарифмического декремента в запрещенных зонах с ростом малой диссипации. Рассмотрим этот случай подробно.

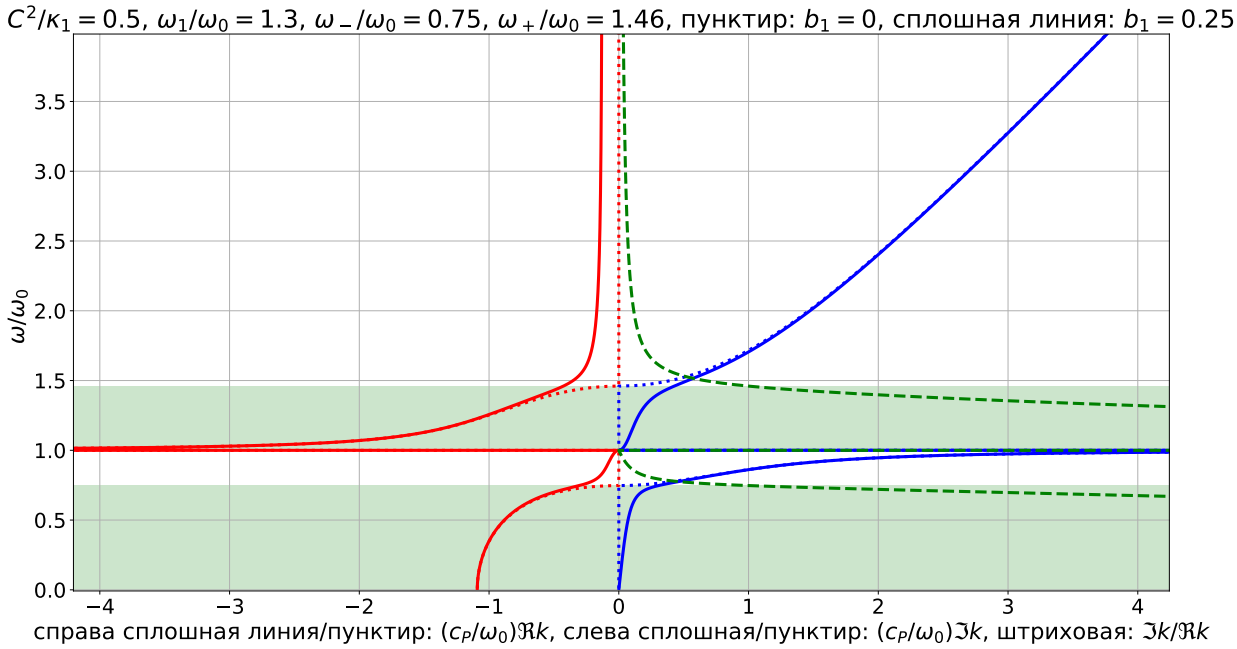

Рис. 2.14: Дисперсионные кривые для продольной волны в изотропном редуцированном континууме. Запрещенные зоны $[0;\omega_-]$ и $[\omega_0;\omega_+)$ в упругой среде закрашены зеленым цветом. Упругому случаю соответствуют пунктирные линии, вязкоупругому с диссипацией в упругом основании для несущего континуума — сплошные и штриховые линии. Синие линии обозначают $(c_P/\omega_0)\Re k$, красные $-(c_P/\omega_0)\Im k$, зеленые — $|\Im k/\Re k|$.

Дисперсионное соотношение (2.136) принимает вид

$$k^2 = k_e^2(1 + i\varepsilon(\omega)), \tag{2.141}$$

где

$$\varepsilon = b_1 \frac{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \tag{2.142}$$

Отсюда получаем

$$(\Re k)^2 - (\Im k)^2 = k_e^2, \tag{2.143}$$

$$2\Re k \Im k = k_e^2 \varepsilon(\omega). \tag{2.144}$$

Подставляя последнее уравнение в предыдущее, получим

$$(\Re k)^4 - k_e^2(\Re k)^2 - k_e^4\varepsilon^2/4 = 0. \tag{2.145}$$

Заметим, что k_e^2 может быть положительным или отрицательным, однако всегда $k_e^4 > 0$ и $\varepsilon^2 > 0$. Таким образом, данное уравнение всегда будет иметь решение $(\Re k)^2 > 0$. Среди решений биквадратного уравнения одно является положительным, а другое отрицательным:

$$(\Re k)^2 = \frac{k_e^2}{2}(1 \pm \sqrt{1 + \varepsilon^2}). \tag{2.146}$$

В области, где $k_e^2 > 0$, положительное решение соответствует решению со знаком «+», а в области, где $k_e^2 < 0$, решению со знаком «-». Существование $\Re k$ означает существование бегущего решения. Таким образом, вводя вязкость в данную среду, мы на всех частотах получим бегущие затухающие волны (кроме частоты ω_0, где k становится бесконечным). В обеих областях частот, разделенных ω_0, вещественная часть волнового числа растет с ростом малой диссипации ($\Re k(b_1) \uparrow$) (рис. 2.15).

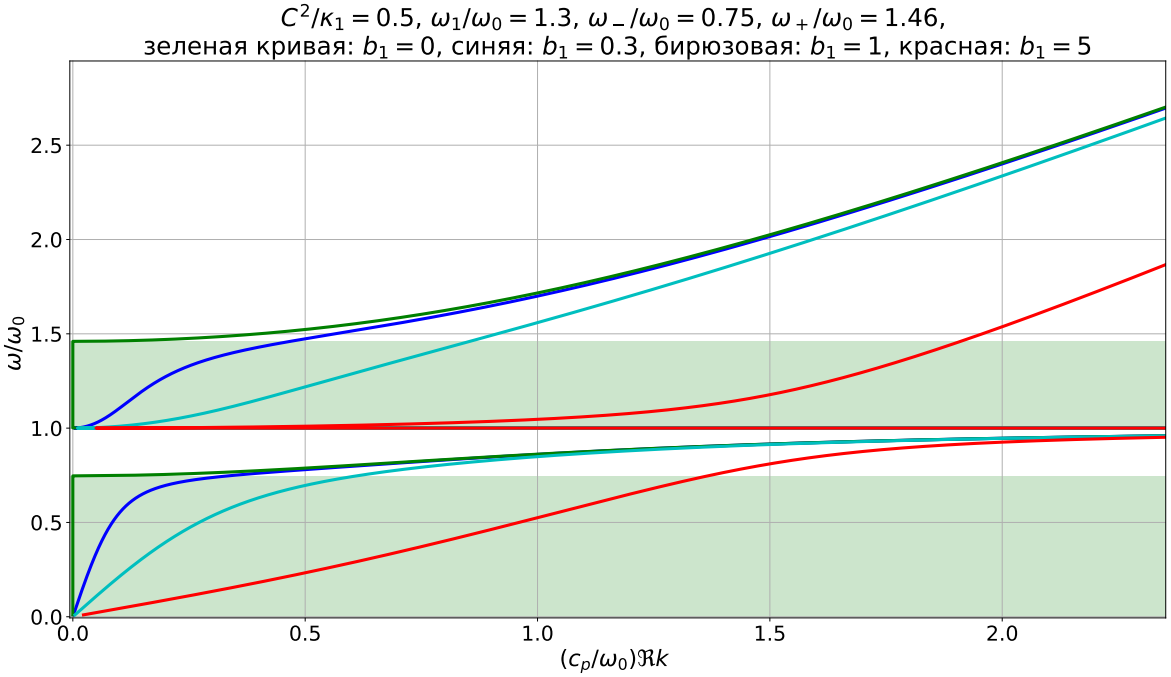

Рис. 2.15: Влияние диссипативного параметра b_1 на вещественную часть волнового числа для продольной волны. Зоны непропускания в упругом случае $[0;\omega_-]$ и $[\omega_0;\omega_+)$ закрашены зеленым цветом. При $b_1 \neq 0$ бегущие волны существуют для всех частот, кроме ω_0. При возрастании b_1 вещественная часть волнового числа $\Re k$ на той же частоте растет (волна становится короче). Сплошные линии соответствуют $\Re k$: зеленая — упругому случаю, синяя — $b_1 = 0.3$, бирюзовая — $b_1 = 1$, красная — $b_1 = 5$.

Далее полагаем b_1 малым, а $\omega - \omega_\pm \gg b_1$, т.е. частота ω не попадает в окрестность $\omega_\pm$, последние частоты должны быть рассмотрены отдельно. В этом случае $\varepsilon(\omega)$ — малая величина.

В области полосы непропускания упругой среды имеем $(k_e^2 < 0)$

$$\Re k \approx \frac{|k_e \varepsilon|}{2} = \frac{b_1}{2c_{S\alpha}} \frac{\omega|\omega^2 - \omega_0^2|^{3/2}}{|(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)|^{1/2}}, \tag{2.147}$$

а в области, где существуют гармонические свободные плоские бегущие волны в упругом материале, получаем лишь малую поправку:

$$\Re k \approx k_e(1 + \varepsilon^2/8) \tag{2.148}$$

Вычислим

$$(\Im k)^2 = \frac{k_e^4 \varepsilon^2}{4(\Re k)^2} = \frac{k_e^2}{2} \frac{\varepsilon^2}{1 \pm \sqrt{1+\varepsilon^2}} = \frac{k_e^2}{2}(\pm\sqrt{1+\varepsilon^2} - 1) \tag{2.149}$$

Для существования решения необходимо выбрать тот же знак, что и для $\Re k$ (равный знаку k_e^2).

Мнимая часть k ответственна за убывание амплитуды по пространственной координате. Вновь $|\Im k|(b_1)$ возрастает в обеих областях частот, разделенных ω_0, для всех b_1 (рис. 2.16). Если b_1 — малая величина, в области зоны

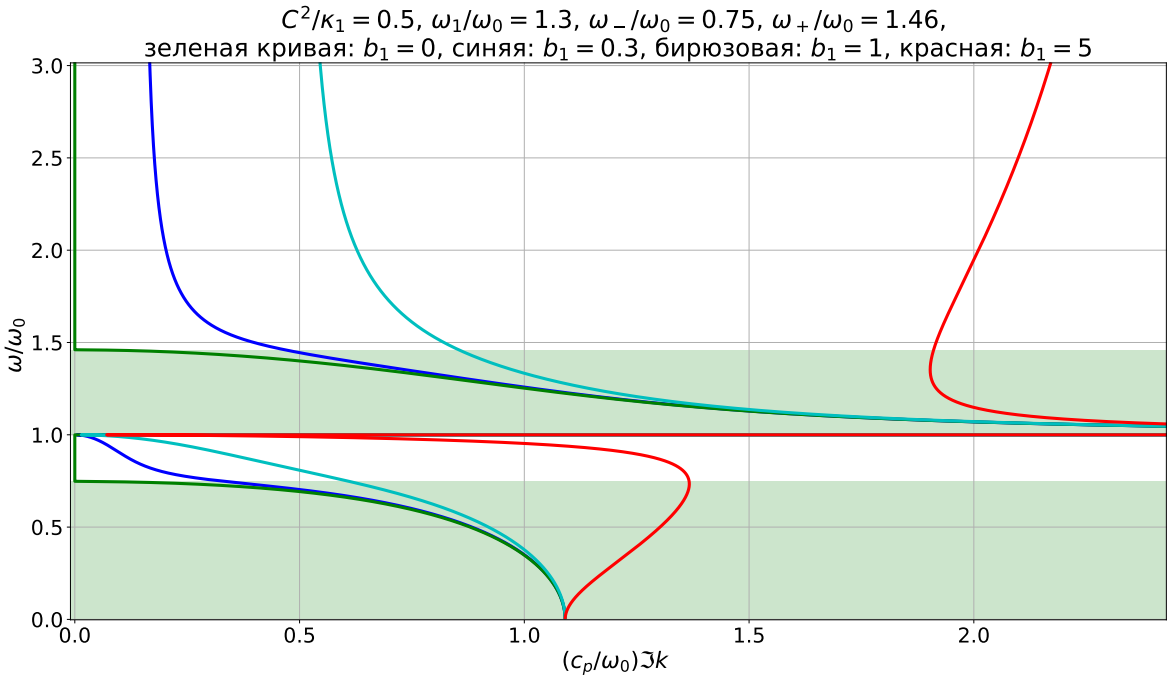

Рис. 2.16: Влияние диссипации b_1 в упругом основании несущего континуума на мнимую часть волнового числа, продольная волна. Запрещенные зоны для упругой среды $[0;\omega_-]$ и $[\omega_0;\omega_+)$ закрашены зеленым цветом.

непропускания в упругой среде имеем приближения

$$\Im k \approx |k_e|(1 + \varepsilon^2/8), \tag{2.150}$$

а в области существования бегущей волны для упругой среды ($k_e^2 > 0$)

$$\Im k = k_e \varepsilon / 2. \tag{2.151}$$

Логарифмический декремент равен

$$2\pi \left| \frac{\Im k}{\Re k} \right| = 2\pi \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2} \pm 1}{\varepsilon}. \tag{2.152}$$

Заметим, что смена знака соответствует в данном случае обращению дроби. Здесь «+» соответствует случаю $k_e^2 < 0$ (запрещенной зоне для упругого материала), что дает приближение для малой диссипации $4\pi/\varepsilon$, а «-» случаю $k_e^2 > 0$, что дает $\pi\varepsilon$ в первом приближении. Зависимость логарифмического декремента от диссипации b_1 проиллюстрирована рисунком 2.17. Эти вычис-

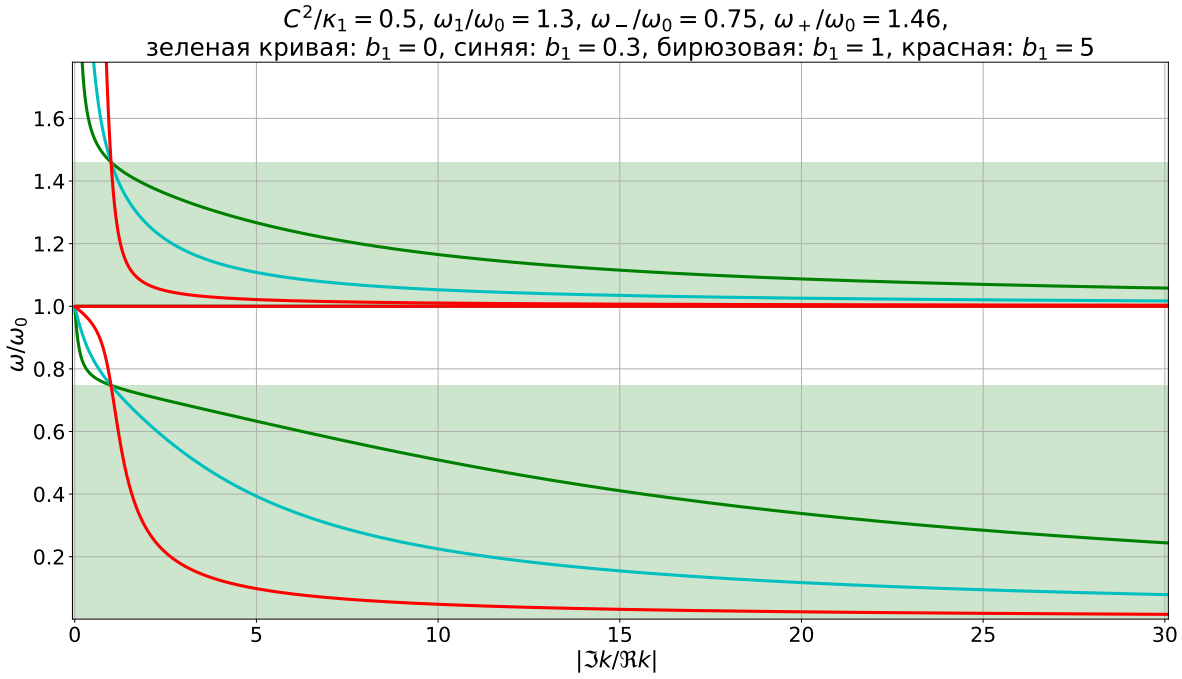

Рис. 2.17: Влияние диссипации в упругом основании несущего континуума (b_1) на логарифмический декремент $2\pi\frac{\Im k}{\Re k}$, продольная волна. Запрещенные в упругом случае зоны $[0;\omega_-]$ и $[\omega_0;\omega_+)$ закрашены зеленым цветом.

ления позволяют сделать следующие заключения. Рассмотрим ω как параметр, тогда для каждой фиксированной частоты величина ε будет зависеть от диссипации и упругих констант. Рассмотрим частоты, для которых ε — не нулевая и не сингулярная величина.

Заметим, что для каждой частоты, принадлежащей зоне непропускания упругого материала, выполняется следующее:

1. Существует бегущая затухающая волна, поскольку всегда есть решение $\Re k \in \mathbb{R}$. Фазовая скорость убывает как функция диссипации ($\Re k(b_1)$ возрастает, если частота ω и упругие параметры не меняются)

2. Данный вид диссипации увеличивает затухание волны с расстоянием. Действительно, $\Im k(b_1)$ возрастает, если частота волны и упругие параметры не меняются.

3. Внутри запрещенных зон для упругого материала, где логарифмический декремент был бесконечным, данный вид диссипации приводит к конечному логарифмическому декременту, монотонно убывающему как функция b_1 (при постоянных ω и упругих параметрах). Это означает, что амплитуда волны будет убывать меньше на каждой длине волны с ростом b_1.

Для частот вне этих зон

1. Существует бегущее затухающее решение. Фазовая скорость убывает с ростом диссипативного параметра b_1 (при постоянных ω и упругих параметрах).

2. Диссипация b_1 ухудшает прохождение волны как на заданном расстоянии, так и на расстоянии, равном длине волны.

Рассмотрим влияние малой диссипации b_1 на дисперсионные кривые.

Исходя из (2.146), можно показать, что $\omega(\Re k)$ имеет две монотонно возрастающие ветви, у нижней есть асимптота $\omega = \omega_0$, у верхней — частота отсечки ω_0, и обе ветви имеют бесконечно большую групповую скорость при $\Re k = 0$.

В этом случае мы не наблюдаем зон аномального преломления (нет падающих участков дисперсионных кривых).

2.10.3 Вязкость в материале несущего континуума.

Дисперсионное соотношение для материала с этим видом диссипации может быть получено из (2.136)

$$c_P^2 k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)(1 + i\beta_1\omega)} = \frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)(1 - i\beta_1\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)(1 + \beta_1^2\omega^2)} \tag{2.153}$$

и записано в виде

$$k^2 = \tilde{K}(1 + i\varepsilon), \tag{2.154}$$

где мнимая ε и вещественная $\tilde{K}$ части k^2 имеют вид

$$\varepsilon = -\beta_1\omega, \qquad \tilde{K} = \frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)(1 + \varepsilon^2)}. \tag{2.155}$$

Здесь ε зависит от β_1, а $\omega_\pm, \omega_0$ — нет. Пользуясь формулами (2.123), получаем, что если $\tilde{K} > 0$ (частота находится вне запрещенной зоны упругого материала), то

$$\begin{aligned}(\Re k)^2 = \frac{\tilde{K}}{2}(1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}) &= \frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{2c_P^2(\omega^2 - \omega_0^2)}\left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}\right) \\ &= \frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{2c_P^2(\omega^2 - \omega_0^2)}\left(\frac{1}{1 + \beta_1^2\omega^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_1^2\omega^2}}\right),\end{aligned} \tag{2.156}$$

$$(\Im k)^2 = \frac{\tilde{K}}{2}(-1+\sqrt{1+\varepsilon^2}) = \frac{(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}{2c_P^2(\omega^2-\omega_0^2)}\left(-\frac{1}{1+\varepsilon^2}+\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right)$$
$$= \frac{(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}{2c_P^2(\omega^2-\omega_0^2)}\left(-\frac{1}{1+\beta_1^2\omega^2}+\frac{1}{\sqrt{1+\beta_1^2\omega^2}}\right). \quad (2.157)$$

Легко видеть, что $\Re k$ как функция β_1 убывает (на каждой частоте ω). Можно показать, что $\Im k$ возрастает по β_1, пока не достигнуто условие $\varepsilon^2 = 3$ (т.е. $\beta_1 = \sqrt{3}/\omega$), а затем убывает. Логарифмический декремент возрастает по β_1. Это поведение аналогично поведению классической вязкоупругой среды Кельвина – Фойгта.

При $\tilde{K} < 0$ (частота находится в запрещенной зоне упругого материала) имеем из (2.124)

$$(\Re k)^2 = \frac{|\tilde{K}|}{2}(\sqrt{1+\varepsilon^2}-1) = \left|\frac{(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}{2c_P^2(\omega^2-\omega_0^2)}\right|\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}-\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right) \quad (2.158)$$

$$(\Im k)^2 = \frac{|\tilde{K}|}{2}(1+\sqrt{1+\varepsilon^2}) = \left|\frac{(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}{2c_P^2(\omega^2-\omega_0^2)}\right|\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}+\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right), \quad (2.159)$$

и логарифмический декремент монотонно убывает по β_1 от бесконечности до 1, в то время как $|\Im k|$ монотонно убывает до 0 (подобное не наблюдается в классической среде).

В численном примере (рис. 2.18) мы видим, что зона $(\omega_0;\omega_+)$ становится зоной аномального преломления, если добавить малую вязкость β_1. В бывшей запрещенной зоне ниже ω_- имеется падающий участок дисперсионной кривой, а затем от некоторой частоты до нуля — возрастающий участок. В другом численном примере мы видим, что существуют две зоны аномального

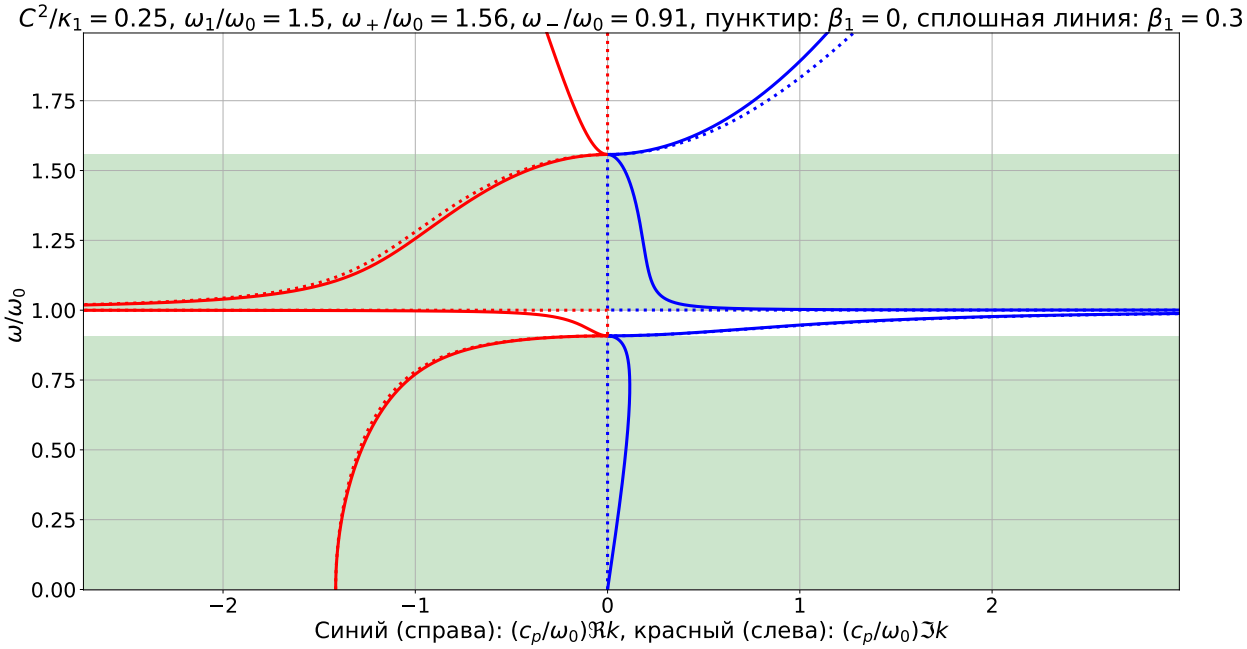

Рис. 2.18: Дисперсионные кривые для продольной волны в изотропной редуцированной вязкоупругой среде. Запрещенные зоны в упругой среде $(0;\omega_-)$ и $(\omega_0;\omega_+)$ закрашены зеленым цветом. Упругому случаю соответствуют пунктирные кривые, вязкоупругой модели с диссипацией в материале несущего континуума — сплошные.

преломления внутри $(\omega_-;\omega_+)$, и еще одна ниже ω_- (на рис. 2.19 подробнее показано поведение $\Re k$ в запрещенных зонах). Выясним, для всех ли малых β_1 существуют зоны аномального преломления.

Теорема 2.2. *Малая вязкость β_1 частично преобразует рассматриваемый упругий единожды отрицательный акустический метаматериал в вязкоупругий дважды отрицательный акустический метаматериал. Для $\beta_1 = o(1)$ существуют зоны (две или больше) аномального преломления (т.е. убывающие участки дисперсионной кривой), где $\frac{\partial\omega}{\partial k} < 0$. Одна или более таких зон расположены ниже ω_+ (и выше ω_0), а еще одна ниже ω_-.*

Доказательство. Заметим, что $\omega_0 < \omega_+$. Рассмотрим $\beta_1 = o(1)$. Тогда для

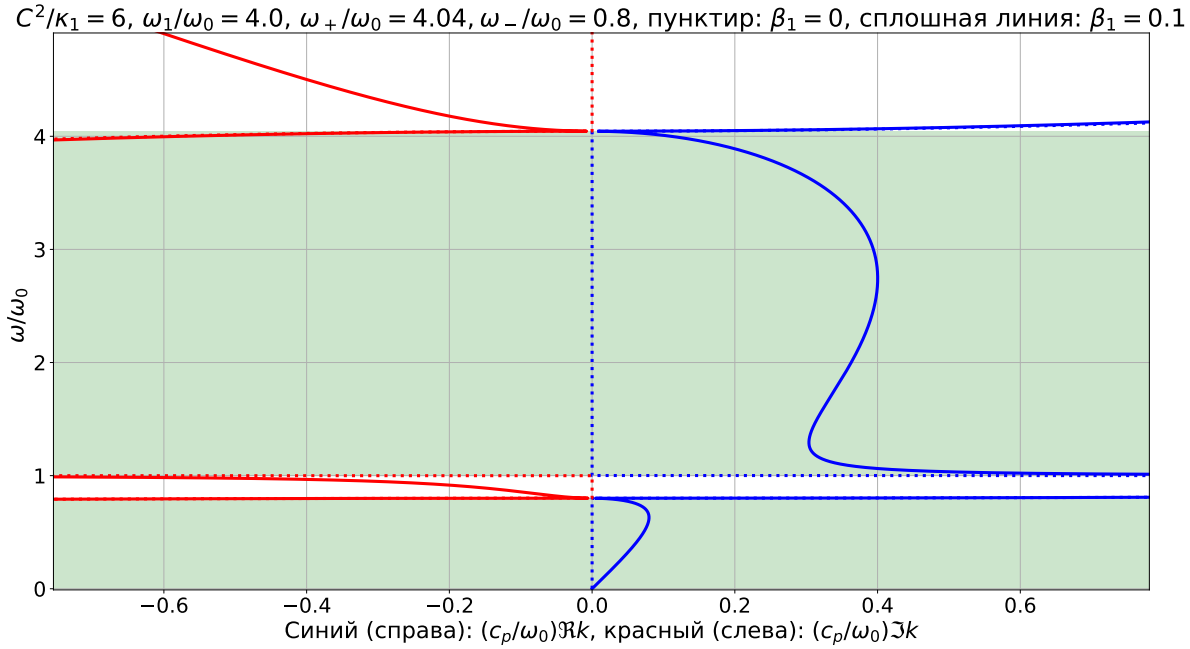

Рис. 2.19: Дисперсионные кривые для продольной волны в редуцированном изотропном континууме. Запрещенные зоны в упругом случае $(0;\omega_-)$ и $(\omega_0;\omega_+)$ закрашены зеленым цветом. Упругому случаю соответствуют пунктирные линии, вязкоупругой модели с диссипацией в материале несущего континуума — сплошные.

тех частот, для которых $\omega^2 - \omega_0^2 \gg \beta_1$, имеем $\varepsilon = o(1)$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} - \frac{1}{1+\varepsilon^2} = \varepsilon^2/2 = \beta_1^2\omega^2/2. \tag{2.160}$$

Рассмотрим $\tilde{K} < 0$, что выполняется при $\omega \to \omega_+ - 0$. Если $\tilde{K} < 0$, можем записать вплоть до членов высшего порядка малости по β_1

$$(\Re k)^2 = -\frac{\beta_1^2}{2c_P^2}\frac{\omega^2(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}{\omega^2-\omega_0^2}. \tag{2.161}$$

Таким образом, квадрат фазовой скорости равен

$$c_f^2 = -\frac{2c_P^2}{\beta_1^2}\frac{\omega^2-\omega_0^2}{(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)} \tag{2.162}$$

Легко видеть, что $c_g = \frac{\partial\omega}{\partial(\Re k)}$ можно найти из соотношения

$$c_g^{-1} = c_f \frac{\partial((\Re k)^2)}{\partial(\omega^2)} = -\frac{\beta_1^2}{2c_P^2} c_f \frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\Big((\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)(\omega^2-\omega_0^2) + \omega^2(\omega^2-\omega_-^2)(\omega^2-\omega_0^2) + \omega^2(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_0^2) - \omega^2(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)\Big) \tag{2.163}$$

Зона, где $c_g < 0$ — это зона аномального преломления. При $\omega \to \omega_+ - 0$ имеем

$$\omega^2 - \omega_+^2 \to -0, \quad \omega^2 - \omega_-^2 > \omega^2 - \omega_0^2 > 0, \tag{2.164}$$

фазовая скорость может быть найдена из уравнения (2.162)

$$c_f\big|_{\omega\to\omega_+-0} = \frac{c_P}{\beta_1}\frac{1}{(\omega_+-\omega)^{1/2}}\left(\frac{\omega_+^2-\omega_0^2}{\omega_+(\omega_+^2-\omega_-^2)}\right)^{1/2}, \tag{2.165}$$

и для групповой скорости $\frac{\partial\omega}{\partial(\Re k)}$ мы имеем (см. уравнение (2.163))

$$c_g^{-1}\big|_{\omega\to\omega_+-0} = -\frac{\beta_1^2}{2c_P^2} c_f \frac{\omega_+^2(\omega_+^2-\omega_-^2)}{\omega_+^2-\omega_0^2} = -\frac{\beta_1}{2c_P}\frac{1}{(\omega_+-\omega)^{1/2}}\frac{\omega_+^{3/2}(\omega_+^2-\omega_-^2)^{1/2}}{(\omega_+^2-\omega_0^2)^{1/2}}, \tag{2.166}$$

$$c_g\big|_{\omega\to\omega_+-0} = -\frac{2c_P}{\beta_1}(\omega_+-\omega)^{1/2}\frac{(\omega_+^2-\omega_0^2)^{1/2}}{\omega_+^{3/2}(\omega_+^2-\omega_-^2)^{1/2}} < 0. \tag{2.167}$$

Таким образом, мы видим, что имеется зона аномального преломления ниже ω_+.

Глядя на выражение (2.163), мы видим, что при $\omega \to \omega_0 + 0$ знак c_g также отрицателен, т.е. среда является дважды отрицательным акустическим метаматериалом в некоторой зоне, примыкающей сверху к ω_0. Анализируя выражение (2.163), можно показать, что функция в больших скобках является монотонной при $\omega_1^2 \leqslant 2\omega_0^2$. В этом случае $c_g < 0$ во всей зоне $(\omega_0;\omega_+)$,

поскольку она отрицательна на обоих концах интервала. Если же ω_1^2 — достаточно большая величина (это означает, что частота ω_+ также достаточно велика), может случиться, что зона нормального преломления появится внутри этого интервала. В численных примерах мы видим две зоны аномального преломления внутри $(\omega_0; \omega_+)$ в последнем случае.

Вспомним, что уравнение (2.163) верно для частот, принадлежащих запрещенным зонам в упругом случае ($\tilde{K} < 0$). Подставляя $\omega = \omega_- - 0$ в соотношение (2.163), находим, что существует еще одна зона аномального преломления ниже ω_-, поскольку $c_g^{-1} < 0$ при $\omega \to \omega_- - 0$. Ширина данной зоны зависит от характеристических частот. Более подробное исследование выходит за рамки данной работы. □

Здесь не проанализировано дисперсионное соотношение $\Re k(\omega)$ вне запрещенных зон для упругого материала. Вдали от окрестности их границ влияние малой вязкости оказывается малым. Заметим, что зоны аномального преломления, чье существование мы указали для малой диссипации β_1, содержатся в зоне сильно затухающих волн (соответствующих запрещенной зоне в упругом материале). Непосредственно под каждой из частот ω_+ и ω_- фазовая скорость этих сильно затухающих волн велика, а групповая скорость отрицательна. В полосе частот, ограниченной снизу частотой ω_0, групповая скорость отрицательна, а фазовая скорость мала.

Численные примеры показывают, что этот вид вязкости даже для больших значений параметра диссипации также обеспечивает существование данных зон аномального преломления, но это не было доказано аналитически.

2.10.4 Вязкость в упругом основании распределенного динамического гасителя.

Дисперсионное соотношение (2.136) принимает форму

$$k^2 = \tilde{K}(1 + i\varepsilon), \tag{2.168}$$

$$\tilde{K} = \frac{1}{c_P^2} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2) + b_0^2\omega^2(\omega^2 - \omega_1^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b_0^2\omega^2}, \tag{2.169}$$

$$\varepsilon = -b_0 \frac{C^2}{A_{11}} \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2) + b_0^2\omega^2(\omega^2 - \omega_1^2).} \tag{2.170}$$

Рисунок 2.20 представляет собой численный пример дисперсионных кривых, когда имеется вязкость в упругом основании для распределенного динамического гасителя. Сплошные линии соответствуют численному решению уравнения (2.136), а штриховые линии — асимптотическому решению, полученному ниже для частот, не слишком близких к характеристическим. Ограничимся исследованием влияния малого параметра диссипации b_0 на поведение волн. Запишем приближения для дисперсионных соотношений в случае, когда частота волны не слишком близка к характеристическим $\omega_0, \omega_-, \omega_+$ (т.е. разность между частотой и любой из характеристических частот много больше b_0).

В этом случае область $\tilde{K} < 0$ приближенно соответствует запрещенным зонам в упругом материале, $(0; \omega_-)$ и $(\omega_0; \omega_+)$ (с точностью до величин порядка b_0^2). Малая вязкость b_0 вне этой области влечет малое изменение упругого решения для $\Re k$ и существование ненулевого $\Im k$. Область $\tilde{K} < 0$ представляет больший интерес.

Чтобы получить приближения для $\Re k, \Im k$, разложим выражения (2.124) для случая малой диссипации b_0 в ряд по ε, в то же время раскладывая в

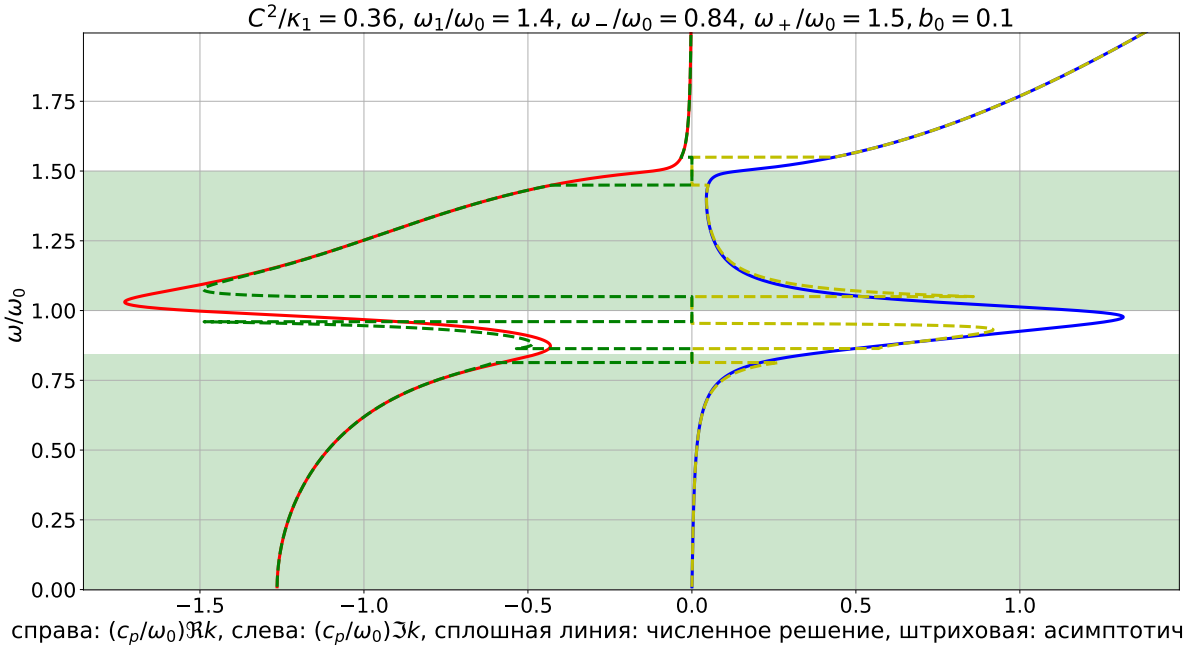

Рис. 2.20: Дисперсионные кривые для продольной волны в изотропной редуцированной вязкоупругой среде. Запрещенные в упругом случае зоны $(0;\omega_-)$ и $(\omega_0;\omega_+)$ закрашены зеленым цветом. Численное решение для задачи с вязкостью в упругом основании распределенного динамического гасителя соответствует сплошным линиям. Асимптотическое решение изображено штриховыми линиями (частично совпадающими со сплошными), оно получено вне окрестностей характеристических частот, заключенных между горизонтальными штриховыми прямыми.

ряд $\tilde{K}$ и ε по b_0. Пренебрегая членами $O(b_0^4)$, после вычислений мы получим для $\tilde{K} > 0$

$$(\Re k)^2 = \frac{1}{c_P^2}\frac{(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}{\omega^2-\omega_0^2} \times\left(1+b_0^2\frac{C^2}{A_{11}}\frac{\omega^2((\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)-\frac{3C^2}{4A_{11}})}{(\omega^2-\omega_0^2)^2(\omega^2-\omega_+^2)^2(\omega^2-\omega_-^2)^2}\right), \quad (2.171)$$

$$(\Im k)^2 = \frac{b_0^2C^4}{4A_{11}^2c_P^2}\frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^3(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}. \quad (2.172)$$

Здесь мы учли, что

$$(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)=(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)-\frac{C^2}{A_{11}}. \tag{2.173}$$

Для $\tilde{K}<0$ выражения меняются местами и меняют знак:

$$(\Re k)^2=-\frac{b_0^2C^4}{4A_{11}^2c_P^2}\frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^3(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}, \tag{2.174}$$

$$(\Im k)^2=-\frac{1}{c_P^2}\frac{(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}{\omega^2-\omega_0^2} \times\left(1+b_0^2\frac{C^2}{A_{11}}\frac{\omega^2((\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)-\frac{3C^2}{4A_{11}})}{(\omega^2-\omega_0^2)^2(\omega^2-\omega_+^2)^2(\omega^2-\omega_-^2)^2}\right). \tag{2.175}$$

Теорема 2.3. *Малая вязкость в упругом основании динамического гасителя b_0 частично преобразует упругий единожды отрицательный акустический метаматериал в вязкоупругий дважды отрицательный акустический метаматериал.*

Доказательство. Поскольку для $b_0=o(1)$ при $\tilde{K}<0$

$$\Re k=b_0\frac{C^2}{2c_PA_{11}}\frac{\omega}{(-(\omega^2-\omega_0^2)^3(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2))^{1/2}}, \tag{2.176}$$

легко видеть, что $\Re k(\omega)$ имеет убывающий участок над ω_0.

Действительно, при $0<\omega-\omega_0=o(1)$, $\omega-\omega_0\gg b_0$,

$$\Re k\approx\frac{b_0}{(\omega-\omega_0)^{3/2}}\frac{C^2}{4c_PA_{11}(2\omega_0(\omega_+^2-\omega_0^2)(\omega_0^2-\omega_-^2))^{1/2}}. \tag{2.177}$$

Таким образом, $\Re k$ убывает как $(\omega-\omega_0)^{3/2}$ в некоторой зоне над ω_0. □

На рисунке 2.20 мы видим убывающий участок дисперсионной кривой

над ω_0, как и получено выше аналитически.

Обсудим, как $\Im k$ зависит от b_0. Как было сказано выше, в области $\tilde{K} < 0$ можно приблизить $(\Im k)^2$ как

$$(\Im k)^2 = -\frac{1}{c_P^2}\frac{(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)}{\omega^2-\omega_0^2}\left(1+\frac{b_0^2\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2(\omega^2-\omega_+^2)^2(\omega^2-\omega_-^2)^2}f(\omega)\right), \tag{2.178}$$

где

$$f(\omega) = -(\omega^2-\omega_+^2)^2(\omega^2-\omega_-^2)^2+(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_+^2)(\omega^2-\omega_-^2)+\frac{C^4}{4A_{11}^2}$$
$$= \frac{C^2}{A_{11}}((\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)-\frac{3C^2}{4A_{11}^2}) \tag{2.179}$$

Уравнение $f(\omega) = 0$ имеет два корня

$$\omega'_\pm = \frac{\omega_0^2+\omega_1^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2}{4}+\frac{3C^2}{4A_{11}}} \tag{2.180}$$

Функция $f(\omega) < 0$ при $\omega \in (\omega'_-;\omega'_+)$ и положительна в других областях. Частота ω'_- принадлежит зоне, где $\tilde{K} > 0$, поскольку $\omega_- < \omega'_- < \omega_0$. Таким образом, в первой запрещенной зоне упругого материала $(0;\omega_-)$ поглощение на заданном расстоянии возрастает как функция диссипации b_0. Частота ω'_+ лежит в области $(\omega_0;\omega_+)$, другой запрещенной зоне для упругого случая. Таким образом, поглощение на заданном расстоянии убывает в первой части этой зоны $(\omega_0;\omega'_+)$, и возрастает в ее оставшейся части как функция малой диссипации b_0. Рисунок 2.21 иллюстрирует эти выводы.

Логарифмический декремент в зоне $\tilde{K} < 0$ для малой диссипации b_0 равен

$$2\pi\left|\frac{\Im k}{\Re k}\right| = \frac{2\pi}{b_0}\frac{2A_{11}}{C^2}\frac{|(\omega^2-\omega_-^2)(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_+^2)|}{\omega}. \tag{2.181}$$

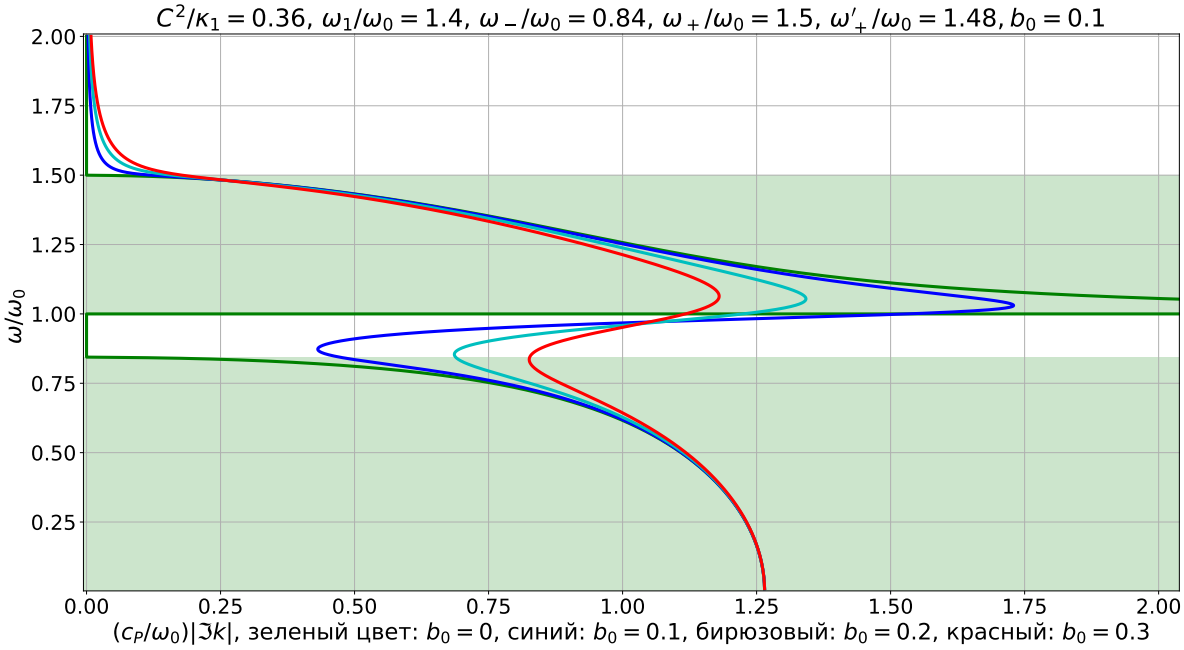

Рис. 2.21: Дисперсионные кривые для продольной волны в изотропной редуцированной среде с диссипацией в упругом основании динамического гасителя: $b_0 \neq 0$. Запрещенные зоны в упругой среде $(0;\omega_-)$ и $(\omega_0;\omega_+)$ закрашены зеленым цветом. Ниже ω'_+ (точки пересечения кривых между ω_0 и ω_+) в верхней запрещенной зоне упругого материала поглощение как функция малой диссипации b_0 убывает. В нижней бывшей запрещенной зоне — возрастает.

Он убывает как функция малой диссипации b_0 внутри запрещенных зон. Такой эффект не наблюдается в классической среде (рис. 2.22). Логарифмический декремент достигает максимума в верхней бывшей запрещенной зоне $(\omega_0;\omega_+)$ и стремится к бесконечности на низких частотах. Вне запрещенных зон дробь $\Im k/\Re k$ обращается:

$$2\pi\left|\frac{\Im k}{\Re k}\right| = 2\pi b_0 \frac{C^2}{2A_{11}} \frac{\omega}{|(\omega^2-\omega_-^2)(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_+^2)|}. \tag{2.182}$$

Видно, что у него есть минимум между ω_- и ω_0. Данные формулы и заключения не годятся для описания поведения дисперсионных кривых в окрестности характеристических частот, где не выполняется условие (2.125).

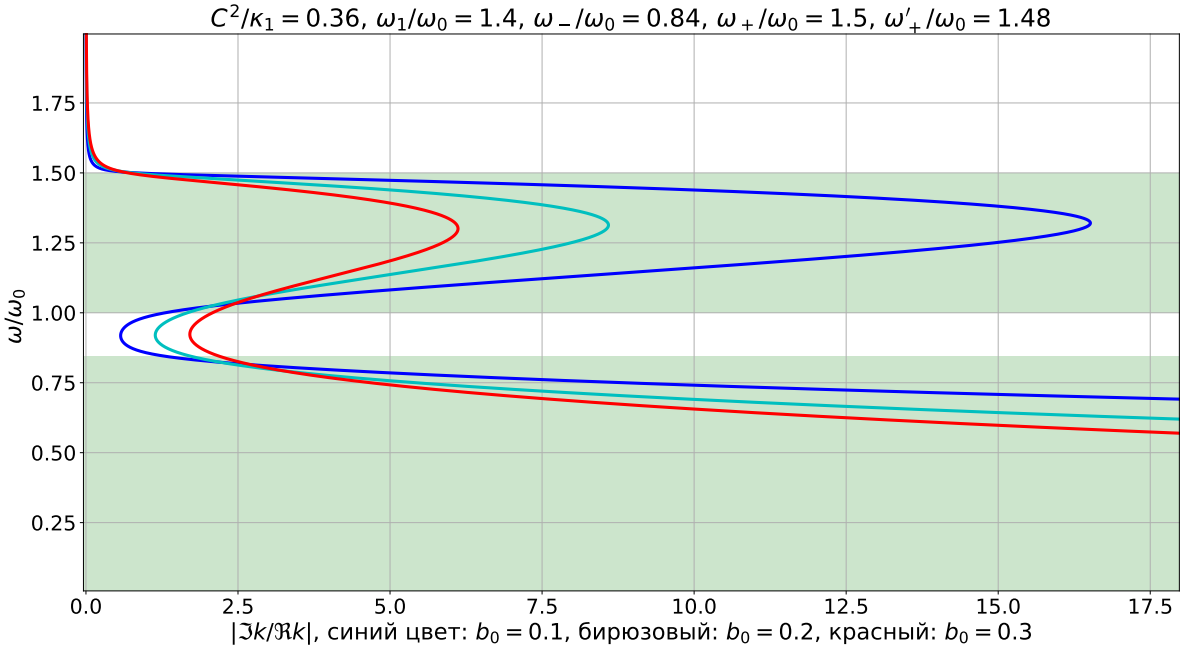

Рис. 2.22: Логарифмический декремент, деленный на 2π, для продольной волны в изотропной редуцированной среде с вязкостью b_0 в основании распределенного динамического гасителя. Он убывает как функция малой диссипации в запрещенных зонах. В упругом случае он бесконечен в запрещенных зонах и равен нулю вне них.

Немонотонное поведение логарифмического декремента наблюдается для всех волн с запрещенными зонами в редуцированных вязкоупругих средах. Причина этого в том, что в упругом случае в запрещенных зонах логарифмический декремент бесконечен, а вне их равен нулю. Малая диссипация меняет эту картину, однако тенденции (большой логарифмический декремент в данных зонах и малый — вне их) по-прежнему присутствуют. Заметим, что такое поведение логарифмического декремента характерно для волн в геосреде [222]. В случае ненулевой вязкости в упругом основании распределенного динамического гасителя логарифмический декремент меняется без скачков.

2.11 Поперечная волна в линейной вязкоупругой изотропной редуцированной среде. Случай взаимосвязи между обобщенными координатами гасителя и несущего континуума.

Для поперечной волны $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{k} = 0$, и, как обсуждалось в разделе 2.3.1, в случае изотропной среды $C\hat{N} = 0$. Рассмотрим вариант $\hat{N} = 0$. Из (2.99) получаем следующее уравнение Кристоффеля:

$$\Bigg(\Big(k^2\kappa_2(1+i\beta_2\omega) + (-\omega^2+\omega_1^2+ib_1\omega)A_{11} + \frac{C^2(1+ib_{10}\omega)^2}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega}\Big)(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}, \quad (2.183)$$

что дает дисперсионное соотношение, совпадающее с (2.136) с точностью до подстановки упругого модуля κ_2 вместо κ_1:

$$k^2\kappa_2(1+i\beta_2\omega) + (-\omega^2+\omega_1^2+ib_1\omega)A_{11} + \frac{C^2(1+ib_{10}\omega)^2}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega} = 0. \quad (2.184)$$

Таким образом, анализ, осуществленный для продольной волны в разделе 2.10, применим и в данном случае.

2.12 Поперечная волна в линейной вязкоупругой изотропной редуцированной среде. Взаимосвязь между векторной обобщенной координатой гасителя и деформацией несущего континуума.

В этом случае существует плоская волна сдвига, отличная по характеру от продольной волны. Из уравнения Кристоффеля (2.99) получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$k^2\kappa_2(1+i\beta_2\omega)+(-\omega^2+\omega_1^2+ib_1\omega)A_{11}+\frac{k^2\hat{N}^2(1+in\omega)^2}{\omega^2-\omega_0^2-ib_0\omega}=0. \qquad (2.185)$$

Напомним, что в упругом случае ($k = k_e$) при $\omega \neq \omega_0$ оно приводится к (см. (2.43))

$$c_{S\alpha}^2 k_e^2 = \frac{(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)}{\omega^2-\omega_*^2}, \qquad (2.186)$$

и дисперсионные кривые обладают двумя запрещенными зонами, при $\omega_* < \omega_1$ также есть зона аномального преломления $(\omega_*; \min(\omega_1, \omega_0))$.

Различные параметры диссипации оказывают разное влияние на поперечную волну. Рассмотрим некоторые случаи по отдельности.

2.12.1 Вязкость в упругом основании несущего континуума.

В данном случае дисперсионное соотношение таково:

$$k^2 = k_e^2(1+i\varepsilon(\omega)), \qquad (2.187)$$

где

$$\varepsilon = b_1 \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_1^2} \tag{2.188}$$

Для вещественной части волнового числа $\Re k$ справедливы соотношения (2.146). Как и для продольной волны, $\Re k$ не равно нулю, поэтому всегда существует бегущее решение. Итак, вводя в материал диссипацию, мы всегда получим бегущие убывающие по амплитуде волны.

Мнимая часть волнового числа $\Im k$ определяется соотношениями (2.149). Функция k_e^2 не зависит от параметров диссипации. Таким образом, диссипативный параметр b_1 ухудшает прохождение волны. Здесь можно сделать те же заключения, что и для продольной волны с тем же типом диссипации. Логарифмический декремент равен

$$2\pi \left| \frac{\Im k}{\Re k} \right| = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2} - \operatorname{sgn} k_e}{\sqrt{1+\varepsilon^2} + \operatorname{sgn} k_e}}, \tag{2.189}$$

что при $k_e < 0$ является убывающей функцией ε, а при $k_e > 0$ — возрастающей. Заметим, что при фиксированном b_1 при стремлении частоты к бесконечности $\varepsilon \to 0$. Поэтому логарифмический декремент как функция b_1 убывает в запрещенной зоне упругого материала, а как функция частоты стремится к нулю при $\omega \to \infty$.

Покажем, однако, что для данного вида упругой перевязки вязкость b_1 оказывает также иные эффекты, чем в случае продольной волны. При $\omega_* < \omega_1$ имеется убывающий участок дисперсионной кривой для упругого материала. При $\omega_1 > \omega_0$ это условие обязательно выполняется, однако благодаря введению диссипации b_1 не возникает новых зон аномального преломления. При $\omega_1 < \omega_0$ по крайней мере одна из запрещенных зон становится зоной аномального преломления:

Теорема 2.4. *При $\omega_1 < \omega_0$ малая вязкость b_1 превращает часть рабочей зоны единожды отрицательного упругого акустического метаматериала в рабочую зону дважды отрицательного акустического метаматериала. Часть запрещенной зоны в упругом материале становится зоной аномального преломления для убывающих по амплитуде волн в вязкоупругой среде.*

Доказательство. Рассмотрим влияние малого параметра $b_1 = o(1)$ в зоне частот, где $\omega - \omega_1 \gg b_1$. При $k_e^2 < 0$ мы получим

$$4c_{S\alpha}^2(\Re k)^2 = b_1^2\omega^2\frac{\omega^2-\omega_0^2}{-(\omega^2-\omega_*^2)(\omega^2-\omega_1^2)} \tag{2.190}$$

Видим, что в области выше $\max(\omega_1, \omega_*)$ (соответствующей запрещенной зоне в упругом материале тогда и только тогда, когда $\omega_0 > \omega_1$) существует падающий участок дисперсионной кривой, равно как и непосредственно ниже частоты ω_0. Заметим, что аномальное преломление имеет место лишь в верхней бывшей запрещенной зоне. □

Численные результаты иллюстрируют это заключение (рис. 2.23, 2.24).

2.12.2 Вязкость в материале несущего континуума.

В данном случае дисперсионное соотношение (2.185) принимает форму

$$k^2(\kappa_2(1+i\beta_2\omega)+\frac{\hat{N}^2}{\omega^2-\omega_0^2}) - A_{11}(\omega^2-\omega_1^2) = 0, \tag{2.191}$$

которое можно переписать в виде

$$k^2 = \tilde{K}(1+i\varepsilon), \tag{2.192}$$

$$\tilde{K} = \frac{1}{c_{S\alpha}^2}\frac{(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_*^2)}{(\omega^2-\omega_*^2)^2+\beta_2^2\omega^2(\omega^2-\omega_0^2)^2}, \tag{2.193}$$

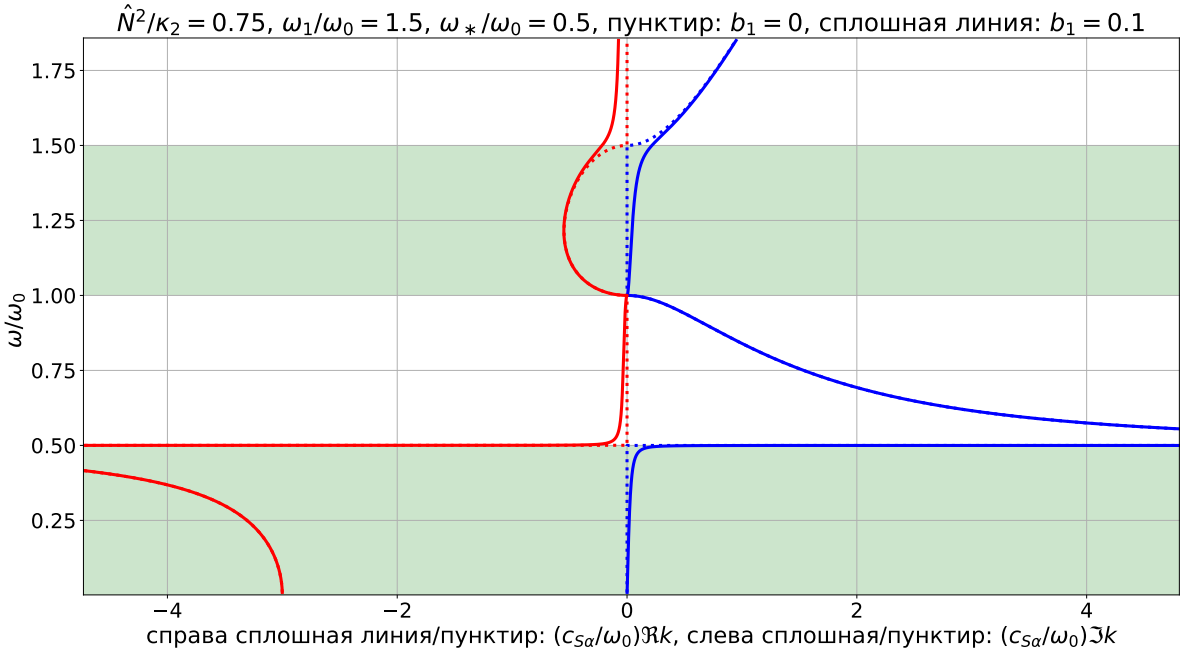

Рис. 2.23: Дисперсионные кривые для плоской поперечной волны в упругом изотропном редуцированном континууме. Пунктирные кривые соответствуют упругому случаю, сплошные линии — вязкоупругому. Запрещенные в упругом случае зоны закрашены зеленым цветом. $\omega_0 < \omega_1$, имеет место аномальное преломление в той же зоне, что и в упругом материале, но нормальное преломление в запрещенных зонах для упругого случая.

$$\varepsilon = -\beta_2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_*^2}. \tag{2.194}$$

Представляет интерес, как ведет себя $\Im k$ в бывшей запрещенной зоне по сравнению с упругим случаем. Чисто техническое упражнение позволяет получить приближение в бывшей запрещенной зоне для малой диссипации при условии $\beta_2 \ll \frac{2|\omega-\omega_*|}{\omega_0^2-\omega_*^2}$:

$$|\Im k| = |k_e|\left(1 - \frac{\beta_2^2\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2)}{4(\omega^2 - \omega_*^2)^2}\right), \tag{2.195}$$

где $|k_e|$ — модуль волнового числа в упругом случае, $k_e^2 = \tilde{K}|_{\beta_2=0}$. Отсюда получаем, что для малой диссипации $|\Im k(\beta_2)|$ в бывшей запрещенной зоне

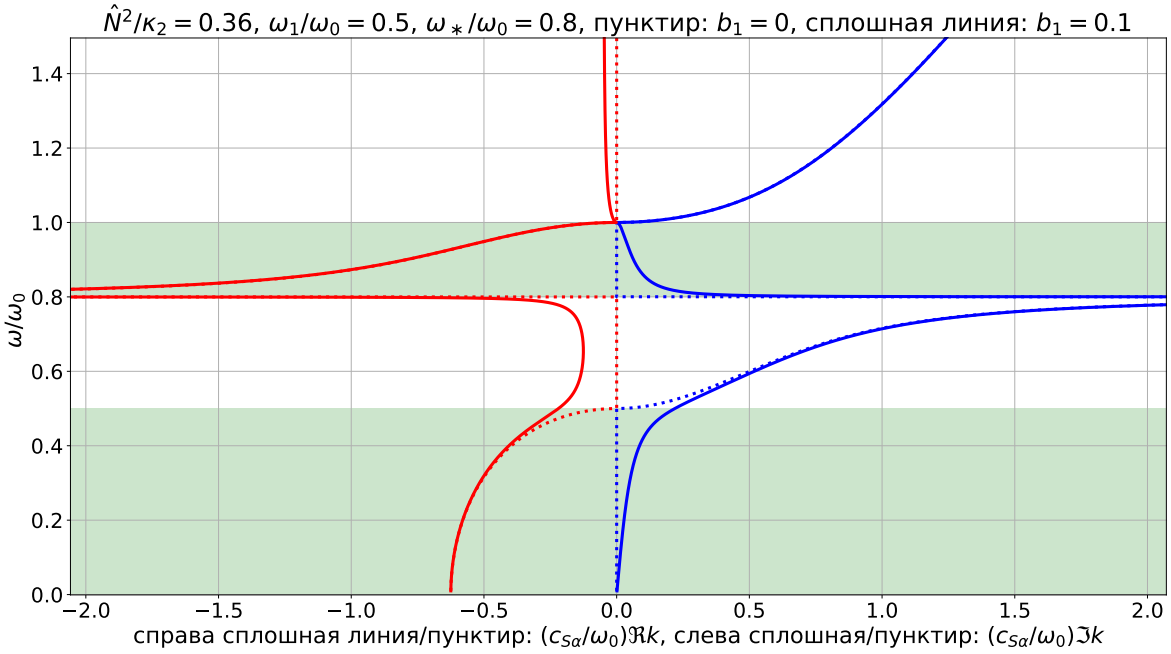

Рис. 2.24: Дисперсионные кривые для плоской поперечной волны в изотропной редуцированной среде. Пунктирные линии соответствуют упругому случаю, сплошные — вязкоупругому. Запрещенные для упругого континуума зоны закрашены зеленым цветом. $\omega_0 > \omega_1$, в верхней бывшей запрещенной зоне наблюдается аномальное преломление.

убывает.

Теорема 2.5. *При $\omega_1 < \omega_*$ материал обладает зоной аномального преломления, расположенной выше частоты ω_*, внутри верхней бывшей запрещенной зоны $(\omega_*; \omega_0)$ для упругого случая, а также ниже частоты ω_1.*

Доказательство. Действуя как в разделе 2.10.4, получаем приближение при малом β_2, если $\tilde{K} < 0$:

$$\Re k = \frac{\beta_2 \omega}{2c_{S\alpha}} \frac{|\omega^2 - \omega_0^2|^{3/2} |\omega^2 - \omega_1^2|^{1/2}}{|\omega^2 - \omega_*^2|^{3/2}} \tag{2.196}$$

В зависимости от взаимного расположения характеристических частот диссипация β_2 может приводить к возникновению падающих участков дисперсион-

ных кривых. Анализ последнего выражения приводит к следующим выводам:

1. При $\omega_1 > \omega_0$ имеются запрещенные зоны $[0;\omega_*]$ и $(\omega_0;\omega_1)$, при этом в верхней части верхней бывшей запрещенной зоны возникает падающий участок дисперсионной кривой, а в нижней зоне такого участка нет.

2. При $\omega_* < \omega_1 < \omega_0$ имеются запрещенные зоны $[0;\omega_*]$ и $(\omega_1;\omega_0)$, при этом в верхней части верхней бывшей запрещенной зоны также возникает падающий участок дисперсионной кривой, а в нижней зоне такой участок отсутствует.

3. При $\omega_1 < \omega_*$ имеются запрещенные зоны $[0;\omega_1)$ и $[\omega_*;\omega_0)$, при этом в обеих запрещенных зонах есть падающие участки дисперсионных кривых.

□

Под запрещенными зонами здесь и далее понимаются зоны частот, где в упругом случае не существует бегущей волны.

На рисунке 2.25 мы видим зоны аномального преломления в обеих запрещенных зонах. Заметим, что при $\omega_1 > \omega_*$ в упругом материале над частотой ω_* расположена зона аномального преломления, на которую практически не влияет присутствие малой диссипации β_2.

Логарифмический декремент в запрещенных зонах, очевидно, убывает с ростом малой диссипации обратно пропорционально β_2 (приближение справедливо на некотором удалении от границ запрещенных зон).

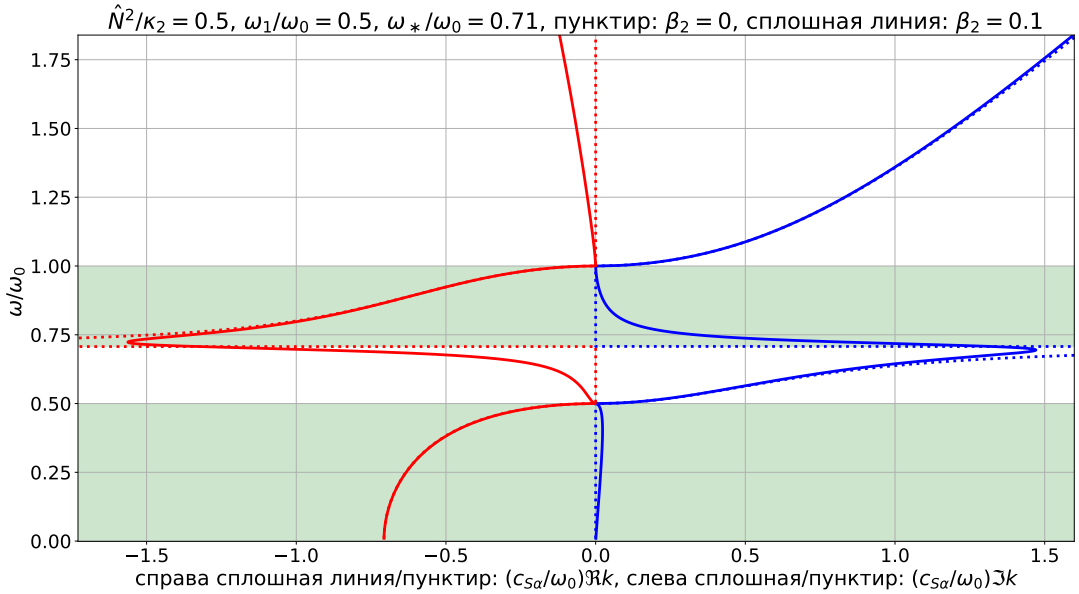

Рис. 2.25: Дисперсионные кривые для плоской волны сдвига в упругом изотропном редуцированном континууме. Пунктирные линии соответствуют упругому случаю, сплошные линии — вязкоупругому. Запрещенные в упругой среде зоны закрашены зеленым цветом. $\omega_0 > \omega_1$, в обеих запрещенных зонах имеется аномальное преломление.

2.12.3 Вязкость в перевязочном члене.

Дисперсионное соотношение (2.185) выглядит в данном случае следующим образом

$$k^2(\kappa_2 + \frac{N^2}{\omega^2 - \omega_0^2}(1 + in\omega)^2) = A_{11}(\omega^2 - \omega_1^2). \tag{2.197}$$

Оно может быть преобразовано к виду

$$k^2 = \tilde{K}(1 + i\varepsilon), \tag{2.198}$$

где

$$\tilde{K} = k_e^2\left[1-n^2\frac{\hat{N}^2}{\kappa_2}\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_*^2}\right]^{-1}\left[1+n^2\frac{4\hat{N}^4}{\kappa_2^2}\frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_*^2)^2(1-\frac{\hat{N}^2}{\kappa_2}\frac{n^2\omega^2}{\omega^2-\omega_*^2})^2}\right]^{-1}, \quad (2.199)$$

$$\varepsilon = -2n\omega\frac{\hat{N}^2/\kappa_2}{\omega^2-\omega_*^2-n^2\omega^2\hat{N}^2/\kappa_2}. \quad (2.200)$$

Для вещественной и мнимой части волнового вектора справедливы соотношения (2.123), (2.124). Видим, что n входит в дисперсионное соотношение весьма сложным образом. Ясно, что всегда существует бегущая плоская волна при $n \neq 0$, и что малая диссипация n существенно не меняет дисперсионные кривые в области $\tilde{K} > 0$, лишь приводя к малому поглощению. В запрещенных в упругом континууме зонах, однако, вновь наблюдаются интересные явления:

Теорема 2.6. *Малая диссипация n частично превращает данный единожды отрицательный акустический метаматериал в дважды отрицательный акустический метаматериал.*

При $\omega_1 < \omega_*$ малая диссипация n приводит к возникновению зон аномального преломления в верхней и нижней частях области $(\omega_*;\omega_0)$ (они могут занимать всю эту область), а также зоны аномального преломления, расположенной под частотой ω_1.

При $\omega_* < \omega_1$ малая диссипация n приводит к возникновению зоны аномального преломления в верхней части верхней запрещенной для упругой среды зоны, расположенной под частотой $\max(\omega_1;\omega_0)$.

Все зоны указаны с точностью до величин порядка $O(n^2)$. Новые по сравнению с упругим случаем зоны аномального преломлению содержатся (с точностью до членов высшего порядка) внутри зон с существенным поглощением.

Доказательство. Запишем приближения для случая малого n в области $\tilde{K} < 0$, как и выше, не слишком приближаясь к характеристическим частотам. Эта область, с точностью до членов порядка n^2, такая же, как и в предыдущем случае. С точностью до членов высшего порядка получаем

$$(\Re k)^2 = -\frac{n^2\omega^2}{c_{S\alpha}^2}\frac{\hat{N}^4}{\kappa_2^2}\frac{(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)}{(\omega^2-\omega_*^2)^3} \tag{2.201}$$

Приближая данную функцию вблизи границ запрещенных зон (однако при соблюдении условия (2.125)), точно таким же образом получаем те же в качественном смысле заключения, что и в случае $\beta_2 \neq 0$. □

Асимптотическое приближение для $\Im k$ при малой диссипации n в запрещенных зонах дает

$$|\Im k| = |k_e|(1 + n^2\frac{\hat{N}^2}{2\kappa_2}\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_*^2} - n^2\frac{3\hat{N}^4}{2\kappa_2^2}\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_*^2)^2}) \tag{2.202}$$

Видим, что $|\Im k|$ как функция малого диссипативного параметра убывает при $\omega < \omega_*$ или при при достаточном приближении частоты к ω_* (когда $\omega^2 - \omega_*^2 < 3\hat{N}^2/k$). Таким образом, поглощение будет уменьшаться с ростом малой диссипации хотя бы в части одной из запрещенных зон, а если $\omega_1 < \omega_*$, то во всей нижней зоне и в части верхней. Для малого n логарифмический декремент как функция n убывает, будучи пропорциональным n^{-2}.

2.12.4 Вязкость в упругом основании несущего континуума.

Дисперсионное соотношение (2.185) принимает форму

$$k^2(\kappa_2 + \frac{\hat{N}^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - ib_0\omega}) = A_{11}(\omega^2 - \omega_1^2). \tag{2.203}$$

Это может быть преобразовано к виду

$$k^2 = \tilde{K}(1 + i\varepsilon), \tag{2.204}$$

где

$$c_{S\alpha}^2\tilde{K} = \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)((\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_*^2) + b_0^2\omega^2)}{(\omega^2 - \omega_*^2)^2 + b_0^2\omega^2}, \tag{2.205}$$

$$\varepsilon = -b_0\omega\frac{\hat{N}^2/\kappa_2}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_*^2) + b_0^2\omega^2} \tag{2.206}$$

Рассмотрим вновь $b_0 = o(1)$ в области $\tilde{K} < 0$. Покажем, что данный вид малой диссипации также может преобразовать некоторые части запрещенных для упругого материла зон в области аномального преломления для затухающих волн в вязкоупругом материале. С точностью до величин порядка $O(b_0^4)$

$$c_{S\alpha}^2(\Re k)^2 = -\frac{b_0^2\hat{N}^4}{4\kappa_2^2}\frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_1^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_*^2)^3} \tag{2.207}$$

Теорема 2.7. *Если $\omega_1 < \omega_*$, зоны аномального преломления расположены под частотой ω_1 и над частотой ω_* при наличии малой диссипации b_0.*

При $\omega_0 < \omega_1$ запрещенная зона $(\omega_0; \omega_1)$ полностью становится зоной аномального преломления для бегущего затухающего решения.

Доказательство. Можно показать это, вычислив производную

$$4c_{S\alpha}^2\frac{\partial(\Re k)^2}{\partial(\omega^2)} = -\frac{b_0^2\hat{N}^4}{\kappa_2^2(\omega^2-\omega_0^2)^2(\omega^2-\omega_*^2)^4}(\omega^2(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_*^2)$$
$$-\omega^2(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_*^2)-3\omega^2(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)+(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_*^2))$$
$$= -\frac{b_0^2\hat{N}^4}{\kappa_2^2(\omega^2-\omega_0^2)^2(\omega^2-\omega_*^2)^4}(\omega^2(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_*^2)-\omega^2(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_*^2)$$
$$-(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_1^2)(2\omega^2+\omega_*^2)). \quad (2.208)$$

Поскольку данное выражение с точностью до положительного постоянного множителя равно произведению групповой и фазовой скоростей, оно имеет тот же знак, что и групповая скорость (так как фазовая скорость положительна). Подставляя ω_1 и ω_* в это выражение в случае $\omega_1 < \omega_*$, получаем, что групповая скорость отрицательна. Данное выражение справедливо внутри запрещенных зон, поэтому здесь показано наличие убывающих участков дисперсионных кривых над частотой ω_* и под частотой ω_1.

Видно, что при $\omega_* < \omega_0 < \omega < \omega_1$ вычисленная выше производная вновь отрицательна, и поэтому групповая скорость также отрицательна. □

Примеры дисперсионных кривых показаны на рисунках 2.26, 2.27. Они прекрасно согласуются с данным анализом.

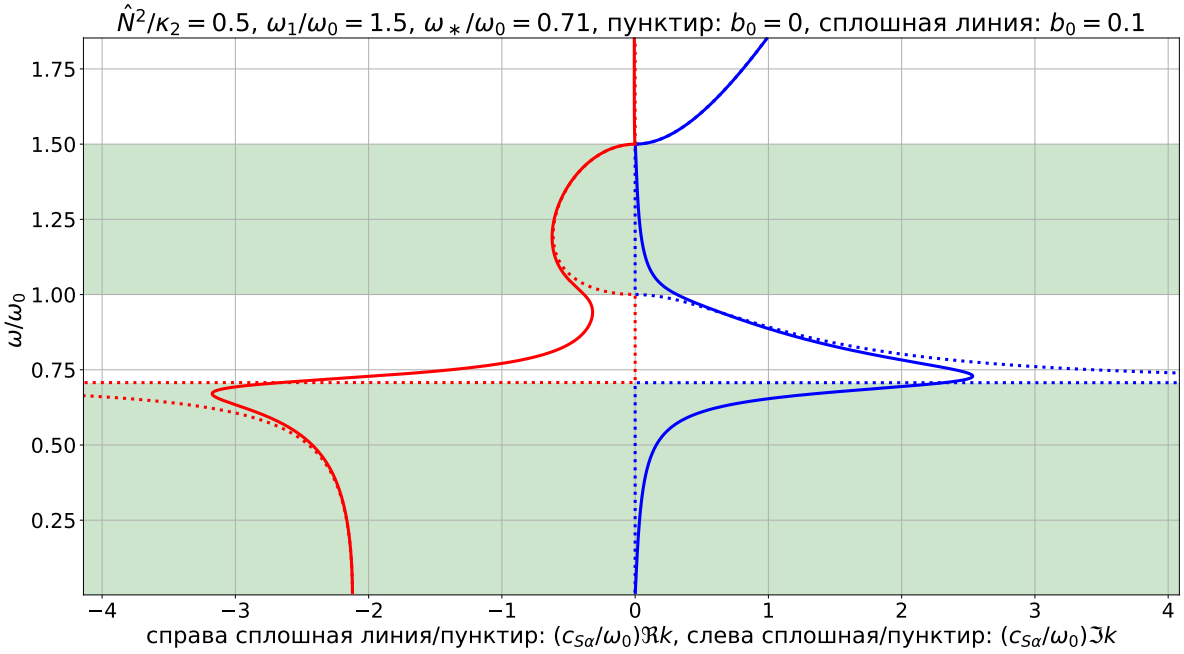

Рис. 2.26: Дисперсионные кривые для плоской поперечной волны в изотропном редуцированном континууме. Пунктирные линии соответствуют упругому случаю, сплошные — вязкоупругому. Запрещенные в упругой среде зоны закрашены зеленым цветом. $\omega_0 > \omega_1$, имеется область аномального преломления в верхней бывшей запрещенной зоне.

2.13 Гармонические волны в линейной вязкоупругой гиротропной редуцированной среде с комбинированным типом взаимосвязи субконтинуумов.

Рассмотрим гиротропную среду с почти всеми изотропными характеристиками, в которой присутствует комбинированный тип взаимосвязи субконтинуумов «деформация несущего континуума – координата динамического гасителя» и «координата несущего континуума – координата динамического гасителя»: $C\hat{N} \neq 0$. Продольные волны в данном континууме имеют тот же

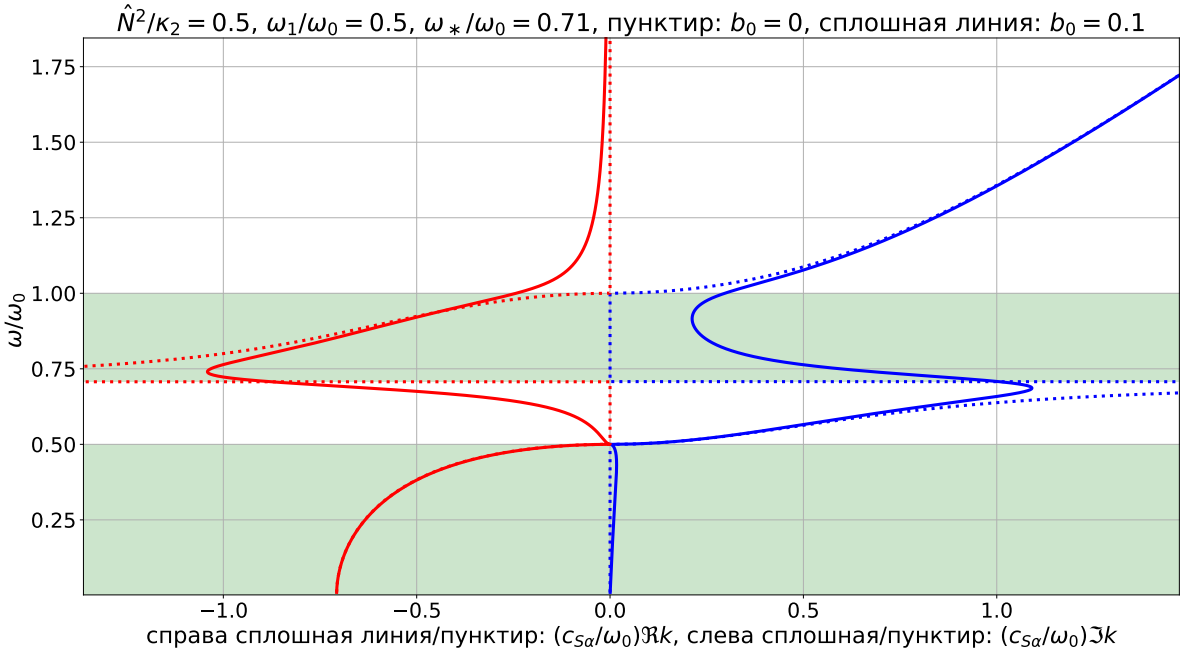

Рис. 2.27: Дисперсионные кривые для плоской поперечной волны в изотропном редуцированном континууме. Пунктирные линии соответствуют упругому случаю, сплошные — вязкоупругому. Запрещенные в упругой среде зоны закрашены зеленым цветом. $\omega_0 > \omega_1$, в верхней бывшей запрещенной зоне наблюдается аномальное преломление.

вид, что и в изотропном случае. Что касается поперечных волн, то по сравнению с упругим случаем качественных изменений нет, по крайней мере для малой вязкости и не в окрестности характеристических частот. Очевидно, все волны становятся затухающими, если присутствует вязкость. В области, где для упругой среды $k \in \mathbb{R}$, мы будем иметь слабо затухающие бегущие волны, так как для малой вязкости $k = k_e + i\varepsilon(\omega)$, параметр $\varepsilon = o(1)$ — того же порядка малости, что и константы диссипации. В области частот, где $\Im k_e \neq 0$, волны будут также бегущими, но экспоненциально затухающими, при этом $\Re k$ и $\Im k$ будут мало отличаться от упругого случая. Точное выражение для поправочного члена в общем случае громоздко и не представляет особенного интереса. Например, если единственный ненулевой параметр диссипации —

это b_{10} (в перевязке между $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_0$ присутствует демпфер), то на частотах, где упругая волна убывает, получаем

$$\Re k = \Re k_e \mp \frac{b_{10}\omega\left(1 - \frac{\hat{N}^2}{\kappa_2(\omega^2-\omega_*^2)}\right)}{\sqrt{-(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_{+*}^2)(\omega^2-\omega_{-*}^2)}}, \tag{2.209}$$

$$\Im k = \Im k_e + b_{10}\omega\,\frac{C\hat{N}}{\kappa_2(\omega^2-\omega_*^2)}. \tag{2.210}$$

Заметим, что область, где $\Im k_e \neq 0$, не включает в себя окрестность ω_*, так как на этой частоте дискриминант равен $C^2\hat{N}_3^2$. Единственное интересное наблюдение в данном случае — что для некоторых областей параметров малая диссипация может несколько уменьшить декремент амплитуды на низких частотах (например, если $\omega_* \in \mathbb{R}$ и C достаточно малы).

2.14 Заключение.

- В данной главе введено понятие упругой **редуцированной среды** — среды, состоящей из двух взаимосвязанных субконтинуумов («несущий континуум + распределенный динамический гаситель»), такой, что упругая энергия не зависит от градиента векторной обобщенной координаты гасителя. Показано, что такая линейная среда является моделью акустического метаматериала. Это также справедливо для вязкоупругой редуцированной среды, модель которой получается модификацией упругой редуцированной среды при помощи добавления линейной диссипации к одной из существующих упругих связей.

Природа обобщенных координат может быть произвольной, они являются многомерными. Рассмотрена линейная среда, подчиняющаяся уравнениям Лагранжа. Для простоты предполагается, что каждый из субконтинуумов

обладает лишь одной парциальной частотой собственных колебаний. Они являются характеристическими частотами среды. Задача для свободных колебаний безграничной среды сведена к уравнению Кристоффеля для несущего континуума.

Рассмотрено два случая для **анизотропной среды общего вида**: перекрестный член в энергии деформации, связывающий градиент обобщенной координаты несущего континуума и координату динамического гасителя, и перекрестный член для обеих обобщенных координат. Проведен асимптотический анализ дисперсионных соотношений вблизи характеристических частот.

В первом случае в материале для каждой дисперсионной ветви существуют запрещенные зоны (возможно, сливающиеся в одну) над нижней и под верхней характеристической частотой. Исключение могут составлять вырожденные случаи, когда направление распространения волн совпадает с какой-либо осью симметрии. Для достаточно сильной взаимосвязи субконтинуумов всегда существует падающий участок дисперсионной кривой под нижней характеристической частотой. Это имеет место также для любого перекрестного члена, если парциальная частота динамического гасителя меньше, чем несущего континуума.

Во втором случае, когда перевязка имеет место между двумя векторными обобщенными координатами, существует две запрещенных зоны: над парциальной частотой распределенного динамического гасителя и выше $\omega = 0$.

Рассмотрен случай, когда каждая из субчастиц тела-точки сложного континуума обладает тремя степенями свободы, а среда **изотропна**. Получены и проанализированы дисперсионные соотношения для продольной и поперечной волн. Общие тенденции аналогичны анизотропному случаю. Для продольной волны существует две запрещенные зоны: в области низких частот и над частотой парциального динамического гасителя. С ними совпадают

запрещенные зоны для поперечных волн при наличии перевязки между координатами гасителя и несущего континуума. Случай поперечных волн и перевязки между градиентом координаты несущего континуума и координатой гасителя отличается. Показано, что если парциальная частота динамического гасителя меньше, чем для несущего континуума, или перевязка достаточно велика, то между характеристическими частотами имеется запрещенная зона, и прямо под ней — падающий участок дисперсионной кривой. В противном случае одна запрещенная зона расположена под парциальной частотой гасителя, а другая — под парциальной частотой несущего континуума.

Для упругой **гиротропной** среды со всеми изотропными материальными характеристиками, за исключением одной из ответственных за взаимодействие несущего континуума и распределенного динамического гасителя констант, гармоническая поперечная волна является поляризованной и демонстрирует сложное и разнообразное поведение в зависимости от параметров среды. Она обладает зонами аномального преломления и запрещенными зонами, причем их наличие и характеристики весьма чувствительны к параметрам среды.

Таким образом,

- управляя взаимосвязью субконтинуумов или внешним следящим воздействием, можно изменять рабочие зоны упругого метаматериала и тип метаматериала (единожды или дважды отрицательный). Наиболее эффективно управлять волновыми свойствами изотропного материала можно в случае поперечной волны за счет взаимосвязи «деформация несущего континуума — координата динамического гасителя», а для гиротропного материала — при условии сочетания этой взаимосвязи со взаимосвязью обеих обобщенных векторных координат.

Добавляя вязкость типа Кельвина–Фойгта к существующим упругим связям, мы рассматриваем влияние на волновые свойства каждого диссипативного параметра по отдельности. Во всех случаях диссипация приводит к существованию бегущего гармонического решения на всех или почти всех частотах (возможно, за исключением характеристических частот). Почти во всех случаях для плоских волн малая диссипация приводит к появлению зон аномального преломления, содержащихся (с точностью до малых высших порядков) внутри запрещенных зон для упругой среды, где эти волны остаются существенно затухающими. Таким образом, среда превращается в дважды отрицательный акустический метаматериал с существенным поглощением. Исключением является вязкость в упругом основании для несущего континуума, в этом случае такой эффект для продольной волны отсутствует, хотя возникает для поперечной. Для поперечной поляризованной волны, существующей в упругой гиротропной среде со сложным типом перевязки между несущим континуумом и распределенным динамическим гасителем, малая диссипация также не приводит к подобным эффектам. Во всех рассмотренных вязкоупругих редуцированных средах логарифмический декремент колебаний зависит от частоты немонотонно, что часто наблюдается в геосреде [222]. Логарифмический декремент существенно затухающих (соответствующих бывшим запрещенным зонам) гармонических волн как функция малого параметра вязкости убывает во всех рассмотренных случаях. Прохождение волн, характеризуемое мнимой частью волнового вектора, может улучшаться или ухудшаться в зависимости от типа диссипации, и иногда в зависимости от области частот. Для всех диссипативных параметров, кроме диссипации в основании несущего континуума, существуют области частот, где прохождение волны улучшается с ростом малой диссипации.

Итак,

- добавление линейной диссипации к одной из упругих связей редуцированной среды обеспечивает наличие затухающей гармонической волны на всех или почти всех частотах. Поглощение волны на ее длине убывает в бывшей запрещенной зоне с ростом малой диссипации. В большинстве случаев (за исключением вязкости в упругом основании несущего континуума) по крайней мере в части бывшей запрещенной зоны при наличии диссипации амплитуда волны убывает медленнее по пространственной координате, если параметр малой диссипации растет. За тем же исключением в части бывшей запрещенной зоны появляется падающий участок дисперсионной кривой.

Данные результаты объясняют факт, наблюдаемый в реальных вязкоупругих акустических метаматериалах [258]: «прохождение волны, вообще говоря, ухудшается в окнах прозрачности, в то же время оно улучшается в локально резонантных полосах непропускания».

Влияние вязкости в малой окрестности характеристических частот в общем случае выходит за рамки данной работы и будет являться предметом дальнейших исследований.

По результатам данной главы можно сформулировать следующие **результаты, выносимые на защиту**:

1. Введено понятие и развита теория упругих редуцированных сред типа «несущий континуум + распределенный динамический гаситель», упругая энергия которых не зависит от градиента обобщенной координаты гасителя. Показано, что линейные упругие редуцированные среды являются акустическими метаматериалами вне зависимости от природы своих степеней свободы, то есть их дисперсионные кривые обладают запрещенными зонами или падающими участками.

2. Показано, как, управляя взаимосвязью субконтинуумов или внешним следящим воздействием, можно изменять рабочие зоны метаматериала и их тип. Наиболее эффективно управлять волновыми свойствами изотропного материала позволяет взаимосвязь «градиент координаты несущего континуума – координата динамического гасителя», а гиротропного — она же в сочетании со взаимосвязью обеих координат.

3. Добавление линейной диссипации к упругим связям редуцированной среды обеспечивает существование бегущей затухающей волны почти на всех частотах. Малая диссипация почти всегда способствует уменьшению поглощения волны в запрещенной зоне упругого материала и превращает ее часть в падающий участок — рабочую зону дважды отрицательного акустического метаматериала.

Глава 3

Редуцированная среда Коссера.

Данная глава посвящена решению следующих задач, сформулированных в разделе 1.4:

1. Предложить континуальные модели с поворотными степенями свободы, обладающие свойствами акустических метаматериалов, в том числе учитывающие нелинейность, произвольные внешние нагрузки, локальную и иную анизотропию, диссипацию для зернистых, блоковых, консолидированных сыпучих сред и композитов с жесткими включениями, в которых нет упорядоченной структуры поворотов.

2. Найти особенности динамики и устойчивости данных сред.

3. Найти зависимость волновых свойств этих континуумов от диссипативных параметров и параметров анизотропии, предварительного напряженного состояния.

Результаты данной главы опубликованы в работах [61, 90, 99, 100, 102, 103,

106, 107, 110, 112–114, 116, 117, 126, 144, 206, 212, 285, 300]. Соискатель является единственным автором работ [99, 100, 102, 103, 106, 107, 285].

Работы [112, 113] написаны в сотрудничестве с геомехаником Херардом К. Херманом (Gérard C. Herman, Технический университет Делфта, Shell E.&P.), благодаря интересу которого к обобщению редуцированной модели Коссера и ее применении к динамике геосред было начато данное исследование. Соискателю принадлежит математическая модель и вывод результатов. Доктор Херман участвовал в постановке задачи и формулировке выводов, обсуждении результатов совместных работ, редактировании статей.

В работе [114] вклад соискателя состоит в получении математических результатов в задаче для трехмерной среды и анализе дисперсионных соотношений для упругого полупространства. Вклад М. Кулеша (ИМСС УрО РАН) состоит в постановке двумерной задачи и получении дисперсионных соотношений для нее, вклад доктора Хермана — в постановке задачи и обсуждении результатов задачи для безграничной трехмерной среды.

В работах [144, 300] постановка задачи и получение дисперсионных соотношений для волны Рэлея принадлежат М.А. Кулешу и проф. И.Н. Шардакову (ИМСС УрО РАН), а асимптотическое исследование свойств дисперсионных соотношений — автору диссертации.

В статье [117] соискателем предложены вязкоупругие модели редуцированных сред Коссера со стесненным вращением, получены их дисперсионные соотношения и аналитически исследованы их свойства. Соавторы проф. А.В. Порубов (ИПМаш РАН) и проф. Ф. дель Изола (Francesco dell'Isola, университет дель Аквила, Италия) внесли свой вклад в постановку задачи, литературный обзор, проверку результатов, редактирование статьи.

В совместной работе с А.В. Порубовым [212] соискатель внесла вклад в постановку задачи и анализ линейной модели.

В статье [110] математическая формулировка модели редуцированной вязкоупругой среды Коссера и аналитические результаты полностью получены автором диссертационной работы. Доктору Рафаэлю Абреу (Rafael Abreu, университет Мюнстера, Германия) принадлежит идея ввести в модель упругой редуцированной среды Коссера внутреннюю диссипацию для описания некоторых эффектов, наблюдаемых в сейсмологии, в частности, необычного поведения поглощения. Он также написал программу на Python для численного построения дисперсионных кривых.

Асимптотический анализ влияния малой диссипации трансляционного и ротационного типа на волновые свойства редуцированной среды Коссера проведен в работах [116, 206]. Соискателю принадлежит вывод асимптотических формул для действительной части, а соавтору А.П. Пятышевой (СПбГПУ) — для мнимой.

В работе [61] соискателем предложена идея экспериментальной установки, позволяющей измерять прохождение ультразвуковой волны в мелкодисперсных порошках воспроизводимым образом, и постановка задачи. Реализация установки и проведение экспериментов принадлежит испанским коллегам из университета Севильи: проф. Антонио Кастельяносу Мате (Antonio Castellanos Mata), Франсиско Руису Ботельо (Francisco Ruiz Botello), доктору Мигелю Анхелю Санчесу Кинтанилье (Miguel Ángel Sánchez Quintanilla). Проф. Венсан Турна (Vincent Tournat) из университета Ле Мана, Франция участвовал в обсуждении методики измерения и результатов.

В совместной с доктором Дэвидом Харрисом (David Harris, университет Манчестера) работе [126] была предложена жестко-пластическая модель редуцированной среды Коссера для двумерного случая для описания пластических процессов в сыпучих средах. Вклад автора диссертации в последнюю состоял в предложенных уравнениях динамики, анализ их свойств был про-

веден д-ром Харрисом.

В работе [90], проведенной в сотрудничестве с коллегами из СВФУ Д. Аммосовым и университета Техаса (США) проф. Я. Эфендиевым и доктором М. Васильевой, соискателю принадлежит теоретический анализ плоской задачи для среды Коссера и вклад в анализ результатов, численная схема разработана и применена соавторами.

Как обсуждалось в разделе 1.2, для описания множества явлений в средах с неупорядоченной структурой поворотов зерен, включений, блоков необходимо предложить модификацию среды Коссера, в которой повороты и перемещения были бы независимы, но в которой напряжения не производили бы мощности на градиенте угловой скорости. Необходимость введения данной модели связана с тем, что в подобных материалах нет взаимодействия, которое бы уменьшало градиент поворота соседних частиц, в отличие, например, от ферромагнетиков. Описываемый материал и соответствующая ему модель схематически представлены на рисунке 3.1.

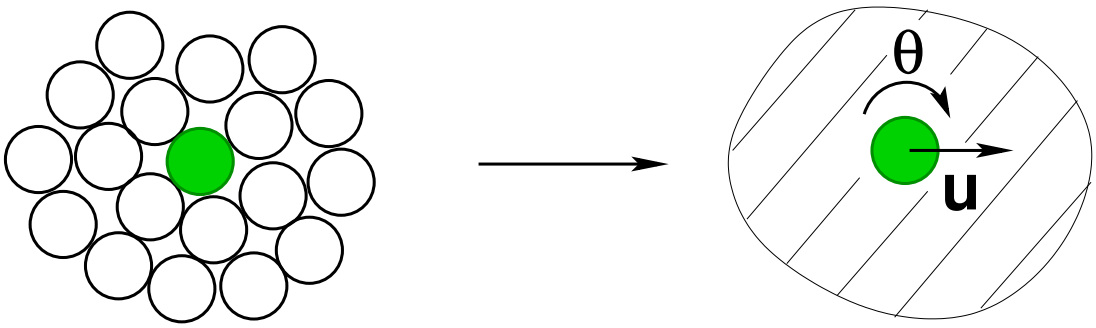

Рис. 3.1: Редуцированная среда Коссера: материал и континуальная модель

Такая среда была названа редуцированной средой Коссера. Данный термин обобщает термин, предложенный в работе [166] для частного случая — линейной статической среды без внешних объемных моментов с симметричным тензором напряжений. Впервые линейная изотропная редуцированная среда Коссера была предложена для описания динамики сыпучих сред в [223].

В работах соискателя и соавторов термин «редуцированная среда Коссера» был предложен для описания произвольной среды Коссера, в которой тела-точки обладают плотностью тензора инерции и поворотными степенями свободы, могут подвергаться воздействию моментов, но тензор моментных напряжений равен нулю, поскольку в среде не производится мощности на градиенте угловой скорости [111–114, 116, 117, 126, 144, 300]. Данная модель была обобщена на нелинейный динамический случай с произвольными внешними воздействиями и асимметричным тензором силовых напряжений Коши [100, 107], предложены варианты сред с анизотропной перевязкой между различными типами деформаций [103, 113], вязкоупругие и пластические редуцированные среды Коссера [110, 116, 117, 126, 206]. Моделям и динамическим свойствам этих сред посвящена данная глава диссертационной работы. Отметим, что линейная редуцированная среда Коссера является редуцированным континуумом в смысле определения, введенного в главе 2. Роль «несущего континуума» в ней выполняют трансляционные степени свободы, а «распределенного динамического гасителя» — поворотные. Результаты главы 2 отчасти применимы к моделям, рассмотренным в данной части работы, но здесь рассмотрены значительно более богатые модели и исследованы вопросы устойчивости и динамики, не затронутые ранее.

Хотя в некоторых работах [87, 145] редуцированной средой Коссера называли псевдосреду Коссера — среду Коссера со стесненным вращением, то есть линейную среду, в которой вектор макроповорота $\nabla \times \mathbf{u}/2$ равен вектору микроповорота $\boldsymbol{\theta}$, где $\mathbf{u}$ — трансляционное перемещение, а $\boldsymbol{\theta}$ — малый вектор поворота тела-точки, предложенную Тьерстеном и Миндлином [178], в настоящий момент в научном сообществе принят термин, введенный в работах соискателя и соавторов [2, 14, 41, 42, 66, 89, 125, 131, 146, 149–151, 215, 220, 236, 251, 253, 272].

Меры деформации для континуумов с ограничениями на упругую энергию, в том числе для редуцированной среды Коссера, обсуждались в работах Еремеева и Петрашкевича [64, 66, 67, 207, 208]. Данная модель заинтересовала, в частности, сейсмологов [41, 89, 146], поскольку поворотные степени свободы блоков могут быть важны при исследовании сейсмических волн в ближнем поле [41, 89, 131, 146, 220], и нефтяников.

В данной главе будет развита теория нелинейной редуцированной упругой среды Коссера, получены уравнения ее динамики. Будет показано, что даже в статике и при отсутствии сосредоточенных моментов поворотные степени свободы могут привести к неустойчивости при всестороннем растяжении, отсутствующей в классической среде с выпуклой энергией деформации. Будут предложены линейные анизотропные модели среды Коссера с перевязкой между трансляционными и поворотными степенями свободы, найдены их дисперсионные характеристики. Найдена функция Грина для сосредоточенных гармонических силы и момента и показано, что часть решений локализуется, если частота принадлежит определенной зоне. Распространение волны Рэлея также имеет свои особенности, важные с точки зрения сейсмологического анализа. Обсуждается эксперимент в сыпучей среде, проведенный совместно с испанскими коллегами, и применимость предложенных теорий к его описанию. Влияние вязкости рассмотрено в более общем случае и подробнее, чем в главе 2.

3.1 Основные уравнения упругой редуцированной среды Коссера.

3.1.1 Нелинейная редуцированная среда Коссера.

Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра масс тела-точки в актуальной конфигурации, $\mathbf{r}$ — в отсчетной, $\mathbf{P}$ — тензор поворота тела-точки (в отсчетной конфигурации равен единичному тензору $\mathbf{E}$), $\boldsymbol{\omega}$ — ее угловая скорость ($\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}$), ∇ — набла-оператор в актуальной конфигурации, $\overset{\circ}{\nabla}$ — в отсчетной, ρ — плотность в актуальной конфигурации, ρ_0 — в отсчетной, $\rho\mathbf{I}$ — плотность тензора инерции в актуальной конфигурации, $\rho_0\mathbf{I}_0$ — в отсчетной. В полной упругой среде Коссера массовая плотность упругой энергии $\mathcal{U}$ зависит от мер деформации $\mathbf{A} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}$ (тензор деформации Коссера), $\mathbf{K} = -(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}^\top)\cdot\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{P})/2$ (транспонированный тензор кривизны–кручения).

В редуцированной среде Коссера внутренние усилия не совершают работы на градиенте угловых скоростей. В силу закона баланса энергии это означает, что моментные напряжения в данной среде равны нулю. Для упругого случая это равносильно тому, что энергия деформации не зависит от градиента поворота, а зависит лишь от тензора деформации Коссера $\mathbf{A}$. Обсудим смысл этого тензора деформации. Осуществив полярное разложение этого тензора, можем представить его в виде

$$\mathbf{A} = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla})^{1/2} \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{P}, \tag{3.1}$$

где тензор поворота $\mathbf{Q}^\top = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla})^{-1/2} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$. Обратный ему тензор поворота $\mathbf{Q}$ характеризует поворот окрестности данной точки («макроповорот» — вихревую деформацию окрестности), а $(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla})^{1/2}$ — сдвиг и объем-

ную деформацию. Таким образом, тензор деформации Коссера определяется поворотом тела-точки относительно ее окрестности и трансляционными деформациями.

3.1.2 Основные уравнения.

В полной среде Коссера, кроме тензора силовых напряжений Коши $\boldsymbol{\tau}$, вводится тензор моментных напряжений Коши $\boldsymbol{\mu}$ так, что момент, действующий на площадку с нормалью $\mathbf{n}$, равен $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}$. Закон баланса сил в локальной форме записывается в следующем виде:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{F} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \tag{3.2}$$

а закон баланса моментов — как

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} = \rho(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega})^{\cdot}. \tag{3.3}$$

Здесь $\rho\mathbf{F}, \rho\mathbf{L}$ — плотности внешних объемных сил и моментов, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\mu}$ — тензоры Коши силовых и моментных напряжений. Векторный инвариант некоторого тензора второго ранга $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda^{mn}\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n$ определяется как $\boldsymbol{\Lambda}_{\times} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^{mn}\mathbf{i}_m \times \mathbf{i}_n$. Вывод данных законов в локальной форме можно найти, например, в [73, 292].

Закон баланса энергии в форме Жилина для адиабатических или изотермических процессов выглядит следующим образом [118]:

$$\rho\dot{\mathcal{U}} = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P})^{\top} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{A}} + (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{P})^{\top} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{K}}, \tag{3.4}$$

где $\mathcal{U}$ — массовая плотность упругой энергии. Этот закон позволяет получить

определяющие уравнения

$$\boldsymbol{\tau} = \rho\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{\top}\cdot\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{A}}\cdot\mathbf{P}^{\top},\qquad \boldsymbol{\mu} = \rho\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{\top}\cdot\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{K}}\cdot\mathbf{P}^{\top}. \tag{3.5}$$

Тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{K}$ материально объективны, поэтому требование независимости от выбора системы отсчета [194] удовлетворяется автоматически [118]. В редуцированной среде Коссера $\mathcal{U}$ не зависит от $\nabla\mathbf{P}$ (по определению), следовательно, $\mathcal{U}$ не зависит от $\mathbf{K}$, что влечет $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Однако $\boldsymbol{\tau}^{A} \neq \mathbf{0}$ в динамике или при наличии сосредоточенных внешних моментов.

Уравнения динамики редуцированной среды Коссера, таким образом, принимают вид:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{F} &= \rho\ddot{\mathbf{R}},\\ \boldsymbol{\tau}_{\times} + \rho\mathbf{L} &= \rho(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})^{\cdot}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Подставляя в данные уравнения выражение для $\boldsymbol{\tau}$, определяемое (3.5)

$$\boldsymbol{\tau} = \rho\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{\top}\cdot\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{A}}\cdot\mathbf{P}^{\top}, \tag{3.7}$$

мы замыкаем систему, если известна $\mathcal{U}(\mathbf{A})$.

В некоторых случаях бывает удобно записать основные уравнения в отсчетной конфигурации, перейдя к тензору напряжений Пиолы–Кирхгофа

$$\mathbf{T} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top}\cdot\boldsymbol{\tau}\det\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}. \tag{3.8}$$

Пользуясь законом сохранения массы $\rho\det\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \rho_0$ и кинематическим соот-

ношением $\nabla = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla}$, перепишем основные уравнения (3.6), (3.7):

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho_0 \mathbf{F} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \tag{3.9}$$

$$(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{T})_\times + \rho_0 \mathbf{L} = \rho_0 (\mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}). \tag{3.10}$$

Вывод первого закона динамики в данной форме можно найти в [304]. Определяющее соотношение (3.7) принимает вид

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^\top. \tag{3.11}$$

Для редуцированной псевдосреды Коссера наличие жесткой связи не позволяет получить определяющие уравнения таким способом.

Поведение редуцированной среды Коссера с независимыми поворотами и перемещениями подчиняется уравнениям (3.6), (3.7).

3.1.3 Линеаризация основных уравнений вблизи нелинейного равновесия.

Рассмотрим малые колебания среды вблизи некоторого положения равновесия. Все величины в данном положении равновесия будем обозначать нижним индексом s.

Рассмотрим случай мертвых внешних объемных нагрузок: $\mathbf{F}, \mathbf{L}$ не зависят от деформированного состояния. Будем обозначать $[\mathbf{\Lambda}]_1$ член первого порядка малости по $\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}$ для некоторой величины $\mathbf{\Lambda}$ при отклонении от равновесия s.

Запишем приближения для кинематических характеристик: $\mathbf{R} = \mathbf{R}_s + \mathbf{u}$, $\mathbf{P} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_s$, $\mathbf{u} = o(1)$, $\boldsymbol{\theta} = o(1)$, откуда

$$\mathbf{A}_s = [\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}]_s \cdot \mathbf{P}_s, \qquad [\mathbf{A}]_1 = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{P}_s) + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_s \tag{3.12}$$

Заметим, что оператор градиент в положении равновесия $\overset{s}{\nabla} = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s)^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla}$, откуда

$$[\mathbf{A}]_1 = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s \cdot (\overset{s}{\nabla}\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_s. \tag{3.13}$$

Приближение для тензора инерции $\mathbf{I} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{P}^\top$ имеет вид

$$\mathbf{I} \approx \mathbf{I}_s + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{I}_s - \mathbf{I}_s \times \boldsymbol{\theta}, \qquad \mathbf{I}_s = \mathbf{P}_s \cdot \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{P}_s^\top. \tag{3.14}$$

С точностью до малых второго порядка угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$ (поскольку $\mathbf{P}_s$ отвечает статическому повороту). Отсюда

$$[(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega})^{\cdot}]_1 = (\mathbf{I}_s \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})^{\cdot} = \mathbf{I}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}_s \cdot \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{P}_s^\top \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.15}$$

Напряженное состояние в положении равновесия характеризуется тензором напряжений Пиолы

$$\mathbf{T}_s = \rho_0 \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}}\right]_s \cdot \mathbf{P}_s^\top, \tag{3.16}$$

а его изменение при малых отклонениях

$$\begin{aligned}
[\mathbf{T}]_1 = \rho_0 \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^\top\right]_1 &= \rho_0 \left(\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}}\right]_1 \cdot \mathbf{P}_s^\top + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}}\right]_s \cdot [\mathbf{P}^\top]_1 \right) = \\
&= \rho_0 ([\mathbf{A}]_1^\top \cdot\cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2}\right]_s \cdot \mathbf{P}_s^\top - \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}}\right]_s \cdot (\mathbf{P}_s^\top \times \boldsymbol{\theta})) \overset{(3.12)}{=} \\
\overset{(3.12)}{=} \rho_0 ((\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s \cdot (\overset{s}{\nabla}\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_s)^\top \cdot\cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2}\right]_s \cdot \mathbf{P}_s^\top - \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}}\right]_s \cdot (\mathbf{P}_s^\top \times \boldsymbol{\theta})) &= \\
= \rho_0 ((\mathbf{P}_s^\top \cdot (\overset{s}{\nabla}\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top) \cdot\cdot \left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2}\right]_s \cdot \mathbf{P}_s^\top\right) - \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}}\right]_s \cdot (\mathbf{P}_s^\top \times \boldsymbol{\theta})) &= \\
= \rho_0 (\mathbf{P}_s^\top \cdot (\overset{s}{\nabla}\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top) \cdot\cdot \left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2}\right]_s \cdot \mathbf{P}_s^\top\right) - \mathbf{T}_s \times \boldsymbol{\theta} &
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Вычитая из первого уравнения (3.10) закон баланса сил в равновесии

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T}_s + \rho_0 \mathbf{F} = \mathbf{0}, \tag{3.18}$$

получаем

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot [\mathbf{T}]_1 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}. \tag{3.19}$$

Подставляя в это уравнение выражение (3.17) и используя равенство $\overset{\circ}{\nabla} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s \cdot \overset{s}{\nabla}$, получаем закон баланса сил в перемещениях для малых отклонений от положения равновесия:

$$(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s \cdot \overset{s}{\nabla}) \cdot \big((\mathbf{P}_s^\top \cdot (\overset{s}{\nabla}\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top) \cdot \cdot \big(\rho_0 \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2}\right]_s \cdot \mathbf{P}_s^\top\big) - \\ - \mathbf{T}_s \times \boldsymbol{\theta}\big) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}. \tag{3.20}$$

Вычтем теперь из второго уравнения (3.10) закон баланса моментов в положении равновесия

$$(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \mathbf{T}_s)_\times + \rho_0 \mathbf{L} = \mathbf{0}. \tag{3.21}$$

Получаем, учитывая (3.15) и связь градиентов в отсчетной конфигурации и в положении равновесия,

$$(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot [\mathbf{T}]_1)_\times + (\overset{s}{\nabla}\mathbf{u}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \mathbf{T}_s)_\times = \rho_0 \mathbf{I}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.22}$$

Подставляя в это уравнение выражение (3.17), получаем закон баланса мо-

ментов в перемещениях при малых отклонениях от положения равновесия:

$$[\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \big((\mathbf{P}_s^\top \cdot (\overset{s}{\nabla}\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top) \cdot\cdot (\rho_0 \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2}\right]_s \cdot \mathbf{P}_s^\top)\big) - \\ - \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \mathbf{T}_s \times \boldsymbol{\theta} + \overset{s}{\nabla}\mathbf{u}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \mathbf{T}_s]_\times = \rho_0 \mathbf{I}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.23)$$

Поскольку

$$[\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \mathbf{T}_s \times \boldsymbol{\theta}]_\times = \mathbf{T}_s^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s \cdot \boldsymbol{\theta} - \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot\cdot \mathbf{T}_s \boldsymbol{\theta}, \quad (3.24)$$

уравнение (3.23) можно записать как

$$[\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \big((\mathbf{P}_s^\top \cdot (\overset{s}{\nabla}\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top) \cdot\cdot (\rho_0 \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2}\right]_s \cdot \mathbf{P}_s^\top)\big)]_\times + \\ + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot\cdot \mathbf{T}_s \boldsymbol{\theta} - \mathbf{T}_s^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s \cdot \boldsymbol{\theta} + [\overset{s}{\nabla}\mathbf{u}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \mathbf{T}_s]_\times = \rho_0 \mathbf{I}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.25)$$

Заменив ρ_0 на $\rho_s \det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top$ в (3.20), (3.23), получим линеаризованные законы динамики для малых отклонений от положения равновесия, где участвуют параметры, соответствующие данному положению равновесия. Легко получить те же законы в отсчетной конфигурации, заменив оператор-градиент в положении равновесия на его выражение через оператор-градиент в отсчетной конфигурации $\overset{s}{\nabla} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}$.

Заметим также, что оператор-градиент ∇ в актуальной конфигурации и оператор-градиент $\overset{s}{\nabla}$ в положении равновесия отличаются на величину первого порядка малости. Поэтому можно в выражениях (3.20), (3.23) заменить $\overset{s}{\nabla}$ на ∇.

Данные уравнения справедливы для произвольной гиперупругой редуцированной среды Коссера, энергия деформации которой раскладывается в ряд Тейлора по $\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}$ вблизи некоторого (произвольного) положения равновесия.

Линеаризованные уравнения термоупругой среды Коссера вблизи поло-

жения равновесия были получены в работе [130] в иной форме. Можно показать, что в частном случае, когда тепловые процессы не играют роли в среде, и среда является редуцированной, данные уравнения совпадают с вышеприведенными.

Безусловно, само положение равновесия можно также выбрать в качестве отсчетной конфигурации, и уравнения динамики тогда существенно упрощаются:

$$\nabla \cdot \Big((\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top \cdot\cdot \rho_s \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2} \right]_s - \mathbf{T}_s \times \boldsymbol{\theta} \Big) = \rho_s \ddot{\mathbf{u}}, \tag{3.26}$$

$$[(\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top \cdot\cdot \rho_s \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2} \right]_s - \mathbf{T}_s \times \boldsymbol{\theta} + \nabla \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{T}_s]_\times = \rho_s \mathbf{I}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.27}$$

Однако в некоторых ситуациях бывает удобно выбрать в качестве отсчетной конфигурации натуральную (в которой напряжения отсутствуют), например, чтобы рассматривать простые нелинейные модели для энергии деформации и использовать соображения симметрии. В дальнейшем отсчетная конфигурация так и будет выбираться, если не оговорено обратное.

В случае, когда положение равновесия достигнуто без поворота тел-точек, то есть $\mathbf{P}_s = \mathbf{E}$, законы динамики (3.20), (3.25) вблизи равновесия принимают вид

$$(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}_s \cdot \overset{s}{\nabla}) \cdot \Big((\overset{s}{\nabla} \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top \cdot\cdot (\rho_0 \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}_s^\top \cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2} \right]_s) - \mathbf{T}_s \times \boldsymbol{\theta} \Big) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \tag{3.28}$$

$$[\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}_s^\top \cdot \Big((\overset{s}{\nabla} \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top \cdot\cdot (\rho_0 \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}_s^\top \cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2} \right]_s) \Big) -$$
$$- \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}_s^\top \cdot \mathbf{T}_s \times \boldsymbol{\theta} + \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}_s^\top \cdot \mathbf{T}_s]_\times = \rho_0 \mathbf{I}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.29}$$

3.1.4 Линеаризация вблизи состояния всестороннего растяжения – сжатия для изотропного однородного материала.

В случае, когда материал изотропен, тензор инерции является шаровым ($\mathbf{I} = I\mathbf{E}$), а напряженное состояние соответствует всестороннему растяжению или сжатию ($\mathbf{A}_s = A\mathbf{E}$, $\mathbf{P}_s = \mathbf{E}$, $\boldsymbol{\tau}_s = \tau\mathbf{E}$, $\mathbf{T}_s = A^2\tau\mathbf{E}$, $\rho_0 = \rho_s A^3$), как легко видеть из (3.28), (3.29), малые отклонения подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (A^2\rho\left[\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial\mathbf{A}^2}\right]_s \cdot\cdot\, (\nabla\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E})^\top) - \nabla\times(\tau\boldsymbol{\theta}) = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \\ &2\tau(\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2) + [A^2\rho\left[\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial\mathbf{A}^2}\right]_s \cdot\cdot\, (\nabla\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E})^\top]_\times = \rho I\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Здесь оператор-градиент и плотность в состоянии равновесия заменены на оператор-градиент и плотность в актуальной конфигурации для простоты записи, поскольку это приводит к различию в следующих порядках малости. Предположение о сферически симметричном тензоре инерции не является обязательным; для произвольного тензора инерции меняется лишь правая часть закона баланса моментов, в общем случае равная $\mathbf{I}_s\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}}$.

Изотропия материала и напряженного состояния по принципу Кюри–Неймана [292] влечет изотропию соответствующих эффективных модулей:

$$\rho_0\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\mathbf{A}^2}\right]_s = \lambda_s\mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu_s(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^S(\mathbf{i}^m\mathbf{i}^n)^S + 2\alpha_s(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^A(\mathbf{i}^m\mathbf{i}^n)^A, \tag{3.31}$$

где эффективные упругие константы $\lambda_s, \mu_s, \alpha_s$ зависят от предварительного напряженного состояния. Действительно, именно такой вид имеет изотропный тензор 4 ранга, не меняющийся при перестановке первой и второй диад. В данной форме уравнения справедливы в том числе для неоднородного ма-

териала и неоднородного напряженного состояния.

Рассмотрим однородное предварительно напряженное состояние. В нем τ, A, ρ_s не зависят от $\mathbf{R}$. Тогда уравнения (3.30) с учетом (3.31) принимают вид

$$(\lambda' + 2\mu')\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - (\mu' + \alpha')\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + 2\alpha'\nabla\times\boldsymbol{\theta} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \tag{3.32}$$

$$2\alpha'\nabla\times\mathbf{u} - 4\alpha'\boldsymbol{\theta} = \rho I\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.33}$$

В этом уравнении участвуют эффективные упругие константы λ' и μ', аналогичные константам Ламе в классической линейной упругой среде, и эффективная константа сопротивления повороту α':

$$\alpha' = \frac{\alpha_s}{A} - \frac{\tau}{2}, \quad \mu' = \frac{\mu_s}{A} + \frac{\tau}{2}, \quad \lambda' + 2\mu' = \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{A}. \tag{3.34}$$

То же самое уравнение можно записать и в отсчетной конфигурации, учитывая, что $\rho = \rho_0/A^3$, $\overset{\circ}{\nabla} = A\overset{s}{\nabla}$:

$$(\overset{\circ}{\lambda} + 2\overset{\circ}{\mu})\overset{\circ}{\nabla}\overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{u} - (\overset{\circ}{\mu} + \overset{\circ}{\alpha})\overset{\circ}{\nabla}\times(\overset{\circ}{\nabla}\times\mathbf{u}) + 2\overset{\circ}{\alpha}\overset{\circ}{\nabla}\times\boldsymbol{\varphi} = \rho_0\ddot{\mathbf{u}}, \tag{3.35}$$

$$2\overset{\circ}{\alpha}\overset{\circ}{\nabla}\times\mathbf{u} - 4\overset{\circ}{\alpha}\boldsymbol{\varphi} = (\rho_0 I/A^2)\ddot{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{3.36}$$

Здесь введены упругие эффективные модули, совпадающие с λ', μ', α' с точностью до множителя A:

$$\overset{\circ}{\alpha} = \alpha_s - \frac{\tau A}{2}, \quad \overset{\circ}{\mu} = \mu_s + \frac{\tau A}{2}, \quad \overset{\circ}{\lambda} + 2\overset{\circ}{\mu} = \lambda_s + 2\mu_s. \tag{3.37}$$

а также эффективное угловое перемещение $\boldsymbol{\varphi} = A\boldsymbol{\theta}$.

Далее мы увидим, что эти уравнения по форме совпадают с линейными уравнениями редуцированной среды Коссера (приведенными без вывода

в разделе 2.5.1). Тем не менее, в отличие от линеаризации около натурального состояния (при отсутствии начальных напряжений), данные уравнения справедливы вблизи предварительно напряженного состояния, от которого зависят эффективные упругие константы и, как мы увидим далее, устойчивость материала.

3.1.5 Линеаризация вблизи трансверсально-изотропного напряженного состояния для изотропной среды.

С точки зрения приложений интересно рассмотреть осесимметричное предварительно напряженное состояние в изотропном материале. Подобная задача может возникнуть в геофизике или в экспериментах с сыпучей средой, например, трехосном тесте. Итак, рассмотрим $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s = A\mathbf{E} + a\mathbf{nn}$, $\mathbf{P}_s = \mathbf{E}$. Поскольку материал является изотропным, в данном положении равновесия как тензор напряжений Коши, так и тензор напряжений Пиолы обладают аксиальной симметрией: $\mathbf{T}_s = T\mathbf{E} + t\mathbf{nn}$. В актуальной конфигурации $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}_s + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}$, $\mathbf{P} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$.

Запишем линеаризованные относительно данного напряженного состояния законы динамики (3.28), (3.29):

$$((A\mathbf{E} + a\mathbf{nn}) \cdot \nabla) \cdot \big((\nabla\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top \cdot\cdot (\rho_0 (A\mathbf{E} + a\mathbf{nn}) \cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2}\right]_s) - \tag{3.38}$$

$$-(T\mathbf{E} + t\mathbf{nn}) \times \boldsymbol{\theta}\big) = A^3 \rho \ddot{\mathbf{u}}, \tag{3.39}$$

$$[(A\mathbf{E} + a\mathbf{nn}) \cdot \big((\nabla\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top \cdot\cdot (\rho_0 (A\mathbf{E} + a\mathbf{nn}) \cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2}\right]_s)\big) +$$

$$+ (\nabla\mathbf{u}^\top - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot (AT\mathbf{E} + (aT + At + at)\mathbf{nn})]_\times = A^3 \rho \mathbf{I}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.40}$$

Уравнения в отсчетной конфигурации легко получить, заменив в данных выражениях ∇ на $(A\mathbf{E}+a\mathbf{nn})^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}$ и $A^3\rho$ на ρ_0. Тензор $\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2}$ в силу изотропии определяется выражением (3.31). В случае шарового тензора инерции правая часть последнего уравнения равна $\rho_0 I\ddot{\boldsymbol{\theta}}$.

3.1.6 Линейная редуцированная среда Коссера.

Уравнения линейной редуцированной среды Коссера можно получить различными способами: из уравнений линейной полной среды Коссера, полагая модули, отвечающие за зависимость напряжений от $\nabla\boldsymbol{\theta}$, равными нулю; линеаризуя нелинейные уравнения редуцированной среды Коссера вблизи некоторого напряженного или натурального состояния; и непосредственно из фундаментальных законов баланса, полагая, что плотность упругой энергии $\rho\mathcal{U}=\rho\mathcal{U}(\mathbf{g})$, где $\mathbf{g}\overset{\text{def}}{=}\nabla\mathbf{u}+\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E}$. Заметим, что этот тензор возник естественным образом при линеаризации уравнений вблизи некоторого напряженного состояния в предыдущем разделе. Впервые уравнения линейной редуцированной изотропной среды Коссера были предложены для описания динамики сыпучих сред в [223]. Начальные напряжения полагались равными нулю. В дальнейшем мы по умолчанию будем рассматривать именно этот вариант линейной редуцированной среды Коссера.

3.1.7 Уравнения вблизи натурального состояния.

Полагая $\mathbf{R}_s=\mathbf{r}$, $\mathbf{P}_s=\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\tau}_s=\mathbf{0}$, получаем в натуральном состоянии $\mathbf{T}_s=\mathbf{0}$. Плотность ρ в актуальной конфигурации и ρ_0 в отсчетной совпадают с точностью до малых высшего порядка, равно как и операторы набла в обеих конфигурациях. В линейном приближении вблизи натурального состояния тензор напряжений Коши и тензор напряжений Пиолы неразличимы, как и

в классической среде:

$$\mathbf{T} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top} \cdot \boldsymbol{\tau} \det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = (\mathbf{E} + o(1))^{-\top} \cdot [\boldsymbol{\tau}]_1 \det(\mathbf{E} + o(1)) + o^2(1)$$
$$= [\boldsymbol{\tau}]_1 + o^2(1) = \boldsymbol{\tau} + o^2(1). \quad (3.41)$$

Тензор деформации Коссера в линейном приближении совпадает с тензором $\mathbf{E} + \mathbf{g}$:

$$\mathbf{A} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \mathbf{P} = (\mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) + o^2(1) = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} + o^2(1), \quad (3.42)$$

откуда

$$[\mathbf{A}]_1 = \mathbf{g} = \nabla\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}. \quad (3.43)$$

Таким образом, определяющие уравнения (3.7), (3.11) в линейном приближении принимают вид

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}}\right]_1 = \rho \mathbf{g}^{\top} \cdot\cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2}\right]_0. \quad (3.44)$$

То же самое уравнение можно получить, полагая $\rho\mathcal{U}$ квадратичной функцией тензора линейных деформаций $\mathbf{g}$ и напряжения — ее производной по $\mathbf{g}$:

$$\rho\mathcal{U} = \frac{1}{2}\mathbf{g}^{\top} \cdot\cdot \mathbf{X} \cdot\cdot \mathbf{g}, \quad (3.45)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{X} \cdot\cdot \mathbf{g}. \quad (3.46)$$

Здесь $\mathbf{X}$ — тензор упругих констант 4 ранга, получаемый из $\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2}$ перестановкой последних двух векторов в полиадах. Действительно, линеаризованное

уравнение баланса энергии (3.4) выглядит следующим образом:

$$\rho\dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau}^\top \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{g}} = \boldsymbol{\tau}^S \cdot\cdot\, (\nabla\mathbf{u})^S - \boldsymbol{\tau}^A \cdot\cdot\, (\mathbf{u}^A + \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E}) \\ = \boldsymbol{\tau}^S \cdot\cdot\, (\nabla\mathbf{u})^S + \boldsymbol{\tau}_\times \cdot (\nabla\times\mathbf{u}/2 - \boldsymbol{\theta})^\cdot. \quad (3.47)$$

Уравнения динамики среды (3.20), (3.23) выглядят следующим образом:

$$\nabla\cdot(\mathbf{X}\cdot\cdot\,\mathbf{g}) + \rho\mathbf{F} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \quad (3.48)$$

$$(\mathbf{X}\cdot\cdot\,\mathbf{g})_\times + \rho\mathbf{L} = \rho\mathbf{I}_0\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.49)$$

В некоторых случаях бывает удобно разложить $\mathbf{g}$ на симметричную и антисимметричную части:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^S + \mathbf{g}^A, \qquad \mathbf{g}^S = \nabla\mathbf{u}^S, \qquad \mathbf{g}^A = (\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2)\times\mathbf{E}. \quad (3.50)$$

Выделяя соответствующие слагаемые в упругом тензоре $\mathbf{X}$ (разлагая правую и левую диаду на симметричную и антисимметричную части), получим

$$\rho\mathcal{U} = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}^S \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot\, \nabla\mathbf{u}^S \\ + \frac{1}{8}((\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2)\times\mathbf{E}) \cdot\cdot\, (\mathbf{E}\times\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{E}) \cdot\cdot\, ((\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2)\times\mathbf{E}) \\ - \nabla\mathbf{u}^S \cdot\cdot\, \mathbf{S}_k(\mathbf{n}^k\times\mathbf{E}) \cdot\cdot\, ((\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2)\times\mathbf{E}) \\ = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}^S \cdot\cdot\, \mathbf{C} \cdot\cdot\, \nabla\mathbf{u}^S + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u}) + \\ + 2\nabla\mathbf{u}^S \cdot\cdot\, \mathbf{S}_k\mathbf{n}^k \cdot (\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u}) \quad (3.51)$$

Знак при последнем слагаемом выбран для удобства выкладок, он условен, так как условие положительности энергии не накладывает на него требо-

ваний. Мы будем рассматривать лишь $\mathcal{U} \geqslant 0$. При переходе к последнему равенству использовалось тождество, справедливое для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot\cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) = -2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \tag{3.52}$$

Здесь $\mathbf{C}$ — упругий тензор четвертого ранга, описывающий сопротивление среды трансляционным деформациям, аналог соответствующего тензора в классической среде, $\boldsymbol{\alpha}$ — упругий тензор второго ранга, компоненты которого ответственны за момент, возникающий как реакция на поворотно-вихревую деформацию $\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2$, $\mathbf{S}_k = \mathbf{S}_k^\top$ — тензоры второго ранга, $\mathbf{n}_k$ — векторы упругих констант. Упругий тензор третьего ранга $\mathbf{S}_k\mathbf{n}^k$ не равен нулю лишь для анизотропных материалов. Он отвечает за перевязку поворотно-вихревой и трансляционной деформаций: симметричная часть тензора напряжений может возникнуть как реакция на поворот тела-точки относительно окрестности, а момент, действующий на тело-точку, может повлечь трансляционную деформацию $\nabla\mathbf{u}^S$. Подобные явления имеют место в сыпучих средах [35,198]. Если тензоры $\mathbf{C}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ изотропны, то анизотропия, как и данная перевязка, будут заметны лишь на определенных длинах волн. Введение такого тензора упругости может быть одним из вариантов описания локальной анизотропии, типичной черты сыпучих сред.

Упругая энергия линейной среды зависит от $\nabla\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}$, но не зависит от $\nabla\boldsymbol{\theta}$, поэтому линейная редуцированная упругая среда Коссера является редуцированной в смысле определения, данного в главе 2.

Тензоры $\mathbf{C}$, $\boldsymbol{\alpha}$ являются полярными, а тензор $\mathbf{S}_k\mathbf{n}^k$ аксиальным, поскольку энергия деформации $\mathcal{U}$ — полярный скаляр, $\nabla\mathbf{u}$ — полярный тензор, а $\boldsymbol{\theta}$ и $\nabla \times \mathbf{u}$ — аксиальные векторы.

Определяющие уравнения, используя (3.51), (3.46) можно записать в сле-

дующей форме:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S + \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}) \\ + 2\mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \cdot (\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{u}^S \cdot\cdot \mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \times \mathbf{E}. \quad (3.53)$$

Во второй строке (3.53) мы видим часть тензора напряжений, возникающую в результате существования перекрестного члена в энергии деформации, связывающего трансляционные и поворотно-вихревые деформации. Симметричная часть тензора напряжений равна

$$\boldsymbol{\tau}^S = \mathbf{C} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S + \mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \cdot (2\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}), \quad (3.54)$$

а его антисимметричная часть —

$$\boldsymbol{\tau}^A = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\alpha} \cdot (2\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u})/4 + \nabla \mathbf{u}^S \cdot\cdot \mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \times \mathbf{E}. \quad (3.55)$$

Поскольку в линейном приближении $\mathbf{P} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} + o^2(1)$, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} + o^2(1)$,

$$\mathbf{I} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{P}^\top = \mathbf{I}_0 + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_0 \times \boldsymbol{\theta} + o^2(1), \quad (3.56)$$

где $\mathbf{I}_0$ — тензор $\mathbf{I}$ в отсчетной конфигурации, уравнения динамики (3.6) можно с учетом (3.53) записать в перемещениях:

$$\nabla \cdot (\mathbf{C} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S) + \nabla \times (\boldsymbol{\alpha} \cdot (2\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}))/4 \\ + \nabla \cdot (\mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \cdot (2\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u})) + \nabla \times (\mathbf{n}^k \mathbf{S}_k \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S) + \rho \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (3.57)$$

$$- \boldsymbol{\alpha} \cdot (2\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u})/2 + 2\nabla \mathbf{u}^S \cdot\cdot \mathbf{S}_k \mathbf{n}^k = \mathbf{I}_0 \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.58)$$

3.1.8 Изотропный материал.

Легко показать, что изотропный аксиальный тензор третьего ранга пропорционален тензору Леви-Чивитта $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$, и поэтому $\mathbf{S}_k \mathbf{n}^k = \mathbf{0}$. Таким образом, перевязочный член в упругой энергии между $\nabla \mathbf{u}^S$ и $\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2$ для изотропного материала отсутствует. Изотропный полярный тензор четвертого ранга $\mathbf{C}$ с учетом перестановочности соответствующих индексов выражается в виде

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n)^S (\mathbf{i}^m \mathbf{i}^n)^S, \tag{3.59}$$

изотропный полярный тензор второго ранга $\boldsymbol{\alpha} = 4\alpha \mathbf{E}$.

Определяющее уравнение (3.53) для изотропного случая упрощается:

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\, \mathbf{E} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S + 2\alpha(\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{E}. \tag{3.60}$$

Заметим, что данный тензор напряжений отличается от классического наличием последнего (антисимметричного) члена, описывающего реакцию среды на поворот тела-точки относительно соседней окрестности континуума центров масс.

Уравнения динамики среды в перемещениях (3.6) выглядят для изотропного материала следующим образом:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha \nabla \times \boldsymbol{\theta} + \rho \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \tag{3.61}$$

$$2\alpha \nabla \times \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\theta} + \rho \mathbf{L} = \mathbf{I}_0 \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.62}$$

Если не только упругие свойства среды обладают изотропией, но и тензор инерции тел-точек также является шаровым (с массовой плотностью $I\mathbf{E}$), правая часть последнего уравнения будет равна $\rho I \ddot{\boldsymbol{\theta}}$. Если же он трансверсально-изотропен, и массовая плотность осевого момента инерции относительно

оси симметрии равна I_n, а относительно ортогональных ей осей I, то правая часть (3.62) будет равна $\rho(I(\mathbf{E}-\mathbf{nn})+I_n\mathbf{nn})\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}}$.

3.1.9 Материал с перевязкой между трансляционными и поворотными деформациями.

При моделировании сыпучих и блоковых сред, грунтов с неоднородностями может представлять интерес теория, в которой тензоры $\mathbf{C}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ являются изотропными, однако существует анизотропная перевязка между трансляционными и поворотно-вихревыми деформациями, за которую отвечает тензор упругих постоянных $\mathbf{S}_k\mathbf{n}^k$. Такой перекрестный член в упругой энергии позволяет моделировать объемную деформацию под действием касательных напряжений или сдвиг под действием гидростатического давления (а также всестороннего растягивающего напряжения), что является характерным поведением сыпучих сред [315] (рисунок 3.2). Данный член в энергии будет играть большую роль на определенных частотах, однако для очень низких и

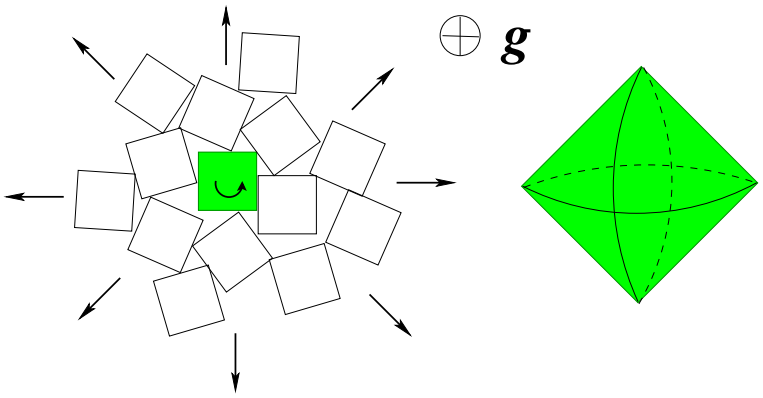

Рис. 3.2: Редуцированная среда Коссера с анизотропной перевязкой между поворотными и трансляционными деформациями

очень высоких частот его влияние будет незаметно. Им можно пренебречь для трансляционных волн достаточно большой длины, однако для более корот-

ких волн его влияние станет существенным, что позволяет надеяться описать с его помощью локальную анизотропию в сыпучих средах.

Если в материале существует некоторое выделенное направление, определяемое вектором $\mathbf{n}$, то данный тензор является трансверсально-изотропным. Его можно записать как

$$\mathbf{S}_k\mathbf{n}^k = (\mathbf{E} + \xi\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}})\mathbf{n}. \tag{3.63}$$

Здесь $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ — единичный вектор, направленный по оси симметрии. При $\xi = \mathbf{0}$ имеется перевязка лишь между объемной и поворотно-вихревой деформацией, $|\mathbf{n}|$ определяет, насколько сильна их взаимосвязь. Подобная анизотропия для однородной среды может быть связана, например, с формированием образца среды путем седиментации или иным влиянием силы тяжести во время образования структуры материала.

Уравнения динамики в перемещениях такого материала для случая шарового тензора инерции тел-точек таковы:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - (\mu+\alpha)\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + 2\alpha\nabla\times\boldsymbol{\theta} \\ - \mathbf{n}\times\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u} + \xi\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}) + 2\nabla(\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2)) \\ + 2\xi\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}\mathbf{n}\cdot\cdot\nabla(\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2) + \rho\mathbf{F} = \rho\ddot{\mathbf{u}},\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$-4\alpha\boldsymbol{\theta} + 2\alpha\nabla\times\mathbf{u} - 2\mathbf{n}\nabla\cdot\mathbf{u} - 2\xi\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}\mathbf{n}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u} + \rho\mathbf{L} = I\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.65}$$

Далее будет рассмотрен частный случай, когда перекрестный член связывает лишь объемную деформацию и поворотно-вихревую ($\xi = 0$), а тензор инерции является шаровым. Тогда уравнения в перемещениях принимают

вид

$$(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-(\mu+\alpha)\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+2\alpha\nabla\times\boldsymbol{\theta}$$
$$-\mathbf{n}\times\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+2\nabla(\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\theta}-\nabla\times\mathbf{u}/2))+\rho\mathbf{F}=\rho\ddot{\mathbf{u}}, \quad (3.66)$$

$$-4\alpha\boldsymbol{\theta}+2\alpha\nabla\times\mathbf{u}-2\mathbf{n}\nabla\cdot\mathbf{u}+\rho\mathbf{L}=I\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.67)$$

3.1.10 Редуцированная псевдосреда Коссера. Основные уравнения.

Существует модель линейной среды Коссера со стесненным вращением (псевдосреды Коссера), где принимается жесткая связь $\boldsymbol{\theta}=\nabla\times\mathbf{u}/2$, предложенная Миндлином и Тьерстеном [178]. Возможны различные способы введения такой нелинейной среды, однако они не будут обсуждаться в данной работе. Наличие жесткой связи приводит к тому, что антисимметричную часть тензора напряжений нельзя найти из определяющих уравнений, так как скорость деформации, на которой она работает, тождественно равна нулю. Как и в других теориях с жесткой кинематической связью, соответствующие усилия находятся из уравнений динамики. Полная псевдосреда Коссера представляет собой градиентную среду, т.е. материал, в котором тензор напряжений зависит от второго градиента перемещений.

Здесь будет рассматриваться редуцированная псевдосреда Коссера: с одной стороны, принимается жесткая связь

$$\boldsymbol{\theta}=\nabla\times\mathbf{u}/2, \quad (3.68)$$

с другой стороны, рассматривается случай, когда упругая энергия не зависит от $\nabla\boldsymbol{\theta}$. Мы увидим, что модель подобной среды не является градиентной.

Запишем закон баланса сил (первое уравнение (3.6)) для редуцированной среды Коссера в следующем виде:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^S - \nabla \times \boldsymbol{\tau}_\times/2 + \rho\mathbf{K} = \rho\ddot{\mathbf{u}}. \tag{3.69}$$

Здесь мы использовали представление

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^S + \boldsymbol{\tau}^A = \boldsymbol{\tau}^S - \boldsymbol{\tau}_\times \times \mathbf{E}/2. \tag{3.70}$$

Используя кинематическую гипотезу (3.68), запишем закон баланса моментов (второе уравнение (3.6)) в следующем виде:

$$\boldsymbol{\tau}_\times = \rho\mathbf{I} \cdot (\nabla \times \ddot{\mathbf{u}})/2 - \rho\mathbf{L}. \tag{3.71}$$

Подставляя это выражение в баланс сил (3.69), получаем

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^S + \rho(\mathbf{K} + \nabla \times \mathbf{L}) = \nabla \times (\rho\mathbf{I} \cdot (\nabla \times \ddot{\mathbf{u}}))/4 + \rho\ddot{\mathbf{u}}. \tag{3.72}$$

Заметим, что если $\boldsymbol{\tau}^S$ определяется уравнениями локальной теории, полученная эквивалентная модель в терминах трансляционных деформаций также является локальной, однако в ней присутствует динамический член сложного вида со смешанными пространственно-временными производными. Это не так в случае полной псевдосреды Коссера, где кинематическая связь приводит к эквивалентной градиентной теории [307]. Это отличие возникает вследствие того, что в редуцированной модели напряжения не совершают работы на $\nabla\boldsymbol{\theta}$. Уравнение (3.72) верно для любого типа линейной редуцированной среды Коссера со стесненным вращением. Видим, что антисимметричная часть $\boldsymbol{\tau}$ задается балансом момента (3.71), а не определяющими уравнениями.

Это связано с тем, что в линейной полной модели $\boldsymbol{\tau}_\times$ работает на скорости деформации $\nabla \times \dot{\mathbf{u}}/2 - \dot{\boldsymbol{\theta}}$ (см. (3.47)).

Симметричная часть тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}^S$ задается определяющими уравнениями. Закон баланса энергии в данном случае записывается как

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau}^S \cdot\cdot (\nabla \dot{\mathbf{u}})^S. \tag{3.73}$$

Для линейной упругой среды $\mathcal{U}$ — квадратичная форма $\nabla \mathbf{u}^S$:

$$\rho \mathcal{U} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^S \cdot\cdot \mathbf{C} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S, \tag{3.74}$$

точно такая же, как и в классической среде, где $\mathbf{C} = C^{mnkl} \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l$ — упругий тензор четвертого ранга. Как и в классической теории упругости, он удовлетворяет условиям перестановочности $C_{mnkl} = C_{nmkl} = C_{klmn}$. Закон баланса энергии (3.73) дает нам определяющее уравнение

$$\boldsymbol{\tau}^S = \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \nabla \mathbf{u}^S} = \mathbf{C} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S. \tag{3.75}$$

Однако, поскольку в данном случае имеются поворотные степени свободы и кинематическая связь $\boldsymbol{\theta} = \nabla \times \mathbf{u}/2$, среда не является классической, и $\boldsymbol{\tau}^A \neq \mathbf{0}$. Конкретная форма $\mathbf{C}$ определяется симметрией материала: группа симметрии тензора включает в себя группу симметрии среды, согласно принципу Кюри–Неймана [49].

Мы можем также получить данные уравнения в терминах модифицированной энергии деформации со множителями Лагранжа. Рассмотрим нулевые внешние нагрузки. Уравнения Лагранжа для континуума (2.2), приведенные в главе 2, верны для сред, в которых нет жестких кинематических связей. Когда последние существуют, необходимо вместо энергии деформации

$\mathcal{U}$ использовать модифицированную энергию деформации $\mathcal{U}_m$. В рассматриваемом случае

$$\rho\mathcal{K} = \frac{1}{2}\rho(\dot{\mathbf{u}}^2 + \dot{\boldsymbol{\theta}}\cdot\mathbf{I}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}), \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}\rho\mathcal{U}_m &= \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}^S\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^S + \boldsymbol{\Lambda}^\top\cdot\cdot((\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2)\times\mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}^S\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^S + \boldsymbol{\lambda}\cdot(\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2),\end{aligned} \tag{3.77}$$

где $\boldsymbol{\Lambda}$ — множитель Лагранжа, антисимметричный тензор второго ранга, а вектор $\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\Lambda}_\times$. Тензор $\boldsymbol{\Lambda}$, как будет показано позже, имеет физический смысл — это антисимметричная часть тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}^A$.

Заметим, что

$$\frac{\partial\mathcal{U}_m}{\partial\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \tag{3.78}$$

$$\frac{\partial\mathcal{U}_m}{\partial\nabla\mathbf{u}} = \mathbf{C}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^S + \boldsymbol{\Lambda}, \tag{3.79}$$

$$\frac{\partial\mathcal{U}_m}{\partial\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{\Lambda}\cdot\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{E}) = \boldsymbol{\Lambda}_\times, \tag{3.80}$$

$$\frac{\partial\mathcal{U}_m}{\partial\nabla\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}. \tag{3.81}$$

Это позволяет нам записать уравнения (3.77) с лагранжианом $\mathcal{L} = \rho(\mathcal{K} - \mathcal{U}_m)$ в виде

$$\nabla\cdot(\mathbf{C}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^S + \boldsymbol{\Lambda}) = \rho\ddot{\mathbf{u}}\,, \tag{3.82}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_\times = \rho(\mathbf{I}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}})^{\cdot} = \rho\mathbf{I}\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \rho\mathbf{I}\cdot(\nabla\times\ddot{\mathbf{u}}/2)\,, \tag{3.83}$$

где $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^A$. Видим, что с точностью до обозначения $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\tau}^A$ данные уравнения совпадают с балансом сил (3.69) и балансом моментов (3.71) при отсутствии внешних нагрузок и определяющем уравнении (3.75).

Рассмотрим изотропную однородную упругую модель. Тогда упругий тен-

зор $\mathbf{C}$ также изотропен и имеет вид

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^S(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^S, \tag{3.84}$$

где λ, μ — упругие константы Ламе. Определяющее уравнение для симметричной части тензора напряжений принимает вид

$$\boldsymbol{\tau}^S = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu(\nabla\mathbf{u})^S. \tag{3.85}$$

Подставляя это выражение в первый закон динамики Эйлера (3.72), при отсутствии внешних нагрузок и шаровом тензоре инерции с плотностью $\rho\mathbf{I} = \rho I\mathbf{E}$ получаем уравнения в перемещениях:

$$(\lambda + 2\mu)(\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times (\rho I \nabla \times \ddot{\mathbf{u}})/4 + \rho\ddot{\mathbf{u}}. \tag{3.86}$$

В дальнейшем также будем рассматривать случай, когда существует простейшая трансверсально-изотропная перевязка между объемной деформацией и сдвигом:

$$\begin{aligned}\rho\mathcal{U} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u})^S \cdot\cdot (\lambda\mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^S(\mathbf{i}^m\mathbf{i}^n)^S + N_\mathrm{c}(\mathbf{E}\mathbf{n}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{n}\mathbf{E})) \cdot\cdot \nabla\mathbf{u}^S \\ = \rho\mathcal{U}_\mathrm{i} + N_\mathrm{c}(\nabla \cdot \mathbf{u})\,\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{n},\end{aligned} \tag{3.87}$$

где $\rho\mathcal{U}_\mathrm{i}$ — энергия деформации в изотропном случае. Определяющие уравнения тогда имеют вид

$$\boldsymbol{\tau}^S = \lambda\nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu(\nabla\mathbf{u})^S + N_\mathrm{c}\mathbf{E}\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + N_\mathrm{c}\nabla \cdot \mathbf{u}\,\mathbf{n}\mathbf{n}. \tag{3.88}$$

Подставляя их в закон баланса сил (3.72), для однородной среды при отсут-

ствии внешних нагрузок и шаровом тензоре инерции с плотностью $\mathbf{I} = I\mathbf{E}$ получаем уравнения в перемещениях

$$(\lambda + 2\mu)(\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + N_c\nabla\nabla\mathbf{u} \cdot \cdot \mathbf{nn} + N_c\mathbf{n} \cdot \nabla\nabla \cdot \mathbf{un} = I\nabla \times (\nabla \times \ddot{\mathbf{u}})/4 + \rho\ddot{\mathbf{u}}. \quad (3.89)$$

Заметим, что жесткая связь $\boldsymbol{\theta} = \nabla \times \mathbf{u}/2$ в упругой среде соответствует ситуации, когда $\alpha/\mu \to \infty$ (полагаем, что в анизотропном случае все константы тензора $\mathbf{C}$ одного порядка).

3.2 Распространение волн в линейной упругой редуцированной среде Коссера.

3.2.1 Скрытые движения: влияние поворотных степеней свободы на динамику трансляционных.

Хотя в экспериментах с сыпучими средами наблюдается вращение телточек при сдвиге, количество таких экспериментов ограничено. Приборы для регистрации и обработки сигналов с вращательными движениями находятся в стадии разработки. В связи с этим показалось интересным рассмотреть вопрос — как будет видеть редуцированную среду Коссера наблюдатель, не замечающий вращений? Существует ли классическая (неполярная упругая линейная) среда, чьи уравнения совпадают с уравнениями для трансляционных перемещений редуцированной среды Коссера?

Здесь мы рассмотрим случай изотропного тензора $\boldsymbol{\alpha} = 4\alpha\mathbf{E}$.

3.2.1.1 Изотропный случай.

Рассмотрим материал, все упругие тензоры которого изотропны. Тогда $\mathbf{S}_k\mathbf{n}^k = \mathbf{0}$, то есть в упругой энергии отсутствует перевязка между поворотными и трансляционными деформациями, а выражение $\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{g}^S$ аналогично тензору силовых напряжений в классической среде. Таким образом,

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\,\mathbf{E} + 2\mu\nabla\mathbf{u}^S + 2\alpha(\nabla\mathbf{u}^A + \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E}). \tag{3.90}$$

Уравнения в перемещениях (3.61), (3.62) в случае шарового тензора инерции таковы:

$$(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - (\mu+\alpha)\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + 2\alpha\nabla\times\boldsymbol{\theta} + \rho\mathbf{F} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \tag{3.91}$$

$$2\alpha\nabla\times\mathbf{u} - 4\alpha\boldsymbol{\theta} + \rho\mathbf{L} = \rho I\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.92}$$

Выразим $\boldsymbol{\theta}$ из (3.92) через $\mathbf{u}$ и подставим это выражение в (3.91). Мы получим уравнение баланса сил в трансляционных перемещениях. Затем исследуем вопрос, является ли оно также уравнением баланса сил в перемещениях для некоторой классической среды.

Обозначим $\omega_0 = 2\sqrt{\alpha/(\rho I)}$. Выразим $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathbf{u}$, используя (3.92):

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega_0 t} - \frac{\rho}{2\pi I}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathbf{L}(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega\,d\tau \\ - \frac{\omega_0^2}{4\pi}\nabla\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathbf{u}(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega\,d\tau.$$

Здесь предполагалось, что можно поменять порядок интегрирования. Ис-

пользуя принцип причинности, полагаем $\tau < t$ и вычисляем интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{\omega^2 - \omega_0^2}\, d\omega = -\frac{2\pi}{\omega_0} \sin \omega_0(t-\tau),$$

откуда

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega_0 t} + \frac{\rho}{I\omega_0} \int_{-\infty}^{t} \mathbf{L}(\tau) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau + \frac{\omega_0}{2} \nabla \times \int_{-\infty}^{t} \mathbf{u}(\tau) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau.$$

Введем обозначение: для некоторого векторного поля $\mathbf{w}(t)$

$$\tilde{\mathbf{w}} = \omega_0 \int_{-\infty}^{t} \mathbf{w}(\tau) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau.$$

В этих обозначениях

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega_0 t} + \frac{\rho}{I\omega_0^2} \tilde{\mathbf{L}} + \frac{1}{2} \nabla \times \tilde{\mathbf{u}}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.91), получаем

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \alpha \nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{u}}) + 2\alpha \nabla \times \boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega_0 t} + \nabla \times \frac{1}{2} \rho \tilde{\mathbf{L}} + \rho \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (3.93)$$

Таким образом, если вращательные степени свободы невидимы для наблюдателя, они привносят в уравнения предполагаемой классической среды зависимость от истории деформации. Также появляются «новые объемные силы», связанные с объемными моментами и начальными угловыми перемещениями. Действительно, уравнение (3.93) может быть записано в следующем виде

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho\, \boldsymbol{\kappa} = \rho\, \ddot{\mathbf{u}}, \quad (3.94)$$

где вводятся: эффективный тензор напряжений

$$\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\tau}_c + 2\alpha(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}\,\mathbf{E} - \nabla\tilde{\mathbf{u}}^S) = \mathbf{T}^\top,$$

$\boldsymbol{\tau}_c = \lambda'\nabla \cdot \mathbf{u}\,\mathbf{E} + 2\mu'\nabla\mathbf{u}^S$ — тензор напряжений в классической изотропной линейной упругой среде с константами Ламе $\lambda' = \lambda - 2\alpha$, $\mu' = \mu + \alpha$, и эффективная массовая плотность внешней силы

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{F} + 2\frac{\alpha}{\rho}\nabla \times \boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega_0 t} + \nabla \times \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{L}}. \tag{3.95}$$

Итак, наблюдатель, измеряющий лишь трансляционные величины, может подумать, что перед ним классическая среда с памятью — материал с симметричным тензором напряжений, зависящим от истории деформации. Действующие массовые моменты и ненулевые начальные условия по вектору малого поворота он будет воспринимать как дополнительные массовые силы. Тот же вывод можно сделать для нелинейной упругой редуцированной изотропной среды Коссера в изотропном напряженном состоянии (в области устойчивости) под действием малых возмущений, т.к. уравнения малых колебаний около этого нелинейного состояния по структуре совпадают с (3.91), (3.92). Можно показать, что при $\omega_0 \to \infty$ и нулевых начальных условиях $\mathbf{T}$ стремится к тензору напряжений классической упругой среды (без памяти) с константами Ламе λ, μ, а при $\omega_0 \to 0$ — с константами λ', μ'.

3.2.1.2 Анизотропный случай.

По-прежнему будем считать тензор $\boldsymbol{\alpha}$ изотропным. Рассмотрим два случая: 1) тензор $\mathbf{C}$ анизотропен, $\mathbf{S}_k\mathbf{n}_k = \mathbf{0}$ и 2) тензоры $\mathbf{C}, \mathbf{S}_k\mathbf{n}^k$ анизотропны.

Отсутствие перевязки между трансляционными и вращательными деформациями. Если тензор $\mathbf{S}_k\mathbf{n}^k$ изотропен, то он равен $\mathbf{0}$. Тогда, даже если в среде присутствует анизотропия по отношению к трансляционным деформациям ($\mathbf{C}$ анизотропен), (3.58) остается точно таким же, как и в изотропном случае, т.к. $\boldsymbol{\tau}^A = 2\alpha\mathbf{g}^A$. Действуя совершенно аналогично, получаем уравнение той же структуры, что и (3.94), с той же эффективной массовой плотностью внешней силы (3.95), с эффективным тензором напряжений

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{u})^S - 2\alpha\nabla\cdot(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\,\mathbf{E} + 2\alpha(\nabla(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}))^S = \mathbf{T}^\top.$$

Итак, первый закон динамики Эйлера в перемещениях выглядит как соответствующий закон для классической (анизотропной) среды с памятью.

Наличие перевязки между трансляционными и вращательными деформациями. Рассмотрим случай, когда есть перевязка между трансляционными и вращательными деформациями: $\mathbf{S}_k\mathbf{n}^k \neq \mathbf{0}$. Это позволяет корректно ввести понятие локальной анизотропии, характерной для сыпучих сред: данная перевязка начинает играть роль лишь на определенных длинах волн. На низких частотах при изотропном $\mathbf{C}$ материал будет вести себя как изотропный. Напомним, что в данном разделе мы рассматриваем изотропный тензор $\boldsymbol{\alpha} = 4\alpha\mathbf{E}$. Определяющее уравнение (3.53) имеет вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^S + \alpha(2\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u})\times\mathbf{E}\\ + \mathbf{S}_k\mathbf{n}^k\cdot(2\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}) + \nabla\mathbf{u}^S\cdot\cdot\mathbf{S}_k\mathbf{n}^k\times\mathbf{E}.\end{aligned} \quad (3.96)$$

Поэтому баланс моментов в перемещениях (3.58) принимает вид

$$-4\alpha\boldsymbol{\theta} + 2\alpha\nabla\times\mathbf{u} - 2\mathbf{n}_k\mathbf{S}^k\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^S = \rho\, I\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.97)$$

Отсюда, аналогично изложенному в предыдущих пунктах, получаем

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega_0 t} + \frac{\rho}{I\omega_0^2}\tilde{\mathbf{L}} + \frac{1}{2}\nabla \times \tilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{2\alpha}\mathbf{n}_k \mathbf{S}^k \cdot\cdot \nabla\tilde{\mathbf{u}}^S. \tag{3.98}$$

Обозначим $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$. С учетом (3.98) баланс сил (3.57) записывается как

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{C} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S - 2\alpha \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}\,\mathbf{E} + 2\alpha \nabla \hat{\mathbf{u}}^S - \frac{1}{\alpha}\mathbf{S}_m \mathbf{n}^m \cdot \mathbf{n}^k \mathbf{S}_k \cdot\cdot \nabla\tilde{\mathbf{u}}^S \\ + \mathbf{n}^k \times \mathbf{E}\,\mathbf{S}_k \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S + \mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{u}})) \\ + \rho\boldsymbol{\kappa} + 2\nabla \cdot (\mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \cdot (\boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega_0 t} + \frac{\rho}{4\alpha}\tilde{\mathbf{L}})) = \rho\,\ddot{\mathbf{u}}.\end{aligned} \tag{3.99}$$

Интерпретировать в этом уравнении выражение под знаком дивергенции как эффективный тензор напряжений не позволяют два слагаемых, стоящих во второй строке уравнения (3.99): антисимметричный тензор $\mathbf{n}^k \times \mathbf{E}\,\mathbf{S}_k \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S$ и симметричный, но не обладающий материальной объективностью в линейном приближении тензор $\mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{u}})$. Можем ли мы добавить в выражение под знаком дивергенции в (3.99) некоторую тензорную функцию $\nabla \mathbf{u}^S, \nabla \hat{\mathbf{u}}^S$, которая бы не давала вклад в уравнение баланса сил (то есть ее дивергенция равнялась бы нулю), но которая обеспечивала бы симметричность и материальную объективность суммарного выражения под знаком дивергенции в (3.99)? Это позволило бы интерпретировать данное суммарное выражение как тензор напряжений в некоторой классической среде. Очевидно, если это возможно, то искомая добавка будет иметь вид $\nabla \times \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — тензорная функция $\nabla \mathbf{u}^S, \nabla \hat{\mathbf{u}}^S$.

Предложение 3.1. *Ниже докажем, что не существует тензора $\boldsymbol{\sigma}$ — функции $\nabla \mathbf{u}^S, \nabla \hat{\mathbf{u}}^S$ такого, что $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\top$,*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}^k \times \mathbf{E}\,\mathbf{S}_k \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S + \mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{u}}) + \nabla \times \boldsymbol{a}, \tag{3.100}$$

где $\boldsymbol{a}$ *— некоторый тензор второго ранга, хотя существует* $\boldsymbol{a}$ *такой, что* $(\nabla \times \boldsymbol{a})^A = -\mathbf{n}^k \times \mathbf{E}\,\mathbf{S}_k \cdot\cdot\, \nabla \mathbf{u}^S$*. Поэтому в данном случае не существует классической среды, чьи уравнения в перемещениях совпадают с уравнениями редуцированной среды Коссера. Игнорирование вращательных степеней свободы приведет к заключению, что в предполагаемой классической среде нарушается принцип материальной объективности.*

Доказательство. Предположим, что такой тензор существует. Тогда вычислим векторный инвариант тензора (3.100) и потребуем его равенства нулю. Заметим, что

$$(\nabla \times \boldsymbol{a})_\times = (\nabla \times \boldsymbol{a}_n) \times \boldsymbol{a}^n = -\nabla \boldsymbol{a}^n \cdot \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_n \boldsymbol{a}^n \cdot \nabla = \boldsymbol{a} \cdot \nabla - \operatorname{tr} \boldsymbol{a}\, \nabla. \quad (3.101)$$

Тогда требование $\boldsymbol{\sigma}_\times = \mathbf{0}$ записывается в виде

$$-2\mathbf{n}^k\, \mathbf{S}_k \cdot\cdot\, \nabla \mathbf{u}^S + \boldsymbol{a} \cdot \nabla - \operatorname{tr} \boldsymbol{a}\, \nabla = \mathbf{0}, \quad (3.102)$$

что равносильно

$$\nabla \cdot (\operatorname{tr} \boldsymbol{a}\, \mathbf{E} - \boldsymbol{a}^\top + 2\mathbf{n}^k \mathbf{S}_k \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (3.103)$$

Поскольку $\boldsymbol{\sigma}$ — функция $\nabla \mathbf{u}^S, \nabla \hat{\mathbf{u}}^S$, тензор $\boldsymbol{a}$ также должен быть функцией $\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}$, поэтому выражение под оператором дивергенции в уравнении (3.103) должно являться константой, которая может быть приравнена нулю без потери общности, поскольку ее значение не влияет на выражение (3.100). Отсюда получаем $\operatorname{tr} \boldsymbol{a} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_k \cdot \mathbf{n}^k$,

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}^k \cdot (2\mathbf{E}\mathbf{n}_k - \mathbf{n}_k \mathbf{E}), \quad (3.104)$$

и $\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{S}^k \mathbf{n}_k \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{u}}) + 2(\nabla \times \mathbf{S}^k \cdot \mathbf{u}\mathbf{n}_k)^S = \boldsymbol{\sigma}^\top$. Мы видим, что $\boldsymbol{\sigma}$ — симмет-

ричный тензор, однако он не является материально объективным в линейном приближении. □

Наблюдатель, не замечающий вращений, интерпретирует уравнения упругой линейной редуцированной среды Коссера с шаровым тензором инерции и изотропными упругими тензорами как уравнения неполярной среды с тензором напряжений, зависящим от истории деформации. То же верно для уравнений малых отклонений от изотропного напряженного состояния нелинейной изотропной редуцированной среды Коссера и для случая линейной упругой редуцированной среды Коссера с изотропией по отношению к поворотным деформациям и отсутствием перевязки между ними и трансляционными деформациями. Если же в такой среде есть данная перевязка, соответствующей неполярной среды не существует: в ней бы нарушался принцип материальной объективности. Интересно, что модели подобного рода, впрочем, без зависимости напряжений от времени, предлагаются в ротационной сейсмологии [238].

3.2.2 Изотропный материал с шаровым тензором инерции тел-точек.

3.2.2.1 Плоские волны в трехмерной среде.

Будем искать решение уравнений в перемещениях (3.61), (3.62) для случая шарового тензора инерции с плотностью $\rho I\mathbf{E}$ и отсутствующих внешних воздействий в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}$. При этом оператор дифференцирования по времени заменяется на умножение на $i\omega$, а оператор

градиент ∇ на вектор $i\mathbf{k}$. Получаем

$$-(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0+(\mu+\alpha)\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u}_0)+2i\mathbf{k}\alpha\times\boldsymbol{\theta}_0=-\omega^2\rho\mathbf{u}_0, \tag{3.105}$$

$$2i\alpha\mathbf{k}\times\mathbf{u}-4\alpha\boldsymbol{\theta}_0=-\rho I\omega^2\boldsymbol{\theta}_0. \tag{3.106}$$

Колебания на парциальной частоте поворотной подсистемы ω_0. Заметим, что данные уравнения допускают режим поворотных колебаний с частотой ω_0:

$$\mathbf{u}\equiv\mathbf{0},\qquad \boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0e^{i\omega_0t},\qquad \omega_0^2=\frac{4\alpha}{\rho I}. \tag{3.107}$$

Продольные волны. Умножая скалярно на $\mathbf{k}$ уравнения (3.105), (3.106), получаем дисперсионное соотношение для продольной волны $\mathbf{u}_0=u_0\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{k}/k$

$$\omega=c_Pk,\quad c_P^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}. \tag{3.108}$$

При этом $\boldsymbol{\theta}_0=\mathbf{0}$. На частоте ω_0 также возможен режим, при котором продольная трансляционная волна $\mathbf{u}=u_0\hat{\mathbf{k}}e^{i\omega_0(\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}/c_P+t)}$ сосуществует с нераспространяющимися поворотными колебаниями, ось поворота направлена по волновому вектору ($\boldsymbol{\theta}=\theta_0\hat{\mathbf{k}}e^{i\omega_0t}$).

Волны сдвига – вращения при $\omega\neq\omega_0$. Выразим из уравнения (3.106) вектор малого поворота через трансляционное смещение:

$$\boldsymbol{\theta}_0=\frac{i}{2\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}\mathbf{k}\times\mathbf{u}_0. \tag{3.109}$$

Заметим, что вектор малого поворота ортогонален вектору трансляционных перемещений, и волна поворотов сдвинута по фазе относительно перемещений на $\pi/2$. Подставляя это выражение в (3.105), получаем редуцированное

уравнение Кристоффеля для трансляционных перемещений:

$$-c_P^2\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0+(c_{S\alpha}^2-\frac{\alpha}{\rho\big(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\big)})\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u}_0)=-\omega^2\mathbf{u}_0, \tag{3.110}$$

где $c_{S\alpha}^2=(\mu+\alpha)/\rho$. Продольная волна была рассмотрена ранее. Умножая данное уравнение скалярно на $(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})$ (то есть проецируя его на плоскость, ортогональную волновому вектору), получаем уравнение Кристоффеля для волны сдвига – вращения

$$\left(\omega^2-c_{S\alpha}^2\,k^2\,\frac{\omega^2-\omega_*^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\mathbf{u}_0\cdot(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})=\mathbf{0}. \tag{3.111}$$

Здесь $\omega_*^2=\omega_0^2/(1+\frac{\alpha}{\mu})<\omega_0^2$. В силу изотропии любой вектор $\mathbf{u}_0$, ортогональный волновому, удовлетворяет данному уравнению. Дисперсионное соотношение для волны сдвига – вращения имеет вид

$$k^2=\frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2}\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2-\omega_*^2}. \tag{3.112}$$

Видим, что результат совпадает с приведенным в главе 2, где линейная изотропная редуцированная среда Коссера рассматривалась как пример единожды отрицательного акустического метаматериала. Дисперсионные кривые приведены на рис. 2.10. Их горизонтальная асимптота $\omega=\omega_*$ (граничная частота) и частота отсечки ω_0.

Дисперсионное соотношение (3.111) в совокупности с соотношением (3.109), связывающим угловые и трансляционные перемещения, дает при $\omega\to\omega_0+0$

$$\boldsymbol{\theta}_0\approx\frac{-i}{\sqrt{2I(\omega/\omega_0-1)}}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{u}_0. \tag{3.113}$$

Таким образом, мы видим, что $\sqrt{I}\theta_0\gg u_0$ для верхней дисперсионной ветви

волны сдвига – вращения вблизи частоты отсечки: волна на этих частотах является преимущественно поворотной.

На низких частотах скорость распространения волны равна $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$, а на высоких $c_{S\alpha} = \sqrt{(\mu+\alpha)/\rho}$. Заметим, что если скорость волны сдвига на низких частотах всегда ниже скорости продольной волны, то на высоких частотах она может быть выше ее (если $\alpha > \lambda + \mu$). Волна сдвига – вращения дисперсивна, дисперсия велика вблизи полосы непропускания $(\omega_*; \omega_0]$.

В совместной работе [111] с Х.К. Херманом было численно рассмотрено прохождение волны сдвига – вращения в случае, когда спектр исходного сигнала содержит в себе запрещенную зону $(\omega_*; \omega_0)$ за исключением ее самой нижней части (рис. 3.3). Сигнал состоит из совокупности плоских волн с различными частотами. Все точки плоскости (xy) совершают одинаковые колебания, это возмущение ограничено во времени (правая часть рисунка 3.3). Сигнал формы $W(\omega)e^{i(\omega t - \frac{\omega f(\omega)}{c_s}\triangle z)}$ распространяется по оси z. Здесь $W(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика сигнала (левая часть рис. 3.3), $\triangle z$ — расстояние, на котором мы измеряем проходящий сигнал, а $f(\omega)$ задается выражением

$$\begin{aligned} f(\omega) &= -i\sqrt{(1-\omega^2/\omega_0^2)/|1-\omega^2/\omega_*^2|} \quad \text{при} \quad \omega_* < \omega < \omega_0 \\ f(\omega) &= \sqrt{(1-\omega^2/\omega_0^2)/(1-\omega^2/\omega_*^2)} \quad \text{при} \quad \omega > \omega_0 \text{ или } \omega < \omega_*, \end{aligned} \tag{3.114}$$

то есть дисперсионное соотношение для колебаний сдвига – вращения (3.111) можно записать таким образом:

$$k = \frac{\omega f(\omega)}{c_s}. \tag{3.115}$$

Можно констатировать, что сигнал, соответствующий частотам запрещенной зоны, заметно убывает при удалении от точки исходного возмущения.

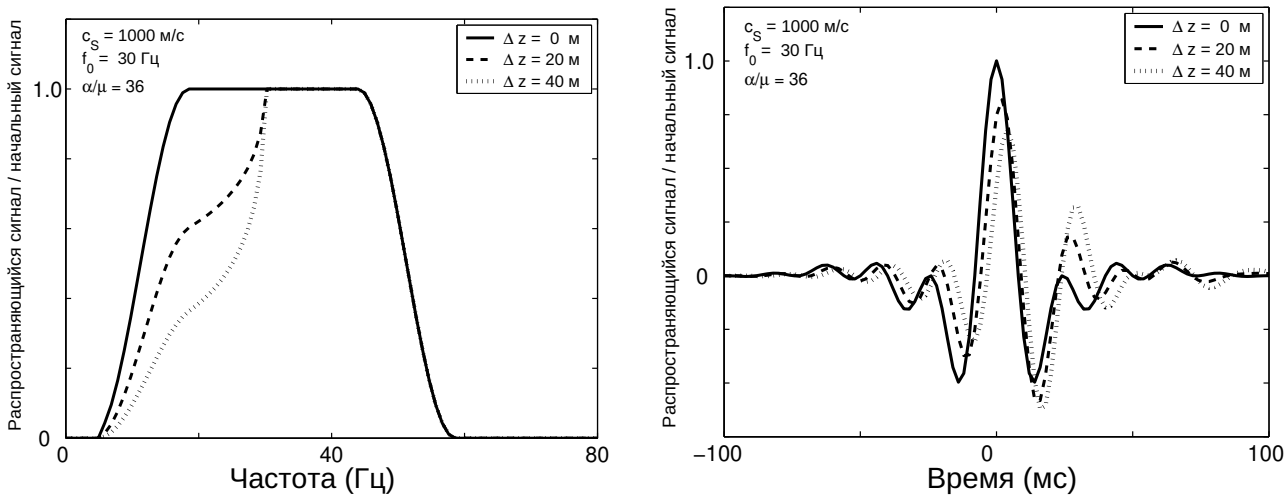

Рис. 3.3: Прохождение сигнала сдвига – вращения в частотной области (слева) и во временной области (справа) для различных толщин слоя $\triangle z$ в случае, когда полоса спектра сигнала и запрещенная зона существенно пересекаются. $2\pi\omega_* = 4.93$ Гц, $2\pi\omega_0 = 30$ Гц, спектр сигнала включает частоты от 6 Гц до 59 Гц. Численный пример построен Х.К. Херманом.

3.2.2.2 Функции Грина в трехмерной среде для гармонического во времени источника.

Рассмотрим реакцию среды на гармоническое динамическое сосредоточенное воздействие. Этот шаг необходим, в частности, для того, чтобы в будущих исследованиях получать решения для источников различного спектра, распределенных в пространстве. Рассмотрим $\rho\mathbf{F} = \mathbf{F}_0\delta(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, $\rho\mathbf{L} = \mathbf{L}_0\delta(\mathbf{r})e^{i\omega t}$. Уравнения в перемещениях для упругой изотропной редуцированной среды Коссера (3.61), (3.62) в случае шарового тензора инерции могут быть сведены к уравнениям в потенциалах при помощи представления Сандру. Они являются частным случаем уравнений в потенциалах для полной среды Коссера [73]:

$$\Box_1(\Box_2\Box_3 + 4\alpha^2\triangle)\mathbf{\Phi}_1 = -\rho\mathbf{F}, \tag{3.116}$$

$$\Box_3(\Box_2\Box_3 + 4\alpha^2\triangle)\mathbf{\Phi}_2 = -\rho\mathbf{L}, \tag{3.117}$$

где $\Box_1 = (\lambda + 2\mu)(\triangle - c_P^{-2}\partial_t^2)$, $\Box_2 = (\mu + \alpha)(\triangle - c_{S\alpha}^{-2}\partial_t^2)$, $\Box_3 = -4\alpha(1 + \omega_0^{-2}\partial_t^2)$. Трансляционные и угловые перемещения выражаются через данные потенциалы следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathbf{u} = \Box_1\Box_3\mathbf{\Phi}_1 - ((\lambda + \mu - \alpha)\Box_3 - 4\alpha^2)\nabla\nabla\cdot\mathbf{\Phi}_1 - 2\alpha\Box_3\nabla\times\mathbf{\Phi}_2, \\ \boldsymbol{\theta} = \Box_2\Box_3\mathbf{\Phi}_2 + 4\alpha^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{\Phi}_2 - 2\alpha\Box_1\nabla\times\mathbf{\Phi}_1.\end{gathered} \tag{3.118}$$

Поскольку редуцированная среда Коссера является вырожденным случаем полной, нельзя без обоснований использовать соответствующие решения для полной среды Коссера, однако можно получить функции Грина аналогично тому, как это сделано в [73]. Используя обратное преобразование Фурье, а также факт

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(k^2 - k_1^2)^{-1}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}dk_x dk_y dk_z = 2\pi^2 e^{ik_1 r}/r,$$

мы получаем решения для потенциалов:

$$\begin{gathered}\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t}(e^{-i\omega r/c_P} - e^{-i\omega f(\omega)r/c_s})/r, \\ \mathbf{\Phi}_2 = \mathbf{l}_0 e^{i\omega t}e^{-i\omega f(\omega)r/c_s}/r,\end{gathered} \tag{3.119}$$

где

$$\begin{gathered}\mathbf{f}_0 = -\mathbf{F}_0/(16\pi\alpha\mu(\lambda + 2\mu)(1 - \omega^2/\omega_*^2)(\omega^2/c_P^2 - \omega^2 f^2(\omega)/c_s^2)), \\ \mathbf{l}_0 = \mathbf{L}_0/(64\pi\alpha^2\mu(1 - \omega^2/\omega_0^2)(1 - \omega^2/\omega_*^2))\end{gathered}$$

Выражения для $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\theta}$ можно получить из $\mathbf{\Phi}_1$ и $\mathbf{\Phi}_2$, используя соотношение (3.118):

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{L}_0 e^{i\omega t}}{8\pi\alpha\mu}\Big(1-\frac{\omega^2}{\omega_*^2}\Big)^{-1}\cdot\frac{\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\Big(1+i\frac{\omega f(\omega)}{c_s}r\Big)e^{-i\frac{\omega f(\omega)}{c_s}r} - \frac{\mathbf{F}_0 e^{i\omega t}}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}\Big(\frac{\omega^2}{c_P^2}-\frac{\omega^2 f^2(\omega)}{c_s^2}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{\omega^2}{\omega_*^2}\Big)^{-1}\cdot \Bigg\{ - e^{-i\frac{\omega}{c_P}r}((\lambda+\mu-\alpha)(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2})+\alpha)\Big(\frac{1}{r}\frac{\omega^2}{c_P^2}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}+(1+i\frac{\omega}{c_P}r)\frac{\mathbf{E}-3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{r^3}\Big)+ e^{-i\frac{\omega f(\omega)}{c_s}r}\Bigg(\frac{1}{r}\mathbf{E}(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2})(\lambda+2\mu)(\frac{\omega^2}{c_P^2}-\frac{\omega^2 f^2(\omega)}{c_s^2})+ ((\lambda+\mu-\alpha)(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2})+\alpha)(\frac{1}{r}\frac{\omega^2 f^2(\omega)}{c_s^2}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}+(1+i\frac{\omega f(\omega)}{c_s}r)\frac{\mathbf{E}-3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{r^3})\Bigg)\Bigg\}, \tag{3.120}$$

$$\boldsymbol{\theta} = e^{i(\omega t-\frac{\omega f(\omega)}{c_s}r)}\Big(1-\frac{\omega^2}{\omega_*^2}\Big)^{-1}\Bigg\{-\frac{\mathbf{F}_0}{8\pi\mu}\cdot\frac{\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\Big(1+i\frac{\omega f(\omega)}{c_s}r\Big) - \frac{\mathbf{L}_0}{16\pi\alpha^2\mu}\Big(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\Big)^{-1}\cdot \Bigg(\frac{1}{r}\mathbf{E}\Big(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\Big)\Big(\frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2}-\frac{\omega^2 f^2(\omega)}{c_s^2}\Big)(\mu+\alpha) + \frac{1}{r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}\frac{\omega^2 f^2(\omega)}{c_s^2}\alpha+\frac{1}{r^3}(1+i\frac{\omega f(\omega)}{c_s}r)(\mathbf{E}-3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}})\alpha\Bigg)\Bigg\}, \tag{3.121}$$

где $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|r|$.

Решение для $\mathbf{u}$ при $\omega \ll \omega_*$ и $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$ дает функцию Грина для классической теории упругости [177] для среды с фазовой скоростью c_P (волна растяжения–сжатия) и c_s (волна сдвига – вращения), и при $\omega \gg \omega_*$ и $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$ — с фазовыми скоростями c_P и $c_{S\alpha}$. Как и следовало ожидать, на низких

частотах среда ведет себя как классический упругий континуум. Одним из главных различий с классической упругостью является сильная частотная зависимость амплитуды и волнового числа. Другое различие — локализация части решения для определенной зоны частот (частичная для трансляционных перемещений, полная для угловых). Заметим, что нередко в теории волн говорят о локализации или ее отсутствии для нестационарных задач. Здесь мы применяем этот термин для части решения задачи со стационарной внешней нагрузкой, подобно тому, как это делает Л.И. Слепян в книге [320], гл. VII, стр. 318 и стр. 323, где стационарное решение называется локальным, если оно убывает при стремлении к бесконечности расстояния до источника. В полосе непропускания волн сдвига – вращения ($\omega_* < \omega < \omega_0$) часть волны, связанная с растяжением – сжатием, распространяется, а связанная со сдвигом экспоненциально убывает при удалении от источника. Эти выражения справедливы для $\omega \neq \omega_0$ и $\omega \neq \omega_*$.

Случай граничных частот $\omega = \omega_0$, $\omega = \omega_*$ необходимо рассмотреть отдельно, подставив соответствующее значение частоты в уравнения (3.116), (3.117). При $\omega = \omega_0$, если $\mathbf{L}_0 \neq \mathbf{0}$, имеем резонансное решение для $\boldsymbol{\theta}$. Для $\mathbf{u}$ имеем

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{F}_0 e^{i\omega_0 t}}{4\pi\rho\omega_0^2} \cdot \Big(\frac{\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{r^3} - e^{-i\frac{\omega_0}{c_P}r} \Big(\frac{1}{r}\frac{\omega_0^2}{c_P^2}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + (1 + i\frac{\omega_0}{c_P}r)\frac{\mathbf{E} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{r^3} \Big) \Big) - \frac{\mathbf{L}_0 e^{i\omega_0 t}}{8\pi\alpha^2} \cdot \frac{\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

Мы наблюдаем решение, часть которого убывает как $1/r^3$ при удалении от источника, даже при отсутствии моментного воздействия $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$. В последнем случае при $\omega = \omega_0$ имеем $\boldsymbol{\theta} = e^{i\omega_0 t}\mathbf{F}_0 \times \hat{\mathbf{r}}/(8\pi\alpha r^2)$.

Для $\omega = \omega_*$, используя (3.116), (3.117), получаем

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{F}_0\, c_s^2}{\mu\omega_*^2} e^{i\omega_*(t-r/c_P)} \cdot \Big(\frac{1}{r}\frac{\omega_*^2}{c_P^2}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + (1 + i\frac{\omega_*}{c_P})\frac{\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{r^3}\Big) - \frac{c_{S\alpha}^2}{2\alpha\omega_*^2}\,\nabla\times \mathbf{L}_0\,\delta(\mathbf{r})e^{i\omega_* t}, \quad (3.122)$$

$$\boldsymbol{\theta} = e^{i\omega_* t}\frac{\mu+\alpha}{4\alpha^2}\Big(\mathbf{L}_0\delta(\mathbf{r}) + \frac{c_{S\alpha}^2}{\omega_*^2}\mathbf{L}_0\triangle\delta(\mathbf{r}) - \frac{c_{S\alpha}^2}{\omega_*^2}\,\nabla\nabla\cdot\mathbf{L}_0\delta(\mathbf{r})\Big). \quad (3.123)$$

Видим, что если имеется источник — сосредоточенный момент, меняющийся во времени с частотой ω_*, то часть решения сильно локализована вблизи него. Данные результаты согласуются с тем, что в неограниченных волноводах на частотах, где групповая скорость равна нулю, возникают резонансные решения [321].

Явления локализации вблизи источника наблюдаются в грунтах при ударном воздействии [260] и на высоких частотах в сыпучих средах [63], что говорит в пользу редуцированной модели Коссера для описания консолидированных сыпучих и зернистых сред.

Заметим, что для акустического метаматериала «масса в массе», рассмотренного в пункте 2.3.1, обладающего тем же дисперсионным соотношением для волны растяжения – сжатия, что и изотропная редуцированная среда Коссера для волны сдвига – вращения, также наблюдаются эффекты локализации [213]. Однако решения для этих материалов, безусловно, будут различными, поскольку уравнения Кристоффеля для несущих континуумов этих материалов не совпадают.

3.2.2.3 Волна Рэлея.

Постановка задачи и получение дисперсионных соотношений принадлежат М.А. Кулешу и И.Н. Шардакову [114], [300], а аналитическое исследование свойств дисперсионных соотношений — автору диссертации.

Рассмотрим свободное полупространство, не нагруженное никакими внешними воздействиями. Ось z (и соответствующий ей единичный орт $\mathbf{i}_3$) выберем ортогональной его поверхности и направленной вглубь. Будем искать аналог волны Рэлея — свободную волну, амплитуда которой убывает по z, а волновой вектор лежит в плоскости поверхности полупространства. Ось x выберем сонаправленной волновому вектору, соответствующий ей единичный орт обозначим за $\mathbf{i}_1$, а ось y (и ее единичный орт $\mathbf{i}_2$) — ортогональными осям x, z. Поставим следующие граничные условия (отсутствие нагрузок на поверхности полупространства):

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{i}_3 = \mathbf{0}. \tag{3.124}$$

В терминах перемещений, как следует из определяющего уравнения для изотропной среды (3.60), граничное условие записывается в виде

$$\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\, \mathbf{i}_3 + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{i}_3 + 2\alpha(\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{0}. \tag{3.125}$$

Будем искать волну Рэлея в виде $\mathbf{u} = \mathbf{U}(z)e^{i(kx+\omega t)}$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}(z)e^{i(kx+\omega t)}$. После подстановки в уравнения движения в перемещениях (3.61), (3.62) и учета данных граничных условий получаем, что в среде существуют две волны с убывающими по вертикальной координате амплитудами: волна Рэлея (с амплитудами $\mathbf{U}(z) = u_x\mathbf{i}_1 + u_z\mathbf{i}_3, \boldsymbol{\Theta} = \theta_y\mathbf{i}_2$) и поперечная волна (с амплитудами $\mathbf{U}(z) = u_y\mathbf{i}_2, \boldsymbol{\Theta} = \theta_x\mathbf{i}_1 + \theta_z\mathbf{i}_3$). Уравнения для них разделяются.

Для волны Рэлея дисперсионное соотношение выглядит следующим образом

$$k^2\nu_1\nu_2 = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{2c_s^2}\right)^2, \tag{3.126}$$

где ν_1, ν_2 связаны с дисперсионными соотношениями для волны растяжения–сжатия и волны сдвига – вращения в трехмерной неограниченной среде, соответственно:

$$\nu_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_P^2}}, \tag{3.127}$$

$$\nu_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2}\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_*^2}}, \tag{3.128}$$

а векторы трансляционного и углового перемещения имеют вид

$$\mathbf{u} = (-ik(e^{-\nu_1 z} - \frac{\nu_1\nu_2}{k^2 - \frac{\omega^2}{2c_s^2}})\mathbf{i}_1 + \nu_1(e^{-\nu_1 z} - \frac{k^2}{k^2 - \frac{\omega^2}{2c_s^2}})\mathbf{i}_3)e^{i(kx+\omega t)}, \tag{3.129}$$

$$\boldsymbol{\theta} = i\frac{\nu_1 k\frac{\omega^2}{2c_s^2}}{(k^2 - \frac{\omega^2}{2c_s^2})(1 - \frac{\omega^2}{\omega_*^2})}e^{-\nu_2 z}e^{i(kx+\omega t)}\mathbf{i}_2. \tag{3.130}$$

Поперечная поверхностная волна с компонентами $\mathbf{u} = u_y\mathbf{i}_2$, $\boldsymbol{\theta} = \theta_x\mathbf{i}_1 + \theta_z\mathbf{i}_3$, в отличие от случая полной среды Коссера, является вырожденной. Условие убывания по глубине оставляет в качестве решения лишь нераспространяющиеся колебания на частоте ω_*.

Дисперсионное соотношение для волны Рэлея (3.126) позволяет в явном виде найти решение $k^2(\omega)$, однако оно является очень громоздким. Действительно, делая замену $X = 2(c_s k/\omega)^2$, можем свести уравнение (3.126) к кубическому уравнению

$$aX^3 + bX^2 + 4X - 1 = 0, \tag{3.131}$$

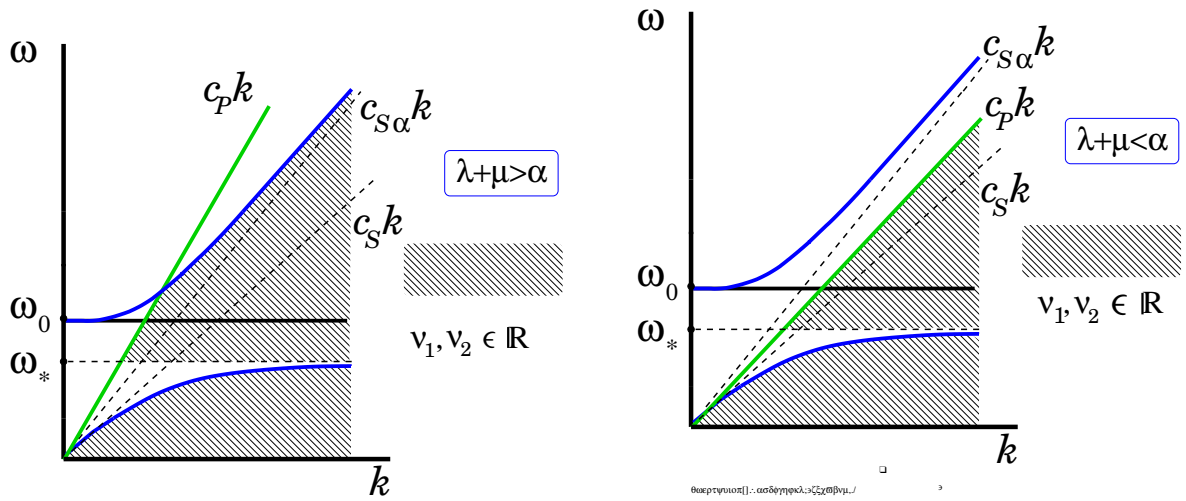

Рис. 3.4: Зоны возможного существования волны Рэлея в редуцированной однородной упругой изотропной среде Коссера (заштрихованная область).

где

$$a(\omega) = 2(1 - \frac{c_s^2}{c_P^2} + \frac{\omega^2}{(1+\mu/\alpha)(\omega^2 - \omega_*^2)}), \tag{3.132}$$

$$b(\omega) = -\frac{2c_s^2}{c_P^2} a(\omega) - 2(1 + 2\frac{(\lambda+\mu)^2}{(\lambda+2\mu)^2}) = 2(2\frac{c_s^2}{c_P^2} - 3 - \frac{2c_s^2\omega^2}{c_P^2(1+\mu/\alpha)(\omega^2 - \omega_*^2)}). \tag{3.133}$$

Необходимо учитывать лишь те решения, для которых $k^2 > 0$, а также выполняются условия $\nu_1 \in \mathbb{R}, \nu_2 \in \mathbb{R}$ (дисперсионные кривые лежат в заштрихованной зоне рис. 3.4). Поэтому целесообразно асимптотически исследовать свойства дисперсионного соотношения. Пример графика дисперсионного соотношения для волны Рэлея приведен на рис. 3.5. Вывод данных соотношений и выражений для векторов перемещений принадлежит М.А. Кулешу. Автором данной работы проведено асимптотическое исследование свойств дисперсионного соотношения волны Рэлея (3.126). Получены следующие результаты:

1. Волна Рэлея в редуцированной среде Коссера обладает дисперсией.

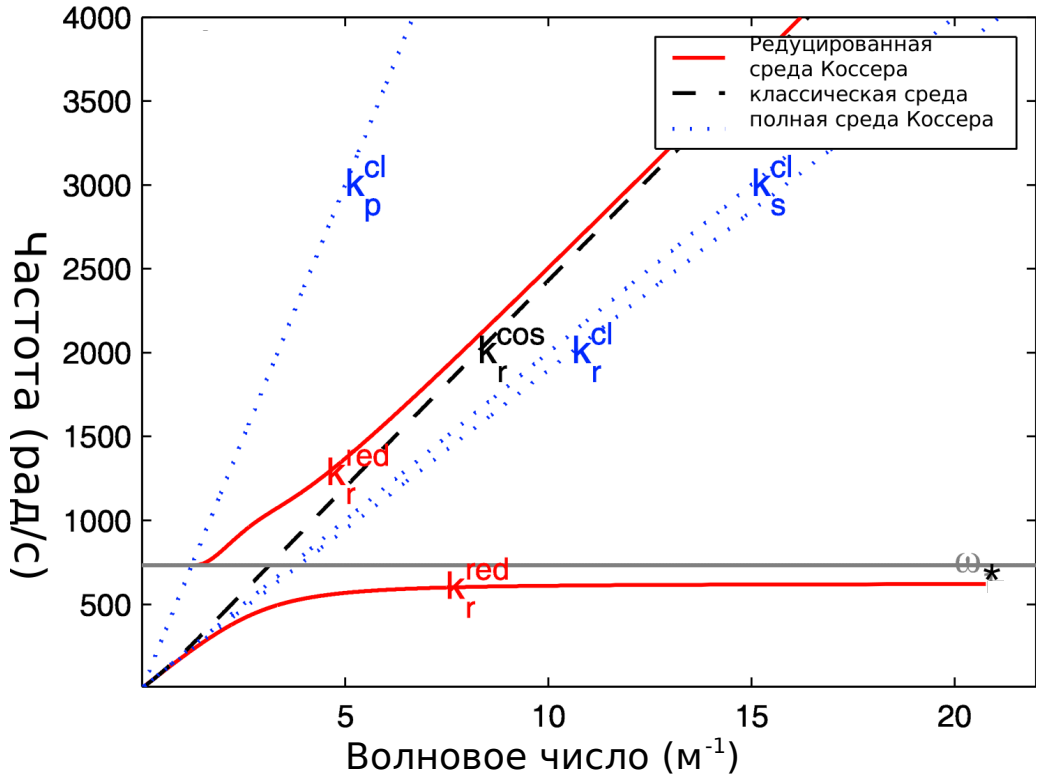

Рис. 3.5: Численный пример для дисперсионного соотношения волны Рэлея (получен М.А. Кулешем). Синим показаны волны для классической среды, красным — для редуцированной среды Коссера, синим — для полной среды Коссера. Расчет производился для следующих параметров: $\lambda = 2.8 \cdot 10^8$ Н/м^2, $\mu = 4.0 \cdot 10^7$ Н/м^2, $\rho = 10^3$ кг/м^3, $\alpha = 2.0 \cdot 10^7$ Н/м^2, $\rho I = 10^2$ кг/м, $c_s = 200$ м/с, $c_P = 600$ м/с, $\omega_* = 730.3$ рад/с, $\omega_2 = 622.8$ рад/с.

2. На высоких частотах существует единственный конечный предел c_∞ для фазовой скорости волны Рэлея, определяемый из уравнения

$$g(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \xi^3 - 8\xi^2 + 8\xi(3 - 2pq) - 16(2 - (p + q)) = 0, \tag{3.134}$$

$$c_\infty^2 = c_s^2 \xi, \quad p = c_s^2/c_P^2 \in (0; 1/2), \quad q = \frac{\mu}{\mu + \alpha} \in (0; 1). \tag{3.135}$$

При $\alpha = 0$ это уравнение совпадает с уравнением для скорости волны Рэлея в классической упругой среде.

Доказательство. Уравнение (3.134) получается из (3.126) после соответ-

ствующей замены переменных и предельного перехода. Легко показать, что $g(0)$ монотонно возрастает, $g(0) < 0$ и $g(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$. Отсюда следует, что у уравнения (3.134) существует единственный корень, и он положителен. Необходимо проверить, что этот корень действительно соответствует волне Рэлея, т.е. выполняется условие $\nu_1 \in \mathbb{R}, \nu_2 \in \mathbb{R}$ (данная часть кривой лежит в заштрихованной области рис. 3.4). Поскольку рассматриваются высокие частоты, из рисунка легко понять, что это условие эквивалентно следующему: для найденного корня должно выполняться условие $c_\infty < c_{S\alpha}$, $c_\infty < c_P$, или, что то же самое, $\xi < 1/p$, $\xi < 1/q$. Легко проверить, что $g(1/p) = p^{-3} - 8p^{-2} + 24p^{-1} - 32 + 16p > 0$, поскольку $p < 1/2$, и $g(1/q) = q^{-3} - 8q^{-2} + 24q^{-1} - 32 + 16q > 0$, поскольку $0 < q < 1$. В совокупности с монотонным возрастанием $g(\xi)$ это означает, что искомый корень меньше $1/p$ и $1/q$, т.е. условие $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$ выполняется, и c_∞ соответствует пределу фазовой скорости волны Рэлея в данной среде для больших частот. Предел при $\omega \to 0$ рассматривается аналогично. □

3. На высоких частотах фазовая скорость волны Рэлея c_∞ меньше фазовой скорости волны сдвига – вращения $c_{S\alpha}$ и скорости волны растяжения–сжатия c_P в трехмерной среде. Однако c_∞ может быть больше скорости волны сдвига – вращения в трехмерной среде на низких частотах c_s (если α/μ достаточно велико).

4. Существует дисперсионная кривая с горизонтальной асимптотой $\omega = \omega_2$ ($k \to \infty$ при $\omega \to \omega_2 - 0$),

$$\omega_2^2 = \omega_*^2 \frac{A}{1+A} < \omega_*^2, \quad A = (1 + \frac{\mu}{\alpha})(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}). \tag{3.136}$$

(Во всех рассмотренных М.А. Кулешем численных примерах ею является

ветвь, выходящая из начала координат дисперсионной плоскости.)

Доказательство. Уравнение (3.126) преобразуется к виду

$$k^6(2\frac{\omega^2}{c_s^2} - (f_p + f_s)) + k^4(f_p f_s - \frac{3\omega^4}{2c_s^4}) + k^2\frac{\omega^6}{2c_s^6} - \frac{\omega^8}{16c_s^8} = 0, \qquad (3.137)$$

где введены соответствующие дисперсионным соотношениям для трехмерной среды функции

$$f_p(\omega) = \frac{\omega^2}{c_P^2}, \qquad f_s(\omega) = \frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2}\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_*^2}. \qquad (3.138)$$

Легко показать, что при $\omega \to \omega_2 - 0$ коэффициент при k^6 стремится к 0, и существует решение $k^2 \to +\infty$, лежащее в допустимой зоне, поскольку $\omega_2 < \omega_*$. Полагая $\omega = \omega_2(1-\varepsilon)$, где $\varepsilon = o(1)$, из (3.137) после выкладок получаем в качестве первого приближения

$$k = \frac{\omega_2}{c_s}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\frac{\frac{c_s^2}{c_P^2} + \frac{3c_P^2}{2c_s^2} - 2}{2A(2\frac{c_P^2}{c_s^2} - \frac{c_P^2}{c_s^2(1+\alpha/\mu)} - 1)}} \qquad (3.139)$$

Легко видеть, что дробь под знаком корня в данном выражении положительна, соответственно, над ω_2 волновое число k становится мнимым, а при стремлении к ω_2 снизу $k \to \infty$. □

5. Для малых k имеется меньше возможных значений ω (то есть меньше дисперсионных ветвей), чем для достаточно больших. Имеется дисперсионная ветвь, выходящая из начала координат плоскости $(k;\omega)$, ее скорость на низких частотах равна скорости волны Рэлея в классической среде.

Доказательство. При $k \to 0$ дисперсионная ветвь может находиться лишь в заштрихованной области рис. (3.4) под нижней ветвью дисперсионной кривой для волны сдвига – вращения в трехмерной неограниченной среде (условие $\nu_2 > 0$), таким образом, в этом случае $\omega \to 0$, и уравнение стремится к соответствующему уравнению для классической среды, имеющему единственное решение. Учет следующих по малости степеней ω дает квадратичную зависимость коэффициентов $a(\omega), b(\omega)$, то есть ветвления решения при малых ω нет. В то же время при $k \to \infty$ имеется решение, описанное выше, где $\omega \to \infty$, а скорость стремится к предельной скорости, определяемой из уравнения (3.134), а также решение $k \to \infty, \quad \omega \to \omega_2 - 0$. □

6. Существует запрещенная зона (или зоны) частот, лежащие на отрезке $[\omega_2; \omega_*]$ (непосредственно ниже ω_* и выше ω_2 волна Рэлея не распространяется).

Доказательство. То, что при $\omega \to \omega_2 + 0$ волновое число k становится мнимым, показано в предыдущем пункте. При $\omega = \omega_2$ дисперсионное соотношение (3.137) принимает вид

$$k^4(f_p(\omega_2)f_s(\omega_2) - \frac{3\omega_2^4}{2c_s^4}) + k^2\frac{\omega_2^6}{2c_s^6} - \frac{\omega_2^8}{16c_s^8} = 0, \tag{3.140}$$

что легко преобразуется к виду

$$k^4(3 - \frac{c_s^2}{c_P^2}(4 - \frac{2c_s^2}{c_P^2})) - k^2\frac{\omega_2^2}{c_s^2} + \frac{\omega_2^4}{8c_s^4} = 0. \tag{3.141}$$

Легко видеть, что дискриминант данного биквадратного уравнения мень-

ше нуля. Он равен

$$\frac{\omega_2^4}{c_s^4} - 4\frac{\omega_2^4}{8c_s^4}(3 - \frac{c_s^2}{c_P^2}(4 - \frac{2c_s^2}{c_P^2})) = \frac{\omega_2^4}{2c_s^4}(2 - 3+) \tag{3.142}$$

При $\omega \to \omega_2 - 0$ имеем решение $k \to +\infty$. Таким образом, существует запрещенная зона, ограниченная снизу ω_2. При $\omega \to \omega_* + 0$ решение существует, что показано в следующем пункте. При $\omega \to \omega_* - 0$ условие убывания по глубине $\nu_2 > 0$ нарушается, поскольку k конечно, а $f_s \to +\infty$, поэтому волна Рэлея не существует, таким образом, ниже ω_* лежит запрещенная зона. В рассмотренных М. Кулешем численных примерах обе упомянутые в этом пункте зоны сливались в одну $[\omega_2; \omega_*)$. □

7. Одна из дисперсионных ветвей начинается в точке $[\omega_*/c_P; \omega_*]$ дисперсионной плоскости, обладая не только частотой отсечки, но и волновым числом отсечки. При малых λ она приближается к дисперсионной прямой $\omega = c_P k$ волны растяжения–сжатия в трехмерной среде, а при больших — к горизонтали $\omega = \omega_*$.

Доказательство. При $\omega \to \omega_* + 0$ в уравнении (3.131) имеем: $a \to +\infty, b \to -\infty$, и уравнение имеет единственный вещественный положительный корень $x_3 \to 2c_s/c_P$, подходящий сверху к угловой точке $(\omega_*/c_P; \omega_*)$ границы зоны допустимых значений $\nu_2 = 0$. Асимптотический анализ уравнения (3.126) дает

$$k - \frac{\omega_*}{c_P} \approx \frac{\omega - \omega_*}{c_P}\Big(1 + \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{\mu}{\alpha}\Big)\frac{c_P^6}{c_s^6}\Big(2\frac{c_s^2}{c_P^2} - 1\Big)^4\Big). \tag{3.143}$$

Видим, что наклон данной ветви таков (фазовая скорость меньше c_P при приближении к исследуемой точке), что она лежит вблизи данной точке

в разрешенной зоне. При малых λ имеем $2c_s^2/c_P^2 - 1 \to 0-$, то есть в этом случае кривая приближается в данной точке к прямой, соответствующей продольной волне в неограниченной среде. При больших λ фазовая скорость в точке ω_* приближается к нулю (то есть кривая приближается к горизонтали $\omega = \omega_*$). □

3.2.3 Материал с трансверсально-изотропной перевязкой деформации сдвига-вращения и объемной деформации с шаровым тензором инерции тел-точек.

Рассмотрим распространение волн в линейном материале, чья анизотропия проявляется лишь в существовании перекрестного члена, связывающего объемную деформацию и поворотно-вихревую деформации, а тензор инерции является шаровым. Рассмотрим свободное распространение волн в трехмерной неограниченной среде. Мы увидим, что почти для всех плоских волн данная среда ведет себя как единожды отрицательный акустический метаматериал, то есть имеет запрещенную зону частот.

Легко проверить, что $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega_0 t}$, где $\omega_0 = \sqrt{4\alpha/I}$, является решением уравнений в перемещениях данной среды (3.66), (3.67), если

$$\alpha \nabla \times \boldsymbol{\theta}_0 + \nabla(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{0}, \tag{3.144}$$

например, для постоянного в пространстве $\boldsymbol{\theta}_0$. Это согласуется с изложенным в разделе 2.1.

Положив равными нулю внешние воздействия и разыскивая решение уравнений в перемещениях в виде гармонических волн $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, $\boldsymbol{\theta} =$

$\boldsymbol{\theta}_0 e^{i(\omega t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, получаем

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0+(\mu+\alpha)k^2(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{u}_0-2i\alpha\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta}_0 \\
&\qquad\qquad -\mathbf{n}\times\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0-2i\mathbf{k}\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\theta}_0-i\mathbf{k}\times\mathbf{u}_0/2)=\rho\omega^2\mathbf{u}_0, \\
&2(\omega^2-\omega_0^2)\boldsymbol{\theta}_0=i\omega_0^2(-\mathbf{k}\times\mathbf{u}_0+\alpha^{-1}\mathbf{n}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0).
\end{aligned}
\tag{3.145}
$$

3.2.3.1 Случай $\omega=\omega_0$.

Рассмотрим отдельно случай $\omega=\omega_0$. Подставляя $\omega=\omega_0$ в (3.145), после преобразований получим, что на данной частоте не существует плоской волны, за исключением случая $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}=0$. Пусть $\mathbf{n}=\mathrm{n}\hat{\mathbf{n}}$, $|\hat{\mathbf{n}}|=1$. Для волны, распространяющейся ортогонально $\hat{\mathbf{n}}$, получаем $\omega=\omega_0$

$$
\mathbf{u}_0=U_k(\alpha\hat{\mathbf{k}}+\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{k}}),\qquad \boldsymbol{\theta}_0=\Theta_k\hat{\mathbf{k}}+\Theta_n\hat{\mathbf{n}},\qquad \Theta_n=iU_k\mathrm{n}\frac{\mu k^2-\rho\omega_0^2}{2k\alpha},
\tag{3.146}
$$

где U_k и Θ_k — некоторые произвольные константы, а волновое число k определяется выражением

$$
k=\omega_0\sqrt{\frac{\rho(\alpha^2+\mathrm{n}^2)}{(\lambda+2\mu)\alpha^2+(\mu-\alpha)\mathrm{n}^2}}.
\tag{3.147}
$$

Плоская волна существует при $(\lambda+2\mu)\alpha^2+(\mu-\alpha)\mathrm{n}^2\geqslant 0$. Это условие выполняется при положительной энергии деформации: $(\lambda+2\mu)\alpha\geqslant\mathrm{n}^2\Longrightarrow(\lambda+2\mu)\alpha^2+(\mu-\alpha)\mathrm{n}^2\geqslant\mathrm{n}^2\mu\geqslant 0$.

Заметим, что другое возможное решение при $\omega=\omega_0$ — это $k=0$.

3.2.3.2 Случай $\omega \neq \omega_0$. Волна сдвига – вращения.

Если $\omega \neq \omega_0$, можно выразить $\boldsymbol{\theta}_0$ через $\mathbf{u}_0$ из уравнения (3.67) и редуцировать уравнение Кристоффеля, получая

$$(\rho\omega^2 - k^2(\lambda + 2\mu - \frac{\mathrm{n}^2}{\alpha} + \frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}))\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_0$$
$$+ (\rho\omega^2 - (\mu + \alpha\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2})k^2)(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{u}_0$$
$$- k^2\frac{\omega^2\mathrm{n}}{\omega^2 - \omega_0^2}(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}. \quad (3.148)$$

Введем вектор $\hat{\mathbf{m}}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})$ (коллинеарный проекции оси симметрии $\hat{\mathbf{n}}$ на плоскость, ортогональную волновому вектору $\mathbf{k}$). Заметим, что $\hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{k}}$ и $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$ ортогональны. Из последнего уравнения видно, что всегда существует решение, соответствующее $\mathbf{u}_0 = u_0\hat{\mathbf{m}}$, такое же, как и в изотропной редуцированной среде Коссера:

$$k_s^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}\frac{(1 - \omega^2/\omega_0^2)}{(1 - \omega^2/\omega_*^2)}. \quad (3.149)$$

Это волна сдвига – вращения, поскольку собственный вектор содержит как повороты $\boldsymbol{\theta}_0$, так и трансляции $\mathbf{u}_0$, и она является поперечной в смысле трансляций: $\mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$. Дисперсионные кривые представлены на рис. 2.10. Дисперсионная кривая обладает горизонтальной асимптотой $\omega = \omega_*$ и запрещенной зоной $[\omega_*; \omega_0)$. Напомним, что на низких частотах скорость волны близка к c_s, а на высоких к $c_{S\alpha}$.

Вектор малого поворота равен

$$\boldsymbol{\theta}_0 = u_0 k\frac{i\omega_0^2}{2(\omega^2 - \omega_0^2)}\frac{\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}}{|(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}|}. \quad (3.150)$$

Видим, что, как и для изотропной среды Коссера, смещение поворота отстает на $\pi/2$ по фазе от трансляционного, а при $\omega \to \omega_0$ трансляционная часть волны мала по сравнению с поворотной, умноженной на $\sqrt{I}$, если $\hat{\mathbf{k}} \neq \pm\hat{\mathbf{n}}$.

3.2.3.3 Случай $\omega \neq \omega_0$, $\hat{\mathbf{k}}||\mathbf{n}$. Продольная волна.

Если $\hat{\mathbf{k}}||\mathbf{n}$, последний член в уравнении (3.148) равен 0. Это соответствует волне сдвига – вращения с тем же дисперсионным соотношением (3.149), любой вектор $\mathbf{u}_0$, ортогональный $\hat{\mathbf{k}}$, будет удовлетворять уравнению Кристоффеля.

В силу положительности энергии деформации $\alpha(\lambda + 2\mu) > \mathrm{n}^2$, поэтому дисперсионное соотношение для продольной волны имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для волны сдвига (3.149) (рис. 3.6):

$$k_p^2 = \frac{\omega^2}{c_p^2}\frac{(1-\omega^2/\omega_0^2)}{(1-\omega^2/\omega_p^2)}. \tag{3.151}$$

В этом случае также существует запрещенная зона ниже ω_0. Групповая скорость $\frac{\partial\omega}{\partial k}$ на низких частотах равна $\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{\partial\omega}{\partial k} = c_p = ((\lambda+2\mu-\mathrm{n}^2/\alpha)/\rho)^{1/2}$, а на высоких частотах ($\omega \to \infty$) стремится к $c_P = ((\lambda+2\mu)/\rho)^{1/2}$. Нижний предел запрещенной зоны соответствует

$$\omega_p^2 = \omega_0^2\frac{(\lambda+2\mu)\alpha-\mathrm{n}^2}{(\lambda+2\mu)\alpha} = \omega_0^2\,\frac{c_p^2}{c_P^2}. \tag{3.152}$$

Заметим, что, аналогично случаю изотропной редуцированной среды Коссера для $\alpha > \lambda + \mu$, на высоких частотах волна сдвига быстрее продольной, (для $\hat{\mathbf{k}}||\hat{\mathbf{n}}$, как и для общего случая, рассмотренного в предыдущем пункте). Тем не менее, в **изотропной** среде на низких частотах волна сдвига всегда медленнее волны растяжения–сжатия. В рассматриваемом здесь анизотроп-

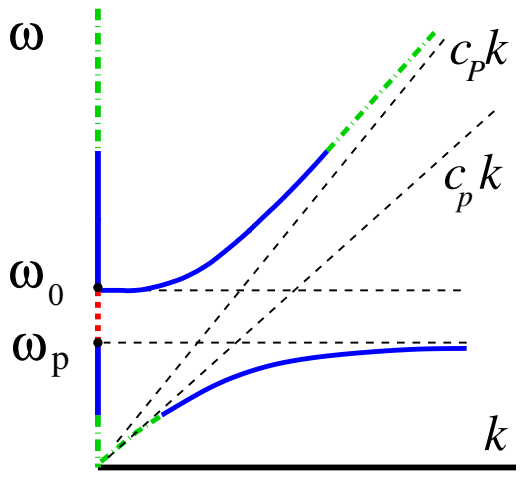

Рис. 3.6: Дисперсионные кривые для продольной волны, $\omega \neq \omega_0$, $\hat{\mathbf{k}}||\mathbf{n}$. Зеленым показаны области малой дисперсии, синим — области существенной дисперсии, красным — запрещенная зона.

ном случае мы видим, что, если $(\lambda+\mu)\alpha < \mathrm{n}^2$, продольная волна медленнее поперечной волны на низких частотах.

Если трансляционная часть собственного вектора $\mathbf{u}_0 = u_0\hat{\mathbf{k}}$, то поворотная часть

$$\boldsymbol{\theta}_0 = -u_0 k \frac{i\omega_0^2}{2(\omega^2-\omega_0^2)}\alpha^{-1}\mathbf{n} \tag{3.153}$$

задается вторым уравнением системы (3.145). Как и в случае волны сдвига – вращения для изотропной редуцированной упругой среды Коссера (см. раздел 3.2.2.1), для верхней дисперсионной ветви вблизи частоты отсечки, где $\omega - \omega_0 = \Delta\omega$ мало, $\sqrt{I}\theta_0 \gg u_0$, т.е. волна является преимущественно поворотной:

$$\sqrt{I}\boldsymbol{\theta}_0 \approx -iu_0 \frac{1}{\sqrt{2\Delta\omega/\omega_0}}\,\hat{\mathbf{n}}, \tag{3.154}$$

причем фаза поворотной компоненты на $\pi/2$ меньше, чем фаза трансляционной.

3.2.3.4 Случай $0 < \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 1$. Смешанные волны.

Благодаря простейшему виду анизотропной перевязки оказывается возможным отделить одно решение уравнения Кристоффеля (3.148), соответствующий волне сдвига $\mathbf{u}_0 = u_0\hat{\mathbf{m}}$, чье дисперсионное соотношение задается уравнением (3.149), таким же, как и в изотропном случае. Кроме этой волны, существуют другие плоские волны при $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n} \neq 0, \hat{\mathbf{k}} \neq \hat{\mathbf{n}}$, являющиеся смешанными. Их дисперсионное соотношение получается из (3.149):

$$k^4(g_s(\omega)g_p(\omega) - \frac{\omega^4 \mathrm{n}^2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}) - \rho\omega^2(g_s(\omega) + g_p(\omega))k^2 + \rho^2\omega^4 = 0, \quad (3.155)$$

где

$$g_s(\omega) = \mu + \alpha\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = \rho(c_s^2 + (c_{s\alpha}^2 - c_s^2)\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}), \quad (3.156)$$

$$\rho\omega^2 - k^2 g_s(\omega) = 0 \quad (3.157)$$

— дисперсионное соотношение для волны сдвига (см. (3.148), (3.149)), и

$$g_p(\omega) = \lambda + 2\mu - \frac{\mathrm{n}^2}{\alpha} + \frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = \rho(c_p^2 + (c_P^2 - c_p^2)\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}), \quad (3.158)$$

$$\rho\omega^2 - k^2 g_p(\omega) = 0 \quad (3.159)$$

— дисперсионное соотношение для волны растяжения–сжатия в случае $\hat{\mathbf{k}}||\hat{\mathbf{n}}$ (см. (3.148), (3.151)). Заметим, что $g_s(\omega_*) = g_p(\omega_p) = 0$.

Решая уравнение (3.155), находим, что, помимо волны сдвига, существуют две смешанные волны, у которых трансляционная часть собственного вектора имеет как продольную, так и поперечную компоненты ($\mathbf{u}_0 = u_1\hat{\mathbf{k}} + u_2\hat{\mathbf{l}}$, где $\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}/|\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|$). Поворотная часть собственного вектора (полученная из

уравнения (3.145)) также является смешанной:

$$\boldsymbol{\theta}_0 = -u_0 \frac{i\omega_0^2 k}{2(\omega^2 - \omega_0^2)}(u_1 \alpha^{-1}\mathbf{n} + u_2 \hat{\mathbf{l}}). \tag{3.160}$$

Заметим, что, как и для волны сдвига–вращения, поворотная часть отстает на $\pi/2$ по фазе от трансляционной.

Смешанные волны характеризуются следующими дисперсионными соотношениями

$$k_\pm^2 = \rho\omega^2 \frac{g_s(\omega) + g_p(\omega) \pm \sqrt{D(\omega)}}{2Z(\omega)}, \tag{3.161}$$

$$D(\omega) = (g_s + g_p)^2 - 4Z \tag{3.162}$$

$$Z(\omega) = g_p g_s - \frac{\omega^4 \mathrm{n}^2 (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \tag{3.163}$$

Данное выражение может быть записано в иной форме:

$$k^2 = \frac{\omega^2/2}{c_p^2 c_s^2 + (\frac{c_p^2 \alpha}{\rho} + \frac{c_s^2 \mathrm{n}^2}{\alpha\rho})\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{\mathrm{n}^2}{\rho^2}(1 - |\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|^2)\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \left(c_s^2 + c_p^2 + \frac{\alpha^2 + \mathrm{n}^2}{\alpha\rho}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \pm \sqrt{(c_p^2 - c_s^2 + \frac{\mathrm{n}^2 - \alpha^2}{\alpha\rho}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2})^2 + 4\frac{\mathrm{n}^2}{\rho^2}|\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \right). \tag{3.164}$$

Если $Z(\omega) \neq 0$, легко показать, что $k_\pm^2 \in \mathbb{R}$. Действительно,

$$D = (g_s + g_p)^2 - 4(g_s g_p - \frac{\omega^4 \mathrm{n}^2 (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}) = (g_s - g_p)^2 + \frac{4\omega^4 \mathrm{n}^2 (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} > 0. \tag{3.165}$$

Случай $Z(\omega) = 0$ будет рассмотрен отдельно далее. Теперь необходимо выяснить, какие решения уравнения (3.161) являются положительными (в зависимости от ω). Положительные ветви будут соответствовать распространя-

ющимся волнам, а отрицательные значения k^2 будут соответствовать запрещенным зонам.

Анализ, представленный в следующих двух пунктах, достаточно громоздок, однако, он позволяет понять поведение дисперсионных кривых для всех областей параметров. Их графики представлены в конце пункта 3.2.3.6.

3.2.3.5 Дисперсия для смешанной волны, $0 < \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} < 1$. Общие соотношения.

Существуют различные области ω, для которых:

1. $\underline{Z(\omega) < 0}$. В этом случае $\sqrt{D} > |g_s + g_p|$, поэтому $k_+^2 < 0$, $k_-^2 > 0$. Существует лишь одна дисперсионная ветвь.

2. $\underline{Z(\omega) > 0}$.
   Если $g_s + g_p > 0$, то $\sqrt{D} < |g_s + g_p|$, следовательно, $k_\pm^2 > 0$, и дисперсионное соотношение имеет две ветви.
   Если $g_s + g_p < 0$, то $\sqrt{D} < |g_s + g_p|$, и тогда $k_\pm^2 < 0$, что соответствует запрещенной зоне.

3. $\underline{Z(\omega) = 0}$. Требуется анализ редуцированного уравнения Кристоффеля (3.155).

Обозначим за ω_+ и ω_- корни уравнения $Z(\omega) = 0$. В зависимости от упругих параметров, частоты $\omega_\pm$ могут иметь различные выражения.

1. Найдем область ω, где $\underline{Z(\omega) < 0}$. Пользуясь формулами (3.163), (3.156), (3.158) и выражениями для характеристических частот

$\omega_*^2 = \mu/(\mu+\alpha)$, $\omega_p^2 = (\lambda+2\mu-\mathrm{n}^2/\alpha)/(\lambda+2\mu)$, легко показать, что

$$Z(\omega) < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega^4\left(1 - \frac{\mathrm{n}^2|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|^2}{(\lambda+2\mu)(\mu+\alpha)}\right) - \omega^2(\omega_p^2+\omega_*^2) + \omega_p^2\omega_*^2 < 0. \tag{3.166}$$

Обозначим корни многочлена в левой части (3.166) за ω_+^2, ω_-^2:

$$\omega_\pm^2 = \frac{\omega_p^2+\omega_*^2 \pm \sqrt{d}}{2z}, \tag{3.167}$$

$$z \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{\mathrm{n}^2|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|^2}{(\lambda+2\mu)(\mu+\alpha)}, \tag{3.168}$$

причем в силу положительности энергии константа $z > 0$,

$$(\omega_p^2+\omega_*^2)^2 > \\ > d \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_p^2+\omega_*^2)^2 - 4\omega_p^2\omega_*^2 z = (\omega_p^2-\omega_*^2)^2 + 4\omega_p^2\omega_*^2\frac{\mathrm{n}^2|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|^2}{(\lambda+2\mu)(\mu+\alpha)} \geqslant 0. \tag{3.169}$$

Отсюда следует, что $0 < \omega_-^2 < \omega_+^2$, и

$$Z(\omega) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_- < \omega < \omega_+. \tag{3.170}$$

Минимальное значение постоянная z принимает при $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = 0$. При этом $z = z_{\min} = 1 - \frac{\mathrm{n}^2}{(\lambda+2\mu)(\mu+\alpha)}$.

Предложение 3.2.

$$\max(\omega_p^2,\omega_*^2) < \omega_+^2 < \omega_0^2, \qquad \omega_-^2 < \min(\omega_p^2,\omega_*^2). \tag{3.171}$$

Доказательство. Для оценки $\omega_\pm^2$ рассмотрим $f(z)$, где $z_{\min} < z < 1$,

$$f_\pm(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_\pm^2}{\omega_p\omega_*} = \frac{\Omega \pm (\Omega^2 - z)^{1/2}}{z}, \qquad \Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_p^2 + \omega_*^2}{2\omega_p\omega_*}. \tag{3.172}$$

Найдем, для каких $|\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|$ достигаются минимальные и максимальные значения $f(z)$.

$$f_{\pm_z}' = -\frac{\Omega(\Omega^2 - z)^{1/2} \pm (\Omega^2 - \frac{1}{2}z)}{z^2(\Omega^2 - z)^{1/2}}, \tag{3.173}$$

где $\Omega^2 \geqslant z$, поскольку $d \geqslant 0$. Видим, что $f_{+_z}' < 0, f_{-_z}' > 0$. Заметим, что

$$\Omega^2 - z_{\min} = \Omega^2 - (\Omega\frac{2\omega_p\omega_*}{\omega_0^2} - \frac{\omega_p^2\omega_*^2}{\omega_0^4}) = (\Omega - \frac{\omega_p\omega_*}{\omega_0^2})^2. \tag{3.174}$$

Можно проверить, что $\omega_p^2 > 0 \Longrightarrow \Omega > \omega_p\omega_*/\omega_0^2$, поэтому

$$\omega_+^2 < \omega_p\omega_* f_+(z_{\min}) = \frac{\omega_p\omega_*(2\Omega - \omega_p\omega_*/\omega_0^2)}{\omega_p^2/\omega_0^2 + \omega_*^2/\omega_0^2 - \omega_p^2\omega_*^2/\omega_0^4} = \omega_0^2, \tag{3.175}$$

$$\omega_-^2 > \omega_p\omega_* f_-(z_{\min}) = \frac{\omega_p\omega_*(\omega_p\omega_*/\omega_0^2)}{\omega_p^2/\omega_0^2 + \omega_*^2/\omega_0^2 - \omega_p^2\omega_*^2/\omega_0^4} = \omega_0^2\frac{1}{\frac{\omega_0^2(\omega_p^2+\omega_*^2)}{\omega_p^2\omega_*^2} - 1} > 0. \tag{3.176}$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку

$$\omega_0 > \max(\omega_p, \omega_*), \quad \omega_*^2 + \omega_p^2 > \omega_*\omega_p. \tag{3.177}$$

С другой стороны,

$$\Omega^2 - 1 = \Big(\frac{\omega_p^2 - \omega_*^2}{2\omega_p\omega_*}\Big)^2, \tag{3.178}$$

$$f_\pm(1) = \frac{\omega_p^2 + \omega_*^2 \pm |\omega_p^2 - \omega_*^2|}{2\omega_p\omega_*}, \tag{3.179}$$

откуда

$$\omega_-^2 < \min(\omega_p^2, \omega_*^2), \qquad \omega_+^2 > \max(\omega_p^2, \omega_*^2). \tag{3.180}$$

□

Итак, $Z(\omega) < 0$ тогда и только тогда, когда

$$\omega_- < \omega < \omega_+, \qquad \omega_\pm^2 = \frac{\omega_p^2 + \omega_*^2 \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \omega_*^2)^2 - 4\omega_p^2\omega_*^2 z}}{z}, \tag{3.181}$$

$$z = 1 - \frac{\mathrm{n}^2 |\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|^2}{(\lambda + 2\mu)(\mu + \alpha)}, \qquad 0 < z_{\min} = 1 - \frac{\mathrm{n}^2}{(\lambda + 2\mu)(\mu + \alpha)} < z < 1, \tag{3.182}$$

$$\omega_- < \min(\omega_p, \omega_*) < \max(\omega_p, \omega_*) < \omega_+ < \omega_0. \tag{3.183}$$

При этих значениях частот ($\omega_- < \omega < \omega_+$) существует лишь одна дисперсионная ветвь.

2. $\underline{Z(\omega) > 0.}$

Это соответствует областям частот $\omega < \omega_-$ и $\omega > \omega_+$. Если $g_s + g_p > 0$, имеется две дисперсионные ветви, а в противном случае у нас есть запрещенная зона. Легко показать, что

$g_s + g_p > 0$ либо при $\omega > \omega_0$, либо при $\omega^2 < \omega_*^2 = \omega_0^2(1 - \frac{\alpha + \mathrm{n}^2/\alpha}{\lambda + 3\mu + \alpha})$.

Предложение 3.3. $\omega_- < \omega_* < \omega_+$.

Доказательство. Поскольку, как показано в предложении 3.2,

$\omega_- < \min(\omega_p, \omega_*) < \max(\omega_p, \omega_*) < \omega_+$,

достаточно доказать, что $\min(\omega_p, \omega_*) < \omega_* < \max(\omega_p, \omega_*)$. Представим ω_*^2 в

следующем виде:

$$\omega_*^2 = \omega_0^2 \frac{\lambda+3\mu-\frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}}{\lambda+3\mu+\alpha} = \omega_0^2 \Big(\frac{\lambda+2\mu-\frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}}{\lambda+3\mu+\alpha} + \frac{\mu}{\lambda+3\mu+\alpha}\Big)$$
$$= \omega_p^2 \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu+\alpha} + \omega_*^2 \frac{\mu+\alpha}{\lambda+3\mu+\alpha}.$$

Заметим, что

$$\min(\omega_p^2,\omega_*^2) = \min(\omega_p^2,\omega_*^2)\Big(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu+\alpha} + \frac{\mu+\alpha}{\lambda+3\mu+\alpha}\Big)$$
$$< \omega_p^2 \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu+\alpha} + \omega_*^2 \frac{\mu+\alpha}{\lambda+3\mu+\alpha}$$
$$< \max(\omega_p^2,\omega_*^2)\Big(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu+\alpha} + \frac{\mu+\alpha}{\lambda+3\mu+\alpha}\Big) = \max(\omega_p^2,\omega_*^2).$$

Таким образом, имеем

$$\min(\omega_p^2,\omega_*^2) < \omega_*^2 < \max(\omega_p^2,\omega_*^2). \tag{3.184}$$

□

Теперь мы видим, что $Z > 0,\ g_s + g_p > 0$ при $\omega > \omega_0$ и $\omega < \omega_-$, а $Z > 0,\ g_s + g_p < 0$ при $\omega_+ < \omega < \omega_0$.

Суммируя результаты пунктов **1,2**, получаем:

$Z > 0,\ g_s + g_p > 0$ при $\omega < \omega_-$ и $\omega > \omega_0$ (две дисперсионные ветви)

$Z < 0$ при $\omega_- < \omega < \omega_+$ (одна дисперсионная ветвь)

$Z > 0,\ g_s + g_p < 0$ при $\omega_+ < \omega < \omega_0$ (запрещенная зона).

3. $\underline{Z(\omega) = 0}$, т.е. $\omega = \omega_\pm$.

Уравнение (3.155) тогда сводится к

$$k_{1,2}^2 = \frac{\rho\omega_\pm^2}{g_s(\omega_\pm) + g_p(\omega_\pm)}, \tag{3.185}$$

Поскольку $\omega_+^2 > \omega_*^2$, $k_1^2 < 0$. Так как $\omega_-^2 > 0$, имеем $k_2^2 > 0$. Это значение, соответствующее k_-^2 (верхняя нижнечастотная дисперсионная ветвь):

$$k = \omega_- \sqrt{\rho/(g_s + g_p)|_{\omega_-}}\ . \tag{3.186}$$

3.2.3.6 Свойства дисперсии смешанной волны.

Обсудим некоторые другие свойства дисперсионных кривых, которые можно получить, анализируя (3.161).

- Горизонтальные асимптоты при ω_+ и ω_-

  Можно проверить, что уравнение (3.161) дает $k \to +\infty$ при $\omega \to \omega_+$, а при $\omega \to \omega_-$ имеем два предела: один — положительное конечное значение, совпадающее с уравнением (3.186), и другое $k \to +\infty$.

- Поведение в окрестности ω_0

  Рассмотрим дисперсионные соотношения (3.161) более подробно в окрестности $\omega = \omega_0$. Они принимают форму

$$k^2 \approx (\omega - \omega_0)\frac{\rho\,\omega_0}{\alpha}\frac{\mathrm{n}^2 + \alpha^2 \pm \sqrt{(\mathrm{n}^2 - \alpha^2)^2 + 4\mathrm{n}^2\alpha^2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})^2}}{\mathrm{n}^2(1 - |\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|^2)}. \tag{3.187}$$

  Можно заметить, что коэффициенты при $\omega - \omega_0$ в правой части соотношения положительны для обеих ветвей. Таким образом, запрещенная зона расположена ниже ω_0 для обеих волн. Это было показано в предыдущем пункте. Если $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \to 0$, групповая скорость для одной из ветвей

становится малой:

$$\omega - \omega_0 \approx (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \, k^2 \, \frac{\alpha \mathrm{n}^2}{2\rho\omega_0(\mathrm{n}^2 + \alpha^2)}, \tag{3.188}$$

а приближенное соотношение для другой ветви таково:

$$\omega - \omega_0 \approx k^2 \frac{\mathrm{n}^2 + \alpha^2}{2\alpha\rho\omega_0}. \tag{3.189}$$

Заметим, что вблизи ω_0 играют роль лишь упругие константы, отвечающие за анизотропную перевязку и сопротивление повороту $\alpha, \mathbf{n}$, в то время как λ, μ не влияют на дисперсионные соотношения.

- Поведение при $\omega \approx 0$

  Для низких частот имеем две ветви: $\omega \approx c_p k$ и $\omega \approx c_s k$. Интересно, что для низких частот направление распространения волны не играет роли.

- При $\omega \to \infty$ имеем две ветви $\omega \approx c_\pm k$, где

$$c_\pm^2 = \frac{2((\lambda + 2\mu)(\mu + \alpha) - \mathrm{n}^2 |\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|^2)}{\rho(\lambda + 3\mu + \alpha \pm \sqrt{(\lambda + \mu - \alpha)^2 + 4\mathrm{n}^2 |\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|^2})}. \tag{3.190}$$

Данный анализ позволяет построить дисперсионные кривые (рис. 3.7).

3.2.3.7 Общий случай направления волнового вектора. Смешанные волны

Заметим, что приведенные в этом разделе соотношения описывают распространение волн также в среде с осесимметричной перевязкой общего вида между поворотными и трансляционными деформациями (см. раздел 3.1.9), при условии, что ось симметрии ортогональна направлению распростране-

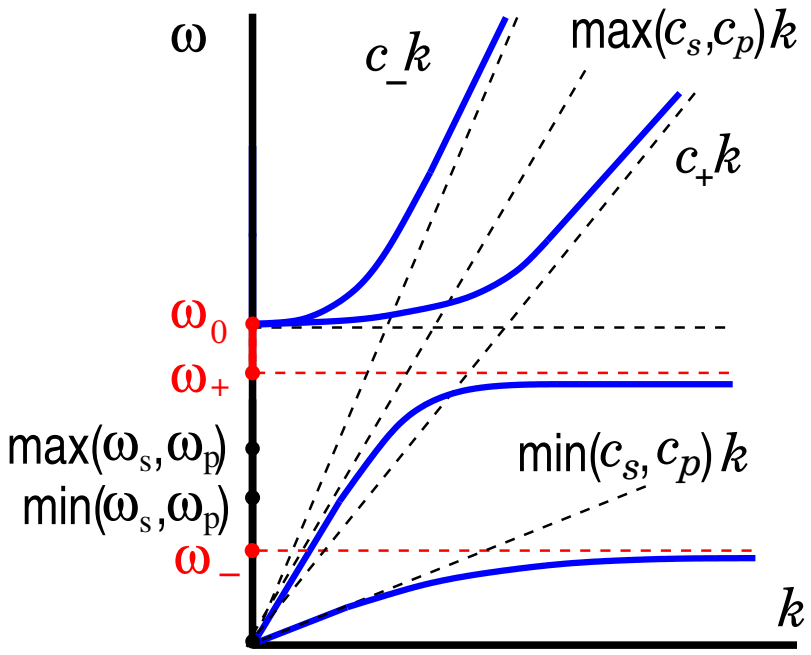

Рис. 3.7: Дисперсионные кривые смешанной плоской волны в упругой редуцированной среде Коссера с осесимметричным перевязочным членом в энергии, $0 < \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 1$.

ния волн. Действительно, как видно из уравнений (3.64), (3.65), определяемый параметром ξ перевязочный член в энергии между деформацией сдвига $\operatorname{dev} \nabla \mathbf{u}^S$ и поворотной деформацией $\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2$ не влияет на уравнения в данном случае. Более подробно это будет показано в разделе 3.2.4.

Дисперсионные кривые. Общие соотношения. При $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, как будет показано ниже, больший корень ω_+ уравнения $Z(\omega) = 0$ совпадает с ω_0, поэтому мы рассмотрим данный случай отдельно. Решая уравнение Кристоффеля (3.155), получаем

$$k_\pm^2 = \frac{\omega^2/2}{c_p^2 c_s^2 + (\frac{c_p^2 \alpha}{\rho} + \frac{c_s^2 \mathrm{n}^2}{\alpha\rho}) \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}} \left(c_s^2 + c_p^2 + \frac{\alpha^2 + \mathrm{n}^2}{\alpha\rho} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{(c_p^2 - c_s^2 + \frac{\mathrm{n}^2 - \alpha^2}{\alpha\rho} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2})^2 + 4 \frac{\mathrm{n}^2}{\rho^2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \right). \quad (3.191)$$

Имеем

$$Z(\omega) = \rho^2 c_p^2 c_s^2 + \rho(c_p^2\alpha + c_s^2 \mathrm{n}^2/\alpha)\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$$
$$= \mu(\lambda + 2\mu - \frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}) + ((\lambda+2\mu)\alpha + \frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}(\mu - \alpha)))\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (3.192)$$

Как и в предыдущем пункте, знаки $Z(\omega)$ и $g_s(\omega) + g_p(\omega)$ определяют число дисперсионных ветвей на данной частоте ω. Рассмотрим различные области частот в зависимости от этих знаков.

1. $\underline{Z < 0.}$

Как и прежде, имеем один корень уравнения (3.161) $k_-^2 > 0$ при $Z(\omega) < 0$. Неравенство (3.166) в случае $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ принимает вид

$$\omega^4(1 - \frac{\mathrm{n}^2}{(\lambda+2\mu)(\mu+\alpha)}) - \omega^2(\omega_p^2 + \omega_*^2) + \omega_p^2\omega_*^2 < 0. \quad (3.193)$$

Это выполняется при условии $\omega_- < \omega < \omega_+$, где корни уравнения $Z(\omega) = 0$ определяются соотношениями

$$\omega_\pm^2 = \frac{\omega_p^2 + \omega_*^2 \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \omega_*^2)^2 - 4\omega_p^2\omega_*^2 z_{\min}}}{2z_{\min}}. \quad (3.194)$$

Предложение 3.4. *В случае* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0$ *верхняя граница* ω_+ *зоны с одной дисперсионной ветвью совпадает с характеристической частотой* ω_0.

Доказательство. Легко проверить, что подкоренное выражение

$$(\omega_p^2 + \omega_*^2)^2 - 4\omega_p^2\omega_*^2 z_{\min} = \left(\frac{\alpha^2(\lambda+2\mu) + (\mu-\alpha)\mathrm{n}^2}{\alpha(\mu+\alpha)(\lambda+2\mu)}\right)^2. \quad (3.195)$$

Выражение $\alpha^2(\lambda+2\mu)+(\mu-\alpha)\mathrm{n}^2 > 0$. Действительно, при $\mu > \alpha$ это очевидно.

При $\mu < \alpha$ имеем $0 < \alpha - \mu < \alpha$, и в то же время в силу положительности энергии $\mathrm{n}^2 < \alpha(\lambda + 2\mu)$; перемножая неравенства, получаем $(\alpha - \mu)\mathrm{n}^2 < \alpha^2(\lambda + 2\mu)$. Заметим также, что

$$\frac{\omega_p^2 + \omega_*^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{\mathrm{n}^2}{\alpha(\lambda + 2\mu)} + \frac{\mu}{\mu + \alpha} = 1 + \frac{\mu\alpha(\lambda + 2\mu) - \mathrm{n}^2(\mu + \alpha)}{\alpha(\mu + \alpha)(\lambda + 2\mu)} \tag{3.196}$$

Итак,

$$\frac{\omega_+^2}{\omega_0^2} = (2z_{\min})^{-1}(1 + \frac{(\mu + \alpha)(\lambda + 2\mu) - 2\mathrm{n}^2}{(\mu + \alpha)(\lambda + 2\mu)}) = 1. \tag{3.197}$$

□

Нижняя граница ω_- зоны с одной дисперсионной ветвью определяется выражением

$$\frac{\omega_-^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{\alpha^2(\lambda + 2\mu - \mathrm{n}^2/\alpha) + \mu\mathrm{n}^2}{\alpha((\mu + \alpha)(\lambda + 2\mu) - \mathrm{n}^2)} = \frac{\lambda + 2\mu - \mathrm{n}^2/\alpha}{(1 + \alpha/\mu)(\lambda + 2\mu - \mathrm{n}^2/(\mu + \alpha))} \tag{3.198}$$

Таким образом, при $\omega_- < \omega < \omega_0$ имеется одна дисперсионная ветвь.

2. Выясним теперь, сколько имеется дисперсионных ветвей при $Z(\omega) > 0$. Если $g_s + g_p > 0$, существует две дисперсионных ветви, в противном же случае имеем запрещенную зону. Напомним, что

$$g_s + g_p > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{либо } \omega > \omega_0, \text{ либо } \omega^2 < \omega_*^2 = \omega_0^2(1 - \frac{\alpha + \mathrm{n}^2/\alpha}{\lambda + 3\mu + \alpha}) < \omega_0^2. \tag{3.199}$$

Как и в случае $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \neq 0$, имеем $0 < \omega_- < \omega_*$, поскольку $0 < \omega_- < \min(\omega_p, \omega_*) < \omega_*$. Доказательство совпадает с приведенным выше (предложения 3.2, 3.3) для случая, когда ось анизотропии не ортогональна волновому вектору. Поскольку в рассматриваемом случае $z = z_{\min}$, строгость неравенств для ω_-, в отличие от ω_+, сохраняется.

Итак, $\omega_- < \omega_* < \omega_+ = \omega_0$. Таким образом, в данном случае при $\omega \geqslant \omega_0$ и при $\omega < \omega_-$ имеется две дисперсионные ветви ($Z > 0$, $g_s + g_p > 0$), а при $\omega \in [\omega_-; \omega_0)$ — одна ($Z < 0$). В этом случае **нет запрещенной зоны**.

Некоторые свойства дисперсионных кривых.

- Горизонтальная асимптота $\omega = \omega_-$. Заметим, что в данном случае существует лишь одна горизонтальная асимптота, а в случае $0 < \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 1$, рассмотренном выше, — две (поскольку уравнение $Z(\omega) = 0$ имеет два корня, меньших ω_0). Уравнение (3.191) дает $k \to +\infty$ при $\omega \to \omega_-$.

- Поведение вблизи ω_0

  Рассмотрим дисперсионные соотношения (3.191) более подробно вблизи $\omega = \omega_0$. Легко показать, что одна из ветвей дает $k \to 0$ при $\omega \to \omega_0$, а другая — конечное значение k

  $$k \to \omega_0 \sqrt{\frac{\mathrm{n}^2 + \alpha^2}{(\lambda + 2\mu)\alpha^2 + \mathrm{n}^2(\mu - \alpha)}}. \tag{3.200}$$

  Заметим, что $(\lambda+2\mu)\alpha^2 > \mathrm{n}^2(\alpha-\mu)$ выполняется в силу положительности энергии. Следовательно, не существует запрещенной зоны.

  Заметим, что предел k при $\omega \to \omega_0$, задаваемый выражением (3.200), совпадает со значением $k(\omega_0)$, вычисленным в пункте 3.2.3.1 (см. (3.147)).

  Как было показано, плоская волна с частотой ω_0 существует лишь при $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, т.е. для случая, рассмотренного в этом пункте. Для $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, в противоположность случаю $0 < \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 1$, упругие константы Ламе λ, μ также играют роль в дисперсионных соотношениях вблизи $\omega = \omega_0$.

- Поведение при $\omega \approx 0$

На низких частотах имеется две ветви: $\omega \approx c_p k$ и $\omega \approx c_s k$.

- При $\omega \to \infty$ наблюдается то же поведение, как и для $0 < \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 1$. Именно, существуют две ветви $\omega \approx c_\pm k$, где

$$c_\pm^2 = \frac{2((\lambda+2\mu)(\mu+\alpha) - \mathrm{n}^2)}{\rho(\lambda+3\mu+\alpha \pm \sqrt{(\lambda+\mu-\alpha)^2+4\mathrm{n}^2})} > 0. \qquad (3.201)$$

Заметим, что это единственная волна в рассматриваемом материале, для которой не существует запрещенной зоны.

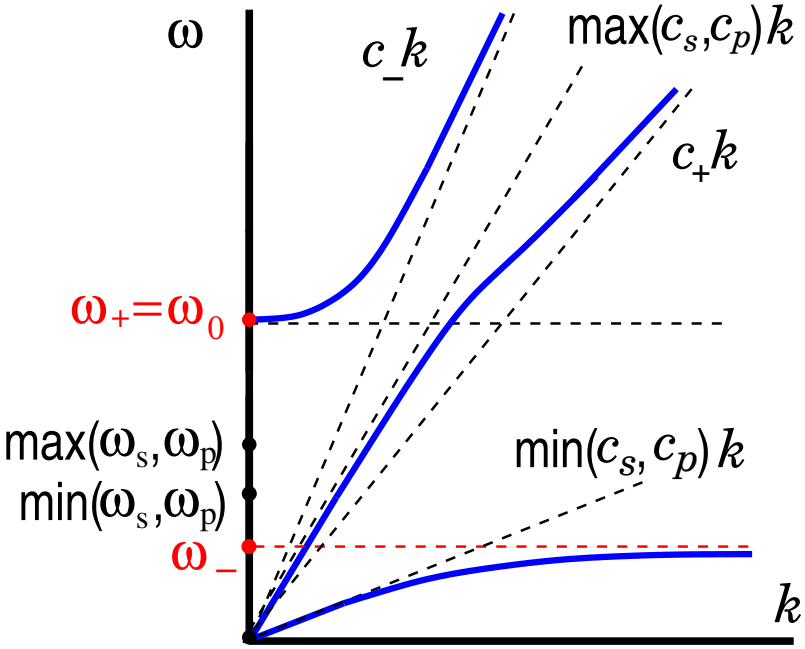

Рис. 3.8: Дисперсионные кривые смешанной плоской волны в упругой редуцированной среде Коссера с осесимметричным перевязочным членом в энергии, $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$

Данный анализ позволяет построить графики дисперсионных соотношений (рис. 3.8).

Фазовая скорость верхней дисперсионной ветви. В экспериментах нередко измеряется фазовая скорость сигнала, приходящего первым. Для фазовой скорости c_f верхней дисперсионной ветви, имеющей частоту отсечки,

выполняется соотношение

$$c^2 = 2\frac{c_p^2c_s^2+\rho^{-1}(c_p^2\alpha+c_s^2\mathrm{n}^2/\alpha)\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}}{c_s^2+c_p^2+\frac{\mathrm{n}^2+\alpha^2}{\rho\alpha}\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}-\sqrt{(c_p^2-c_s^2+\frac{\mathrm{n}^2-\alpha^2}{\rho\alpha}\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2})^2+4\frac{\mathrm{n}^2}{\rho^2}\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}}} \quad (3.202)$$

Пусть $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. Вблизи ω_0 имеем $\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}(1+O(\Delta\omega))$. Можно показать, что вблизи ω_0

$$c_f^2 = \frac{c_p^2\alpha+c_s^2\mathrm{n}^2/\alpha}{\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\rho(c_p^2+c_s^2-\frac{(c_p^2-c_s^2)(\mathrm{n}^2-\alpha^2)}{\mathrm{n}^2+\alpha^2})}\left(1+O\Big(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\Big)\right) \quad (3.203)$$

В частном случае $\alpha \ll \mu$, считая конечными скорости плоских волн на низких частотах c_p, c_s, имеем вблизи ω_0

$$c_f^2 \approx \frac{\mathrm{n}^2}{2\alpha\rho}\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\mathrm{n}^2}{(\rho^3 I\alpha)^{1/2}}\frac{1}{\Delta\omega}. \quad (3.204)$$

При $\omega \to \infty$ фазовая скорость стремится к c_-, убывая пропорционально ω^{-2}.

3.2.3.8 Собственные векторы.

Пусть $\mathbf{e}_{1,2}$ — собственные векторы, а $A_{1,2}$ — собственные числа тензора

$$(\rho\omega^2-k^2g_p)\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}+(\rho\omega^2-k^2g_s)\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}-k^2\frac{\omega^2\mathrm{n}|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|}{\omega^2-\omega_0^2}(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{l}}), \quad (3.205)$$

являющегося частью тензора, входящего в уравнение Кристоффеля (3.148)), соответствующей смешанной волне, $\hat{\mathbf{l}}$ — единичный вектор, сонаправленный с $\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}$. Уравнения $A_1 = 0, A_2 = 0$ дают нам дисперсионные соотношения для смешанной волны, исследованной в предыдущих пунктах. Векторы $\mathbf{e}_{1,2}$ — это собственные векторы, соответствующие смешанной волне. Пусть φ — угол поворота, переводящий базис $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{l}}$ в базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, т.е. $\mathbf{e}_1 = \cos\varphi\hat{\mathbf{k}} + \sin\varphi\hat{\mathbf{l}}$,

$\mathbf{e}_2 = -\sin\varphi\hat{\mathbf{k}} + \cos\varphi\hat{\mathbf{l}}$. Тогда

$$A_1\cos^2\varphi + A_2\sin^2\varphi = \rho\omega^2 - k^2 g_p, \tag{3.206}$$

$$A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi = \rho\omega^2 - k^2 g_s, \tag{3.207}$$

$$(A_1 - A_2)\sin\varphi\cos\varphi = -k^2\mathrm{n}|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}. \tag{3.208}$$

Таким образом, можно выразить φ следующим образом

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\frac{k^2\omega^2\mathrm{n}|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|}{\omega^2-\omega_0^2}}{-k^2(g_p-g_s)} = \frac{2\omega^2\mathrm{n}|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|}{(\lambda+\mu-\alpha)\omega^2-(\lambda+\mu-\mathrm{n}^2/\alpha)\omega_0^2}. \tag{3.209}$$

Перечислим некоторые свойства $\varphi(\omega)$.

1. Если $(\lambda+\mu-\alpha)(\lambda+\mu-\frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}) < 0$, то $|\operatorname{tg} 2\varphi| < \frac{2\mathrm{n}|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|}{|\lambda+\mu-\alpha|}$, $\operatorname{sgn}\varphi = \operatorname{sgn}(\lambda+\mu-\alpha)$, $\varphi(\omega)\to 0$ при $\omega\to 0$, и $\varphi(\omega)$ возрастает.

2. Если $(\lambda+\mu-\alpha)(\lambda+\mu-\frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}) > 0$, тогда $|\operatorname{tg} 2\varphi|\to\infty$ при $\omega\to\frac{\lambda+\mu-\frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}}{\lambda+\mu-\alpha}\omega_0^2$, ниже этой частоты $\operatorname{tg} 2\varphi$ — монотонная функция, изменяющаяся от 0 до $-\operatorname{sgn}(\lambda+\mu-\alpha)\infty$, а выше данной частоты она также монотонна, но с противоположным знаком, и меняется от $\operatorname{sgn}(\lambda+\mu-\alpha)\infty$ до $\frac{2\mathrm{n}|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|}{\lambda+\mu-\alpha}$.

3. Если $\lambda+\mu=\alpha$, то $\operatorname{tg} 2\varphi = -\omega^2\frac{2\mathrm{n}|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|}{(\lambda+\mu-\frac{\mathrm{n}^2}{\alpha})\omega_0^2}$.

4. Если $\lambda+\mu=\frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}$, то $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\mathrm{n}|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|}{\lambda+\mu-\alpha} = \mathrm{const}$.

5. При $\omega\to 0$ имеем
$$\varphi \approx -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{n}|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|}{\lambda+\mu-\mathrm{n}^2/\alpha}. \tag{3.210}$$

6. При $\omega\to\infty$
$$\operatorname{tg} 2\varphi \to \frac{2\mathrm{n}|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|}{\lambda+\mu-\alpha}. \tag{3.211}$$

7. При $\omega \to \omega_0$ константы Ламе λ и μ не влияют на φ:

$$\operatorname{tg} 2\varphi \to \frac{2\mathrm{n}\alpha|\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|}{\mathrm{n}^2 - \alpha^2}. \tag{3.212}$$

8. Если $(\lambda + \mu) \notin (\min(\alpha, \frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}); \max(\alpha, \frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}))$ (этот интервал велик, если α и n заметно различаются), тогда $\omega_m = \omega_0 \sqrt{\frac{\lambda+\mu-\frac{\mathrm{n}^2}{\alpha}}{\lambda+\mu-\alpha}} \in \mathbb{R}$, и имеем при $\omega \to \omega_m$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{1}{\omega - \omega_m} \frac{\omega_m \mathrm{n}|\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|}{\lambda + \mu - \alpha}. \tag{3.213}$$

9. Заметим, что $\operatorname{tg} 2\varphi$ пропорционален $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$ и достигает максимального значения при $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$. В этом случае запрещенная зона может не существовать, но $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\omega^2 \mathrm{n}}{(\lambda+\mu-\alpha)(\omega^2-\omega_m^2)}$. В окрестности ω_0 имеем $\operatorname{tg} 2\varphi \approx \frac{2\mathrm{n}\alpha}{\mathrm{n}^2-\alpha^2}$. Если, например, мы измеряем в эксперименте лишь продольную компоненту проходящей волны, это может создать неверное впечатление, что большая часть волны поглощается или локализуется. Так, для верхней дисперсионной ветви перемещение направлено по $\hat{\mathbf{l}}$. Если в эксперименте измеряется лишь направленная по $\hat{\mathbf{k}}$ часть самого быстрого сигнала, то вместо перемещения u будет измеряться

$$-u \sin \varphi = -u \sin \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\omega^2 \mathrm{n}|\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|}{(\lambda + \mu - \alpha)\omega^2 - (\lambda + \mu - \mathrm{n}^2/\alpha)\omega_0^2} \right). \tag{3.214}$$

Так, при $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, $\omega > \omega_0$ измеряемая передаточная функция для продольной компоненты приходящего первым на малых временах сигнала будет вычисляться по формуле

$$20 \lg \left| \sin \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\omega^2 \mathrm{n}}{(\lambda + \mu - \alpha)\omega^2 - (\lambda + \mu - \mathrm{n}^2/\alpha)\omega_0^2} \right) \right| \text{ дБ}. \tag{3.215}$$

Поворотная часть собственного вектора (см. (3.145)) равняется

$$\boldsymbol{\theta}_0 = -u_0 k \frac{i\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}(u_2 \hat{\mathbf{l}} + u_1 \frac{\mathrm{n}}{\alpha}\hat{\mathbf{n}}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \theta_1 \hat{\mathbf{n}} + \theta_2 \hat{\mathbf{l}}. \tag{3.216}$$

Интересно, что

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{u_2}{u_1}\frac{\alpha}{\mathrm{n}} = \frac{\alpha}{\mathrm{n}}\,\mathrm{tg}\,\varphi. \tag{3.217}$$

3.2.3.9 Заключение.

Мы рассмотрели плоские волны в линейном упругом редуцированном континууме Коссера с простейшей конечной анизотропной перевязкой между поворотными и трансляционными объемными деформациями, заданной постоянным вектором $\mathbf{n}$. Направление $\mathbf{n}$ соответствует оси симметрии среды, а его модуль определяет, насколько сильна перевязка. Другие тензоры упругих и инерционных характеристик предполагались изотропными. Даже этот простейший перевязочный анизотропный член в энергии существенно влияет на распространение волн в определенной зоне частот. В отличие от изотропного случая, продольная в смысле трансляционных перемещений волна ($\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{k}}$), распространяющаяся вдоль оси симметрии материала $\mathbf{n}$, обладает сильной дисперсией и запрещенной зоной частот ниже ω_0, парциальной частоты поворотных колебаний.

Для других направлений распространения волн существует поворотно-сдвиговая ($\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$) волна, чье дисперсионное соотношение совпадает с изотропным случаем, и вектор трансляционных перемещений $\mathbf{u}$ коллинеарен $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})$. Эта волна сдвига – вращения существует в силу частного вида перекрестного члена в энергии, благодаря которому отсутствует перевязка объемной и сдвиговой деформации. Кроме того, существует две смешанные волны, чьи собственные векторы имеют как продольную, так и по-

перечную компоненты. Соответствующие им трансляционные перемещения лежат в плоскости $(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})$. Собственные векторы существенно частотно зависимы. Для случая $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ дисперсионные ветви имеют две горизонтальные асимптоты, одна из них ограничивает снизу запрещенную зону с верхней границей ω_0.

Поведение смешанной волны носит иной характер, когда волновой вектор $\mathbf{k}$ ортогонален $\mathbf{n}$. Здесь существует одна дисперсионная ветвь без запрещенной зоны. Напротив, во всех остальных случаях плоские волны имеют запрещенную зону, ограниченную сверху ω_0, и динамика волн вблизи ω_0 определяется константой анизотропии n и упругой константой α. Также для $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ имеется лишь одна горизонтальная асимптота.

Имеются экспериментальные данные, указывающие на то, что подобная теория может быть применена для сыпучих сред. Сравнение ее предсказаний с экспериментом по прохождению волн в когезивном порошке будет проведено в разделе 3.5.6.

3.2.4 Материал с трансверсально-изотропной перевязкой деформации сдвига-вращения и трансляционной деформации с шаровым тензором инерции телточек. Особые направления распространения волн.

Рассмотрим случай, когда упругий тензор, отвечающий за перевязку трансляционных и поворотных деформаций, является трансверсально-изотропным общего вида. В этом случае не только объемные, но и сдвиговые деформации будут перевязаны с поворотными. Остальные тензоры упругости и тензор инерции полагаем изотропными. Уравнения в перемещениях для такой

упругой редуцированной среды получены выше: (3.64), (3.65). Рассмотрим распространение плоских волн в таком материале при отсутствии внешних нагрузок, разыскивая решение в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$. При этом, как и ранее, оператор-градиент ∇ в уравнениях будет заменяться на $i\mathbf{k}$, а дифференцирование по времени — на умножение на $i\omega$, и уравнение Кристоффеля примет вид

$$\begin{gathered}
-(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} + (\mu+\alpha)\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u}) + 2\alpha i\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta} + \mathbf{n}\times\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} + \xi\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}\cdot\cdot\mathbf{k}\mathbf{u}) \\
+ 2i\mathbf{k}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta} + \mathbf{k}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{u}) + 2\xi\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}\mathbf{n}\cdot\cdot i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta} + \xi\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}\mathbf{n}\cdot\cdot\mathbf{k}(\mathbf{k}\times\mathbf{u}) = -\rho\omega^2\mathbf{u}, \\
-4\alpha\boldsymbol{\theta} + 2\alpha i\mathbf{k}\times\mathbf{u} - 2\mathbf{n}i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} - 2\xi\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}\mathbf{n}\cdot\cdot i\mathbf{k}\mathbf{u} = -I\omega^2\boldsymbol{\theta}. \qquad (3.218)
\end{gathered}$$

Вначале рассмотрим особый случай $\omega = \omega_0 = \sqrt{4\alpha/I}$. Из второго уравнения при данной частоте получаем $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, а если $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{k} \neq 0$, единственное возможное движение — $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega t}$, где $\boldsymbol{\theta}_0$ — постоянная величина во времени и пространстве. В случае $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$ мы также получаем решение $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{k}}e^{i\omega_0 t}$.

Далее, при $\omega \neq \omega_0$ можно выразить из второго уравнения системы (3.344) амплитуду $\boldsymbol{\theta}_0$ через $\mathbf{u}_0$, и уравнение Кристоффеля сводится к редуцированному

$$\boldsymbol{\theta}_0 = i\frac{\omega_0^2}{2(\omega^2-\omega_0^2)}(-\mathbf{k}\times\mathbf{u}_0 + \alpha^{-1}\mathbf{n}(\mathbf{E}+\xi\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}})\cdot\cdot\mathbf{k}\mathbf{u}_0^S), \qquad (3.219)$$

$$\begin{gathered}
[(\rho\omega^2 - (\lambda+2\mu)k^2)\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} + (\rho\omega^2 - (\mu+\alpha\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2})k^2)(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \\
- \frac{\mathrm{n}\,\omega^2 k^2}{\omega^2-\omega_0^2}(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}} + \xi\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}})) \\
- \frac{k^2}{\omega^2-\omega_0^2}\frac{\omega_0^2\mathrm{n}^2}{\alpha}(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} + \xi\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{k}}) + (\xi\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}})]\cdot\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}. \qquad (3.220)
\end{gathered}$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$[(\rho\omega^2 - k^2(\lambda+2\mu))\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} + (\rho\omega^2 - k^2(\mu+\alpha W))(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) - nk^2(W\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{k}}+\zeta\hat{\mathbf{n}}) + W(\hat{\mathbf{k}}+\zeta\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}} + \frac{\mathrm{n}}{\alpha}(W-1)(\hat{\mathbf{k}}+\zeta\hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{k}}+\zeta\hat{\mathbf{n}}))]\cdot\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad (3.221)$$

где $\zeta = \xi\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}}, \quad W = \frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}$.

Это также можно записать следующим образом

$$[(\rho\omega^2 - k^2(\lambda+2\mu))\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} + (\rho\omega^2 - k^2(\mu+\alpha W))(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) - nk^2(\mathbf{ml}+\mathbf{lm}))]\cdot\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad (3.222)$$

где

$$\mathbf{m} = \hat{\mathbf{k}} + \zeta\hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathrm{n}}{2\alpha}(W-1)(\hat{\mathbf{k}}+\zeta\hat{\mathbf{n}}) + W\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}. \quad (3.223)$$

Заметим, что

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{l} = \frac{\mathrm{n}}{2\alpha}(W-1)(1+2\xi(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 + \xi^2(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2), \quad (3.224)$$

$$\mathbf{m}\times\mathbf{l} = W(\hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})(1+\xi) - \hat{\mathbf{n}}(1+\xi(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2)), \quad (3.225)$$

$$\hat{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{l}) = W\xi(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})(1-(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2). \quad (3.226)$$

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{l}) = W((\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 - 1). \quad (3.227)$$

3.2.4.1 Распространение волн в направлении, ортогональном оси симметрии.

Если $\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0$, уравнение Кристоффеля имеет тот же вид, что в случае $\xi = 0$, рассмотренном выше в разделе 3.2.3.7 (также для ортогонального

оси симметрии направления распространения волн). Следовательно, мы получим такое же решение, как и в случае перевязки лишь между объемной и поворотной деформациями:

$$k_{\pm}^2 = \frac{\omega^2/2}{c_p^2 c_s^2 + (\frac{c_p^2\alpha}{\rho} + \frac{c_s^2 \mathrm{n}^2}{\alpha\rho})W} \cdot \left(c_s^2 + c_p^2 + \frac{\alpha^2 + \mathrm{n}^2}{\alpha\rho} W \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{(c_p^2 - c_s^2 + \frac{\mathrm{n}^2 - \alpha^2}{\alpha\rho} W)^2 + 4\frac{\mathrm{n}^2}{\rho^2} W^2} \right). \quad (3.228)$$

Анализ данного решения, представленный в предыдущем разделе, справедлив и для данного случая без каких-либо изменений, поэтому приведем лишь его результаты:

- Существует одна горизонтальная асимптота на частоте ω_-
- *Поведение в окрестности* ω_0. На одной из ветвей $k \to 0$ при $\omega \to \omega_0$. На другой ветви достигается конечное значение k:

$$k \to \omega_0 \sqrt{\frac{\mathrm{n}^2 + \alpha^2}{(\lambda + 2\mu)\alpha^2 + \mathrm{n}^2(\mu - \alpha)}}. \quad (3.229)$$

  Запрещенная зона не существует.

- *Поведение при* $\omega \approx 0$. На низких частотах существуют две ветви: $\omega \approx c_p k$ и $\omega \approx c_s k$, где $c_p^2 = (\lambda + 2\mu - \mathrm{n}^2/\alpha)/\rho$, $c_s^2 = \mu/\rho$.
- При $\omega \to \infty$ имеем две асимптоты $\omega \approx c_\pm k$, где

$$c_\pm^2 = \frac{2((\lambda + 2\mu)(\mu + \alpha) - \mathrm{n}^2)}{\rho(\lambda + 3\mu + \alpha \pm \sqrt{(\lambda + \mu - \alpha)^2 + 4\mathrm{n}^2})}. \quad (3.230)$$

Дисперсионные кривые выглядят так же, как на рис. 3.8. Все результаты,

касающиеся характера фазовой скорости верхней дисперсионной ветви и передаточной функции для продольной компоненты трансляционного перемещения, приведенные для случая $\xi = 0$ в разделе 3.2.3.7, без изменений переносятся на данный случай.

3.2.4.2 Распространение волн в направлении, параллельном оси симметрии .

Если $\hat{\mathbf{k}} = \pm\hat{\mathbf{n}}$, уравнение Кристоффеля выглядит следующим образом:

$$[(\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu + \frac{\omega_0^2 \mathrm{n}^2(1+\xi)^2/\alpha}{\omega^2 - \omega_0^2})k^2)\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} + (\rho\omega^2 - (\mu + \alpha + \frac{\omega_0^2\alpha}{\omega^2 - \omega_0^2})k^2)(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})] \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}. \quad (3.231)$$

Видим, что в данном случае существует две волны: та же самая волна сдвига–вращения, что и в изотропном случае, и продольная волна, чье дисперсионное соотношение выглядит аналогично дисперсионному соотношению для волны сдвига–вращения, но с другими константами.

Дисперсионная кривая для волны сдвига выглядит так же, как на рис. 2.10, и граничная частота ω_* также совпадает с граничной частотой для упругой изотропной линейной редуцированной среды Коссера: $\omega_* = \omega_0/\sqrt{1 + \alpha/\mu}$.

Свойства продольной волны совпадают с рассмотренными выше для анизотропного случая при $\xi = 0$ (раздел 3.2.3.3) с точностью до замены упругого модуля n на $\mathrm{n}(1 + \xi)$. Скорость продольной волны при $\omega \to \infty$ совпадает с классической: $c_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$. При $\omega \to 0$ ее скорость равна $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu - \mathrm{n}^2(1+\xi)^2)/\alpha)/\rho}$. В силу положительности энергии дефор-

мации $\alpha(\lambda + 2\mu) > \mathrm{n}^2(1 + \xi)^2$, поэтому имеется запрещенная зона $[\omega_{1p}; \omega_0)$,

$$\omega_{1p}^2 = \omega_0^2(1 - \frac{\mathrm{n}^2(1 + \xi)^2}{\alpha(\lambda + 2\mu)}). \tag{3.232}$$

Дисперсионные кривые выглядят так же, как на рис. 3.6, где ω_{1p} определяется формулой (3.232).

Данный раздел может представлять интерес для сравнения с экспериментальными данными, поскольку в сыпучих средах нередко имеет место трансверсальная изотропия, связанная с силами (тяжести или магнитными), действующими при седиментации во время осаждения образца, а измеряемая волна распространяется часто вдоль или ортогонально этой оси. Однако данные результаты являются лишь первым шагом на этом пути, так как эта модель не учитывает диссипацию. Тем не менее представлялось интересным проверить, может ли распространение волн в когезивных сыпучих средах описываться уравнениями классической сплошной среды, или необходимы более сложные модели, например, с учетом поворотных степеней свободы. Измерение динамических свойств мелкодисперсных сред является также самостоятельной интересной задачей, поскольку позволяет найти характеристики порошка, чувствительные к его микроструктуре. Для подобных сред существует очень мало воспроизводимых экспериментов, так как под действием обычных нагрузок порошок легко перестраивается, демонстрируя каждый раз новые эффективные свойства. Интерпретация результатов экспериментов по распространению волн в мелкодисперсных порошках в терминах данной теории приведена в разделе 3.5.6.

3.2.5 Изотропный материал с трансверсально-изотропным тензором инерции тел-точек.

Рассмотрим случай, когда материал является изотропным по своим упругим свойствам, однако тензор инерции тел-точек трансверсально изотропен. Уравнения такого материала приведены ранее: (3.61), (3.62). Положим

$$\mathbf{I}_0 = I(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}) + I_n\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}, \tag{3.233}$$

где $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор оси симметрии тензора инерции в начальной конфигурации.

Обозначим соответствующие характеристические частоты $\omega_0 = 2\sqrt{\alpha/I}$ и $\omega_n = 2\sqrt{\alpha/I_n}$. Рассмотрим систему уравнений среды в перемещениях (3.61), (3.62) для случая нулевых внешних нагрузок. Легко видеть, что у данной системы имеются решения

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{3.234}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_0 e^{i\omega_0 t} + \theta_0^n \mathbf{n} e^{i\omega_n t}, \tag{3.235}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, при условии $\nabla \times \tilde{\boldsymbol{\theta}}_0 = \nabla \times \theta_0^n \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$.

Разыскивая решение уравнений среды (3.61), (3.62) для нулевых внешних нагрузок в виде гармонических волн $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, получаем

$$\begin{gathered} -(\lambda + 2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0 - (\mu + \alpha)k^2(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{u}_0 + 2i\alpha\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta}_0 = -\rho\omega^2\mathbf{u}_0, \\ 2i\alpha\mathbf{k}\times\mathbf{u}_0 = 4\alpha\boldsymbol{\theta}_0 - \omega^2\mathbf{I}_0\cdot\boldsymbol{\theta}_0. \end{gathered} \tag{3.236}$$

В случае, когда $\omega \neq \omega_0$, $\omega \neq \omega_n$, мы можем выразить $\boldsymbol{\theta}_0$ через $\mathbf{u}_0$ из второго

уравнения системы (3.236) и подставить в первое:

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{i}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{u}_0) = \frac{i}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}_0, \tag{3.237}$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1}(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}) + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{-1}\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}$$
$$= -\frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}) - \frac{\omega_n^2}{\omega^2 - \omega_n^2}\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}. \tag{3.238}$$

Таким образом, получаем

$$2i\alpha\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}_0 = (\mathbf{k} \times \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}) + \frac{\omega_n^2}{\omega^2 - \omega_n^2}\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}\right) \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}_0. \tag{3.239}$$

Тогда уравнение Кристоффеля (3.236) может быть сведено к

$$(\rho\omega^2\mathbf{E} - (\lambda + 2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k} - (\mu + \alpha)k^2(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) + \alpha k^2\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\omega_0^2(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}})}{\omega^2 - \omega_0^2} \times \hat{\mathbf{k}}$$
$$+ \alpha k^2\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\omega_n^2\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}}{\omega^2 - \omega_n^2} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{u}_0 = 0. \tag{3.240}$$

Упрощая, получаем

$$(\rho\omega^2\mathbf{E} - (\lambda + 2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k} - (\mu + \frac{\alpha\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2})k^2(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})$$
$$+ \alpha k^2(\frac{\omega_n^2}{\omega^2 - \omega_n^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2})\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{u}_0 = 0. \tag{3.241}$$

Легко видеть, что, аналогично случаю среды с перевязочным членом между объемными и поворотными деформациями, рассмотренному ранее (раздел 3.2.5), существует волна сдвига–вращения с дисперсионным соотношением

(3.111), таким же, как в изотропной среде (рис. 2.10). Действительно, пусть $\mathbf{u}_0 = u_0\hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})$. Тогда получаем дисперсионное соотношение (3.111).

Другая волна сдвига–вращения обладает собственным вектором, коллинеарным $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$. Действительно, при $\mathbf{u}_0 = u_0\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$ получаем из (3.241)

$$\rho\omega^2 - (\mu + \frac{\alpha\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2})k^2 - \alpha k^2(\frac{\omega_n^2}{\omega^2 - \omega_n^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2})|\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|^2 = 0. \qquad (3.242)$$

Это влечет

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2}\left(1 + \left(\frac{\omega_0^2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{\omega_n^2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})^2}{\omega^2 - \omega_n^2}\right)\frac{\alpha}{\mu + \alpha}\right)^{-1} \qquad (3.243)$$

Это дисперсионное соотношение также может быть записано в виде

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2}\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_n^2)}{(\omega^2 - \omega_{t+}^2)(\omega^2 - \omega_{t-}^2)} \qquad (3.244)$$

Введенные здесь характеристические частоты $\omega_{t\pm}$ удовлетворяют соотношениям

$$\omega_{t\pm}^2 = \frac{1}{2}\Big(\omega_0^2(1 - \xi_c) + \omega_n^2(1 - \xi_s) \pm \sqrt{(\omega_0^2(1 - \xi_c) + \omega_n^2(1 - \xi_s))^2 - \omega_0^2\omega_n^2(1 - \xi)}\Big), \qquad (3.245)$$

где $0 < \xi = \alpha/(\mu+\alpha) < 1$, $\xi_s = \xi(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}})^2$, $\xi_c = \xi(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2$, $\xi_s+\xi_c = \xi$. При помощи алгебраических выкладок можно показать, что оба корня положительны, и

$$\max(\omega_0^2(1 - \xi_c), \omega_n^2(1 - \xi_s)) < \omega_{t+}^2 < \omega_0^2(1 - \xi_c) + \omega_n^2(1 - \xi_s), \qquad (3.246)$$

$$0 < \omega_{t-}^2 < \min(\omega_0^2(1 - \xi_c), \omega_n^2(1 - \xi_s)) \qquad (3.247)$$

Типичный график дисперсионного соотношения рассматриваемой волны при-

веден на рис. 3.2.5.

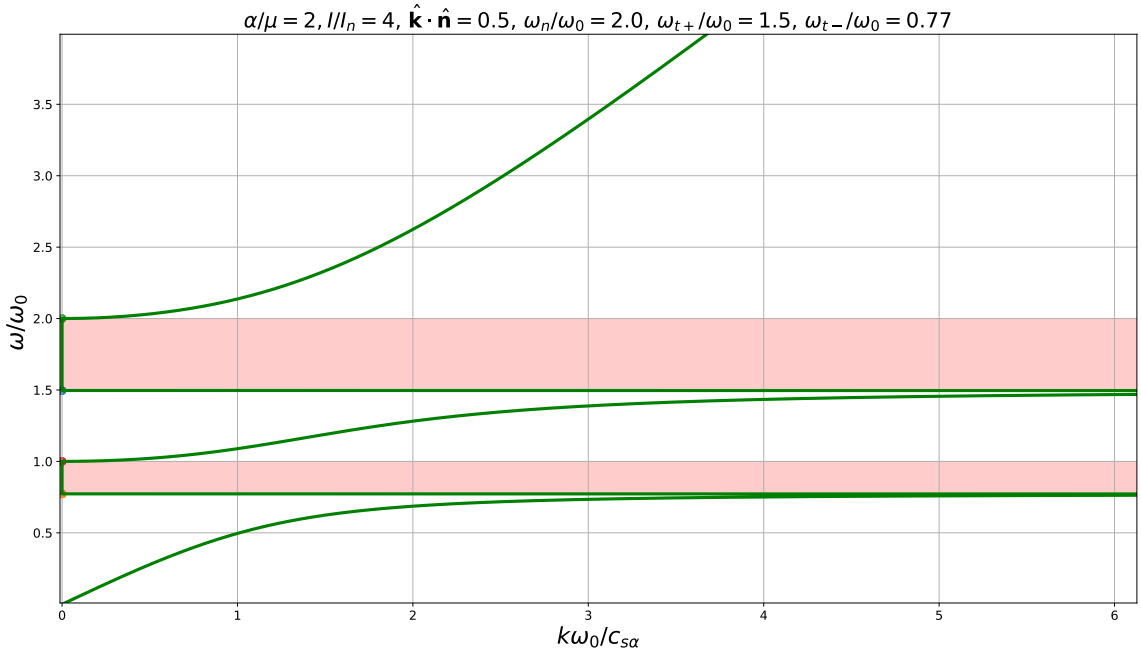

Рис. 3.9: Волна сдвига–вращения в редуцированной среде Коссера с изотропными упругими свойствами и осесимметричным тензором инерции.

Итак, для случая изотропных упругих тензоров и осесимметричного тензора инерции в однородной редуцированной линейной упругой среде Коссера волна растяжения – сжатия совпадает с классической. Существует две волны сдвига – вращения. Для одной из них трансляционное перемещение $\mathbf{u}$ направлено по $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})$ (проекции оси тела-точки на плоскость, ортогональную волновому вектору). Для данной волны существует одна запрещенная зона, и дисперсионное соотношение совпадает с изотропным случаем с точностью до замены момента инерции для шарового случая на экваториальный момент инерции. Вторая волна сдвига – вращения соответствует перемещению, направленному по $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$ (ортогональному как волновому вектору, так и оси тела-точки). У этой волны существует две запрещенные зоны и две горизонтальные асимптоты.

3.2.6 Плоские волны в редуцированной упругой псевдосреде Коссера.

3.2.6.1 Изотропный случай.

Будем искать решение уравнений в перемещениях (3.86) в виде плоских волн: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}$. Получаем

$$-(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} + \mu\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u}) = -\rho\omega^2\mathbf{u} + I\omega^2\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u})/4. \qquad (3.248)$$

Данное уравнение переписывается в виде

$$(\rho\omega^2 - (\lambda+2\mu)k^2)\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{u} + (\rho\omega^2 - (\mu - I\omega^2/4)k^2)(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}. \qquad (3.249)$$

Плоская волна растяжения–сжатия в изотропном случае отделяется, поворотные степени свободы не оказывают на нее влияния, как и в модели без кинематической связи. Действительно, если $\mathbf{u}_0 = u_0\hat{\mathbf{k}}$, получаем классическое дисперсионное соотношение для продольной волны:

$$\omega = c_P k, \quad c_P = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}. \qquad (3.250)$$

Обозначим $\omega_{*c}^2 = \frac{4\mu}{I}$. Как и ранее, пусть $c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$. Дисперсионное соотношение для волны сдвига–вращения ($\mathbf{u}_0\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$), задаваемое (3.249), выглядит следующим образом:

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu - I\omega^2/4} = \frac{\omega^2}{c_s^2(1-\omega^2/\omega_{*c}^2)} = \frac{\omega^2}{c_s^2}\frac{\omega_{*c}^2}{\omega_{*c}^2-\omega^2}. \qquad (3.251)$$

Видим, что на низких частотах данное дисперсионное соотношение выглядит аналогично классическому, на более высоких частотах дисперсия становится

заметной. Дисперсионная кривая имеет граничную частоту $\omega = \omega_{*c}$, к которой она приближается асимптотически. Выше данной частоты волна сдвига не распространяется (см. рис. 3.10).

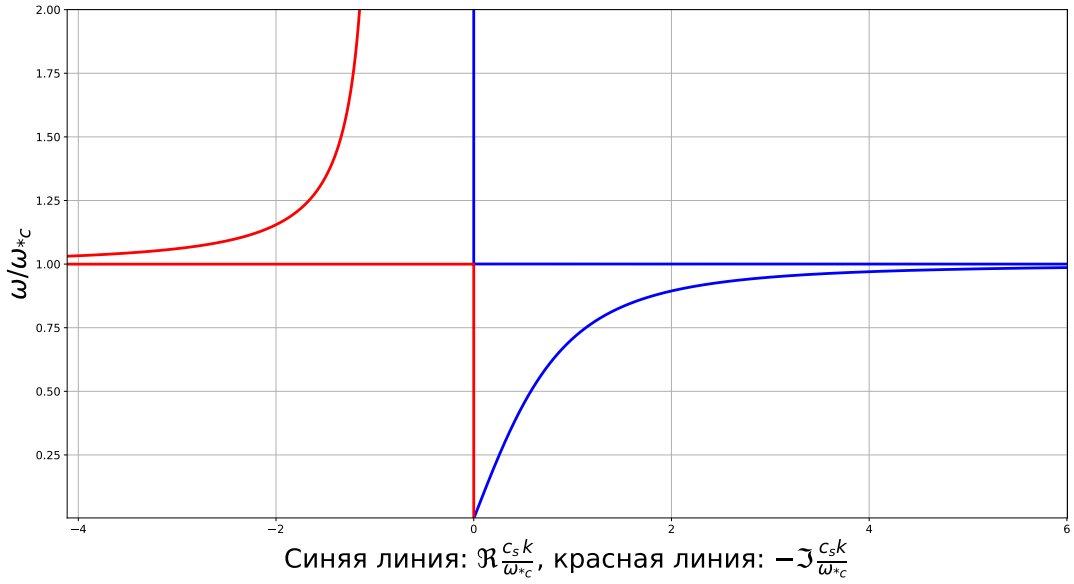

Рис. 3.10: График дисперсионных кривых для плоских волн сдвига–вращения в трехмерной бесконечной упругой изотропной линейной редуцированной среде Коссера со стесненным вращением. Бесконечная полоса непропускания выше ω_{*c}.

Данная дисперсионная кривая совпадает с нижней ветвью дисперсионной кривой для изотропной линейной упругой редуцированной среды Коссера, чья граничная частота $2\sqrt{\frac{\alpha}{I(1+\alpha/\mu)}}$ стремится при $\alpha/\mu \to \infty$ к $2\sqrt{\frac{\mu}{I}}$, граничной частоте для изотропной редуцированной упругой псевдосреды Коссера. Это согласуется с тем, что жесткая кинематическая связь может быть обеспечена, если устремить к бесконечности упругую константу α, отвечающую за сопротивление повороту тела-точки относительно окрестности, полагая остальные упругие константы, в том числе модуль сдвига, конечными, равно как и момент инерции тела-точки I. Тогда частота отсечки ω_0 стремится к бесконечности, в то время как граничная частота ω_{*c} остается конечной.

Это означает, что в среде Коссера со стесненным вращением невозможны собственные колебания, отвечающие независимым поворотам частиц относительно окрестности, однако их повороты всегда связаны со сдвигом, который из-за наличия поворотных степеней свободы отличается от сдвига в классической среде.

3.2.6.2 Случай с простейшей трансверсально-изотропной перевязкой между объемными и сдвиговыми деформациями, ось изотропии n.

Разыскивая решение уравнений в перемещениях (3.89) для псевдосреды Коссера с трансверсально-изотропным тензором упругости в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, получаем уравнение Кристоффеля

$$-(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}+\mu\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u})-N_{\mathrm{c}}\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{u}\cdot\cdot\,\mathbf{n}\mathbf{n}-N_{\mathrm{c}}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}\mathbf{n}=-\omega^2\rho\mathbf{u}-I\omega^2k^2\mathbf{u}/4. \tag{3.252}$$

Обозначим $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}-\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}$, где $\tilde{\mathbf{n}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{n}$. Тогда уравнение Кристоффеля может быть записано в виде

$$[(\rho\omega^2-(\lambda+2\mu)k^2-2N_{\mathrm{c}}k^2(\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n})^2)\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}+(\rho\omega^2-\mu k^2+\frac{I}{4}\omega^2k^2)(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) - N_{\mathrm{c}}k^2(\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n})(\tilde{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{n}})]\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0}. \tag{3.253}$$

Благодаря особому типу перекрестного члена в энергии существует волна чистого сдвига–вращения, такая же, как в изотропном случае, если $\mathbf{u} \,||\, (\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{k}})$. Последний и первый члены в выражении (3.253) в этом случае исчезают, и в данном случае дисперсионное соотношение имеет ту же форму (3.251), что и в изотропном случае. Тем не менее, волна растяжения–сжатия, вообще говоря, не существует, она перевязана с волной сдвига, за исключением особых

направлений распространения волны.

Особые направления распространения волны. Рассмотрим волны, распространяющиеся вдоль или ортогонально оси изотропии $\mathbf{n}$. В обоих случаях последний член в скобках в (3.253) исчезает, поскольку либо $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ при $\hat{\mathbf{k}}||\mathbf{n}$, либо $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n} = 0$. Уравнение Кристоффеля для волны растяжения–сжатия и волны сдвига–вращения распадается на два независимых, как и в изотропном случае. Получаются аналогичные дисперсионные соотношения, с тем единственным отличием, что для $\mathbf{k}||\mathbf{n}$ скорость распространения волны для волны растяжения–сжатия зависит от константы анизотропии, и дисперсионное соотношение задается выражением

$$\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu + 2N_{\mathrm{c}})k^2 = 0. \tag{3.254}$$

Таким образом, при $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \pm 1$ и при $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ дисперсионное соотношение для волны сдвига–вращения то же, что и в изотропном случае, продольная волна недисперсивна, ее (постоянная) скорость зависит от того, ортогональна волна оси изотропии или параллельна:

$$c_{pN} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu + 2N_{\mathrm{c}}}{\rho}} \quad \text{для} \quad \hat{\mathbf{k}}||\hat{\mathbf{n}}, \qquad c_P^2 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{для} \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \tag{3.255}$$

Смешанная волна. Если ни $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}} \neq \pm 1$, ни $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}} \neq 0$, продольная волна и волна сдвига со смещением $\mathbf{u}$, не параллельным $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{k}}$, не существует. Волны становятся смешанными. Отделив волну сдвига, аналогичную изотропному

случаю, получаем для них из (3.253) дисперсионное соотношение:

$$\omega^4(1+\frac{c_s^2k^2}{\omega_1^2})-\omega^2k^2(c_p^2(1+\frac{c_s^2k^2}{\omega_1^2})+c_s^2)+k^4(c_p^2c_s^2-c_n^4(\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{k}})^2|\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{k}}|^2)=0, \quad (3.256)$$

где

$$\begin{gathered} c_p^2=(\lambda+2\mu+2N_{\mathrm{c}}(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2)/\rho \stackrel{\text{def}}{=} c_P^2+2c_n^2(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2, \\ c_n^2=N_{\mathrm{c}}/\rho, \qquad c_P^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}. \end{gathered} \quad (3.257)$$

Это может быть записано в виде

$$\omega^2=\frac{k^2}{2}\left(c_p^2+\frac{c_s^2}{1+\frac{c_s^2k^2}{\omega_0^2}}\pm\sqrt{\left(c_p^2-\frac{c_s^2}{1+\frac{c_s^2k^2}{\omega_0^2}}\right)^2+\frac{4c_n^4(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|^2}{1+\frac{c_s^2k^2}{\omega_0^2}}}\right)\stackrel{\text{def}}{=}c_f^2(\omega)k^2. \quad (3.258)$$

Можно найти собственные векторы смешанной волны из данного соотношения и уравнения (3.253). Опуская вычисления, приведем результат:

$$\mathbf{u}_0=u_0(\hat{\mathbf{k}}+\tilde{\mathbf{n}}(c_f^2(\omega)\frac{\rho}{N_{\mathrm{c}}}-(\frac{\lambda+2\mu}{N_{\mathrm{c}}}+2(\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n})^2))). \quad (3.259)$$

Пример дисперсионных кривых приведен на рис. 3.11. Обе кривые обладают дисперсией, однако на графике дисперсия верхней ветви практически незаметна, она много меньше дисперсии нижней.

Ветвь со знаком «+» уравнения (3.258) при больших k стремится к c_pk, а для малых k

$$\omega\approx((c_p^2+c_s^2+((c_p^2-c_s^2)^2+4c_n^4(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2|\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}|^2)^{1/2})/2)^{1/2}\,k. \quad (3.260)$$

Эти две скорости достаточно близки друг к другу, если выполняется требование положительной определенности для энергии деформации. Например, для параметров, соответствующих графику 3.11, выбирая $c_s=1$, получим

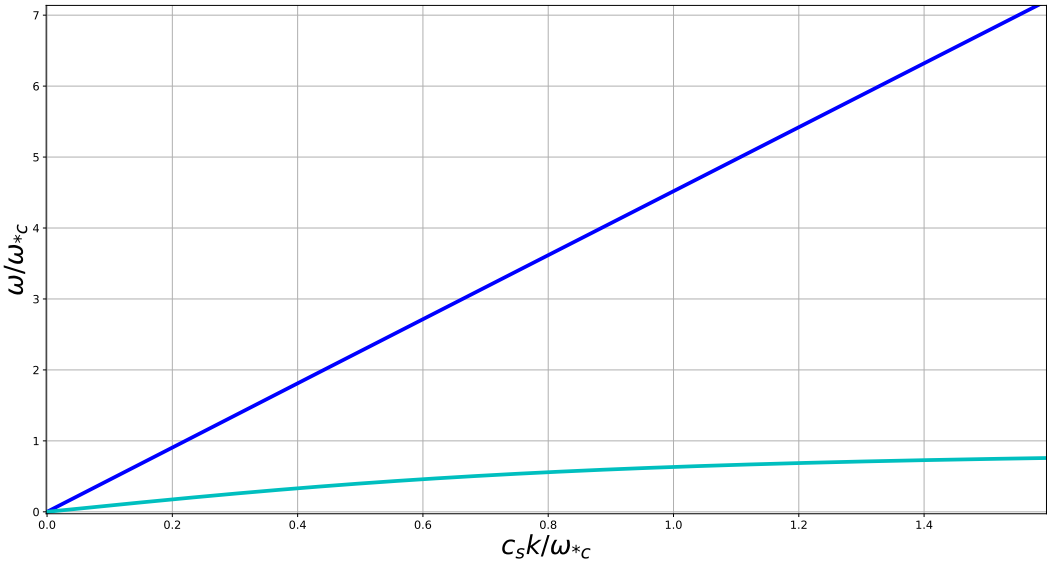

Рис. 3.11: Дисперсионные кривые для упругой анизотропной линейной среды Коссера со стесненным вращением, $c_P = 2.01, c_N = 2, \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n} = 0.707$. Обе кривые обладают дисперсией, однако дисперсия нижней ветви много больше дисперсии верхней.

скорость на низких частотах, приблизительно равную 2.92, а на больших частотах приблизительно 2.83.

Нижняя (со знаком «−») ветвь уравнения (3.258) имеет горизонтальную асимптоту $\omega = \omega_{*a} < \omega_0$, аналогично изотропному случаю, где

$$\omega_{*a}^2 = (1 - \frac{c_n^4}{c_p^2 c_s^2}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 |\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|^2)\omega_0^2 \tag{3.261}$$

(так, $\omega_{*a} \approx 0.709\omega_0$ для параметров, использованных при построении графика на рис. 3.11), и обладает сильной дисперсией. На низких частотах она ведет себя как

$$\omega \approx ((c_p^2 + c_s^2 - ((c_p^2 - c_s^2)^2 + 4c_n^4(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 |\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|^2)^{1/2})/2)^{1/2}\, k, \tag{3.262}$$

и эта скорость меньше c_s.

Выводы для упругих моделей со стесненным вращением. Видим, что для линейной упругой редуцированной среды Коссера со стесненным вращением (изотропной и трансверсально-изотропной с перевязкой между объемными и сдвиговыми деформациями частного вида)

- существует бесконечная полоса непропускания выше граничной частоты ω_{*c} для волн сдвига в обеих моделях и выше некоторой более низкой частоты ω_{*a}, зависящей также от константы анизотропии и направления распространения волны, для более медленной ветви смешанной волны в рассмотренном анизотропном случае;

- волна растяжения–сжатия в изотропном случае не отличается от классической, она недисперсивна;

- верхняя ветвь смешанной волны в рассмотренном анизотропном случае слабо дисперсивна и не имеет полосы непропускания; ее характеристики зависят, в частности, от направления распространения волны и константы анизотропии;

- распространение волн в изотропной упругой редуцированной псевдосреде Коссера соответствует распространению волн в изотропной упругой редуцированной среде Коссера в предельном случае $\alpha/\mu \to \infty$; для рассмотренного осесимметричного случая такого соответствия нет, поскольку перекрестный член в упругой энергии для псевдосреды перевязывает не те виды деформаций, что для среды без стесненного вращения, рассмотренной в 3.2.5, и модель для псевдосреды не может быть получена из нее при помощи предельного перехода.

3.3 Волновые процессы и устойчивость в упругой редуцированной среде Коссера вблизи нелинейного напряженного состояния.

3.3.1 Изотропный материал вблизи состояния всестороннего растяжения – сжатия.

Уравнения малых колебаний изотропной редуцированной среды Коссера вблизи сферически симметричного напряженного состояния были получены выше (3.33). Они по структуре совпадают с уравнениями линейной упругой редуцированной среды Коссера:

$$(\lambda' + 2\mu')\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - (\mu' + \alpha')\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + 2\alpha'\nabla\times\boldsymbol{\theta} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \tag{3.263}$$

$$2\alpha'\nabla\times\mathbf{u} - 4\alpha'\boldsymbol{\theta} = \rho I\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.264}$$

с эффективными упругими константами λ', μ', α', определяемыми соотношениями (3.34). Данные уравнения описывают распространение плоских волн в случае, если

$$\lambda' + 2\mu' = \lambda_s + 2\mu_s > 0, \quad \mu' = \mu_s + T/(2A) > 0, \quad \alpha' = \alpha_s - T/(2A) > 0 \tag{3.265}$$

(для полной среды Коссера эти требования являются частью условий сильной эллиптичности [148]). Параметр деформации $A > 1$ соответствует растяжению, $A < 1$ — сжатию. Дисперсионные кривые совпадают с соответствующими кривыми изотропной линейной редуцированной упругой среды Коссера: волна растяжения – сжатия является классической, а график дисперсионного

соотношения волны сдвига – вращения (рис. 2.10) с дисперсионным соотношением (3.112) обладает запрещенной зоной $(\omega_*;\omega_0)$, где

$$\omega_*^2=\frac{\mu'}{\mu'+\alpha'}\omega_0^2=\frac{4(\alpha_s-A\tau/2)(\mu_s+A\tau/2)}{I(\mu_s+\alpha_s)},\quad \omega_0^2=\frac{4(\alpha_s-A\tau/2)}{I}. \quad (3.266)$$

Таким образом, вблизи изотропного нелинейного напряженного состояния изотропная редуцированная упругая среда Коссера представляет собой единожды отрицательный акустический метаматериал, чья запрещенная зона меняется в зависимости от приложенного напряжения.

Дисперсионные кривые в зоне устойчивости — такие же, как для линейной изотропной редуцированной среды Коссера (рис. 2.10), однако параметры зависят от предварительного напряженного состояния. Нижняя ветвь волны сдвига – вращения начинается при $k=0,\omega=0$, ее скорость на низких частотах равна c_s, $c_s^2=\mu'/(A\rho_s)$. Данная ветвь имеет горизонтальную асимптоту $\omega=\omega_*$, Верхняя ветвь волны сдвига – вращения начинается в ω_0. Ее скорость на высоких частотах стремится к $c_{S\alpha}$, где $c_{S\alpha}^2=(\mu_s+\alpha_s)/(A\rho_s)$. Вместо продольной поворотной волны, присутствующей в полной среде Коссера, имеем вырожденный случай — нераспространяющиеся поворотные колебания при $\omega=\omega_0$.

Если у нас имеется гармонический точечный источник с частотой, принадлежащей интервалу $[\omega_*;\omega_0)$, часть волны оказывается локализованной рядом с источником, аналогично тому, как это происходит вблизи натурального состояния (см. раздел 3.2.2.2). На частоте ω_0 возникает резонанс. Явления локализации также возникают при наличии малых неоднородностей в инерционных характеристиках. Изменяя предварительное напряженное состояние, мы можем изменять характер решения.

Физически линейная среда. Для физически линейной среды, то есть нелинейной среды с квадратичной энергией деформации с упругими константами $\lambda_s, \mu_s, \alpha_s$ имеем из определяющего уравнения (3.7)

$$\tau = (3\lambda_s + 2\mu_s)\frac{A-1}{A^2}, \qquad A\tau/2 = (3\lambda_s/2 + \mu_s)(1 - \frac{1}{A}) \in (-\infty; 3\lambda_s/2 + \mu_s). \tag{3.267}$$

Максимальное значение ω_*^2 зависит от эффективных параметров. Если

$$\alpha_s < 3(\lambda_s + \mu_s), \quad \text{тогда} \quad \omega_{*\,\max}^2 = \frac{\mu_s + \alpha_s}{I}, \tag{3.268}$$

и оно достигается при

$$A\tau = \alpha_s - \mu_s \quad \Longleftrightarrow \quad A = \frac{3\lambda_s + 2\mu_s}{3\lambda_s + 3\mu_s - \alpha_s}, \quad \tau = \frac{(\alpha_s - \mu_s)(3\lambda_s + 3\mu_s - \alpha_s)}{3\lambda_s + 2\mu_s}. \tag{3.269}$$

Это — сжатие, если $\alpha_s > \mu_s$, растяжение при $\alpha_s < \mu_s$, и натуральное состояние при $\alpha_s = \mu_s$.

В противоположном случае при $\alpha_s > 3(\lambda_s + \mu_s)$, поскольку $A\tau$ может принимать все значения из интервала $(-\infty; 3\lambda_s + 2\mu_s)$, мы должны проверить значения на концах интервала, и получаем, что максимальное значение ω_*^2 соответствует $A\tau = 3\lambda_s + 2\mu_s$ (бесконечное растяжение, $A \to \infty$). Если

$$\alpha_s \geqslant 3(\lambda_s + \mu_s), \quad \text{то} \quad \omega_{*\,\max}^2 = \frac{4(\alpha_s - (\mu_s + 3\lambda_s/2))(2\mu_s + 3\lambda_s/2)}{4(\mu_s + \alpha_s)}. \tag{3.270}$$

При $\alpha_s < 3\lambda_s/2 + \mu_s$ частоты ω_* и ω_0 могут достигать 0 (что означает неустойчивость). Это происходит одновременно и соответствует изотропному растяжению с параметрами

$$A = \frac{3\lambda_s/2 + \mu_s}{3\lambda_s/2 + \mu_s - \alpha_s}, \quad \tau = 2\alpha_s\left(1 - \frac{\alpha_s}{3\lambda_s/2 + \mu_s}\right). \tag{3.271}$$

Когда давление возрастает, ω_0 тоже возрастает. Если $A\tau \to -2\mu_s + 0$, то $\omega_* \to +0$, и $\omega_0^2 \to 4(\mu_s+\alpha_s)/I$. Таким образом, ширина полосы непропускания для данной модели всегда меньше, чем $2\sqrt{\frac{\mu_s+\alpha_s}{I}}$.

Если $\alpha_s > 3\lambda_s/2 + \mu_s$, то при растяжении $\omega_*^2 > 0$, и $\omega_0^2 > 0$ в любом процессе деформирования. Когда растяжение возрастает, ω_0 убывает. Для этих параметров минимум ω_0 будет достигнут при бесконечно большом растяжении:

$$A \to \infty, \quad A\tau \to 3\lambda_s + 2\mu_s, \quad \tau \to \mu_s + \frac{3}{2}\lambda_s, \quad \omega_0^2 \to \frac{4(\alpha_s - (\mu_s + 3\lambda_s/2))}{I}. \tag{3.272}$$

Под действием гидростатического давления, так же как и в случае $\alpha_s < 3\lambda_s/2 + \mu_s$, ω_* убывает до 0 и ω_0 возрастает до $2\sqrt{\frac{\mu_s+\alpha_s}{I}}$ при

$$A\tau \to -2\mu_s + 0, \quad A \to \frac{3\lambda_s + 2\mu_s}{3\lambda_s + 4\mu_s} + 0, \quad \tau \to -\frac{2\mu_s(3\lambda_s + 4\mu_s)}{3\lambda_s + 2\mu_s} + 0. \tag{3.273}$$

Таким образом, наибольшая возможная полоса непропускания для данной области параметров — это $(0; 2\sqrt{\frac{\mu_s+\alpha_s}{I}})$.

3.3.1.1 Неустойчивость в однородной редуцированной среде Коссера в сферически симметричном однородном напряженном состоянии.

Среда становится неустойчивой, когда она не сопротивляется деформациям $\nabla \mathbf{u}^S$ и $\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2$. Это соответствует тому, что квадрат скорости сдвига на низких частотах μ'/ρ либо квадрат частоты отсечки $\omega_0^2 = 4\alpha'/(\rho I)$ становятся меньше 0. Если μ' или α' отрицательны, вместо плоских волн мы имеем экспоненциально растущие решения. В рамках данной работы мы не можем предсказать процессы, имеющие место при достижении локальной неустой-

чивости (течение материала, перестройка структуры, разрушение), но, обладая знанием об энергии деформации, мы можем предсказать существование и условие возникновения неустойчивости. При $\mu' < 0$ однородная среда становится неустойчивой в каждой точке по отношению к низкочастотным сдвиговым возмущениям, то есть ведет себя как жидкость. Это эквивалентно условию $2\mu_s < -T/A$, которое в силу выражения для изотропного тензора упругости (3.31) и определяющего уравнения (3.7) выглядит следующим образом:

$$(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2)^S \cdot\cdot A\left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}^2}\right]_s \cdot\cdot (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2)^S < -\operatorname{tr}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}}\right]_s /3. \tag{3.274}$$

При $\mu_s > 0$ (например, когда энергия среды выпукла по тензорам деформации), это означает ожижение материала под действием некоторого давления. При достижении этой точки среда может вести себя различным образом, например, существенно изменить свою структуру и снова обрести сопротивление сдвигу, или не сопротивляться течению. Классические нелинейные упругие среды с выпуклой энергией также могут быть ожижены под действием высокого давления [243]. Данное поведение описано в классических экспериментах Бриджмена [276]: под действием высокого гидростатического давления некоторые образцы скачком меняют свой объем, а другие — при отсутствии скачка объема существенно меняют сопротивление. В последнем случае, очевидно, структура материала меняется благодаря сдвигу.

При $\alpha' < 0$ частота отсечки ω_0 становится мнимой, и, следовательно, поворотные возмущения с $\omega \geqslant \omega_0$ приведут к неустойчивости среды (см. дисперсионное соотношение (3.112)). Это эквивалентно условию $2\alpha_s < T/A$, которое в силу выражения (3.31) и определяющего уравнения (3.7) можно

записать в виде

$$(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2)^A \cdot\cdot A\left[\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial A^2}\right]_s \cdot\cdot (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2)^A < \mathrm{tr}\,\left[\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{A}}\right]_s /3. \tag{3.275}$$

Данный механизм (и возможность потерять сильную эллиптичность под действием всестороннего растяжения для изотропного упругого материала с выпуклой энергией деформации) отсутствует в классической нелинейной упругой теории. Однако, из эксперимента известно, что пористые материалы, сделанные из металлических порошков при помощи обработки температурой и давлением, достигают состояния течения под действием изотропного растяжения [288].

Диаграмма Роско [39, 315], описывающая поведение грунтов и твердообразных сыпучих сред — еще один косвенный аргумент в пользу этого предсказания. Оба предела текучести на диаграмме Роско, достигаемые при растяжении и при сжатии, не соответствуют в точности изотропному напряженному состоянию, кроме случаев, когда они измерены при помощи трехосного теста, однако это состояние близко к изотропному.

Неустойчивость в физически линейной среде. Заметим, что даже для физически линейной среды, где $\mathcal{U}$ является квадратичной формой $\mathbf{A}-\mathbf{E}$, а λ_s, μ_s и α_s — положительные константы, мы также будем наблюдать явление неустойчивости. В натуральном состоянии $\mathbf{A}=\mathbf{E}$. Не обсуждая здесь применимость данной упрощенной модели к реальным материалам для очень больших деформаций, покажем, что в ней существуют упомянутые выше механизмы достижения неустойчивости. Действительно, в данном случае благодаря изотропии имеем (см. (3.16))

$$\mathbf{T} = (\lambda_s(\mathrm{tr}(\mathbf{A}-\mathbf{E}))\mathbf{E} + 2\mu_s(\mathbf{A}-\mathbf{E})^S + 2\alpha_s(\mathbf{A}-\mathbf{E})^A)\cdot\mathbf{P}^\top, \tag{3.276}$$

так что для однородного сферически симметричного напряженного состояния $T = (3\lambda_s + 2\mu_s)(A-1)$. Условие **неустойчивости при гидростатическом сжатии** $\mu_s < -T/(2A)$

$$\mu_s < -(3\lambda_s+2\mu_s)\frac{A-1}{2A} \quad \Longleftrightarrow \quad 1-A > \frac{2\mu_s}{3\lambda_s+4\mu_s} \quad \Longleftrightarrow \quad A < \frac{3\lambda_s+2\mu_s}{3\lambda_s+4\mu_s}$$
$$\Longleftrightarrow \quad T < -2\mu_s\frac{3\lambda_s+2\mu_s}{3\lambda_s+4\mu_s} = -\mu_s(1+\frac{1}{1+\frac{4\mu_s}{3\lambda_s}}). \quad (3.277)$$

В классической работе [243] условие неустойчивости под действием гидростатического давления для классической физически линейной и геометрически нелинейной упругой среды таково:

$$A^2 < \frac{3\lambda_s+2\mu_s}{3\lambda_s+4\mu_s}. \quad (3.278)$$

Различие (A в нашей модели и A^2 в модели Тупина – Бернштейна) связано с тем, что энергия деформации в работе [243] является квадратичной формой $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^\top - \mathbf{E}$, а не $\mathbf{A}-\mathbf{E}$, как в данном исследовании. Мы рассматриваем физически линейную модель в качестве примера. Она дает для деформации $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = A\mathbf{E}$ (см. (3.8), (3.16))

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\rho}{\rho_0}A\mathbf{T} = \mathbf{T}/A^2 = \frac{T}{A^2}\mathbf{E} = (3\lambda_s+2\mu_s)\frac{A-1}{A^2}\mathbf{E}, \quad (3.279)$$

и, поскольку $\tau(A)$ монотонно возрастает при $A<1$ для данной модели, условие неустойчивости при гидростатическом сжатии принимает вид

$$\tau < -2\mu_s\frac{3\lambda_s+4\mu_s}{3\lambda_s+2\mu_s} = -2\mu_s(1+\frac{1}{1+\frac{3\lambda_s}{2\mu_s}}). \quad (3.280)$$

Это критическое значение напряжения находится в интервале $(-4\mu_s; -2\mu_s)$.

Мы имеем **неустойчивость среды при изотропном растяжении**, если $\alpha_s < T/(2A)$, т.е.

$$\alpha_s < (3\lambda_s + 2\mu_s)\frac{A-1}{2A} \quad \Longleftrightarrow$$
$$A > 1 + \frac{2\alpha_s}{3\lambda_s + 2\mu_s - 2\alpha_s}, \quad \text{где} \quad \alpha_s < \mu_s + 3\lambda_s/2. \quad (3.281)$$

(При $\alpha_s > \mu_s + 3\lambda_s/2$ неустойчивость в случае изотропного растяжения в данной модели не возникнет.)

Это соответствует условию

$$T > \frac{2\alpha_s(3\lambda_s + 2\mu_s)}{3\lambda_s + 2\mu_s - 2\alpha_s} = 2\alpha_s(1 - \frac{2\alpha_s}{3\lambda_s + 2\mu_s - 2\alpha_s}) \quad (3.282)$$

В данной модели имеется немонотонная зависимость напряжения от деформации $\tau(A)$. Напряжение достигает максимального значения при $A = 2$, при этом $T = 3\lambda_s + 2\mu_s$, $\tau = (3\lambda_s + 2\mu_s)/4$. Критическое значение деформации A меньше 2, если $\alpha_s < \mu_s/2 + 3\lambda_s/4$. В данном случае неустойчивость среды достигается, когда τ превышает критическое значение $\tau_{\rm cr}$

$$\tau \geqslant \tau_{\rm cr} = \frac{2\alpha_s(3\lambda_s + 2\mu_s - 2\alpha_s)}{3\lambda_s + 2\mu_s}. \quad (3.283)$$

Если $\mu_s/2 + 3\lambda_s/4 \leqslant \alpha_s < \mu_s + 3\lambda_s/2$, критическое значение A соответствует падающему участку $\tau(A)$. Неустойчивость достигается при

$$A \geqslant 1 + \frac{2\alpha_s}{3\lambda_s + 2\mu_s - 2\alpha_s} \geqslant 2, \qquad \tau \leqslant \tau_{\rm cr} = \frac{2\alpha_s(3\lambda_s + 2\mu_s - 2\alpha_s)}{3\lambda_s + 2\mu_s}. \quad (3.284)$$

Если $\alpha_s > \mu_s + 3\lambda_s/2$, неустойчивость для данного вида среды при изотропном растяжении не будет достигнута.

Автором было показано, что для случая полной нелинейной изотропной

упругой среды Коссера в изотропном напряженном состоянии имеют место те же механизмы неустойчивости, что и для редуцированной [107]. Примечательно, что сопротивление полной среды Коссера градиенту поворота не изменяет условия достижения неустойчивости.

3.3.2 Изотропный материал вблизи трансверсально-изотропного напряженного состояния.

Уравнения движения материала вблизи такого положения равновесия получены в разделе 3.1.5. Будем искать их решение в виде плоских волн по отношению к отсчетной конфигурации: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$. После вычислений получаем уравнения Кристоффеля: закон баланса сил

$$\begin{aligned}\rho_0\omega^2\mathbf{u}_0 - (\lambda+2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0 - (\mu+\alpha)k^2(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{u}_0 \\ + i((2A\alpha - T + a\alpha)\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta}_0 + (a\mu-\tau)\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\,\mathbf{n}\times\boldsymbol{\theta}_0 \\ + i(a\alpha\,\mathbf{n}\times\mathbf{k}\,\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}_0 - a\mu\,\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\times\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{0}. \quad (3.285)\end{aligned}$$

и баланс моментов

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_0\cdot\big((2A(T-2A\alpha)+I\omega^2)\mathbf{E} + (A\tau + aT + a\tau - 4Aa\alpha - a^2(\mu+\alpha))(\mathbf{E}-\mathbf{n}\mathbf{n})\big) \\ + i((2A\alpha + a\alpha - T)\mathbf{k}\times\mathbf{u}_0 + (a\mu-\tau)\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\,\mathbf{n}\times\mathbf{u}_0 \\ + a\mu\,\mathbf{n}\times\mathbf{k}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_0 - a\alpha\,\mathbf{n}(\mathbf{n}\times\mathbf{k})\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (3.286)\end{aligned}$$

Обозначим

$$\vartheta = \frac{A\tau + aT + a\tau + 4Aa\alpha - a^2(\mu+\alpha)}{2A(2A\alpha - T)}, \quad (3.287)$$

$$F(\omega) = \omega^2/\Omega_0 - 1, \quad \Omega_0 = \frac{2A(2A\alpha - T)}{I}. \quad (3.288)$$

Случай $\omega^2 = \Omega_0$ (т.е. $F(\omega) = 0$) и $\omega^2 = \Omega_\vartheta$, где $\Omega_\vartheta = \Omega_0(1+\vartheta)$ (заметим, что $F(\sqrt{\Omega_\vartheta}) + \vartheta = 0$) должны быть рассмотрены особо. В первом случае имеем решение $\boldsymbol{\theta} = \theta_0 \mathbf{n} e^{i\sqrt{\Omega_0}t}$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, так же как и другие волны, где $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}$ является произвольной константой (эта проекция не входит ни в (3.285), ни в (3.286)). Если $\Omega_0 > 0$, получаем гармонические поворотные колебания, в противном случае имеем решение, возрастающее во времени для $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}$ (неустойчивые повороты). В втором случае $\omega = \sqrt{\vartheta}$ имеем аналогичное решение, хотя для других (ортогональных $\mathbf{n}$) компонент $\boldsymbol{\theta}$, и с другой частотой $\sqrt{\Omega_\vartheta}$. Далее рассмотрим решение, когда обе эти частоты действительны.

Заметим, что здесь мы рассматриваем плоскую волну в терминах отсчетной конфигурации. Если желательно использовать координаты предварительно напряженного состояния или актуальной конфигурации, разыскивая плоскую волну в форме $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}\} = \{\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}_0\} e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_s)}$, тогда, благодаря частному виду предварительно напряженного состояния, дисперсионное соотношение будет таким же для случая $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ и таким же с точностью до деления k на $1 + \xi$ для случая $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 1$.

3.3.2.1 Волны, распространяющиеся ортогонально оси симметрии.

Рассмотрим $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$. Тогда уравнение (3.285) дает

$$\rho_0\omega^2\mathbf{u}_0 - (\lambda + 2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0 - (\mu+\alpha)k^2(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{u}_0$$
$$+ i((2A\alpha - T + a\alpha)\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta}_0 + a\alpha\,\mathbf{n}\times\mathbf{k}\,\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}_0 - a\mu\,\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\times\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{0}, \quad (3.289)$$

а из уравнения (3.286) получаем

$$\boldsymbol{\theta}_0 \cdot ((2A(T-2A\alpha)+I\omega^2)\mathbf{E} + (A\tau + aT + a\tau - 4Aa\alpha - a^2(\mu+\alpha))(\mathbf{E}-\mathbf{nn}) + i((2A\alpha + a\alpha - T)\mathbf{k}\times\mathbf{u}_0 + a\mu\,\mathbf{n}\times\mathbf{k}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_0 - a\alpha\,\mathbf{n}(\mathbf{n}\times\mathbf{k})\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (3.290)$$

Если $F(\omega) \neq 0$ и $F(\omega) + \vartheta \neq 0$, можно выразить $\boldsymbol{\theta}_0$ через $\mathbf{u}$ из этого уравнения и подставить его в (3.289). Обозначим $\mathbf{j} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{n}$ (тогда $\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{j}, \mathbf{n}$ образуют ортонормальный базис). Получаем

$$0 = \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \cdot (\rho_0\omega^2 - k^2(\lambda+2\mu)) + \mathbf{jj}(\rho_0\omega^2 - k^2(\mu+\alpha+\frac{2A\alpha - T}{2AF(\omega)})) + \mathbf{nn}(\rho_0\omega^2 - k^2(\mu+\alpha+\frac{2A(2A\alpha-T)}{F(\omega)+\vartheta}(a_1-a_3)^2)). \quad (3.291)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{1}{2A} + \frac{a\alpha}{2A(2A\alpha - T)}, \quad (3.292)$$

$$a_3 = \frac{a\mu}{2A(2A\alpha - T)}, \quad (3.293)$$

Мы видим, что продольная волна недисперсивна, так же как и в классическом случае или для изотропной редуцированной среды Коссера. Также существует две волны сдвига – вращения. Если $\Omega_0 > 0$, $\Omega_\vartheta > 0$, и $a_1 \neq a_3$, дисперсионные соотношения этих волн совершенно аналогичны случаю волны сдвига – вращения в изотропной редуцированной среде Коссера (раздел 3.2.2.1). В этом случае Ω_0 играет ту же роль, что ω_0^2 для волны с $\mathbf{u}_0 = u_0\mathbf{j}$ и Ω_ϑ играет ту же роль для волны, в которой перемещение $\mathbf{u}_0 = u_0\mathbf{n}$. Мы получаем дисперсионные кривые с запрещенной зоной ниже $\sqrt{\Omega_0}$ (или $\sqrt{\Omega_\vartheta}$, соответственно, выглядящие аналогично кривым на рисунке 2.10)).

3.3.2.2 Волна, распространяющаяся в направлении, параллельном оси симметрии.

Если $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{n}$, уравнение баланса сил (3.285) принимает форму

$$\rho_0\omega^2\mathbf{u}_0 - (\lambda+2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0 - (\mu+\alpha)k^2(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{u}_0 + i((2A\alpha + a(\alpha+\mu) - T - \tau)\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}. \quad (3.294)$$

и уравнение баланса моментов (3.286) может быть записано как

$$\boldsymbol{\theta}_0\cdot((2A(T-2A\alpha)+I\omega^2)\mathbf{E} + (A\tau + aT + a\tau - 4Aa\alpha - a^2(\mu+\alpha))(\mathbf{E}-\mathbf{n}\mathbf{n}) + i((2A\alpha + a(\alpha+\mu) - T - \tau)\mathbf{k}\times\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}. \quad (3.295)$$

Действуя аналогично предыдущему пункту, для $\Omega_0 > 0, \Omega_\vartheta > 0$ получаем

$$\boldsymbol{\theta}_0 = -ik\frac{a_1+a_2}{F(\omega)+\vartheta}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{u}_0, \quad (3.296)$$

где

$$a_2 = \frac{a\mu - \tau}{2A(2A\alpha - T)}, \quad (3.297)$$

и, подставляя их в (3.294), имеем

$$\mathbf{u}_0\cdot(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}\cdot(\rho_0\omega^2 - k^2(\lambda+2\mu)) + (\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})2A(2A\alpha - T)\frac{(a_1+a_2)^2}{F(\omega)+\vartheta}) = \mathbf{0}. \quad (3.298)$$

Видим, что в этом случае мы имеем недисперсивную продольную волну, распространяющуюся вдоль оси симметрии, и волны сдвига – вращения в плоскости, ортогональной данной оси, аналогично случаю линейной упругой изотропной редуцированной среды Коссера, с полосой непропускания, ограни-

ченной сверху $\sqrt{\Omega_\vartheta}$, и с одной горизонтальной асимптотой (как на рис. 2.10).

3.3.2.3 Выводы о влиянии анизотропного предварительно напряженного состояния на волновые свойства.

Видим, что рассмотренная в этом пункте (как свойство предварительного напряженного состояния) и в предыдущих разделах (как свойство тензора упругости, ответственного за взаимосвязь поворотных и трансляционных деформаций в разделе 3.2.4 и как свойство тензора инерции в разделе 3.2.5) осевая симметрия влечет несколько разные следствия для волн, распространяющихся вдоль или ортогонально оси симметрии.

Эти задачи могут быть полезны для моделирования распространения волн и неустойчивости в типичных тестах для сыпучей среды: различных акустических экспериментах и трехосном тесте.

Можно сделать следующие выводы относительно волн, распространяющихся ортогонально или вдоль осей симметрии задачи/материала:

1. вращательные степени свободы привносят в нелинейную проблему механизм возникновения неустойчивости, как и в изотропном случае;

2. продольные волны в задаче с осесимметричным предварительным напряженным состоянием и в случае тензора осесимметричного тензора инерции недисперсивны, а в материале с трансверсально-изотропной перевязкой между типами деформации обладают сильной дисперсией и имеют полосу непропускания;

3. поперечные волны во всех трех типах задач обладают сильной дисперсией и могут иметь горизонтальные асимптоты на графике $\omega(k)$ и запрещенные зоны;

4. для осесимметричного предварительного напряженного состояния и трансверсально-изотропного тензора инерции эти соотношения носят более простой вид (как в изотропной редуцированной среде Коссера).

3.4 Редуцированные среды Коссера с неупругими определяющими соотношениями или под действием неупругих нагрузок.

Редуцированные среды Коссера могут служить для моделирования неоднородных сред с высокими контрастами упруго-инерционных свойств (среды с жесткими включениями), сыпучих когезивных сред, сред, созданных из порошков путем термической и механической обработки, и блоковых сред, как это упоминалось выше. Модели ротационной сейсмологии пытаются так или иначе учесть поворотные степени свободы блоков геосреды. В когезивных сыпучих средах и очень плотных суспензиях нередко присутствует вязкость в контактах между частицами. Таким образом, представляется необходимым также учесть неупругие свойства подобных сред. Поэтому в сотрудничестве с Р. Абреу (Dr. Rafael Abreu, университет Мюнстера), А.П. Пятышевой (СПбПУ) и С.М. Исаевой (СПбПУ) была предложена и исследована вязкоупругая модель [110, 116, 206], а также в сотрудничестве с Д. Харрисом (Dr. David Harris, университет Манчестера) была предложена жестко-пластическая модель для двумерного случая [126]. Вклад автора диссертации в последнюю модель состоял в предложенных уравнениях динамики, анализ их свойств был проведен д-ром Харрисом, который показал, что подобные модели непротиворечивым образом лучше описывают свойства сыпучих сред, чем существующие.

Трудности сравнения с экспериментальными данными связаны с тем, что существует очень мало воспроизводимых экспериментов для сыпучих сред. В связи с этим в сотрудничестве с группой университета Севильи под руководством А. Кастельяноса Маты была разработана экспериментальная установка, идея которой была предложена соискателем, позволяющая воспроизводимым образом измерять скорость звука в мелкодисперсных сыпучих средах при малых внешних нагрузках [61]. Испанские коллеги провели соответствующие эксперименты. Результаты указывают на то, что распространение ультразвука в данных средах не описывается классическими моделями, но может быть описано теорией редуцированной среды Коссера.

Свойства вязкоупругих редуцированных сред рассматривались в разделе 2.6, часть результатов может быть применена к описанию вязкоупругих редуцированных сред Коссера. Однако в данном разделе соответствующие задачи для конкретных сред рассматриваются в более общей постановке и более глубоко: вводится комбинированный тип вязкости, получены границы падающих участков дисперсионной кривой, а не только указано их наличие, рассмотрено поведение сред вблизи характеристических частот.

3.4.1 Изотропная упругая редуцированная среда Коссера под действием вязкоупругого следящего момента.

Результаты данного раздела получены в сотрудничестве с С.М. Исаевой при ее работе над дипломом бакалавра. Автором диссертационной работы получены асимптотические приближения для случая малой диссипации. С.М. Исаева численно исследовала поведение дисперсионных кривых при различных параметрах упругого и вязкого следящего момента, внесла

вклад в получение дисперсионных соотношений для общего случая вязкоупругих параметров внешнего момента.

Пусть в линейной однородной изотропной редуцированной среде Коссера с шаровым тензором инерции отсутствуют внешние объемные силы, но действует объемный вязкоупругий следящий момент $\rho\mathbf{L} = -(c_e\boldsymbol{\theta} + c\,\dot{\boldsymbol{\theta}})$. Если константы c_e, c положительны, момент противодействует повороту тела-точки. Тогда уравнения в перемещениях (3.91), (3.92) принимают форму

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - (\mu+\alpha)\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + 2\alpha\nabla\times\boldsymbol{\theta} = \rho\ddot{\mathbf{u}}$$

$$2\alpha\nabla\times\mathbf{u} - 4\alpha\boldsymbol{\theta} - c_e\boldsymbol{\theta} - c\,\dot{\boldsymbol{\theta}} = \rho I\ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

Рассмотрим распространение линейных гармонических волн в данной среде: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$. Получаем уравнение Кристоффеля

$$-k^2(\lambda+2\mu)\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{u} - k^2(\mu+\alpha)\hat{\mathbf{k}}\times(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{u}) + 2\alpha ik\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\theta} = -\rho\omega^2\mathbf{u}, \quad (3.299)$$

$$2\alpha k\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{u} - 4\alpha\boldsymbol{\theta} - (c_e + i\omega c)\boldsymbol{\theta} = -\rho I\omega^2\boldsymbol{\theta}. \quad (3.300)$$

Мы выражаем $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathbf{u}$ из последнего уравнения (баланса моментов):

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{2\alpha k}{4\alpha + c_e + i\omega c - \rho I\omega^2}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{u}. \quad (3.301)$$

Подставляя данное выражение в баланс сил, получаем уравнение Кристоффеля для перемещений:

$$(\rho\omega^2 - k^2(\lambda+2\mu))\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{u} + (\rho\omega^2 - k^2(\mu+\alpha - \frac{4\alpha^2}{4\alpha + c_e + i\omega c - \omega^2\rho I}))(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.302)$$

Как и ранее, благодаря изотропии продольная волна отделяется, она является классической ($\omega = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}k$). Уравнение Кристоффеля для волны сдвига–вращения выглядит следующим образом:

$$(\rho\omega^2 - k^2(\mu + \alpha - \frac{4\alpha^2}{4\alpha + c_e + i\omega c\ - \omega^2\rho I}))(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{3.303}$$

Для чисто упругого момента ($c = 0$)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{s\alpha}^2}\frac{(\omega^2 - \omega_{0e}^2)}{(\omega^2 - \omega_{1e}^2)},$$

где

$$c_{s\alpha}^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}, \quad \omega_{0e}^2 = \frac{4\alpha + c_e}{\rho I}, \quad \omega_{*e}^2 = \omega_{0e}^2 - \frac{4\alpha^2}{(\mu + \alpha)\rho I}.$$

На низких частотах скорость волны зависит от внешнего упругого момента, увеличиваясь с ростом c_e, и ее квадрат равен

$$c_0^2 = c_s^2\frac{1 + \dfrac{c}{4\alpha\Omega_*^2}}{1 + \dfrac{c}{4\alpha}}, \qquad \text{где} \qquad \Omega_*^2 = \frac{\omega_*^2}{\omega_0^2} = \frac{\mu}{\mu + \alpha}. \tag{3.304}$$

Как и ранее, здесь $c_s^2 = \mu/\rho$ — квадрат скорости поперечной волны на низких частотах при отсутствии внешних нагрузок. На высоких частотах влияние упругого следящего момента нивелируется, скорость волны стремится, как и в случае отсутствия внешних нагрузок, к $c_{S\alpha}$. Запрещенная зона меняется в зависимости от упругого следящего момента, убывая по ширине с его ростом (до нуля на бесконечности) и смещаясь вверх:

$$\frac{\omega_{0e} - \omega_{1e}}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{c_e}{4\alpha}} - \sqrt{\Omega_*^2 + \frac{c_e}{4\alpha}}, \tag{3.305}$$

Ширина запрещенной зоны стремится к максимальной при внешнем моменте с отрицательным упругим модулем, который практически аннулирует действие упругого модуля Коссера, но при этом не выводит среду из зоны устойчивости: $c_e \to -4\alpha\Omega_*^2$, при этом запрещенная зона начинается почти от 0, и ее ширина стремится к $\sqrt{1-\Omega_*^2} = 1/\sqrt{1+\mu/\alpha}$.

Рассмотрим теперь чисто диссипативный следящий момент $\rho\mathbf{L} = -c\dot{\boldsymbol{\theta}}$, i.e. $c_e = 0$. Продольная волна, как и выше, является классической. Получаем из уравнения Кристоффеля (3.303) дисперсионное соотношение для волны сдвига – вращения:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{s\alpha}^2}\Big(\frac{\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{i\omega c}{\rho I}}{\omega^2 - \omega_*^2 - \frac{i\omega c}{\rho I}}\Big) \tag{3.306}$$

Аналогия с волнами поляризации в неполярных диэлектриках. Точно такое же дисперсионное соотношение характеризует распространение волн поляризации в неполярных диэлектриках, изначально индуцированное внешним полем [310]. Диссипативный коэффициент внешнего объемного момента соответствует коэффициенту диссипации для поляризации, $c_{S\alpha}$ скорости света в материале, $\omega_0^2 = \omega_r^2 + \frac{2}{3}\omega_p^2$, где ω_r — резонансная частота колебаний электрона в молекуле, ω_p — плазменная частота, $\omega_*^2 = \omega_r^2 - \frac{1}{3}\omega_p^2$. Случай чисто упругого или нулевого внешнего момента соответствует диэлектрику без диссипации.

В случае вязкоупругого следящего момента $c_e\boldsymbol{\theta} + c\dot{\boldsymbol{\theta}}$ получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{s\alpha}^2}\Big(\frac{\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{c_e + i\omega c}{\rho I}}{\omega^2 - \omega_*^2 - \frac{c_e + i\omega c}{\rho I}}\Big) = \frac{\omega^2}{c_{s\alpha}^2}\Big(\frac{\omega^2 - \omega_{0e}^2 - \frac{i\omega c}{\rho I}}{\omega^2 - \omega_{*e}^2 - \frac{i\omega c}{\rho I}}\Big),$$

таким образом, все результаты для вязкого внешнего объемного момента, представленные далее, могут быть обобщены на случай вязкоупругого внеш-

него объемного момента, если заменить ω_0 на ω_{0e} и ω_* на ω_{1e}. В дальнейшем рассматриваем $c_e = 0$.

3.4.1.1 Дисперсионное соотношение для волны сдвига – вращения.

Введем безразмерное волновое число K, безразмерную частоту Ω и безразмерный параметр b, выразим через них дисперсионное соотношение (3.306):

$$K^2 = \frac{c_{s\alpha}^2}{\omega_0^2} k^2 = \Omega^2 \frac{\Omega^2 - 1 - ib\Omega}{\Omega^2 - \Omega_*^2 - ib\Omega} \tag{3.307}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \Omega_*^2 = \frac{\mu}{\alpha + \mu}, \quad b = \frac{c}{\rho I \omega_0} = \frac{c\,\omega_0}{4\alpha} \tag{3.308}$$

Дисперсионное соотношение (3.307) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}(\Re K)^2 - (\Im K)^2 + 2i\Re K \Im K \\ = \Omega^2 \frac{(\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - \Omega_*^2) + b^2\Omega^2 - ib\Omega(1 - \Omega_*^2)}{(\Omega^2 - \Omega_*^2)^2 + b^2\Omega^2}\end{aligned} \tag{3.309}$$

Таким образом, получаем

$$2\Re K \Im K = -\frac{b(1 - \Omega_*^2)\Omega^3}{(\Omega^2 - \Omega_*^2)^2 + b^2\Omega^2}, \tag{3.310}$$

$$(\Re K)^4 + \Omega^2 \frac{(\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - \Omega_*^2) + b^2\Omega^2}{(\Omega^2 - \Omega_*^2)^2 + b^2\Omega^2} (\Re K)^2 - \frac{b^2(1 - \Omega_*^2)^2\Omega^6}{4((\Omega^2 - \Omega_*^2)^2 + b^2\Omega^2)^2} = 0. \tag{3.311}$$

Решим данное биквадратное уравнение:

$$(\Re K)^2 = \frac{1}{2}\Big(\frac{\Omega^2}{z}\Big((\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - \Omega_*^2) + b^2\Omega^2\Big) \pm \sqrt{D}\Big), \tag{3.312}$$

где

$$D = \Big(\frac{\Omega^2}{z}\Big((\Omega^2-1)(\Omega^2-\Omega_*^2)+b^2\Omega^2\Big)\Big)^2 + \frac{b^2\Omega^6(1-\Omega_*^2)^2}{z^2}, \tag{3.313}$$

$$z = (\Omega^2-\Omega_*^2)^2 + b^2\Omega^2. \tag{3.314}$$

Мнимая часть волнового числа равна

$$(\Im K)^2 = \frac{1}{2}\Big(-\frac{\Omega^2}{z}\Big((\Omega^2-1)(\Omega^2-\Omega_*^2)+b^2\Omega^2\Big) \pm \sqrt{D}\Big)$$

Обозначим

$$f(\Omega) = (\Omega^2-1)(\Omega^2-\Omega_*^2)+b^2\Omega^2. \tag{3.315}$$

Тогда

$$D^{1/2} = \frac{\Omega^2}{z}(f^2 + b^2(1-\Omega_*^2)^2\Omega^2)^{1/2}, \tag{3.316}$$

$$2(\Re K)^2 = \frac{\Omega^2}{z}(f \pm (f^2 + b^2(1-\Omega_*^2)^2\Omega^2)^{1/2}), \tag{3.317}$$

$$2(\Im K)^2 = \frac{\Omega^2}{z}(-f \pm (f^2 + b^2(1-\Omega_*^2)^2\Omega^2)^{1/2}), \tag{3.318}$$

$$\left(\frac{\Im K}{\Re K}\right)^2 = \frac{-f \pm (f^2 + b^2(1-\Omega_*^2)^2\Omega^2)^{1/2}}{f \pm (f^2 + b^2(1-\Omega_*^2)^2\Omega^2)^{1/2}}$$

$$(\text{при } f \neq 0) = \frac{-\operatorname{sgn} f \pm (1 + b^2(1-\Omega_*^2)^2\frac{\Omega^2}{f^2})^{1/2}}{\operatorname{sgn} f \pm (1 + b^2(1-\Omega_*^2)^2\frac{\Omega^2}{f^2})^{1/2}}. \tag{3.319}$$

Видно, что выражения в правых частях уравнений (3.317)–(3.319) всегда положительны, т.е. на всех частотах существует бегущая затухающая плоская волна. В этом — существенное отличие от упругого случая.

Различные численные примеры дисперсионных кривых для поперечных волн представлены ниже (построены С.М. Исаевой) с целью иллюстрации.

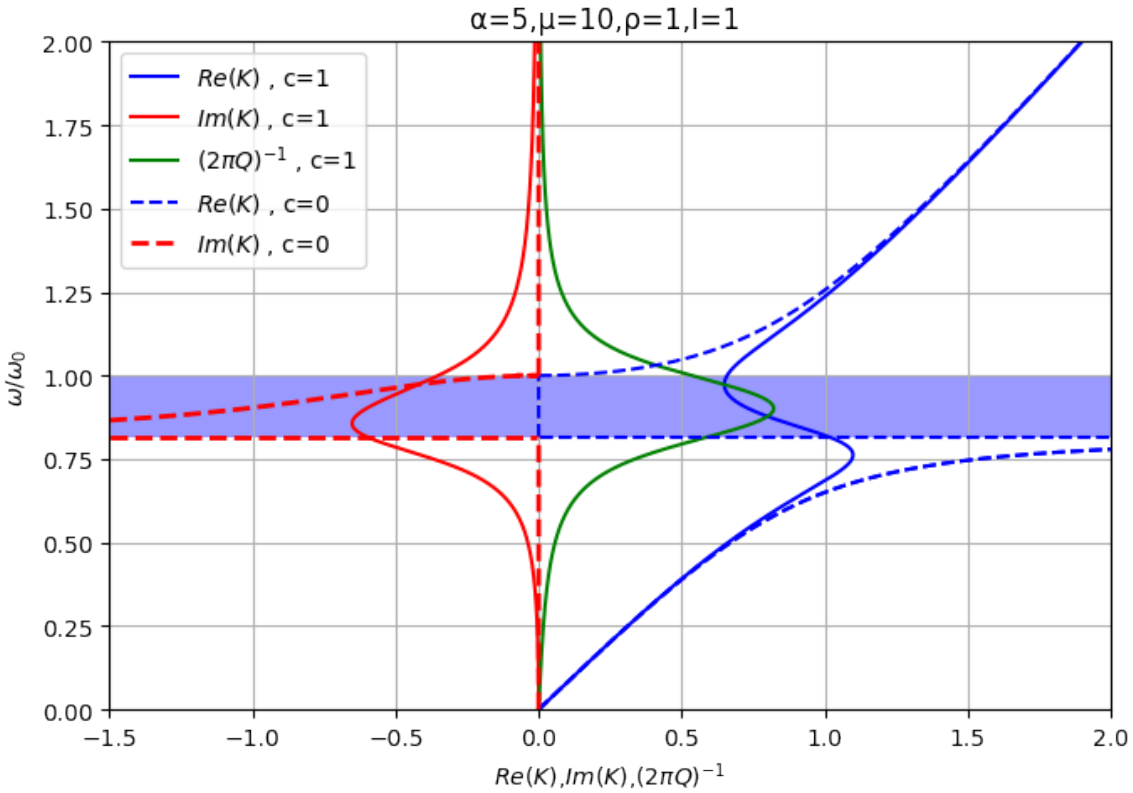

Рис. 3.12: Дисперсионные кривые для поперечной волны в изотропной редуцированной среде Коссера $\Omega_*^2 = 0.816, \omega_0^2 = 20, b = 0.22$. Штриховые линии: упругий случай, сплошные: следящий вязкий внешний массовый момент. На левой части графика $\Im K$, на правой: $|\Im K/\Re K| = (2\pi Q)^{-1}, \Re K$, K — безразмерное волновое число, Q — добротность. Бегущее затухающее решение существует для всех частот и имеет падающий участок дисперсионной кривой в нижней части запрещенной зоны и несколько ниже его.

На рисунках 3.12, 3.13 — дисперсионные кривые для $2\alpha = \mu = 10$, $b = 0.22$ и $b = 2.2$, соответственно. В первом случае (для не очень большого параметра диссипации) имеется падающий участок дисперсионной кривой для $\Re K(\omega)$, максимум логарифмического декремента достигается внутри запрещенной для упругой задачи зоны, а максимальное поглощение на заданном расстоянии — чуть выше нижней границы запрещенной зоны. Во втором случае, когда b относительно велико, поглощение в бывшей запрещенной зоне значительно меньше, чем для $b = 0.22$, вещественная часть волнового числа — монотонная функция, демонстрирующая небольшую дисперсию.

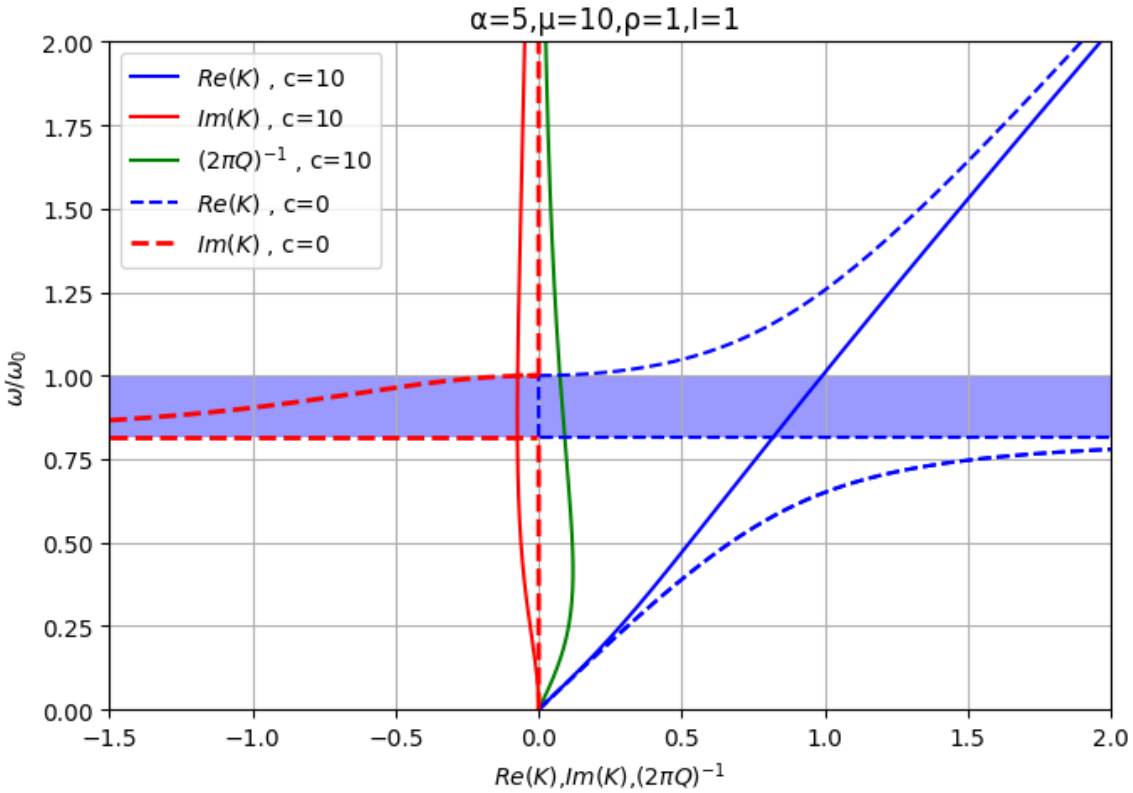

Рис. 3.13: Дисперсионные соотношения для поперечной волны в изотропной редуцированной среде Коссера под действием следящего вязкого момента. $\Omega_*^2 = 0.816, \omega_0^2 = 20, b = 2.2$. Штриховые линии: упругий случай, сплошные: следящий вязкий внешний массовый момент. На левой части графика $\Im K$, на правой: $|\Im K/\Re K| = (2\pi Q)^{-1}, \Re K$, K — безразмерное волновое число. Бегущее затухающее решение существует на всех частотах, убывающего участка дисперсионной кривой нет. Волна обладает легкой дисперсией.

В случае $\alpha > \mu$ наблюдаются те же тенденции. Действительно, на рисунках 3.14, 3.15, 3.16 дисперсионные кривые представлены для случая большой диссипации $b = 1.58$, а на рисунках 3.17, 3.18, 3.19 для относительно малой диссипации $b = 0.158$. Для большого вязкого момента не наблюдается падающего участка дисперсионной кривой. Для малого параметра диссипации в численных примерах он присутствует. Тип акустического метаматериала изменяется. Покажем это аналитически.

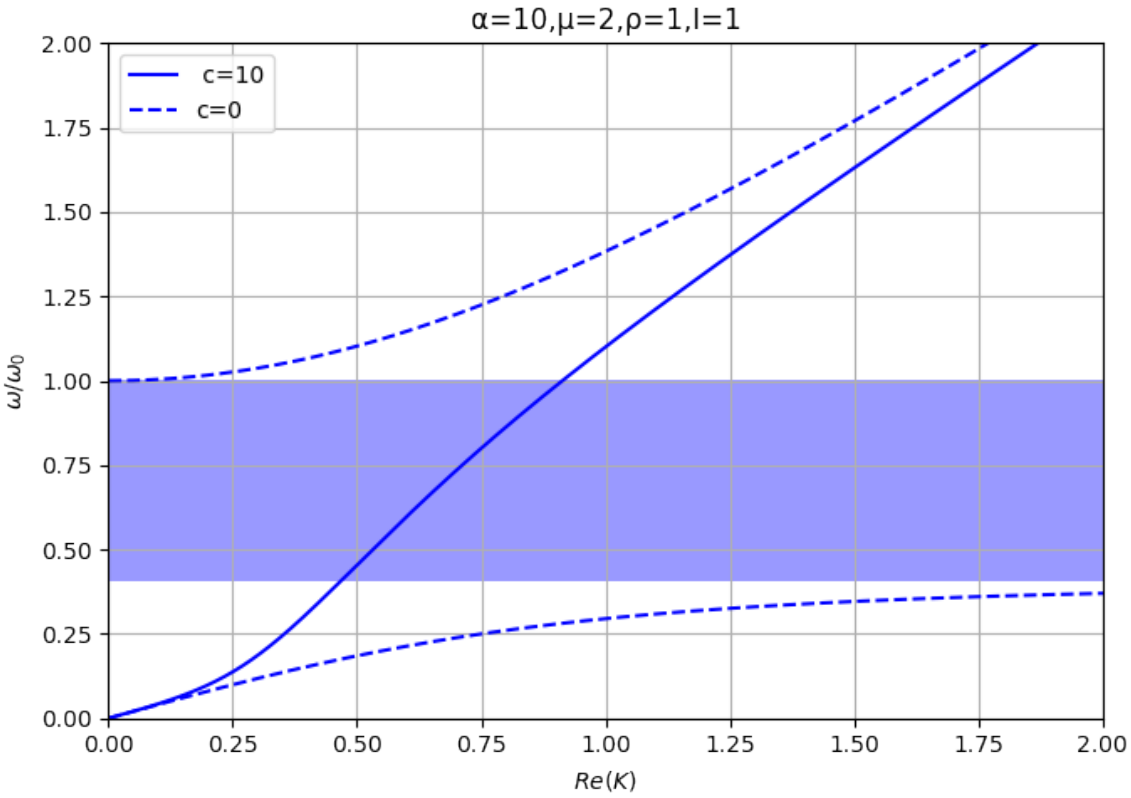

Рис. 3.14: Дисперсионные кривые для вещественной части безразмерного волнового числа в случае большого диссипативного параметра $b = 1.58$. Падающий участок дисперсионной кривой отсутствует.

3.4.1.2 Малая диссипация вдали от характеристических частот $\Omega = \Omega_*$ и $\Omega = 1$

Вещественная часть волнового числа. Рассмотрим малый параметр диссипации $b^2 = o(1)$. Вблизи пределов запрещенной зоны для упругой задачи $\Omega = \Omega_*$ и $\Omega = 1$, значения функций $z(\Omega)$ и $f(\Omega)$ близки к нулю, и эта ситуация требует отдельного рассмотрения, что и будет сделано далее. Рассмотрим здесь случай $|\Omega - \Omega_*| \gg b$, $|\Omega - 1| \gg b$.

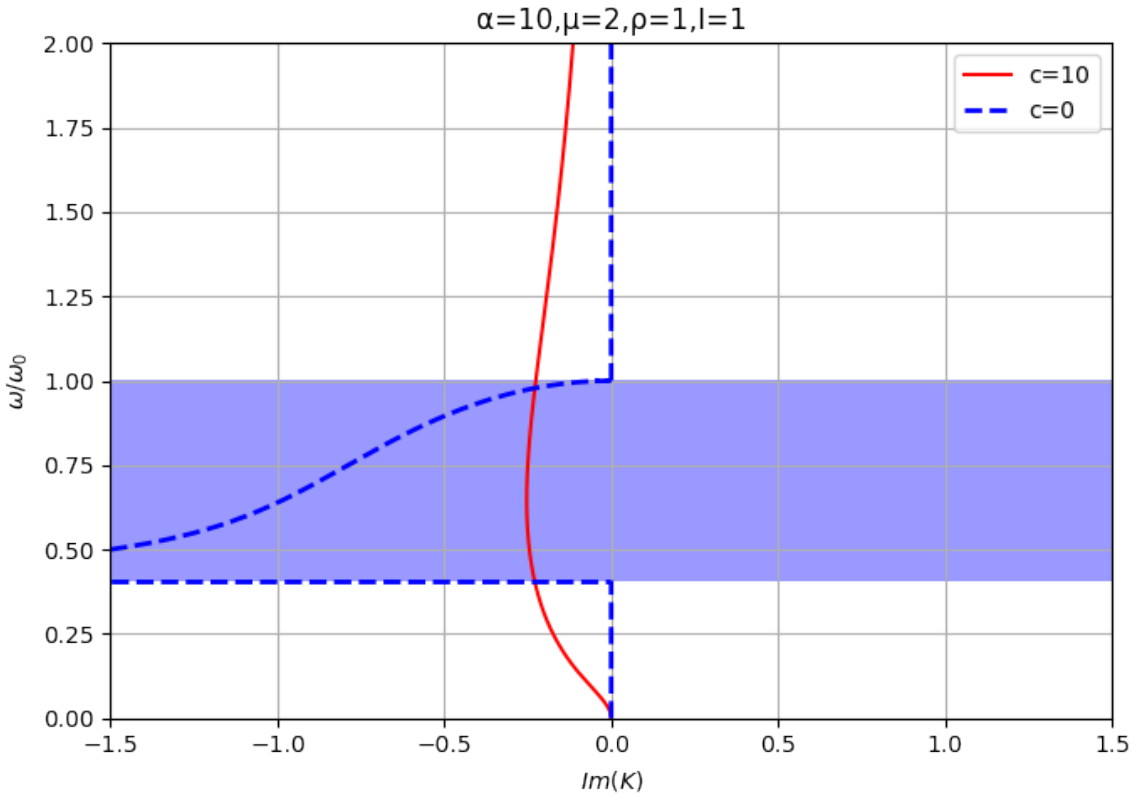

Рис. 3.15: Дисперсионные кривые для мнимой части безразмерного волнового числа в случае большого диссипативного параметра $b = 1.58$. Поглощение внутри запрещенной зоны меньше, а снаружи — больше, чем в случае малой диссипации.

Можно записать следующие приближения для формул (3.317)–(3.319):

$$
\begin{aligned}
2(\Re K)^2 &= \frac{\Omega^2 f}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^2(1+b^2\frac{\Omega^2}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^2})}(1\pm(1+b^2(1-\Omega_*^2)^2\frac{\Omega^2}{f^2})^{1/2}) \\
&= \frac{\Omega^2(\Omega^2-\Omega_*^2)(\Omega^2-1)(1+b^2\frac{\Omega^2}{(\Omega^2-\Omega_*^2)(\Omega^2-1)})}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^2(1+b^2\frac{\Omega^2}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^2})} \\
&\times(1\pm(1+b^2(1-\Omega_*^2)^2\frac{\Omega^2}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^2(\Omega^2-1)^2(1+b^2(1-\Omega_*^2)^2\frac{\Omega^2}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^2(\Omega^2-1)^2})})^{1/2}) \\
&= \frac{\Omega^2(\Omega^2-1)(1+b^2\frac{\Omega^2}{\Omega^2-\Omega_1^2}(\frac{1}{\Omega^2-1}-\frac{1}{\Omega^2-\Omega_1^2}))}{\Omega^2-\Omega_1^2} \\
&\times(1\pm(1+\frac{b^2(1-\Omega_*^2)^2\,(1+o(b^2))}{2}\frac{\Omega^2(1-b^2(1-\Omega_*^2)^2\frac{\Omega^2}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^2(\Omega^2-1)^2})}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^2(\Omega^2-1)^2})).
\end{aligned}
\tag{3.320}
$$

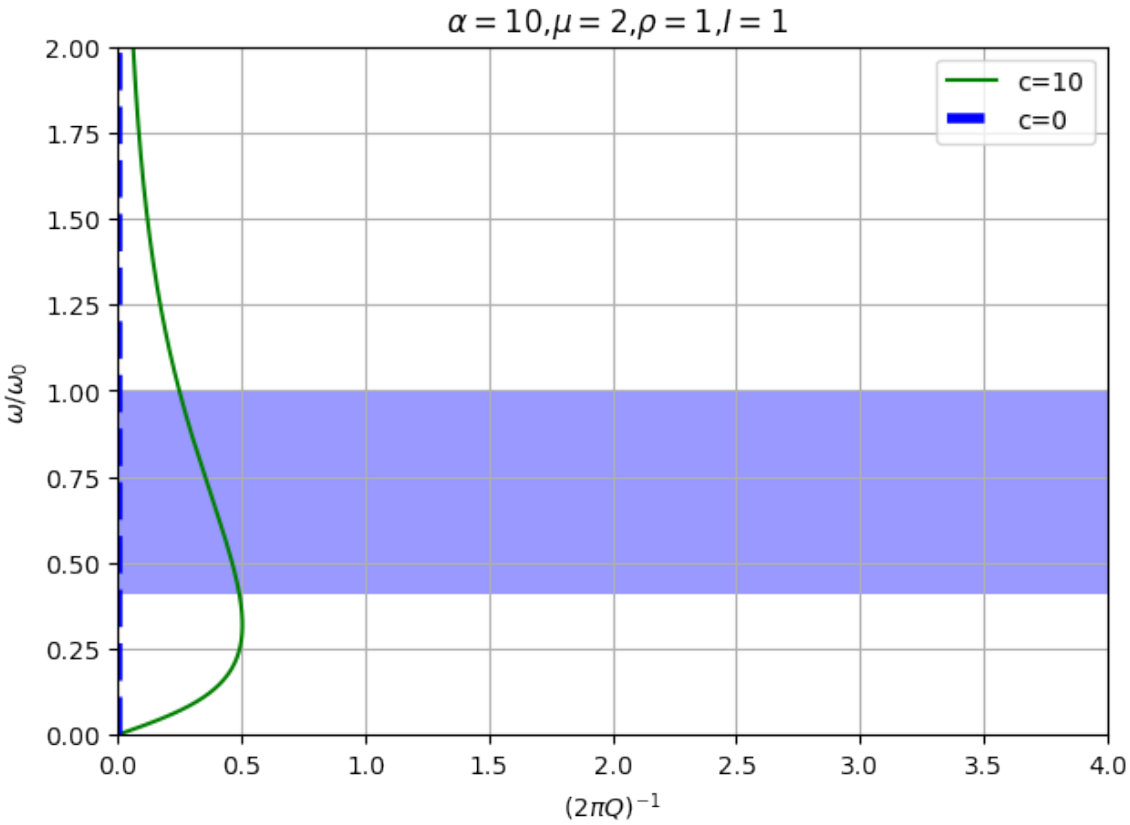

Рис. 3.16: Дисперсионные кривые для $|\frac{\Im K}{\Re K}| = (2\pi Q)^{-1}$, где Q^{-1} — логарифмический декремент, случай большой диссипации $b = 1.58$. Поглощение внутри запрещенной зоны меньше, а снаружи — больше, чем в случае малой диссипации. Максимум логарифмического декремента достигается внутри запрещенной зоны.

Теперь необходимо рассмотреть два случая: частота внутри запрещенной зоны для упругой задачи $(\Omega_*; 1)$ и вне ее. Окрестности пределов зоны пока исключены из рассмотрения.

Вне запрещенной зоны $(\Omega_*; 1)$ решение соответствует знаку «+», поскольку $(\Re K)^2 \geqslant 0$, и главный член в этом выражении конечен. Получаем

$$\Re K = \frac{\Omega(\Omega^2 - 1)^{1/2}}{(\Omega^2 - \Omega_*^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{b^2(1 - \Omega_*^2)\Omega^2}{2(\Omega^2 - \Omega_*^2)^2(\Omega^2 - 1)}\right) + o(b^2), \qquad (3.321)$$
$$\Omega < \Omega_* \text{ или } \Omega > 1.$$

В этой области $\Re K(\Omega)$ возрастает. Значение функции мало меняется из-за наличия малой диссипации по сравнению с упругой задачей.

Внутри запрещенной зоны упругого материала $(\Omega_*; 1)$ решение соответствует знаку «-», главный член в (3.320) — порядка $O(b^2)$. Имеем

$$(\Re K)^2 = -\frac{b^2(1-\Omega_*^2)^2}{4}\frac{\Omega^4}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^3(\Omega^2-1)} \times (1 + b^2(1-\Omega_*^2)\frac{\Omega^2}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^2(\Omega^2-1)}(1-\frac{1-\Omega_*^2}{\Omega^2-1}))\,(1+o(b^2)). \quad (3.322)$$

Главный член — того же порядка, что и диссипативный параметр:

$$\Re K = \frac{b(1-\Omega_*^2)}{2}\frac{\Omega^2}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^{3/2}(1-\Omega^2)^{1/2}}, \qquad \Omega_* < \Omega < 1 \quad (3.323)$$

Данное выражение согласуется с (2.207), случай вязкоупругого основания для динамического гасителя, когда существует перекрестный член в энергии, связывающий векторную обобщенную координату динамического гасителя и градиент векторной обобщенной координаты несущего континуума. У несущего континуума нет упругого основания. Видно, что над безразмерной частотой Ω_* имеется падающий участок дисперсионной кривой.

Разыскивая экстремум $\Re K(\Omega)$ внутри запрещенной зоны упругого материала (функция в данном случае определяется уравнением (3.323)), находим, что при

$$\Omega_* = \frac{1}{2}(1-\Omega_*^2 + (1+14\Omega_*^2+\Omega_*^4)^{1/2})^{1/2} \quad (3.324)$$

она достигает минимального значения. Легко доказать, что данный минимум находится всегда внутри интервала $(\Omega_*; 1)$. Доказательство не приводится, поскольку это простое техническое упражнение. Данная точка является верхним пределом зоны аномального преломления, где $\frac{\partial\omega}{\partial\Re k} < 0$. Этот предел

в первом приближении не зависит от малой диссипации, а зависит лишь от частоты Ω_*, определяемой параметром α/μ. Например, при $\alpha = 10, \mu = 2$ имеем $\Omega_* = \sqrt{2/3} \approx 0.816$. Значение, вычисленное по формуле (3.323) в данной точке при $b = 0.158$, дает минимальное значение $\Re K \approx 0.216$. Мы видим на рис. 3.17, что данная точка действительно соответствует верхнему пределу убывающего участка дисперсионной кривой, хотя диссипация в данном численном примере не так уж мала.

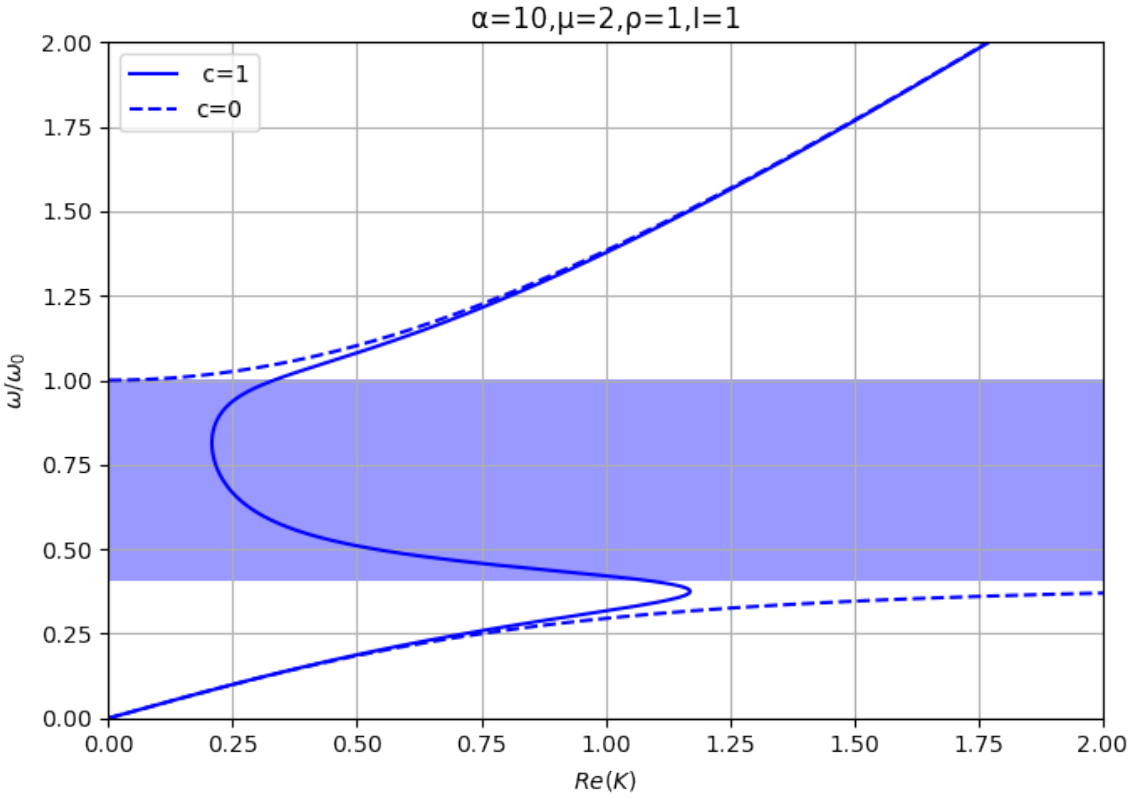

Рис. 3.17: Вещественная часть безразмерного волнового числе для упругого случая (штриховая линия) и для среды под действием диссипативного следящего момента $c = 1$ (сплошная линия). Диссипативный параметр $b = \frac{c}{\rho I \omega_0} = 0.158$, $\Omega_*^2 = 1/6$. Имеется падающий участок дисперсионной кривой приблизительно между $\frac{\omega}{\omega_0} = 0.36$ и $\frac{\omega}{\omega_0} = 0.82$

Мнимая часть волнового числа. Заметим, что $(\Re K)_+^2 = -(\Im K)_-^2$, и $(\Re K)_-^2 = -(\Im K)_+^2$, где «+» и «-» соответствуют выбору знаков в уравнени-

ях (3.317), (3.318).

Таким образом, приближение (3.323) внутри запрещенной зоны упругого материала для $\Re K$, умноженное на $-i$, может служить приближением для $\Im K$ вне запрещенной зоны упругого материала:

$$\Im K = -\frac{b(1-\Omega_*^2)}{2}\frac{\Omega^2}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^{3/2}(\Omega^2-1)^{1/2}}, \qquad \Omega < \Omega_* \text{ или } \Omega > 1. \quad (3.325)$$

Заметим, что у данной функции нет экстремума вне запрещенной зоны упругого материала: $|\Im(\Omega)|$ возрастает монотонно ниже зоны непропускания ($\Omega < \Omega_*$) и монотонно убывает над ней ($\Omega > 1$). Таким образом, поскольку $|\Im K|$ — непрерывная функция, она должна иметь максимум внутри запрещенной зоны упругого материала или в окрестностях ее границ (поскольку окрестности границ исключены из рассмотрения при получении данных приближений).

Верно и обратное, приближение (3.321) для $\Re K$ вне запрещенной зоны упругого материала, умноженное на $-i$, дает приближение для $\Im K$ внутри нее:

$$\Im K = -\frac{\Omega(1-\Omega^2)^{1/2}}{(\Omega^2-\Omega_*^2)^{1/2}}\left(1-\frac{b^2(1-\Omega_*^2)\Omega^2}{2(\Omega^2-\Omega_*^2)^2(1-\Omega^2)}\right)+o(b^2), \qquad \Omega_* < \Omega < 1. \quad (3.326)$$

Видим, что внутри запрещенной зоны упругого материала малая диссипация улучшает прохождение волны: она затухает медленнее по координате. Этот эффект, как мы видели ранее, часто, хотя не всегда, наблюдается при введении малой диссипации в упругие единожды отрицательные акустические метаматериалы. Видим, что главный член для $\Im K$ не имеет экстремума внутри запрещенной зоны упругого материала на удалении от малой окрестности ее границ. Таким образом, он должен находиться в окрестности характери-

стических частот. Это будет показано ниже.

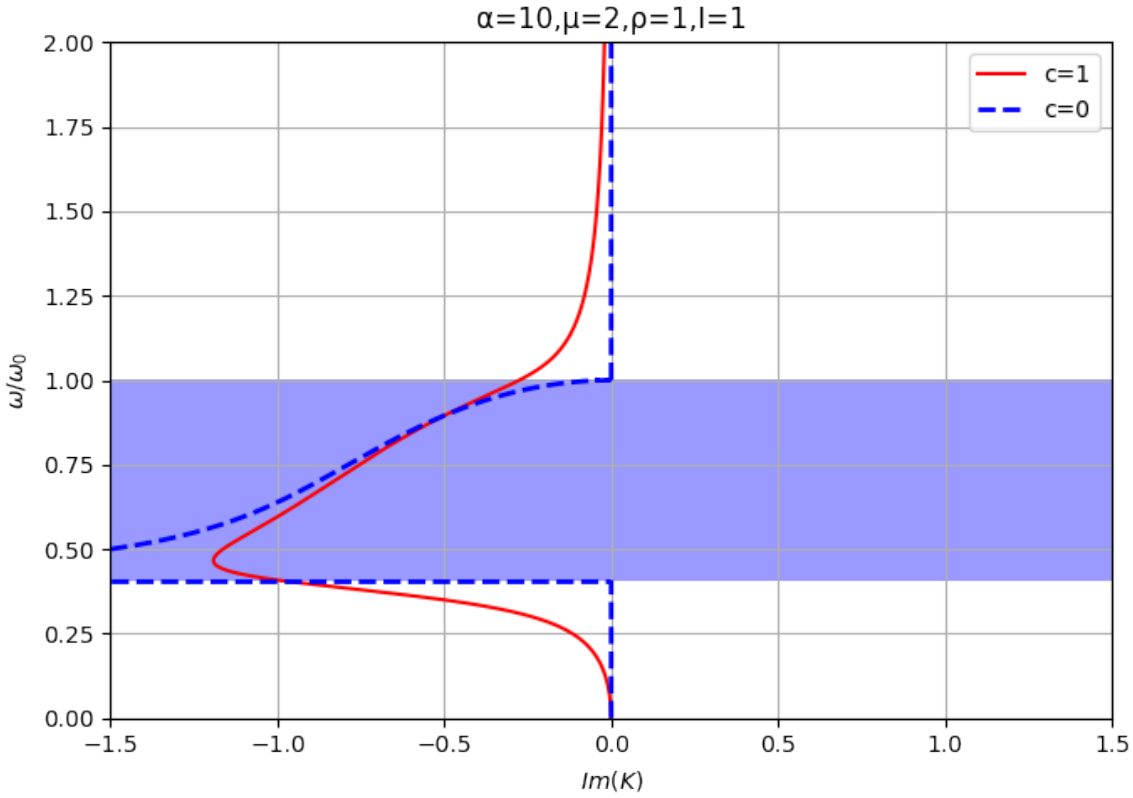

Рис. 3.18: Мнимая часть безразмерного волнового числа для упругого случая (штриховая линия) и при действии вязкого следящего момента $c = 1$ (сплошная линия). Диссипативный параметр $b = \frac{c}{\rho I \omega_0} = 0.158$, $\Omega_*^2 = 1/6$. Максимальное поглощение на заданном расстоянии наблюдается в самом начале запрещенной зоны упругой среды, при $\omega/\omega_0 \approx 0.45$.

Логарифмический декремент. Вычислим логарифмический декремент, умноженный на 2π. Вне запрещенной зоны упругого материала

$$\left|\frac{\Im K}{\Re K}\right| = \frac{b(1-\Omega_*^2)}{2}\frac{\Omega}{(\Omega^2-\Omega_*^2)(\Omega^2-1)} + o(b^2) \tag{3.327}$$

Он возрастает от нуля ниже запрещенной зоны упругого материала и убывает выше ее, стремясь к нулю на высоких частотах. Логарифмический декремент возрастает при увеличении вязкого следящего момента.

Внутри запрещенной зоны упругой среды соотношение обращается:

$$\left|\frac{\Im K}{\Re K}\right| = \frac{2}{b(1-\Omega_*^2)}\frac{(\Omega^2-\Omega_*^2)(1-\Omega^2)}{\Omega} + o(1) \tag{3.328}$$

У него есть максимум при

$$\Omega_{\mathrm{D}\max} = \frac{(\Omega_*^2+1+(\Omega_*^4+14\Omega_*^2+1)^{1/2})^{1/2}}{\sqrt{6}} \tag{3.329}$$

Легко проверить, что данная частота принадлежит зоне непропускания. Она не зависит в первом приближении от малой диссипации, но максимальное значение, достигаемое в ней, существенно зависит. Оно убывает при возрастании малой диссипации. Это, на первый взгляд, странное поведение наблюдается благодаря тому, что поглощение внутри запрещенной зоны упругой среды связано не с диссипацией, а с существованием стоячих затухающих волн в упругом случае (в данной зоне логарифмический декремент для упругого случая бесконечен). Для параметров, соответствующих рисунку 3.19, получаем $\Omega_{\mathrm{D}\max} = \sqrt{2}/2$, $|\Im K/\Re K|_{\max} = 3.58$. Видим, что графики на рис. 3.19 подтверждают этот результат.

3.4.1.3 Влияние малой диссипации вблизи нижней характеристической частоты Ω_*.

Рассмотрим случай $b = o(1)$, $\Omega^2 = \Omega_*^2 - a_1 b$, где $a_1 = O(1)$ — некоторый конечный параметр. Здесь мы получаем следующие приближения:

$$z = b^2(a_1^2 + \Omega_*^2) + o(b^2) \tag{3.330}$$

$$f = ba_1(1-\Omega_*^2) + o(b), \tag{3.331}$$

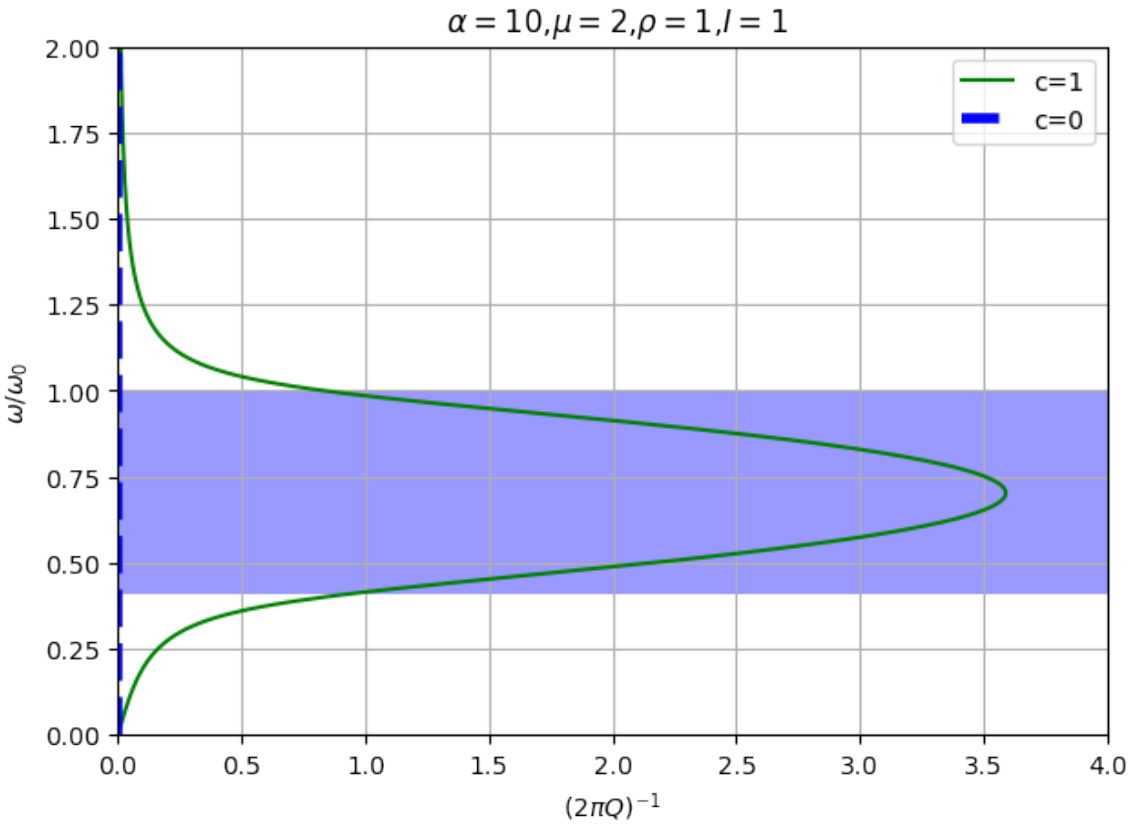

Рис. 3.19: Дисперсионные кривые для $|\frac{\Im K}{\Re K}| = (2\pi Q)^{-1}$, где Q^{-1} — логарифмический декремент, диссипативный параметр $b = 0.158$. Поглощение на длине волны увеличивается по сравнению со случаем большой диссипации внутри запрещенной зоны упругой среды и уменьшается вне ее. Максимум логарифмического декремента расположен внутри запрещенной зоны упругой среды.

$$2(\Re K)^2 = \frac{\Omega_*^2(1-\Omega_*^2)}{b}\frac{a_1 \pm (a_1^2+\Omega_*^2)^{1/2}}{a_1^2+\Omega_*^2} = \frac{\Omega_*(1-\Omega_*^2)}{b}\frac{\xi_1 + (\xi_1^2+1)^{1/2}}{1+\xi_1^2}, \tag{3.332}$$

где $\xi_1 = a_1/\Omega_*$. Необходимо выбрать знак «+» для корня в этой области частот, поскольку знак «-» дает отрицательное значение $(\Re K)^2$.

Заметим, что $\Omega = \Omega_* - b\xi_1/2$. Видим, что в данной области $\Re K$ велико при малой диссипации b.

Легко получить, что данная функция имеет максимум при $\xi_1 = 1/\sqrt{3}$, т.е.

$\Re K(\Omega)$ достигает максимального значения

$$\Re K = \frac{3^{3/4}\Omega_*^{1/2}(1-\Omega_*^2)^{1/2}}{2\sqrt{2b}} \quad \text{at} \quad \Omega = \Omega_* - \frac{b}{2\sqrt{3}}. \tag{3.333}$$

Ниже данной точки имеется зона нормального преломления (положительные значения $\frac{\partial\omega}{\partial\Re k}$), а выше нее — зона аномального преломления (отрицательные значения $\frac{\partial\omega}{\partial\Re k}$). Для параметров, соответствующих рисунку 3.14, нижний предел запрещенной зоны упругой среды равен $\Omega_* - b/(2\sqrt{3}) \approx 0.363$.

В той же области частот

$$2(\Im K)^2 = \frac{\Omega_*^2(1-\Omega_*^2)}{b}\frac{(a_1^2+\Omega_*^2)^{1/2}-a_1}{a_1^2+\Omega_*^2} = \frac{\Omega_*(1-\Omega_*^2)}{b}\frac{(\xi_1^2+1)^{1/2}-\xi_1}{1+\xi_1^2}. \tag{3.334}$$

Здесь вновь выбрана ветвь со знаком «+» по той же причине, что и выше. В данной зоне поглощение велико для малой диссипации b. У него имеется максимум при $\xi_1 = -1/\sqrt{3}$, т.е. $|\Im K(\Omega)|$ достигает максимального значения

$$|\Im K| = \frac{3^{3/4}\Omega_*^{1/2}(1-\Omega_*^2)^{1/2}}{2\sqrt{2b}} \quad \text{при} \quad \Omega = \Omega_* + \frac{b}{2\sqrt{3}}. \tag{3.335}$$

На данной частоте достигается максимальное поглощение на заданном расстоянии. Для параметров, соответствующих рис. 3.18, получаем $\Omega = 0.454$, $|\Im K|_{\max} = 1.18$. Видим, что график подтверждает это предсказание.

При $\Omega_*^2 = 1/3$, т.е. $\alpha = 2\mu$ имеем наибольшее поглощение на заданном расстоянии в запрещенной зоне упругой среды, оно достигается на частоте $\Omega_* + \frac{b}{2\sqrt{3}}$, соответствующей $|\Im K| = 1/(2\sqrt{b})$.

Логарифмический декремент может быть получен из приближения

$$\left(\frac{\Im K}{\Re K}\right)^2 = \frac{-a_1(1-\Omega_*^2)b + (a_1^2+\Omega_*^2)^{1/2}(1-\Omega_*^2)b}{a_1(1-\Omega_*^2)b + (a_1^2+\Omega_*^2)^{1/2}(1-\Omega_*^2)b} = \frac{-\xi_1 + (1+\xi_1^2)^{1/2}}{\xi_1 + (1+\xi_1^2)^{1/2}} \tag{3.336}$$

Видим, что главный член для логарифмического декремента в окрестности Ω_* не зависит ни от малой диссипации b, ни от упругих констант. В данной области он монотонно возрастает по частоте, и $|\Im K/\Re K| = 1$ при Ω_*.

3.4.1.4 Влияние малой диссипации вблизи верхней характеристической частоты $\Omega = 1$.

Рассмотрим случай $b = o(1)$, $\Omega^2 = 1 - a_0 b$, где $a_0 = O(1)$ — некоторый конечный параметр ($\Omega = 1 - a_0 b/2$). Вновь вычислим приближения:

$$z = (1 - \Omega_*)^2 + O(b^2) \tag{3.337}$$

$$f = -b a_0 (1 - \Omega_*^2) + o(b), \tag{3.338}$$

$$2(\Re K)^2 = \frac{b}{1 - \Omega_*^2}((a_0^2 + 1)^{1/2} - a_0). \tag{3.339}$$

Видим, что $\Re K$ — малая по величине, монотонно затухающая функция параметра a_0, т.е. в этой области частот $\Re K(\Omega)$ возрастает. Необходимо выбрать корень со знаком «+», поскольку ветвь со знаком «-» дает отрицательные значения $(\Re K)^2$ и $(\Im K)^2$. Для квадрата мнимой части мы получаем следующее выражение:

$$2(\Im K)^2 = \frac{b}{1 - \Omega_*^2}((a_0^2 + 1)^{1/2} + a_0), \tag{3.340}$$

это малая по величине, монотонно возрастающая функция a_0, т.е. в этой области $|\Im K|(\Omega)$ возрастает.

Приближение для логарифмического декремента таково:

$$\left(\frac{\Im K}{\Re K}\right)^2 = \frac{(1 + a_0^2)^{1/2} - a_0}{(1 + a_0^2)^{1/2} + a_0} \tag{3.341}$$

Видим, что главный член для логарифмического декремента не зависит от

малой диссипации в окрестности частоты $\Omega = 1$, это монотонно возрастающая функция частоты в данной области, и $|\Im K/\Re K| = 1$ при $\Omega = 1$.

3.4.1.5 Заключение.

Линейная однородная упругая изотропная редуцированная среда Коссера под действием следящего вязкоупругого объемного момента является умным акустическим метаматериалом. Будем называть положительным момент, противодействующий повороту частицы. Тогда можно сделать следующие выводы.

1. Упругий следящий момент влияет на свойства среды как единожды отрицательного акустического метаматериала. Положительный следящий упругий момент

   - увеличивает (групповую и фазовую) скорость волны сдвига – вращения на низких частотах
   - сдвигает вверх полосу непропускания и уменьшает ее ширину

   Отрицательный следящий упругий момент влияет противоположным образом.

2. Вязкий малый по величине следящий момент превращает запрещенную зону в зону с падающим участком дисперсионной кривой и несколько меньшим поглощением, таким образом, меняя тип акустического метаматериала. Положительный вязкий следящий момент

   - разрушает зону стоячих волн с нулевым $\Re k$ (появляется бегущее затухающее решение)
   - приводит к появлению падающего участка дисперсионной кривой для достаточно малых значений момента

- уменьшает поглощение волны в запрещенной зоне упругой среды

Получены границы падающего участка дисперсионной кривой для малой диссипации. В первом приближении его верхний предел не зависит от параметра диссипации и расположен внутри запрещенной зоны упругой среды. Нижний предел расположен чуть ниже запрещенной зоны упругой среды, соответствующая безразмерная частота равна $\Omega_1 - 2b/\sqrt{3}$, где b — безразмерный параметр диссипации. Максимальное поглощение на заданном расстоянии для случая малой диссипации достигается в запрещенной зоне упругой среды чуть выше ее нижней границы, на частоте $\Omega_1 - 2b/\sqrt{3}$. Поглощение внутри запрещенной зоны упругой среды вдали от характеристических частот обратно пропорционально диссипативному параметру b, а значение в локальном максимуме для $\Re K$ вблизи запрещенной зоны упругой среды обратно пропорционально $\sqrt{b}$, где b — малый параметр. Таким образом, меняя внешний вязкоупругий момент, мы можем управлять свойствами акустического метаматериала и менять его тип.

Такое же дисперсионное соотношение характеризует распространение волн поля поляризации в неполярных диэлектриках.

3.4.2 Вязкоупругая изотропная линейная редуцированная среда Коссера.

Результаты данного раздела для конечного параметра вязкости получены в сотрудничестве с д-ром Рафаэлем Абреу (Rafael Abreu) [110], которому принадлежит идея ввести в модель упругой редуцированной среды Коссера внутреннюю диссипацию для описания некоторых эффектов, наблюдаемых в сейсмологии, в частности, необычного поведения поглощения. Он также написал программу на Python для численного построения дисперсионных кри-

вых. Аналитические результаты получены автором диссертационной работы. Результаты для малого значения диссипации получены в сотрудничестве с Александрой Пятышевой [116, 206]. Ей принадлежит вывод асимптотических формул для мнимой части, а автору диссертации — для действительной.

Рассмотрим вязкоупругую линейную редуцированную среду Коссера. Как можно ожидать, вязкость существенно меняет характер колебаний среды. В полосах поглощения могут появиться бегущие затухающие волны с падающими участками дисперсионных кривых. Декремент затухания в таком материале может иметь максимум на определенной частоте или мало меняться в зависимости от частоты, что невозможно в классической вязкоупругой среде, и в то же время качественно согласуется с экспериментальными геофизическими данными [222]. Для объяснения такого рода экспериментов обычно используются априорно вводимые релаксационные механизмы в грунте без объяснения их природы [158]. Мы рассмотрим простейший вариант редуцированной вязкоупругой среды Коссера: линейную изотропную среду со сферическим тензором инерции тел-точек (с плотностью $\rho I\mathbf{E}$). Это может быть лишь первым шагом к моделированию реальной геосреды.

В данном разделе обозначения τ, T имеют иной смысл, чем в предыдущих разделах.

3.4.2.1 Основные уравнения.

Уравнения баланса сил и моментов записываются в форме (3.6), где определяющие уравнения для $\boldsymbol{\tau}$ должны соответствовать линейной вязкоупругой изотропной модели. Кроме принципа материальной объективности [194] и закона баланса энергии, модель должна не противоречить второму началу термодинамики, которое в случае редуцированной среды Коссера для адиа-

батических или изотермических процессов записывается в виде

$$\boldsymbol{\tau}^{\top} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^{\cdot} \geqslant 0, \tag{3.342}$$

поскольку данная модель является частным случаем теории линейной микрополярной вязкоупругой среды, предложенной Эрингеном [70].

Таким образом, в данном случае мы можем записать $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^e + \boldsymbol{\tau}^d$, где упругая часть напряжений $\boldsymbol{\tau}^e$ определяется уравнениями (3.60), а диссипативная часть напряжений $\boldsymbol{\tau}^d$ может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{\tau}^d = \lambda\varkappa\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}\mathbf{E} + \mu\nu(\nabla\dot{\mathbf{u}}^s) + \alpha\beta(\nabla\mathbf{u}^A + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^{\cdot}, \tag{3.343}$$

где коэффициенты $\varkappa, \nu, \beta$ характеризуют диссипацию в среде.

Уравнения динамики в перемещениях, таким образом, принимают форму

$$\begin{gathered}(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha\nabla \times (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) \\ +(\lambda\varkappa + 2\mu\nu)\nabla\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \mu\nu\nabla \times (\nabla \times \dot{\mathbf{u}}) + 2\alpha\beta\nabla \times (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2)^{\cdot} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \\ -4\alpha(\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) - 4\alpha\beta(\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2)^{\cdot} = I\ddot{\boldsymbol{\theta}}.\end{gathered} \tag{3.344}$$

3.4.2.2 Дисперсионные соотношения.

Делая преобразование Фурье по времени, мы видим, что уравнения среды с диссипацией могут быть получены из уравнений упругой среды при помощи замены упругих констант на линейные по частоте функции: λ на $\lambda(1 + i\varkappa\omega)$, μ на $\mu(1 + i\nu\omega)$, α на $\alpha(1 + i\beta\omega)$. Эта гипотеза была предложена для описания частотно-независимой диссипации в вязкоупругих материалах Е.С. Сорокиным [322].

Диссипация плоских волн с волновым числом k описывается логарифми-

ческим коэффициентом затухания $2\pi Q^{-1}$,

$$Q^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \left|\frac{\Im k}{\Re k}\right|. \tag{3.345}$$

Таким образом, вместо дисперсионных соотношений для волны растяжения–сжатия в упругой среде

$$\omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\, k^2 \tag{3.346}$$

получим соотношение для волны растяжения–сжатия в вязкоупругой среде

$$\omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu + i(\lambda\varkappa + 2\mu\nu)\omega}{\rho}\, k^2 \tag{3.347}$$

и для волны сдвига–вращения вместо соотношений для упругой среды

$$k^2 = \frac{\omega^2}{(\mu+\alpha)/\rho} \cdot \frac{\omega^2 - 4\alpha/I}{\omega^2 - 4\mu\alpha/((\mu+\alpha)I)} \tag{3.348}$$

дисперсионное соотношение для волны сдвига–вращения в вязкоупругой линейной изотропной редуцированной среде Коссера

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu(1+i\nu\omega) + \alpha(1+i\beta\omega)} \cdot \frac{\omega^2 - 4\alpha(1+i\beta\omega)/I}{\omega^2 - \dfrac{4\mu(1+i\nu\omega)\alpha(1+i\beta\omega)}{(\mu(1+i\nu\omega) + \alpha(1+i\beta\omega))I}}. \tag{3.349}$$

Видим, что волна растяжения–сжатия в рамках данной теории характеризуется той же дисперсией и поглощением, что и в классической вязкоупругой среде, а именно,

$$k = \frac{\omega}{{c_p}^4\sqrt{1+b^2\omega^2}} \exp(-\frac{i}{2}\operatorname{arctg}(B\omega)), \quad B = \frac{\lambda\varkappa + \mu\nu}{\rho}, \tag{3.350}$$

где, как и для линейной упругой среды, $c_p^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, и логарифмический де-

кремент затухания для продольной волны

$$Q_P^{-1} = \frac{B\omega}{1+\sqrt{1+B^2\omega^2}}, \tag{3.351}$$

так что Q_P^{-1}, как и в классической теории, возрастает с ω. Таким образом, этот простейший вариант редуцированной вязкоупругой среды Коссера (изотропной, линеаризованной вблизи натурального состояния) не может объяснить экспериментальное наблюдение, согласно которому $Q_P^{-1}(\omega)$ имеет ниспадающий участок. Чтобы объяснить этот факт, вероятно, требуется учет анизотропного предварительного напряженного состояния или введение анизотропной перевязки между трансляционными деформациями и деформациями сдвига–вращения.

3.4.2.3 Анализ дисперсионных соотношений волны сдвига – вращения.

Исследуем, можно ли объяснить подобный феномен для волны сдвига–вращения в рамках рассматриваемой модели. Рассмотрим подробно дисперсионное соотношение (3.349). После алгебраических выкладок получаем

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{s\alpha d}^2((\omega^2-\omega_{*d}^2)^2+T^2\omega^2(\omega^2-\omega_i^2)^2)}\times \\ \Big[(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_{*d}^2) - T\beta\omega_0^2\omega^2(\omega^2-\omega_i^2) \\ - i\omega(\beta\omega_0^2(\omega^2-\omega_{*d}^2)+T(\omega^2-\omega_i^2)(\omega^2-\omega_0^2)).\Big] \tag{3.352}$$

Здесь введены обозначения

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_{S\alpha}^2 = \frac{\mu+\alpha}{\rho}, \quad c_{s\alpha d}^2 = c_{S\alpha}^2 + c_s^2\omega_0^2\nu\beta, \tag{3.353}$$

$$\omega_0^2 = \frac{4\alpha}{I}, \quad \omega_{*d}^2 = \frac{c_s^2}{c_{s\alpha d}^2}\omega_0^2, \quad \omega_i^2 = \frac{c_s^2(\nu+\beta)\rho}{\mu\nu+\alpha\beta}\omega_0^2, \quad T = \frac{\mu\nu+\alpha\beta}{\rho\, c_{s\alpha d}^2} \tag{3.354}$$

Заметим, что

$$q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Im k^2}{\Re k^2} = -\frac{\omega(\beta\omega_0^2(\omega^2-\omega_{*d}^2)+T(\omega^2-\omega_i^2)(\omega^2-\omega_0^2))}{(\omega^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_{*d}^2)-T\beta\omega_0^2\omega^2(\omega^2-\omega_i^2)} \tag{3.355}$$

Декремент затухания $2\pi Q^{-1}$ определяется формулой

$$Q^{-1} = \frac{q}{1+(1+q^2)^{-1/2}}. \tag{3.356}$$

Введем параметры

$$b = \omega_0\beta, \quad n = \omega_0\nu, \quad \Omega = \omega/\omega_0, \tag{3.357}$$

$$\Omega_i^2 = \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2} = \frac{\nu+\beta}{\nu+\beta\alpha/\mu} = \frac{n+b}{n+b\alpha/\mu}, \qquad \Omega_{*d}^2 = \frac{\omega_{*d}^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{1+\alpha/\mu+nb}, \tag{3.358}$$

$$\tau = \omega_0 T = \frac{\omega_0(\nu+\beta\alpha/\mu)}{1+\frac{\alpha}{\mu}+\nu\beta\omega_0^2} = \frac{\Omega_{*d}^2}{\Omega_i^2}(n+b). \tag{3.359}$$

Тогда дисперсионное соотношение (3.352) может быть записано как

$$k^2 = \frac{\omega_0^2\Omega^2}{c_{s\alpha d}^2((\Omega^2-\Omega_{*d}^2)^2+\tau^2\Omega^2(\Omega^2-\Omega_i^2)^2)} \cdot \Big((\Omega^2-1)(\Omega^2-\Omega_{*d}^2)-\tau b\Omega^2(\Omega^2-\Omega_i^2) - i\Omega(b(\Omega^2-\Omega_{*d}^2)+\tau(\Omega^2-\Omega_i^2)(\Omega^2-1))\Big) \tag{3.360}$$

Заметим, что данное дисперсионное соотношение не имеет полосы непропускания. Действительно, можем переписать его как

$$k^2 = p(\Omega) + iw(\Omega), \tag{3.361}$$

где

$$p = \tilde{c}\big((\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - \Omega_{*d}^2) - \tau b \Omega^2 (\Omega^2 - \Omega_i^2)\big) \tag{3.362}$$

$$w = -\tilde{c}\Omega(b(\Omega^2 - \Omega_{*d}^2) + \tau(\Omega^2 - \Omega_i^2)(\Omega^2 - 1)), \tag{3.363}$$

$$\tilde{c} = \frac{\omega_0^2 \Omega^2}{c_{s\alpha d}^2((\Omega^2 - \Omega_{*d}^2)^2 + \tau^2 \Omega^2 (\Omega^2 - \Omega_i^2)^2)}. \tag{3.364}$$

Получаем

$$(\Re k)^2 - (\Im k)^2 = p, \tag{3.365}$$

$$2\Re k \, \Im k = w, \tag{3.366}$$

откуда

$$(\Re k)^4 - p(\Re k)^2 - w^2/4 = 0. \tag{3.367}$$

Имеем

$$(\Re k)^2 = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2 + w^2}). \tag{3.368}$$

Так как $\sqrt{p^2 + w^2} > |p|$, существует ровно одно положительное решение для $\Re k^2$, а именно

$$(\Re k)^2 = \frac{1}{2}(p + \sqrt{p^2 + w^2}). \tag{3.369}$$

Благодаря наличию диссипации знаменатель для выражения $c(\Omega)$ не имеет особенностей, так что данное выражение всегда конечно. Таким образом, диссипация в редуцированной изотропной среде Коссера приводит к исчезновению запрещенной зоны, существующей в упругом случае.

Мы рассмотрим $c_{s\alpha d} = 1$ во всех численных примерах, поскольку этот параметр лишь меняет масштаб графика дисперсионного соотношения.

Поведение на низких частотах. Для малых Ω соотношение (3.360) принимает форму (с точностью до членов высшего порядка малости)

$$k^2 = \frac{\omega_0^2}{c_{s\alpha d}^2}\frac{\Omega^2}{\Omega_{*d}^2}(1 - in\Omega) = \frac{\omega^2}{c_s^2}(1 - in\frac{\omega}{\omega_0}), \tag{3.370}$$

$$k = \frac{\omega}{c_s}(1 - i\nu\omega/2), \quad Q^{-1} \to 0 \text{ при } \Omega \to 0. \tag{3.371}$$

Поведение на высоких частотах. При $\Omega \to \infty$, если $\tau \neq 0$ (т.е. присутствует вязкость), соотношение (3.360) принимает форму с точностью до членов высшего порядка малости

$$k^2 = \frac{\omega_0^2}{c_{s\alpha d}^2}\Big(\frac{1 - \tau b}{\tau^2} - i\frac{\Omega}{\tau}\Big), \tag{3.372}$$

и мы имеем

$$k \approx \frac{\sqrt{\omega}}{c_{s\alpha d}\sqrt{T}}e^{-i\pi/4}, \qquad Q^{-1} \to 1. \tag{3.373}$$

Для больших Ω поглощение уменьшается с ростом Ω при $\tau b > 1$ и возрастает в обратном случае (см. рисунки 3.20, 3.21).

3.4.2.4 Затухание.

Соотношение (3.355) может быть записано как

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} Q^{-1}) = \frac{\Im k^2}{\Re k^2} = -\frac{\Omega(b(\Omega^2 - \Omega_{*d}^2) + \tau(\Omega^2 - \Omega_i^2)(\Omega^2 - 1))}{(\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - \Omega_{*d}^2) - \tau b\Omega^2(\Omega^2 - \Omega_i^2)} \tag{3.374}$$

Видим, что Q^{-1} определяется тремя параметрами: $\alpha/\mu, b, n$. Уравнение (3.355) не задает Q^{-1} однозначно, так как последнее зависит от знака $\Re k^2$. Например, если отношение, описываемое уравнением (3.355), мало по модулю, возможны

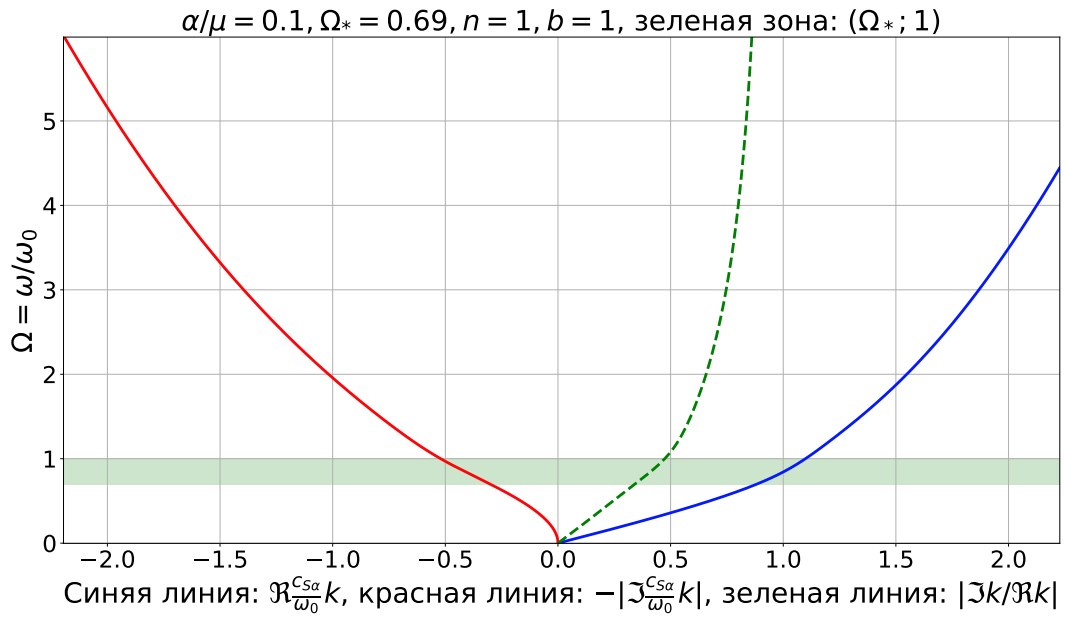

Рис. 3.20: Дисперсионные характеристики для волн сдвига–вращения, $\tau b < 1$. Сплошная линия — $\Re k$, штриховая линия — $\Im k$, пунктирная линия — Q^{-1}.

два случая: малое затухание при $\Re k^2 > 0$ и большое затухание при $\Re k^2 < 0$ ($|\Im k| \gg |\Re k|$, фаза близка к $\pi/2$).

При $\Omega = 1$ получаем

$$\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} Q^{-1}) = \frac{\Im k^2}{\Re k^2} = \frac{1 - \Omega_{*d}^2}{\tau(1 - \Omega_i^2)} \tag{3.375}$$

Уравнение (3.360) приводит к соотношению

$$\operatorname{sgn} \Re k^2 = \operatorname{sgn}((1 - \tau b)\Omega^4 - \Omega^2(1 + \Omega_{*d}^2 - \tau b \Omega_i^2) + \Omega_{*d}^2). \tag{3.376}$$

3.4.2.5 Трансляционная вязкость ($b = 0$)

Рассмотрим частный случай $b = 0$, т.е. если присутствует лишь классическая вязкость, заданная коэффициентом ν. В этом случае $\Omega_i = 1$, $c_{s\alpha d} = c_{S\alpha}$.

Рис. 3.21: Дисперсионные характеристики для волн сдвига–вращения, $\tau b > 1$. Комбинированный тип вязкости.

Дисперсионное соотношение (3.360) тогда выглядит следующим образом

$$k^2 = \frac{\omega_0^2\Omega^2(\Omega^2-1)}{c_{S\alpha}^2((\Omega^2-\Omega_{*d}^2)^2+\tau^2\Omega^2(\Omega^2-1)^2)} \cdot (\Omega^2-\Omega_{*d}^2-i\Omega\tau(\Omega^2-1)) \quad (3.377)$$

Видим, что при $\Omega = \Omega_{*d}$ имеем $\Re k^2 = 0$, $\Im k^2 < 0$. При $\Omega \to 1$ имеем $k \to 0$, $\Im k^2 \to 0$, $\operatorname{sgn}\Re k^2 = \operatorname{sgn}(\Omega - 1)$. Таким образом, при $\omega \to \omega_0 - 0$ $(\Omega \to 1 - 0)$ имеем $\Re k/\Im k \to 0$ и при $\omega \to \omega_0 + 0$ получаем $\Im k/\Re k \to 0$. Это находится в согласии с тем фактом, что при нулевой вязкости существует полоса непропускания непосредственно ниже частоты ω_0, и «оптическая» ветвь начинается от частоты отсечки ω_0. Она является параболой в малой окрестности ω_0.

Заметим, что соотношение (3.377) может быть также записано в следующей форме

$$k^2 = -\frac{\omega_0^2}{c_{S\alpha}^2}\frac{\Omega F}{1+\tau^2F^2}(1+i\tau F), \quad (3.378)$$

где

$$F(\Omega) = -\Omega \frac{\Omega^2 - 1}{\Omega^2 - \Omega_{*d}^2}. \tag{3.379}$$

Легко видеть, что в области $\Omega > 0$ функция $F(\Omega)$ положительна тогда и только тогда, когда $\Omega \in (\Omega_{*d}; 1)$, и убывает в этой области. При $\Omega \to 1$ имеем $F \to 0$, и при $\Omega \to \Omega_{*d} \pm 0$ имеем $F \to \pm\infty$.

Используя дисперсионное соотношение в форме (3.378), легко проверить, что $\Omega(\Re k)$ убывает по крайней мере при $\Omega \to 1-0$ и при $\Omega \to \Omega_{*d}+0$, что соответствует поведению дважды отрицательного акустического метаматериала. Итак, для любого трансляционного трения существуют области аномального преломления (возможно, сливающиеся) под верхней и над нижней границами бывшей запрещенной зоны.

Также имеем: $Q^{-1} \to \infty$ при $\Omega \to 1 - 0$, $Q^{-1} \to 0$ при $\Omega \to 1 + 0$, $Q^{-1} \to 1$ при $\Omega \to \Omega_{*d}$. Таким образом, логарифмический декремент испытывает скачок от бесконечности до нуля, когда частота становится выше частоты отсечки. На нижней границе бывшей запрещенной зоны он равен 2π.

Опускаем технические подробности анализа. Выражение для вещественной части волнового числа подчиняется уравнению

$$\left(\frac{\Omega_{*d} c_{S\alpha}}{\omega_0}\right)^2 (\Re k)^2 = \frac{\Omega\zeta}{2n} \frac{1}{1+\zeta^2} (1 + (\operatorname{sgn}\zeta)\sqrt{1+\zeta^2}), \tag{3.380}$$

где

$$\zeta = n\Omega_{*d}^2 \frac{\Omega(\Omega^2 - 1)}{\Omega^2 - \Omega_{*d}^2}, \tag{3.381}$$

или, что то же самое,

$$(\Re k)^2 = \frac{\omega_0^2\Omega^2(\Omega^2-1)(\Omega^2-\Omega_{1d}^2)}{2c_{S\alpha}^2((\Omega^2-\Omega_{1d}^2)^2+\Omega_{1d}^4 n^2\Omega^2(\Omega^2-1)^2)}\cdot \\ \left(1+\operatorname{sgn}\left((\Omega^2-\Omega_{*d}^2)(\Omega^2-1)\right)\sqrt{1+\frac{n^2\Omega_{1d}^4\Omega^2(\Omega^2-1)^2}{(\Omega^2-\Omega_{1d}^2)^2}}\right). \quad (3.382)$$

Выражение для мнимой части таково:

$$\left(\frac{\Omega_{*d}c_{S\alpha}}{\omega_0}\right)^2(\Im k)^2 = \frac{\Omega\zeta^3}{2n(1+\zeta^2)(1+(\operatorname{sgn}\zeta)\sqrt{1+\zeta^2})} \quad (3.383)$$

или, в другом виде,

$$(\Im k)^2 = \left(\frac{\omega_0}{\Omega_{*d}c_{S\alpha}}\right)^2 \frac{n^2\Omega_{*d}^6\Omega^4(\Omega^2-1)^3}{2(\Omega^2-\Omega_{1d}^2)^3\left(1+\frac{n^2\Omega_{*d}^4\Omega^2(\Omega^2-1)^2}{(\Omega^2-\Omega_{1d}^2)^2}\right)}\cdot \\ \cdot\frac{1}{\left(1+\operatorname{sgn}\left((\Omega^2-\Omega_{*d}^2)(\Omega^2-1)\right)\sqrt{1+\frac{n^2\Omega_{*d}^4\Omega^2(\Omega^2-1)^2}{(\Omega^2-\Omega_{1d}^2)^2}}\right)}. \quad (3.384)$$

В численных примерах (рис. 3.22, 3.23) мы видим зону ниже ω_0 (включающую в себя ω_{*d}), где $\omega(\Re k)$ убывает, при этом поглощение в этой зоне очень велико. Часть проходящей волны обладает групповой скоростью, противонаправленной фазовой скорости: в этой зоне среда является дважды отрицательным акустическим материалом по отношению к волне сдвига–вращения.

Если параметр α/μ мал, то зона с сильным поглощением, где $\omega(\Re k)$ убывает, очень узка (рис. 3.23). Если в измерениях данная зона частот, где среда ведет себя как дважды отрицательный акустический метаматериал, выпала бы из рассмотрения, то мы бы увидели, что Q^{-1} проходит через максимум, убывает, и затем начинает снова медленно возрастать, но зона очень высокого поглощения осталась бы незамеченной.

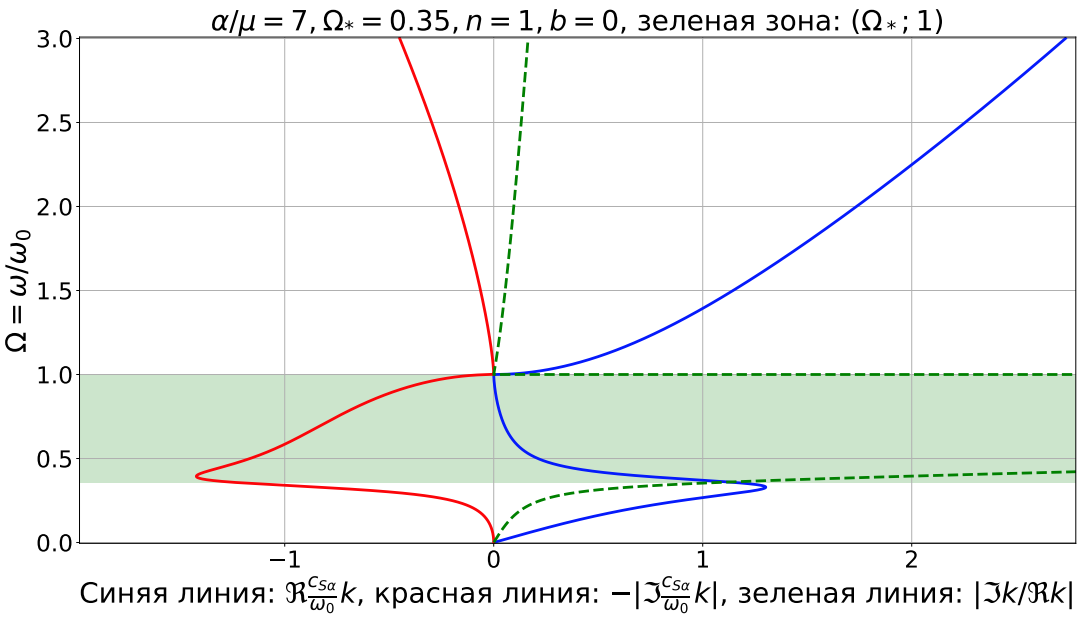

Рис. 3.22: Дисперсионные характеристики для случая трансляционной вязкости, α/μ велико.

Суммируя результаты, заключаем, что для случая конечной вязкости по отношению к трансляционным деформациям $(n \neq 0, b = 0)$

1. Существует частота отсечки ω_0 верхних ветвей $\Re k, \Im k$. Это та же частота, что является частотой отсечки для полностью упругого случая. Она не зависит от коэффициента диссипации.

2. Поглощение мало в верхней окрестности ω_0 и бесконечно в нижней окрестности.

3. Существует полоса (или полосы) частот непосредственно ниже ω_0, включающая ω_{*d}, где $\omega(\Re k)$ убывает, что означает, что среда представляет собой там дважды отрицательный акустический метаматериал по отношению к волне сдвига.

4. В численных примерах мы видим, что данная зона является единственной, находится непосредственно под частотой ω_0 и включает в себя ω_{*d}.

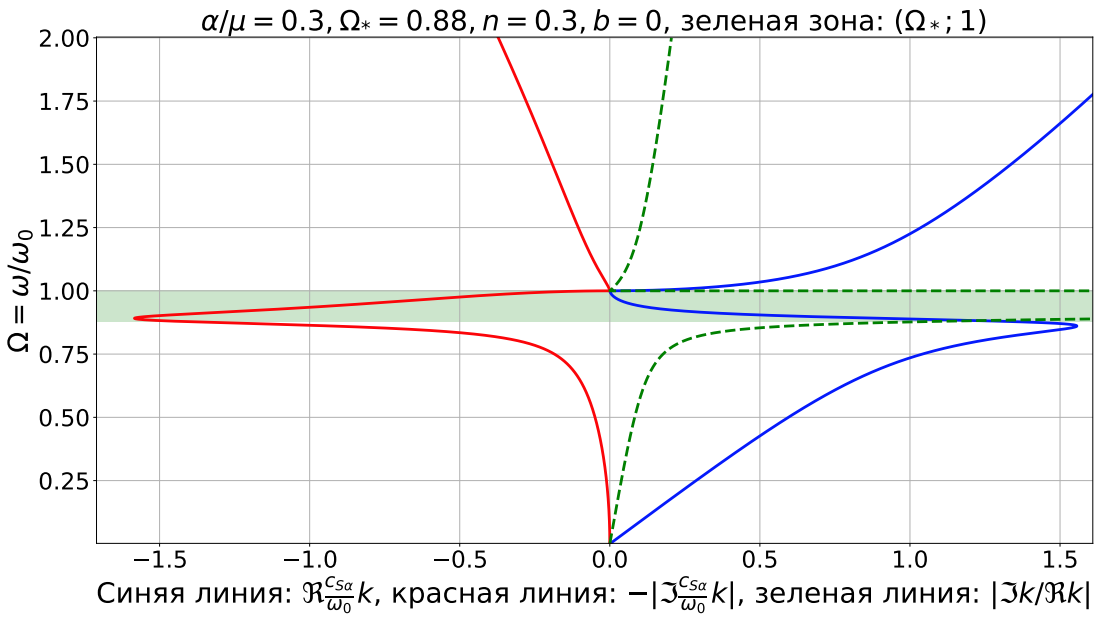

Рис. 3.23: Дисперсионные характеристики для случая вязкости для трансляционных деформаций, α/μ мало.

Логарифмический декремент $2\pi Q^{-1}$ в этой зоне очень велик и кусочно-монотонно возрастает с частотой ω выше и ниже этой зоны, начиная от 0 на обоих участках. Зона узка при малом α/μ.

Случай малой трансляционной вязкости. Рассмотрим случай $n = o(1)$. Можно получить приближенные асимптотические формулы, дающие качественное представление о влиянии малой трансляционной вязкости на дисперсионные характеристики системы. Поведение дисперсионных соотношений (3.380), (3.383) при малом n зависит от поведения ζ, которое, в свою очередь, зависит от того, насколько Ω близко к Ω_{*d}. Мы получаем различные асимптотические формулы для случаев, когда $(\Omega - \Omega_{1d})$ того же порядка, что n, и когда эти величины разных порядков малости.

Случай $|\Omega^2 - \Omega_{1d}^2| \gg n$**.** При этом $\zeta = O(n) = o(1)$, и выражение (3.380) имеет асимптотику

$$\Big(\frac{\Omega_{*d}c_{S\alpha}}{\omega_0}\Big)^2(\Re k)^2 = \frac{\Omega\zeta}{2n}((1-\zeta^2)(1+(\operatorname{sgn}\zeta)(1+\zeta^2/2))+O(\zeta^4))$$
$$= \begin{cases} \Omega\zeta(1-\frac{3}{4}\zeta^2)/n, & \zeta > 0 \\ -\Omega\zeta^3/(4n), & \zeta < 0 \end{cases} + O(n^4), \quad (3.385)$$

откуда с точностью до $O(n^4)$

$$|\Re k| \approx \begin{cases} \frac{\omega_0\Omega}{c_{S\alpha}}\Big(\frac{\Omega^2-1}{\Omega^2-\Omega_{1d}^2}\Big)^{1/2}\Big(1-\frac{3}{8}n^2\frac{\Omega^2\Omega_{*d}^4(\Omega^2-1)^2}{(\Omega^2-\Omega_{1d}^2)^2}\Big), & \Omega \notin [\Omega_{*d};1) \\ \frac{n\omega_0\Omega^2\Omega_{1d}^2}{2c_{S\alpha}}\Big(-\frac{\Omega^2-1}{\Omega^2-\Omega_{1d}^2}\Big)^{3/2}, & \Omega_{*d} < \Omega \leqslant 1. \end{cases} \quad (3.386)$$

При $n\Omega = O(1)$ получаем из (3.380)

$$\Re k = \frac{\omega}{c_{S\alpha}}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\nu^2\Omega_{*d}^4\omega^2}}{2(1+\nu^2\Omega_{*d}^4\omega^2)}}. \quad (3.387)$$

При достаточно больших Ω, таких, что $n\Omega \to \infty$, диссипация превалирует, и мы получаем

$$\Re k \approx \frac{1}{\omega_{*d}}\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \quad (3.388)$$

Исследуем также поведение мнимой части:

$$\left(\frac{\Omega_{*d}c_{S\alpha}}{\omega_0}\right)^2(\Im k)^2 = \frac{\Omega\zeta^3}{2n(1+\zeta^2)(1+(\operatorname{sgn}\zeta)\sqrt{1+\zeta^2})}$$
$$= \begin{cases} \frac{\Omega\zeta^3(1-\zeta^2)(1-\frac{\zeta^2}{8})}{4n}, \zeta \geqslant 0 \\ -\frac{\Omega\zeta(1-\zeta^2)}{n}, \quad \zeta < 0 \end{cases} + O(n^4) = \begin{cases} \frac{\Omega\zeta^3}{4n}, & \zeta \geqslant 0 \\ -\frac{\Omega\zeta(1-\zeta^2)}{n}, & \zeta < 0 \end{cases} + O(n^4), \quad (3.389)$$

Получаем:

$$\frac{c_{S\alpha}}{\omega_0}\Im k \approx \begin{cases} -n\frac{\Omega_{*d}^2}{2}\Omega^2\left(\frac{\Omega^2-1}{\Omega^2-\Omega_{*d}^2}\right)^{3/2}, & \Omega \notin [\Omega_{*d};1) \\ -\Omega\left(\frac{1-\Omega^2}{\Omega^2-\Omega_{*d}^2}\right)^{1/2}(1-n^2\frac{\Omega_{*d}^4}{2}\Omega^2\frac{(\Omega^2-1)^2}{(\Omega^2-\Omega_{*d}^2)^2}), & \Omega_{*d} < \Omega \leqslant 1, \end{cases} \tag{3.390}$$

или

$$\Im k \approx \begin{cases} -\frac{\nu}{c_{S\alpha}}\frac{\omega_{*d}^2}{2\omega_0^2}\omega^2\left(\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2-\omega_{*d}^2}\right)^{3/2}, & \omega \notin [\omega_{*d};\omega_0) \\ -\frac{\omega}{c_{S\alpha}}\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega^2-\omega_{*d}^2}\right)^{1/2}(1-\nu^2\frac{\omega_{*d}^4}{2}\omega^2\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{(\omega^2-\omega_{*d}^2)^2}), & \omega_{*d} < \omega \leqslant \omega_0. \end{cases} \tag{3.391}$$

Видим, что в последнем случае главный член — тот же, что и в чисто упругом случае:

$$(\Im k)^2 = -\frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2}\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2-\omega_{*d}^2} + O(n^2), \quad \omega_{*d} < \omega \leqslant \omega_0. \tag{3.392}$$

Вязкость несколько уменьшает модуль мнимой части в бывшей запрещенной зоне по сравнению с упругим случаем, и вещественная часть становится отличной от нуля. В области запрещенной зоны для упругого случая $(\omega_{*d};\omega_0)$ логарифмический декремент равняется

$$Q^{-1} = 2\pi\left|\frac{\Im k}{\Re k}\right| = \frac{4\pi}{|\zeta|} = \frac{4\pi\omega_0^2}{\nu\omega_{*d}^2}\frac{\omega^2-\omega_{*d}^2}{\omega(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{3.393}$$

Таким образом, малое трансляционное вязкое трение способствует распространению волн в бывшей запрещенной зоне, а вне ее способствует поглощению волны. При этом внутри бывшей запрещенной зоны на фиксированной частоте логарифмический декремент прямо пропорционален параметру малой диссипации. На частоте $\omega_0 - 0$ логарифмический декремент стремится к

бесконечности.

Легко видеть, что вне зоны $[\omega_{*d};\omega_0)$ логарифмический декремент приближенно равен

$$\pi\frac{n\Omega_{*d}^2}{2}\Omega\frac{\Omega^2-1}{\Omega^2-\Omega_{*d}^2}=\pi\frac{\nu\omega_{*d}^2}{2\omega_0^2}\omega\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2-\omega_{*d}^2}=\pi\zeta. \tag{3.394}$$

На частоте ω_0+0 он равен нулю.

3.4.2.6 Случай $|\Omega^2-\Omega_{1d}^2|\ll n$.

В данном случае $\zeta\to\pm\infty, h=1/\zeta\to 0$. Из уравнения (3.380) следует

$$\Big(\frac{\Omega_{*d}c_{S\alpha}}{\omega_0}\Big)^2(\Re k)^2=\frac{\Omega}{2n}\frac{h+\sqrt{1+h^2}}{1+h^2}=\frac{\Omega}{2n}\Big(\frac{h+(1+h^2/2)}{1+h^2}+o(h^2)\Big)$$
$$\overset{(\Re k)^2>0}{=}\frac{\Omega_{*d}}{2n}(1+h+o(h)). \tag{3.395}$$

Последнее приближение можно сделать, так как мы рассматриваем случай, когда частота близка к нижней границе бывшей запрещенной зоны: $\Omega^2-\Omega_{*d}^2=nhO(1)\ll h$. Используя выражение $h=\frac{\Omega^2-\Omega_{*d}^2}{n}\frac{1}{\Omega_{*d}^2\Omega(\Omega^2-1)}$, получаем

$$|\Re k|\approx\frac{\omega_0}{c_{S\alpha}}\frac{1}{\sqrt{2n\Omega_{*d}}}\left(1+\frac{\Omega-\Omega_{*d}}{n\Omega_{*d}^2(\Omega_{*d}^2-1)}\right). \tag{3.396}$$

Это можно записать иначе:

$$|\Re k|\approx\frac{\omega_0}{c_{S\alpha}\sqrt{2\nu\omega_{*d}}}\left(1+\frac{(\omega-\omega_{*d})\omega_0^2}{\nu\omega_{*d}^2(\omega_{*d}^2-\omega_0^2)}\right). \tag{3.397}$$

3.4.2.7 Вязкость на поворот ($n = 0$).

В этом случае характерные параметры можно упростить:

$$c_{s\alpha d} = c_{S\alpha}, \quad \Omega_i^2 = \frac{\mu}{\alpha}, \quad \Omega_{*d}^2 = \frac{\mu}{\mu+\alpha}, \quad \tau = \frac{b\,\alpha}{\mu+\alpha} = b(1-\Omega_{*d}^2) = \frac{b}{1+\Omega_i^2}. \tag{3.398}$$

Если $\alpha \ll \mu$, имеем $\Omega_i \to \infty, \quad \Omega_{*d} \to 1$. Если $\alpha \gg \mu$, имеем $\Omega_i \to 0, \quad \Omega_{*d} \to 0$. В общем случае можем несколько упростить дисперсионное соотношение; поскольку

$$b(\Omega^2 - \Omega_{*d}^2) + \tau(\Omega^2 - \Omega_i^2)(\Omega^2 - 1) = \Omega^4 b\,\frac{\alpha}{\mu+\alpha} = \tau\Omega^4, \tag{3.399}$$

уравнение (3.360) принимает форму

$$k^2 = \frac{\omega_0^2\Omega^2}{c_{S\alpha}^2((\Omega^2-\Omega_{*d}^2)^2 + \tau^2\Omega^2(\Omega^2 - \frac{\Omega_{*d}^2}{1-\Omega_{*d}^2})^2)}\cdot$$
$$\Big((\Omega^2-1)(\Omega^2-\Omega_{*d}^2) - \frac{\tau^2}{1-\Omega_{*d}^2}\Omega^2(\Omega^2 - \frac{\Omega_{*d}^2}{1-\Omega_{*d}^2}) - i\tau\Omega^5\Big). \tag{3.400}$$

Таким образом, в данном случае

$$q = \frac{\Im k^2}{\Re k^2} = -\frac{\tau\Omega^5}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-\Omega_{*d}^2) - \frac{\tau^2}{1-\Omega_{*d}^2}\Omega^2(\Omega^2 - \frac{\Omega_{*d}^2}{1-\Omega_{*d}^2})} \tag{3.401}$$

Случай малого α/μ. Обозначим $\alpha/\mu = \varepsilon$. Тогда мы можем переписать последнее выражение как

$$q = -\frac{\varepsilon b\Omega^5}{(\Omega^2-1)(\Omega^2(1+\varepsilon)-1) + b^2\Omega^2(1-\varepsilon\Omega^2)} \tag{3.402}$$

При $\Omega \to 0$ получаем

$$q \approx -\frac{\varepsilon b \Omega^5}{1 + (b^2 - 2 - \varepsilon)\Omega^2} \approx -\varepsilon b \Omega^5 (1 + (2 + \varepsilon - b^2)\Omega^2). \tag{3.403}$$

Имеем

$$q|_{\Omega \to 0} \to -0, \tag{3.404}$$

$$q|_{\Omega = \Omega_{*d} = 1/\sqrt{1+\varepsilon}} = -\frac{\varepsilon}{b\sqrt{1+\varepsilon}}. \tag{3.405}$$

При этих значениях Ω для любых параметров среды $\Re k^2 > 0, \Im k^2 < 0$, следовательно, $\Re k > 0$, $\Im k < 0$.

Для следующих значений Ω те же неравенства выполняются при $\mu > \alpha$, но при $\mu < \alpha$ получаем $\Re k^2 < 0$:

$$q|_{\Omega=1} = -\frac{\varepsilon}{b(1-\varepsilon)}, \qquad q|_{\Omega = \Omega_i = 1/\sqrt{\varepsilon}} = -\frac{b\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon}. \tag{3.406}$$

Рассмотрим отдельно случай, когда $\alpha << \mu$, то есть $\varepsilon = o(1)$. Тогда выражение (3.402) можно упростить. Вдали от 0 и 1 с точностью до членов высшего порядка малости

$$q \approx -\frac{\varepsilon b \Omega^5}{(\Omega^2 - 1)^2 + b^2 \Omega^2}, \qquad Q^{-1} \approx |q|/2. \tag{3.407}$$

При $\Omega \to 0$ имеем

$$q \approx -\varepsilon b \Omega^5 (1 + (2 - b^2)\Omega^2), \qquad Q^{-1} \approx |q|/2 \to 0. \tag{3.408}$$

При $\Omega \to 1$ получаем для конечных b

$$q \approx -\frac{\varepsilon}{b}, \qquad Q^{-1} \approx \frac{\varepsilon}{2b}. \tag{3.409}$$

Пример дисперсионных кривых и графика $Q^{-1}(\Omega)$ показан на рис. 3.24. Видим, что при малом b логарифмический декремент затухания $2\pi Q^{-1}$ достигает максимального значения вблизи $\omega = \omega_0$, затем он убывает и впоследствии начинает вновь возрастать (медленно в приведенном численном примере). Подобное поведение волн сдвига наблюдается в геосреде [222]. Тем

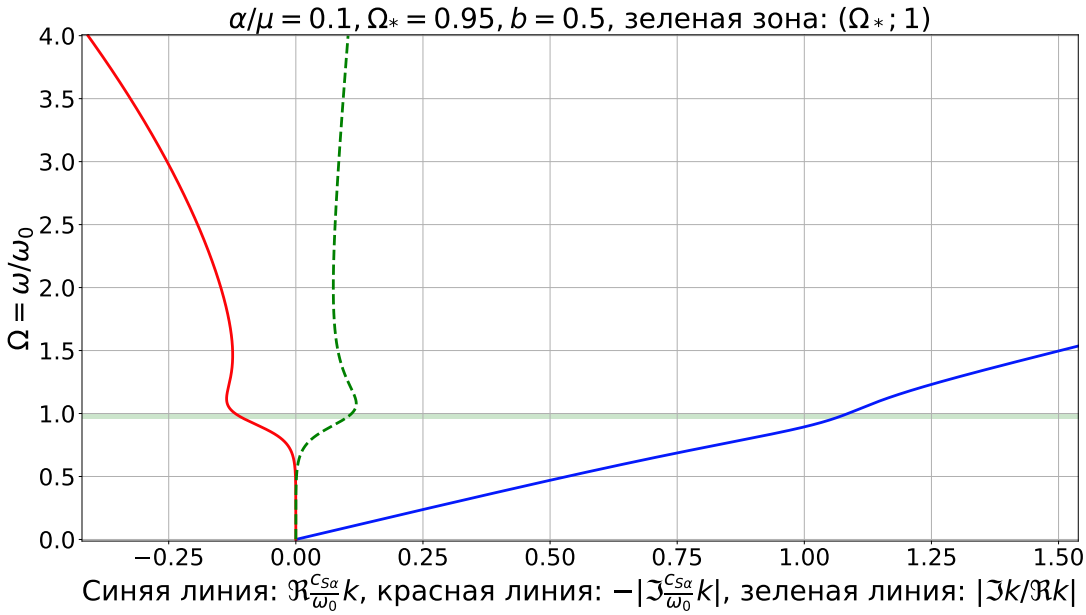

Рис. 3.24: Дисперсионные характеристики для случая вязкости на поворот для малого α/μ.

не менее, данная модель слишком упрощена, чтобы пытаться достичь количественного совпадения с экспериментальными данными, поскольку она не принимает во внимание предварительно напряженное состояние геосреды, равно как и перевязку между волнами растяжения–сжатия и сдвига–вращения.

На рисунке 3.24 мы видим лишь начало дисперсионной кривой. Она приведена на рис. 3.25 для более высоких частот: при больших ω, как мы было показано в начале данного раздела, $k \propto \omega^2$.

Для $\alpha > \mu$ поведение дисперсионных кривых показано на рис. 3.26. Существует зона, где среда является дважды отрицательным акустическим ме-

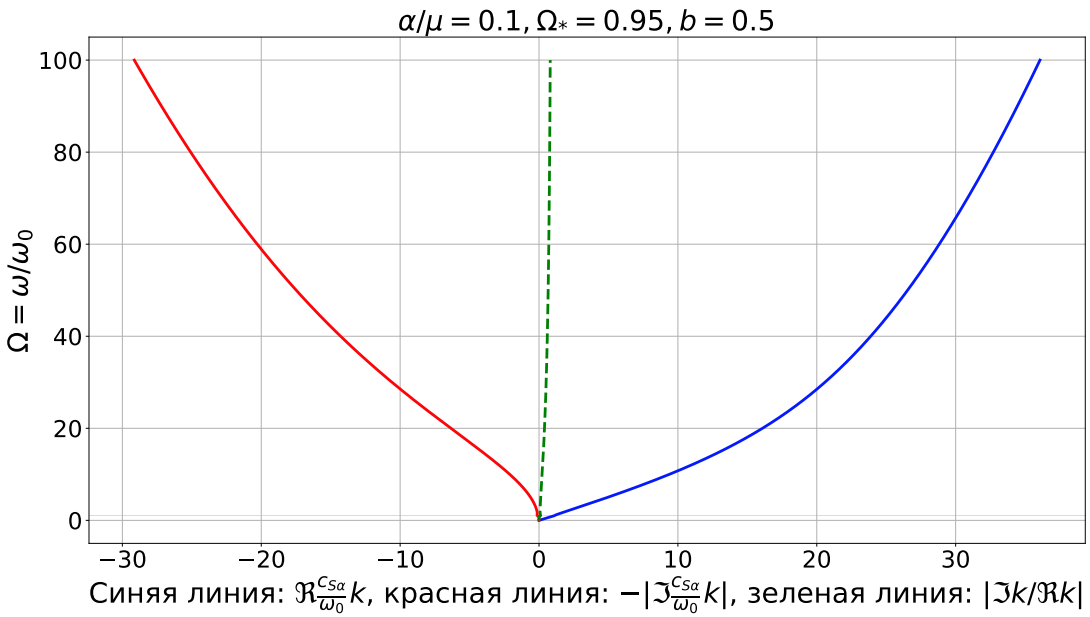

Рис. 3.25: Дисперсионные характеристики для случая вязкости на поворот, α/μ мало.

таматериалом, вблизи этой зоны поглощение велико.

Случай малой ротационной вязкости. Можно получить асимптотическое приближение дисперсионных соотношений (3.400) при $b = o(1)$ на некотором удалении от характеристических частот ($\Omega^2 - \Omega_{*d}^2 \gg b, \Omega^2 - 1 \gg b$). Опуская для краткости технические выкладки, приведем результаты. Для $\Re k$ внутри запрещенной зоны упругого материала имеем

$$\left(\frac{c_{S\alpha}}{\omega_0}\Re k\right)^2 = -\frac{\tau^2\Omega^{12}}{4(\Omega^2 - \Omega_{*d}^2)^3(\Omega^2 - 1)} + O(b^4). \tag{3.410}$$

Такое же выражение с точностью до перемены знака получено для $(\frac{c_{S\alpha}}{\omega_0}\Im k)^2$ вне запрещенной зоны упругого материала. Видим, что в нижней части запрещенной зоны имеется аномальное преломление. В отличие от случая трансляционного трения, как видно из данного выражения, эта область не занимает всю запрещенную зону упругого материала. Качественно данный тип дисси-

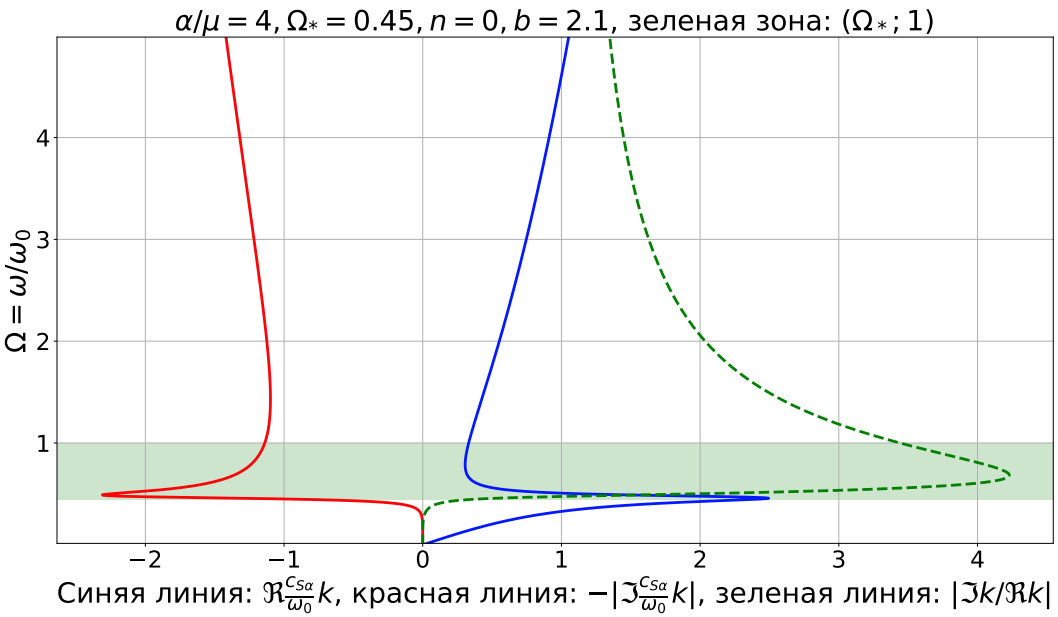

Рис. 3.26: Дисперсионные характеристики для случая вязкости на поворот, $\alpha > \mu$.

пации дает ту же картину, что и следящий вязкий момент, рассмотренный в разделе 3.4.1.

Для $\Re k$ вне запрещенной зоны справедливо приближение

$$\left(\frac{c_{S\alpha}}{\omega_0}\Re k\right)^2 = \frac{\Omega^2(\Omega^2-1)}{\Omega^2-\Omega_{*d}^2}\left[1 - \frac{\tau^2\Omega^2}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-\Omega_{*d}^2)} \times \left(\frac{\Omega^2-\Omega_i^2}{1-\Omega_{*d}^2} + \frac{(\Omega^2-1)(\Omega^2-\Omega_i^2)^2}{\Omega^2-\Omega_{*d}^2} - \frac{\Omega^8}{4(\Omega^2-1)(\Omega^2-\Omega_{*d}^2)}\right)\right] + O(b^4). \tag{3.411}$$

Такое же выражение получается для $-(\Im\frac{c_{S\alpha}}{\omega_0}k)^2$ внутри запрещенной зоны. В зависимости от частот внутри запрещенной зоны с ростом малой диссипации волна может затухать быстрее или медленнее по координате.

Отсюда и из выражения (3.410) получаем приближение для логарифми-

ческого декремента, деленного на 2π:

$$\left|\frac{\Im k}{\Re k}\right| = \frac{2(1-\Omega^2)(\Omega^2-\Omega_{*d}^2)}{\tau\Omega^5}(1+O(b^2)). \tag{3.412}$$

Данная функция убывает с ростом малого параметра b. Она имеет максимум внутри запрещенной зоны упругого материала.

3.4.2.8 Заключение.

В данном разделе рассмотрена линейная изотропная вязкоупругая редуцированная среда Коссера при отсутствии внешних нагрузок. Исследованы плоские волны. Введение вязкости в модель приводит к следующему явлению: полоса непропускания, присутствующая в упругой редуцированной среде Коссера, исчезает, однако для большой области параметров возникает ниспадающий участок дисперсионной кривой $\omega(\Re k)$. В данной зоне частот среда является дважды отрицательным акустическим метаматериалом, фазовая и групповая скорость направлены противоположно друг другу, поглощение волны убывает с ростом малой диссипации, оставаясь большим. Получена асимптотика для дисперсионных кривых при низких (соотношение (3.371)) и высоких частотах (соотношение (3.373)).

Мы также рассмотрели два частных случая, когда вязкость связана лишь с трансляционными деформациями ($b = 0$), и когда она связана лишь с деформациями сдвига–вращения ($n = 0$). В первом случае логарифмический декремент колебаний стремится к нулю при частоте, стремящейся к нулю, затем при увеличении частоты он возрастает, стремится к бесконечности и резко убывает до нуля, затем снова начиная расти при увеличении частоты. Для вязкости на поворот поведение дисперсионных кривых сильно варьируется в зависимости от параметров (особенно от α/μ и τb), во всех рассмот-

ренных примерах логарифмический декремент колебаний имеет максимум на некоторой частоте. Хотя это поведение качественно соответствует экспериментальным данным о поглощении сдвиговых волн в геосреде, тем не менее, данная модель является слишком упрощенной для того, чтобы пытаться провести количественное сравнение с экспериментом. В будущем целесообразно развить данную модель, учитывая осесимметричное предварительно напряженное состояние среды и взаимодействие между объемными деформациями и деформациями сдвига–вращения.

3.4.3 Вязкоупругая изотропная редуцированная среда Коссера со стесненным вращением.

Вязкоупругая изотропная редуцированная псевдосреда Коссера интересна, в частности, как модель с поворотными степенями свободы и минимальным числом параметров, на примере которой можно видеть, как вязкость изменяет тип акустического метаматериала и в целом влияет на распространение волн в среде, которая в упругом случае имела запрещенную зону. Как обсуждалось выше, для любой редуцированной среды Коссера со стесненным вращением $\boldsymbol{\tau}^S$ находится из определяющих уравнений. Рассмотрим изотропную однородную вязкоупругую модель типа Кельвина–Фойгта [73]:

$$\boldsymbol{\tau}^S = \lambda\nabla\cdot\mathbf{u} + 2\mu(\nabla\mathbf{u})^S + \lambda\varkappa\nabla\cdot\dot{\mathbf{u}} + 2\mu\nu(\nabla\dot{\mathbf{u}})^S. \tag{3.413}$$

Данное определяющее уравнение удовлетворяет второму началу термодинамики при $\varkappa, \nu \geqslant 0$. Будем рассматривать нулевые внешние нагрузки и шаровой тензор инерции. Используя это определяющее уравнение и баланс

сил (3.72), запишем уравнения в перемещениях:

$$(\lambda+2\mu)(\nabla\nabla\cdot(\mathbf{u}+\varkappa\dot{\mathbf{u}}))-\mu\nabla\times(\nabla\times(\mathbf{u}+\nu\dot{\mathbf{u}})).=\nabla\times(I\nabla\times\ddot{\mathbf{u}})/4+\rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (3.414)$$

3.4.3.1 Плоские волны сдвига–вращения.

Возьмем дивергенцию от уравнения (3.414). Видим, что, как и в чисто упругом изотропном случае, волна растяжения–сжатия не подвержена влиянию поворотных степеней свободы. Она отделяется от волны сдвига. Мы не будем рассматривать здесь данную волну, поскольку она является той же, что и в классической вязкоупругой теории.

Будем разыскивать решение в виде плоских волн уравнения (3.414): $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, и рассмотрим случай волны сдвига–вращения ($\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}=0$). В области Фурье волна сдвига подчиняется следующему уравнению:

$$\mu(1+i\nu\omega)\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u})=-\omega^2\rho\mathbf{u}-I\omega^2k^2\mathbf{u}/4. \quad (3.415)$$

Отсюда получаем дисперсионное соотношение

$$c_s^2k^2=\left(\frac{1+i\nu\omega}{\omega^2}-\frac{1}{\omega_{*c}^2}\right)^{-1},\quad c_s^2=\frac{\mu}{\rho},\quad \omega_{*c}^2=\frac{4\mu}{I}. \quad (3.416)$$

Рассмотрим, как вязкость будет влиять на полосу непропускания, существующую в упругом случае. Обозначим

$$\frac{c_s}{\omega_{*c}}k=\Re K+i\Im K,\qquad \Omega=\frac{\omega}{\omega_{*c}},\qquad n=\nu\omega_{*c}. \quad (3.417)$$

Возьмем вещественную и мнимую части дисперсионного соотношения (3.416). Получим

$$\Im K=-\frac{n\Omega^3}{2z\Re K},\qquad z=(1-\Omega^2)^2+n^2\Omega^2>0, \quad (3.418)$$

$$(\Re K)^4 - \frac{\Omega^2(1-\Omega^2)}{z}(\Re K)^2 - \frac{n^2\Omega^6}{4z^2} = 0. \tag{3.419}$$

Существует один и только один положительный корень для $(\Re K)^2$, поскольку $n > 0$:

$$(\Re K)^2 = \frac{\Omega^2}{2z}\left(1 - \Omega^2 + \sqrt{(1-\Omega^2)^2 + n^2\Omega^2}\right). \tag{3.420}$$

На рис. 3.27 приведен пример численно построенного графика для дисперсионного соотношения. График показывает, что при данных параметрах внача-

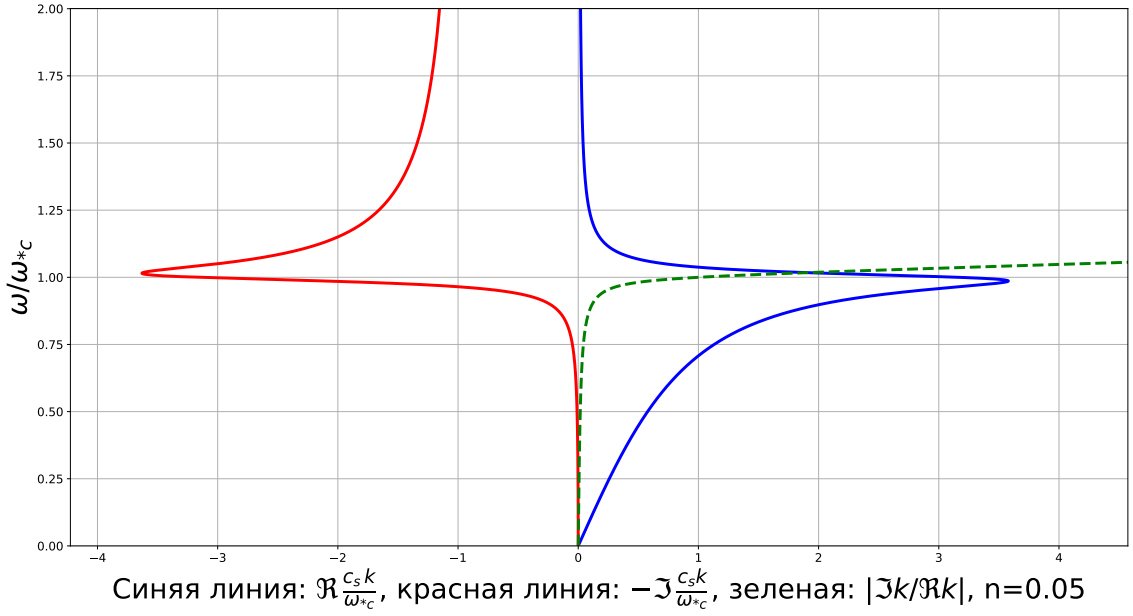

Рис. 3.27: Дисперсионные кривые для линейной редуцированной изотропной вязкоупругой псевдосреды Коссера, $n = 0.05$

ле $\Re k$ и $|\Im k|$ возрастают в зависимости от ω, затем они достигают (на разных частотах) своих максимальных значений, и затем убывают. Это поведение нетипично для классических сред. Для всех численно исследованных случаев $\Re k(\omega)$ имеет один максимум, а $|\Im k(\omega)|$ имеет один максимум при достаточно малых n. При n, большем некоторого критического значения, приближенно

равного 1.57, экстремум для мнимой части исчезает.

3.4.3.2 Дисперсионные соотношения.

Асимптотика для различных областей частот. Исследуем свойства дисперсионного соотношения (3.420). Во-первых, легко видеть, что для вязкоупругой редуцированной изотропной псевдосреды Коссера не существует полос непропускания. Действительно, для любой частоты существует один положительный корень $(\Re k)^2$, определяемый уравнением (3.420) ($\Re k = \frac{\omega_{*c}}{c_s}\Re K$). Рассмотрим его асимптотику на низких частотах. При $\Omega \to 0$ имеем волну, близкую к классической. Действительно, уравнение (3.416) дает нам в этом приближении

$$\Re K \approx \Omega, \quad \Im K \approx -n\Omega^2/2 \qquad (c_s k \approx \omega). \tag{3.421}$$

В окрестности граничной частоты $\omega = \omega_{*c}$ $(\Omega = 1)$

$$\Omega \to 1, \quad \Omega = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = o(1) \quad \Longrightarrow \tag{3.422}$$

$$\Re K \approx \frac{1}{\sqrt{2n}}(1 + \varepsilon(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})), \qquad \Im K \approx -\frac{1}{\sqrt{2n}}(1 + \varepsilon(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})). \tag{3.423}$$

Таким образом, видим, что при $n < 2$ безразразмерная частота $\Omega(\Re K)$ убывает при $\Omega = 1$. Падающий участок дисперсионной кривой соответствует дважды отрицательному акустическому материалу. При $n > 2$ функция $\Omega(\Re K)$ возрастает в данной точке, а при $n = 2$ функция достигает максимума в $\Omega = 1$.

На высоких частотах рассматриваемая среда является дважды отрицательным акустическим метаматериалом, поскольку $\omega(\Re k)$ в этой области

убывает: если $\Omega \to \infty$ ($\Omega \gg n$), то

$$\Re K \approx \frac{n}{2\Omega}, \quad \Im K \approx -1. \tag{3.424}$$

Видим, что рис. 3.27 подтверждает этот вывод.

Подробный анализ поведения вещественной части волнового числа. Влияние параметра диссипации n. Поскольку $\Re k(\omega)$ — дифференцируемая функция, возрастающая при малых ω и убывающая при больших ω, она обладает по крайней мере одним максимумом и ограничена определенным значением. Дадим для него оценку сверху. Заметим, что

$$2(\Re K)^2 = \frac{\Omega^2(1-\Omega^2)}{z} + \frac{\Omega^2}{\sqrt{z}}. \tag{3.425}$$

Оценим сверху каждый член в правой части данного уравнения. Учтем, что $z(\Omega)$ достигает минимального значения

$$z_{\min} = 1 \quad \text{при} \quad \Omega = 0, \quad \text{если} \quad n^2 \leqslant 2/3, \tag{3.426}$$

и

$$z_{\min} = n^2(1 + \frac{3}{4}n^2) \quad \text{при} \quad \Omega = 1 + \frac{n^2}{2}, \quad \text{если} \quad n^2 > 2/3. \tag{3.427}$$

Следовательно, можно дать оценку сверху для первого члена:

$$\frac{\Omega^2(1-\Omega^2)}{z} < \frac{\max(\Omega^2(1-\Omega^2))}{z_{\min}} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{при} \quad n^2 \leqslant 2/3 \\ \frac{1}{n^2(3n^2+4)} & \text{при} \quad n^2 > 2/3 \end{cases}. \tag{3.428}$$

Чтобы оценить второй член во второй части уравнения (3.425), мы вычисляем

производную его квадрата по Ω^2 и находим экстремум:

$$\frac{\partial(\Omega^2/z)}{\partial(\Omega^2)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\Omega^2(\Omega^4 + (n^2-2)\Omega^2 + 1) = \Omega^4(2\Omega^2 + n^2 - 2)$$
$$\Longleftrightarrow \quad \Omega^2 = \frac{1}{2-n^2} \quad (3.429)$$

при $n^2 < 2$. Максимальное значение $\Omega^2/\sqrt{z}$ равно $\frac{2}{n\sqrt{4-n^2}}$. Для $n^2 \geqslant 2$ данная производная не может равняться нулю для положительных Ω^2. Для данного значения оцениваемый член уравнения является монотонной функцией, изменяющейся от 0 при $\Omega = 0$ к 1 при $\Omega = \infty$.

Итак, получаем

$$(\Re K)^2 < \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{1}{n\sqrt{4-n^2}}, & n^2 \leqslant 2/3, \\ \frac{1}{2n^2(3n^2+4)} + \frac{1}{n\sqrt{4-n^2}}, & 2/3 < n^2 < 2, \\ \frac{1}{2n^2(3n^2+4)} + \frac{1}{2}, & 2 \leqslant n^2. \end{cases} \quad (3.430)$$

Во всех рассмотренных численных примерах $\Re K(\Omega)$ возрастает вплоть до некоторой точки максимума Ω_{max}, а затем убывает, стремясь к 0 при больших Ω, как это следует из полученных выше аналитических результатов. Численные примеры дисперсионных кривых для вещественной части волнового числа (рис. 3.27– 3.31) показывают, как кривые меняются при возрастании параметра диссипации n. Видим, что $(\Re K)(\Omega_{max})$, соответствующая минимальной длине волны, убывает с ростом n. Среда демонстрирует свойства дважды отрицательного акустического метаматериала выше Ω_{max}, чьим значением можно управлять при помощи диссипации. Однако Ω_{max} не является монотонной функцией n. В численных примерах вначале это значение убывает от 1 с ростом n, а затем возрастает, становясь больше 1 при $n = 2$.

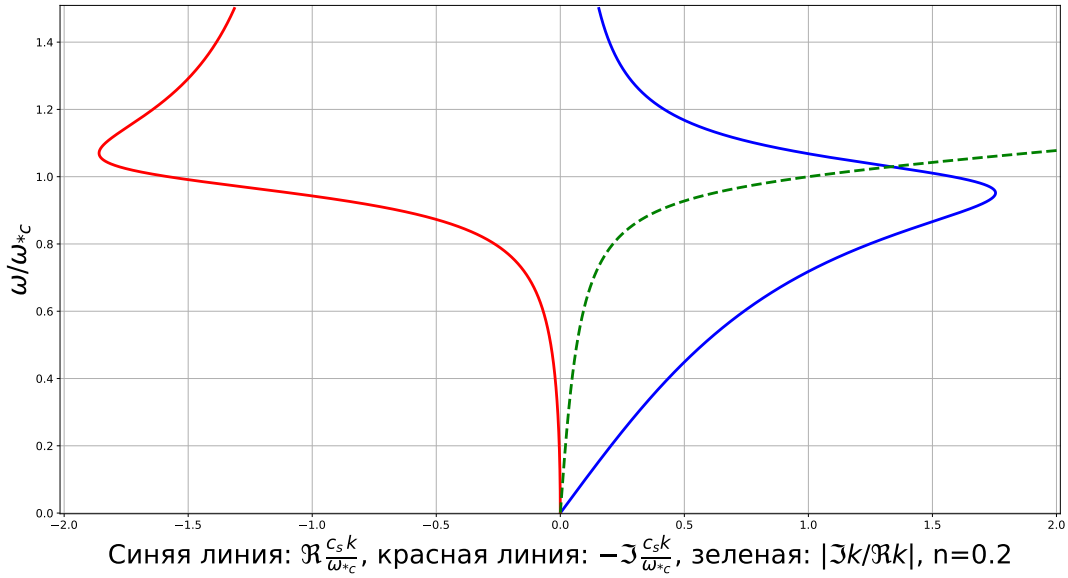

Рис. 3.28: Дисперсионные кривые для плоской волны сдвига–вращения в линейной редуцированной вязкоупругой изотропной псевдосреде Коссера, $n = 0.2$

Можно исследовать аналитически, как значение $\Re k$ при данном ω меняется в зависимости от параметра диссипации n. Дифференцируя функцию $(\Re K)^2$ (см. уравнение (3.425)) по n^2 и находя ее экстремумы, получаем:

- при $0 < \omega < \omega_{*c}$, т.е. в зоне, где волна сдвига–вращения в упругой среде распространяется, а также при $\omega = \omega_{*c}$, значение $\Re k$ убывает с ростом n;

- при $\omega > \omega_{*c}$, т.е. в запрещенной для волны сдвига–вращения зоне в упругом случае, $\Re k$ для данной частоты ω вначале растет с ростом n, затем достигает максимального значения при $n = \frac{\sqrt{3}(\omega^2 - \omega_{*c}^2)}{\omega\,\omega_{*c}}$ и затем убывает с ростом n. Соответствующее максимальное значение $(\Re k)^2$ задается выражением

$$\left(\frac{c_s \Re k}{\omega_{*c}}\right)^2 = \frac{\omega^2}{8(\omega^2 - \omega_{*c}^2)}. \tag{3.431}$$

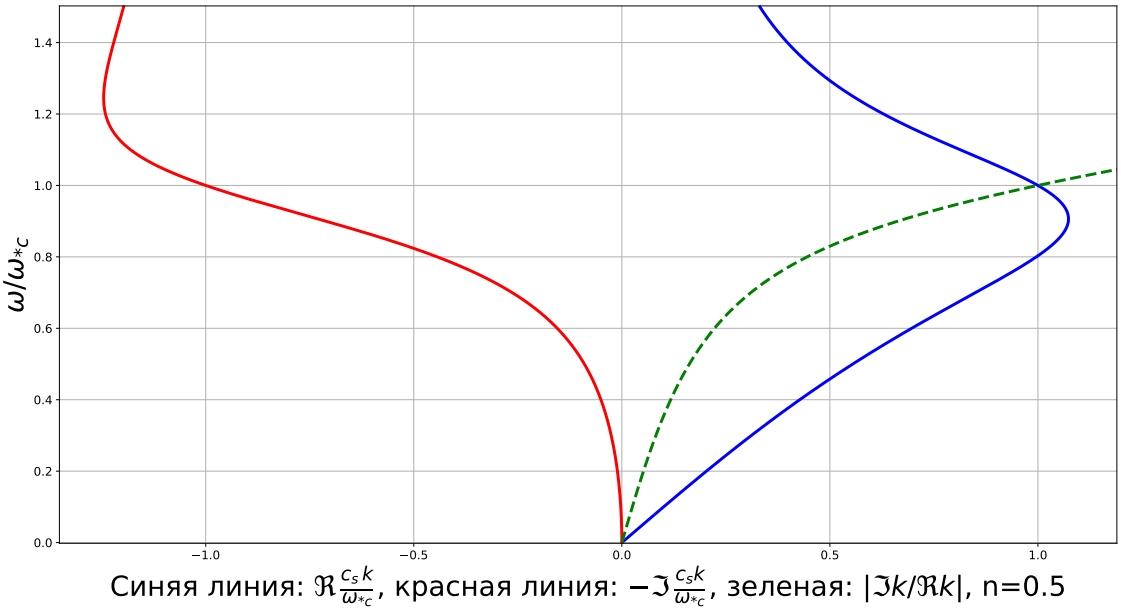

Рис. 3.29: Дисперсионные кривые для линейной редуцированной изотропной вязкоупругой псевдосреды Коссера, $n = 0.5$

Логарифмический декремент. Интересно, что логарифмический декремент

$$2\pi\left|\frac{\Im k}{\Re k}\right| = 2\pi\frac{n\Omega}{1-\Omega^2+\sqrt{z}} \tag{3.432}$$

на высоких частотах ведет себя как $4\pi\Omega/n = 4\pi\omega/\nu$, т.е. чем больше диссипация, тем лучше проходит волна. Эта особенность связана с тем, что полоса непропускания в упругой среде связана не с диссипацией, а с локализацией волн, которая, по-видимому, разрушается при введении вязкости.

На низких частотах, наоборот, логарифмический декремент пропорционален параметру диссипации n и равен $\pi n\Omega = \pi\nu\omega$. При $n = 2$, т.е. при том же параметре диссипации, при котором $\Re K$ достигает максимума на характеристической частоте $\omega = \omega_{*c}$, асимптотика для логарифмического декремента на малых и больших частотах совпадает.

В окрестности характеристической частоты $\omega = \omega_{*c}$, т.е. при $\Omega = 1 + \varepsilon$,

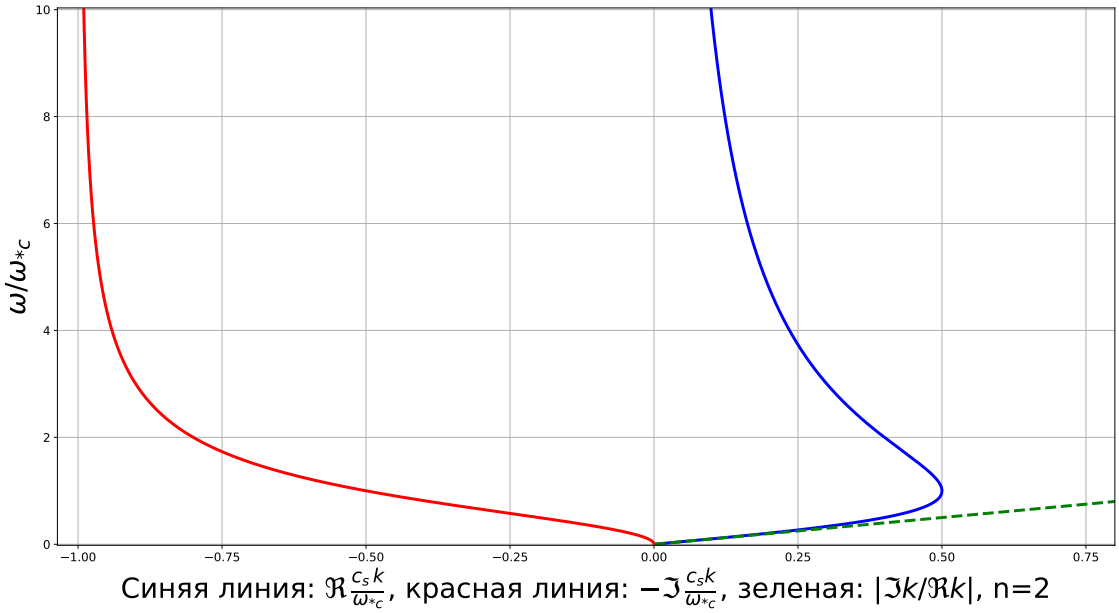

Рис. 3.30: Дисперсионные кривые для линейной редуцированной изотропной вязкоупругой псевдосреды Коссера, $n = 2$

$\varepsilon = o(1)$, логарифмический декремент стремится к $2\pi(1+2\varepsilon/n)$. Это означает, что выше данной частоты диссипация способствует распространению волны сдвига–вращения, а ниже ее — поглощению волны.

Дифференцируя (3.432) по n, находим, что логарифмический декремент — монотонная функция n при $\Omega < 1$ (возрастающая по n) и при $\Omega > 1$ (убывающая по n), и не зависящая от n при $\Omega = 1$ (где она равна 2π).

Выводы.

- Волна растяжения–сжатия совпадает с волной в классической среде благодаря изотропии модели
- Вязкость приводит к исчезновению полосы непропускания (присутствующей для упругого случая) для волны сдвига–вращения и к возникновению падающего участка дисперсионной кривой

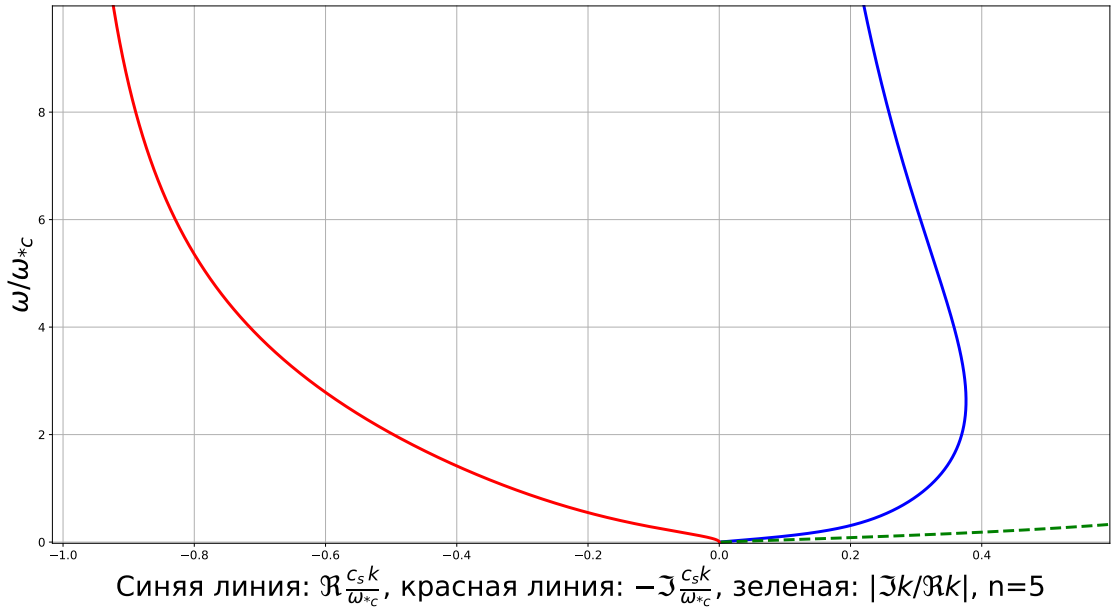

Рис. 3.31: Дисперсионные кривые для линейной редуцированной изотропной вязкоупругой псевдосреды Коссера, $n = 5$

- В бывшей запрещенной зоне (присутствующей в упругой модели) вязкость способствует прохождению волны сдвига–вращения, а ниже этой зоны — поглощению волны

- Существует граничная длина волны, т.е. минимальная длина волны для распространяющихся волн.

Как и в случае без кинематических гипотез, по сравнению с упругой редуцированной псевдосредой Коссера вязкоупругая модель демонстрирует качественное изменение поведения волн (рис. 3.27–3.28). Видим, что редуцированная псевдосреда Коссера ведет себя во многом аналогично среде без стесненного вращения: введение вязкости заставляет исчезнуть запрещенную для бегущих волн зону $\Omega > 1$, существующую в упругом варианте, и полностью или частично превращает ее в зону аномального преломления (которая может также захватывать и часть окна прозрачности упругой среды). Таким

образом, среда из акустического единожды отрицательного метаматериала превращается в акустический дважды отрицательный метаматериал. В данном случае оказывается возможным более подробное аналитическое исследование, поскольку параметров в модели меньше, чем в среде без стесненного вращения.

На высоких частотах вещественная часть волнового числа стремится к нулю, а групповая скорость — к бесконечности. Мнимая часть стремится к $-\omega_{*c}/c_s$ на высоких частотах (см. рис. 3.27, 3.28). Это соответствует очень быстрой обратной волне, чья амплитуда убывает как $e^{-(\omega_{*c}/c_s)\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}}$. Данные волны становятся бесконечно быстрыми вместе с приближением длины волны к бесконечности. Столь необычное поведение, видимо, связано с наличием кинематической гипотезы, вводящей жесткую связь в данной среде.

Вещественная часть волнового числа ограничена некоторым значением, не зависящим от частоты. Во всех рассмотренных численных примерах $\Re k(\omega)$ имеет лишь один максимум (рис. 3.27–3.28). Он не совпадает с точкой экстремума для мнимой части при условии существования последнего (рис. 3.27, 3.28). Обсудим физический смысл этих результатов. Все плоские волны, существующие в среде, обладают длиной волны, большей некоторого минимального значения, достигаемого на определенной частоте. Выше данной частоты имеется падающий участок дисперсионной кривой (зона аномального преломления), где среда демонстрирует поведение дважды отрицательного акустического метаматериала. Таким образом, вводя вязкость, мы меняем тип акустического метаматериала. Для длин волн, больших граничной, в континууме сосуществуют две плоские волны. Одна из них, прямая, чья групповая скорость сонаправлена с фазовой, имеет более низкую частоту. Другая, с более высокой частотой, является обратной волной: направление распространения энергии, определяемое групповой скоростью, противоположно фазовой

скорости. Более длинные обратные волны бегут быстрее, а более длинные прямые волны становятся все ближе к классическим волнам сдвига.

Частота, разделяющая зоны нормальной и аномального преломления, зависимт от параметра диссипации, однако, как можно предположить исходя из численного эксперимента, не может быть произвольно малой по сравнению с характеристической частотой ω_{*c} для упругой среды. Групповая скорость в данной точке бесконечна, как это было и в случае среды без кинематических гипотез. Численные примеры (рис. 3.27– 3.31) показывают, что данная частота зависит от параметра диссипации n немонотонным образом.

Логарифмический декремент в общем случае сложным образом зависит от частоты (рис. 3.28). Он убывает по параметру диссипации n для частот выше характеристической (т.е. в запрещенной зоне для упругого случая) и возрастает по n ниже ее. Это, по-видимому, как и в случае среды без стесненного вращения, связано с тем, что вязкость разрушает условия локализации волны, имеющиеся в упругом случае. На низких и высоких частотах логарифмический декремент пропорционален частоте, а в промежутке может иметь (или не иметь) экстремумы, в зависимости от параметров.

В классических вязкоупругих акустических метаматериалах, рассмотренных в [258], вязкость приводит к аналогичным эффектам: «прохождение волны, вообще говоря, ухудшается в окнах прозрачности, в то же время оно улучшается в локально резонантных полосах непропускания». Рассмотренный в цитируемой работе материал представляет собой периодическую структуру, состоящую из круглых металлических стержней, покрытых резиной, внедренных в вязкоупругую матрицу. Хотя прямого сравнения в данном случае провести нельзя, поскольку мы не рассматриваем дискретную регулярную структуру, как [258], наблюдаемые эффекты похожи. В работе [88], где исследуется похожая среда, также заключается, что вязкость уменьшает суще-

ствующие полосы непропускания, а упругость — наоборот.

Можно ожидать, что модели такого рода могут быть полезны для описания блоковых сред и для разработки искусственных акустических метаматериалов с желаемыми свойствами.

3.4.4 Пластическая редуцированная среда Коссера.

Порошок или иная сыпучая среда может моделироваться упругой или вязкоупругой средой Коссера вплоть до достижения неустойчивости структуры. Для описания течения возможно использовать уравнения пластической редуцированной среды Коссера, предложенные соискателем. Уравнения баланса сил и моментов выглядят следующим образом:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{K} = \rho \dot{\mathbf{v}} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \tag{3.433}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\times} + \rho \mathbf{L} = \rho I (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{v} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + \rho (\dot{I} \mathbf{E} + I \mathbf{v} \nabla) \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{3.434}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость тела-точки. Критерий пластичности получается из классического критерия Мора–Кулона наложением условия на антисимметричную часть тензора напряжений. Если σ_1, σ_3 — наибольшее и наименьшее собственные числа $\boldsymbol{\tau}^S$, то в среде выполняется

$$(\sigma_1 - \sigma_3)/2 \leqslant |\sigma_1 + \sigma_3|/2 + k \operatorname{ctg} \phi, \qquad |\boldsymbol{\tau}_{\times}| \leqslant m. \tag{3.435}$$

Условие пластичности выполняется при достижении равенства. Здесь k — когезия, ϕ — угол внутреннего трения, m — введенный материальный параметр, ротационный предел текучести. Среда, вообще говоря, является сжимаемой. Такая модель позволяет ввести непротиворечивым образом для линейной жестко-пластической модели сыпучих сред в двумерном случае кине-

матическую гипотезу двойного сдвига с учетом поворота линий скольжения, которые следуют повороту тела-точки (что было сделано Д. Харрисом в совместной работе [126]). Закон течения в этом случае записывается в виде

$$\mathbf{v}\nabla = k_{\beta_1}(\mathbf{t}_{\beta_1}\mathbf{n}_{\alpha_2}) - k_{\beta_2}(\mathbf{t}_{\beta_2}\mathbf{n}_{\alpha_1}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}, \tag{3.436}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения тел-точек, $\mathbf{t}_{\beta_i}$ — единичные векторы, определяющие линии дилатации, $\mathbf{n}_{\alpha_i}$ — нормаль к линии скольжения. Обозначим за $\mathbf{e}_{\max}$ единичный вектор главного направления тензора напряжений, соответствующего наибольшему главному напряжению. Векторы $\mathbf{n}_{\alpha_i}$, $\mathbf{t}_{\beta_i}$ определяются из условий $\mathbf{e}_{\max} \cdot \mathbf{n}_{\alpha_i} = \cos(\phi/2 - \pi/4)$ (линии скольжения образуют с главным направлением $\mathbf{e}_{\max}$ угол $\phi/2 + \pi/4$), $\mathbf{e}_{\max} \cdot \mathbf{t}_{\beta_i} = \cos(\phi/2 - \nu_d + \pi/4)$ (линии дилатации образуют угол ν_d с линиями скольжения, ν_d является некоторым материальным параметром, равным нулю для несжимаемой среды). Физический смысл данной гипотезы в том, что течение состоит из двух одновременных движений сдвига, сопровождаемого объемной деформацией, и поворота частиц. Обычная модель двойного сдвига с вращением для классической среды, предложенная в [52], использует вместо угловой скорости частиц угловую скорость поворота главных направлений тензора напряжений. В отличие от предлагаемой нами модели, она предсказывает неустойчивость плоского течения сыпучей среды.

3.5 Эксперимент по прохождению ультразвуковой волны в когезивных порошках.

3.5.1 Экспериментальная установка.

Если какая-либо из моделей редуцированной среды Коссера применима для описания когезивных сыпучих сред в твердом состоянии, грунта с неоднородностями и т.д., это может открыть широкие возможности для нахождения их специфических динамических характеристик и, возможно, инициализации порошков или приведения их в некоторый особый режим. Действительно, в области запрещенной зоны упругой редуцированной среды Коссера можно ожидать частичной локализации волн, а вблизи особой частоты ω_0 — резонансных явлений, которые могут приводить к активному изменению структуры порошка, возможно, приведению его в некоторое воспроизводимое состояние. Это направление работы было начато в сотрудничестве с коллегами из университета Севильи. Вместе с ними была разработана установка, позволяющая воспроизводимым образом измерять скорость звука в когезивной сыпучей среде в области малых давлений. Идея и принципиальная схема установки принадлежат автору диссертации, а практическая разработка и получение экспериментальных данных — А. Кастельяносу Мате, Ф. Руису Ботельо и М.А. Санчесу Кинтанилье [61].

Схема установки приведена на рис. 3.32. Ее действие разделяется на два этапа: первый этап — инициализация (приведение порошка в воспроизводимое состояние), второй — измерение скорости прохождения волны. Установка представляет собой прямоугольный контейнер с дном из особого керамического материала, который пропускает поток газа, но непроницаем для частиц порошка. В стены параллелепипеда вделаны излучатель и приемное устрой-

ство ультразвуковых волн. На образец подается синусоидальный импульс, полученный на другом конце образца сигнал преобразуется и записывается на подсоединенный компьютер. Инициализация производится при помощи

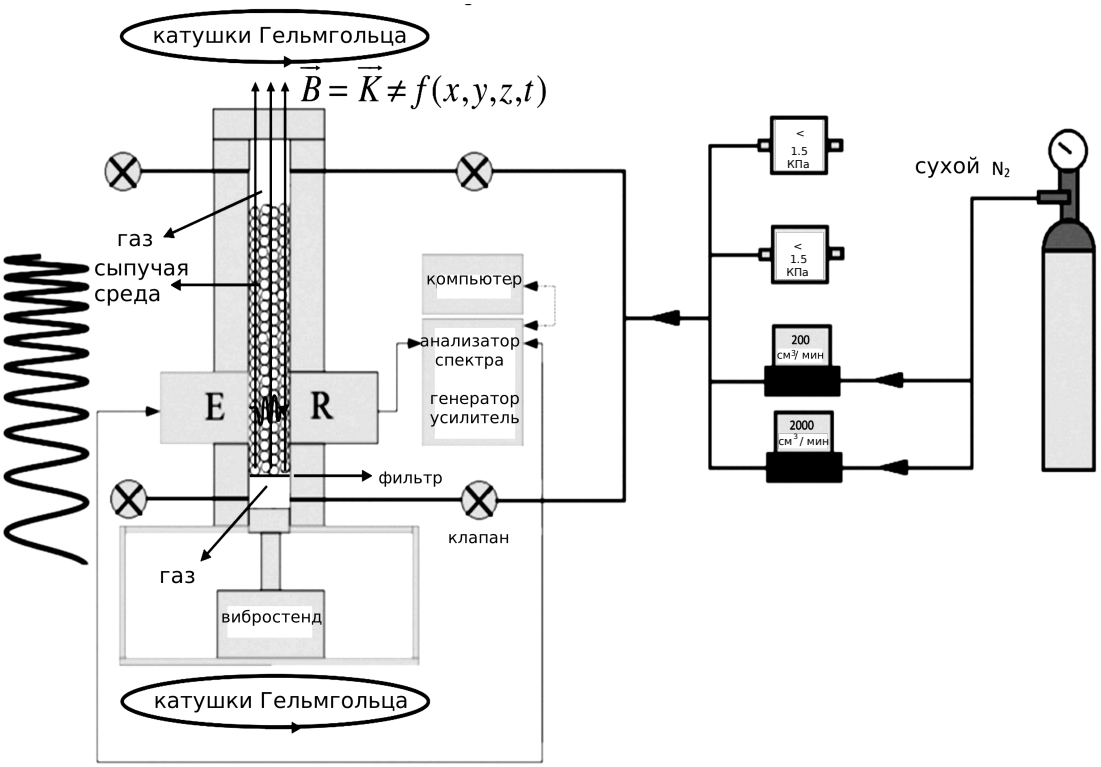

Рис. 3.32: Аппарат для воспроизводимого измерения скорости ультразвуковых волн в когезивных порошках, разработанный вместе с коллегами из университета Севильи

ожижения в потоке сухого азота, направленном вверх, и последующего осаждения в поле силы тяжести и (по выбору экспериментатора) слабом потоке азота, направленном вниз. Мелкодисперсные порошки осаждаются квазистатически, поскольку силы ван-дер-Ваальса, аэродинамические силы и сила тяжести имеют для малых частиц один и тот же порядок и почти компенсируются. Поэтому данный способ инициализации среды приводит ее в состояние, близкое к натуральному: внутренние напряжения связаны лишь с весом порошка. Для сильно когезивных порошков, чтобы способствовать процессу ожижения, одновременно с пропусканием азота образец подвергается

вибрации малой амплитуды и высокой частоты. Аналогичный способ использовался для измерения прочности на отрыв порошков в Sevilla Powder Tester, разработанном испанскими коллегами для измерения прочности мелкодисперсных порошков на отрыв [40]. Клапаны позволяют пропускать поток газа в различных направлениях. В данной установке возможно также измерение волн в порошке, через который проходит слабый вертикальный поток газа. Катушки Гельмгольца позволяют создать магнитное поле, направленное вертикально или горизонтально. Данное усовершенствование, предложенное Антонио Кастельяносом, позволяет провести эксперименты с намагничиваемыми или магнитными порошками. Магнитное поле можно включать как в процессе осаждения, так и после него. После инициализации порошка сквозь него пропускается волна ультразвука, полученный на противоположной стороне контейнера сигнал регистрируется при помощи преобразователя и выводится на компьютер. Программное обеспечение датчиков позволяет записать полученный сигнал и проанализировать его. Ширина контейнера достаточно мала (2.5 см), так что луч волны не успевает рассеяться. Пришедший сигнал в целом сохраняет форму, но амплитуда его уменьшается. Деля расстояние между датчиками на время прохождения сигнала (time of flight), получаем фазовую скорость волны в среде.

На данной установке была проведена серия экспериментов. Они оказались количественно воспроизводимыми, что является трудно достижимым для данных сред. Эксперименты, в частности, показали, что силы, действующие на порошок в процессе формирования образца, влияют многократно больше на его динамические свойства, чем силы, приложенные уже к седиментированному образцу, поскольку первые влияют на формирование его микроструктуры. Статические свойства порошка (например, плотность) при этом могут оставаться мало чувствительными к этим силам, но скорость зву-

ка может меняться очень значительно.

Суммируя результаты, полученные на другой экспериментальной установке испанскими и французскими коллегами [29], и полученные на разработанной нами установке результаты, можно заключить, что в измеренном диапазоне частот зависимость фазовой скорости от частоты представляет собой убывающую вогнутую к оси частот кривую, стремящуюся к ненулевому постоянному значению на больших частотах. Измерения проводились для одних и тех же материалов. Коллегами также была измерена при помощи другого метода групповая скорость в среде на больших частотах, которая совпала с пределом фазовой скорости с точностью до ошибок измерения [217]. Заметим, что подобное поведение фазовой скорости характерно для оптической ветви акустических метаматериалов (раздел 2.3.4). С другой стороны, как будет показано ниже, оно не объясняется классическими вязкоупругими моделями. Обсудим различные модели сред, обладающих дисперсией, и их применимость к описанию наблюдаемой дисперсии в когезивных порошках. В данном случае, исходя из условий эксперимента, можно приближенно применять одномерную модель и искать решение в виде плоской волны $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t - kx)}$. Будем обозначать за E эффективный модуль Юнга для одномерной модели, η — различные параметры вязкости, ρ — эффективную (линейную) плотность.

3.5.2 Модель Кельвина – Фойгта.

Рассмотрим однородную вязкоупругую классическую среду Кельвина – Фойгта [312] :

$$Eu'' + \eta\dot{u}'' = \rho\ddot{u}. \tag{3.437}$$

Дисперсионное соотношение имеет вид

$$k^2 c_0^2 + ibk^2\omega = \omega^2, \qquad c_0^2 = \frac{E}{\rho}, \quad b = \frac{\eta}{\rho}. \tag{3.438}$$

Получаем

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2 + ib\omega} = \frac{\omega^2(c_0^2 - ib\omega)}{c_0^4 + b^2\omega^2}, \tag{3.439}$$

откуда

$$(\Re k)^2 - (\Im k)^2 = \frac{c_0^2\omega^2}{c_0^4 + b^2\omega^2}, \tag{3.440}$$

$$2\Re k \Im k = -\frac{b\omega^3}{c_0^4 + b^2\omega^2}, \tag{3.441}$$

$$(\Re k)^2 = \frac{\omega^2}{2(c_0^4 + b^2\omega^2)}(c_0^2 + \sqrt{c_0^4 + b^2\omega^2}), \tag{3.442}$$

квадрат фазовой скорости равен

$$c_f^2 = \frac{\omega^2}{(\Re k)^2} = \frac{2(c_0^4 + b^2\omega^2)}{c_0^2 + \sqrt{c_0^4 + b^2\omega^2}} = \frac{2(c_0^4 + b^2\omega^2)(\sqrt{c_0^4 + b^2\omega^2} - c_0^2)}{b^2\omega^2}, \tag{3.443}$$

т.е. фазовая скорость возрастает как на малых, так и на больших частотах. Таким образом, данная модель не может описать наблюдаемую в эксперименте дисперсию.

3.5.3 Модель Максвелла.

Рассмотрим простейший вариант определяющего уравнения однородной модели Максвелла [312] (T — сила в «стержне», G — параметр вязкости):

$$u' = \frac{T}{E} + \frac{\dot{T}}{G}. \tag{3.444}$$

Дифференцируя его по продольной координате, получаем

$$u'' = \frac{T'}{E} + \frac{\dot{T}'}{G}. \tag{3.445}$$

Уравнение динамики записывается в виде

$$T' = \rho \ddot{u}. \tag{3.446}$$

Подставляя его в предыдущее уравнение, получаем

$$u'' = \frac{1}{c_0^2}\ddot{u} + b\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, \qquad c_0^2 = \frac{E}{\rho}, \quad b = \frac{\rho}{G}, \tag{3.447}$$

откуда

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} + ib\omega^3, \tag{3.448}$$

$$2\Re k \Im k = b\omega^3, \tag{3.449}$$

$$(\Re k)^2 = \frac{\omega^2}{2c_0^2}(1 + \sqrt{1 + c_0^4 b^2 \omega^2}), \tag{3.450}$$

$$c_f^2 = \frac{2c_0^2}{1 + \sqrt{1 + c_0^4 b^2 \omega^2}} \tag{3.451}$$

На больших частотах

$$c_f \approx \sqrt{\frac{2}{b\omega}}. \tag{3.452}$$

Рассмотрим асимптотику групповой скорости на больших частотах. Приближая (3.450) для больших ω, получаем

$$\Re k \approx \sqrt{\frac{b}{2}}\omega^{3/2} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega \approx \left(\frac{2}{b}\right)^{1/3} (\Re k)^{2/3}. \tag{3.453}$$

Тогда групповая скорость

$$c_g = \frac{d\omega}{d\Re k} \approx \frac{2}{3}\left(\frac{2}{b}\right)^{1/3}(\Re k)^{-1/3} \approx \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{b\omega}} \approx \frac{2}{3}c_f. \tag{3.454}$$

Хотя фазовая скорость убывает на высоких частотах, она не стремится к постоянной величине, и к тому же асимптотика групповой скорости на больших частотах отличается от асимптотики фазовой скорости, что расходится с обсуждаемым экспериментом.

3.5.4 Взаимодействие твердой и газообразной фаз.

Поскольку упаковка мелкодисперсного когезивного образца является весьма неплотной, при движении на частицы порошка действует аэродинамическая сила. В силу мелкодисперсного состава образца эта сила оказывает существенно большее влияние на движение частиц, чем в крупнозернистых средах, где ею можно пренебречь. Поэтому представляется разумным рассмотреть ее влияние на движение порошка. Теория Био [25, 26], моделирующая двухфазный континуум, дает другой характер дисперсии.

Для полноты картины рассмотрим внешнее объемное вязкое трение $\eta\dot{u}$, действующее на каждую частицу. Оно может приближенно моделировать взаимодействие с газообразной фазой очень неплотной упаковки частиц порошка, в которой газ движется достаточно свободно. Уравнение движения, дисперсионное соотношение и выражение для фазовой скорости принимают

следующий вид:

$$Eu'' = \rho\ddot{u} + \eta\dot{u} \tag{3.455}$$

$$c_0^2 k^2 = \omega^2 - i(\eta/\rho)\omega, \qquad c_0^2 = E/\rho \tag{3.456}$$

$$k = K + i\kappa, \quad c_0^2(K^2 - \kappa^2 + 2iK\kappa) = \omega^2 - i\frac{\eta}{\rho}\omega, \tag{3.457}$$

$$\omega = \frac{c_0 K}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{K^2}}}, \quad b^2 = \frac{\eta^2}{(2E\rho)^2} \tag{3.458}$$

$$\kappa = -\frac{bc_0}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{K^2}}}, \tag{3.459}$$

и для фазовой скорости $c_f = \frac{\omega}{K}$ можно записать соотношение

$$c_f^2 + \frac{\omega^2}{b^2}\Big(1 - \frac{c_0^2}{c_f^2}\Big) = 0. \tag{3.460}$$

Решая биквадратное уравнение, получаем для бегущей волны

$$c_f^2 = \frac{\omega^2}{2b^2}\left(\sqrt{1 + \frac{4c_0^2 b^2}{\omega^2}} - 1\right). \tag{3.461}$$

В данном случае дисперсия имеется, а также при $\omega \to \infty$ имеем $\omega \approx c_0 \Re k$. Однако в данной модели, в отличие от обсуждаемых экспериментов, фазовая скорость возрастает с частотой. Действительно, на больших частотах

$$c_f \approx c_0(1 - \frac{b^2 c_0^2}{\omega^2}). \tag{3.462}$$

3.5.5 Модель Гусева – Алешина – Турна.

В работе Гусева, Алешина и Турна [121], описывающей распространение приповерхностной волны в сыпучей среде, предлагается следующая модель.

Сила тяжести вызывает изменение эффективных упругих констант в вертикальном направлении. Это приводит к появлению «естественного волновода», что вызывает дисперсию волны сдвига. За счет перевязки между волной растяжения – сжатия и волны сдвига дисперсия первой имеет тот же характер. Авторы получают весьма сложное решение и анализируют его асимптотику. Для коротких волн фазовая скорость стремится к постоянному значению c_0:

$$k \to \infty : \quad c_f/c_0 - 1 \sim k^{-2/3} \sim \omega^{-2/3} \tag{3.463}$$

Для длинных волн в данной модели асимптотика зависит от параметра модели $\alpha_0 < 1$, причем $\omega \sim k^{1-\alpha_0}$:

$$k \to 0 : \quad c_f/c_0 \sim k^{-\alpha_0} \sim \omega^{-\alpha_0/(1-\alpha_0)}. \tag{3.464}$$

Например, для обсуждаемых авторами параметров $\alpha_0 = 1/4, \alpha_0 = 1/6$ имеем асимптотику для фазовой скорости длинных волн $\omega^{-1/3}$, $\omega^{-1/5}$, соответственно. Значение групповой скорости c_g можно оценить, используя соотношение

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(c_f k)}{dk} = c_f + k\frac{dc_f}{dk}. \tag{3.465}$$

Тогда на больших частотах (для коротких волн) имеем

$$k \to \infty : \quad c_g - c_f = k\frac{dc_f}{dk} \sim k^{-2/3}. \tag{3.466}$$

Таким образом, в пределе на больших частотах в данной модели фазовая скорость и групповая совпадают, как и в эксперименте. Характер дисперсии в данной модели также качественно совпадает с наблюдаемым в эксперименте. Сравнение с асимптотикой на высоких частотах дает приемлемое совпадение

для $\alpha = 1/4, c_0 = 66$ м/с с рассматриваемым экспериментом. Для низких частот совпадение становится хуже. Сравнение с точным решением провести не представляется возможным, так как фазовая скорость волны сдвига определяется при помощи весьма сложной неявной функции, и неизвестны параметры связи продольной и поперечной волн. По-видимому, данная модель может служить для описания обсуждаемого эксперимента. В ней имеется, однако, некоторый недостаток. Очевидно, что если сила тяжести оказывает столь заметное влияние на упаковку среды, что меняются ее эффективные упругие константы, то она будет оказывать аналогичное влияние и на плотность. Неясно, насколько учет последнего фактора изменит дисперсию в среде.

3.5.6 Влияние внутренних степеней свободы: модели редуцированных континуумов.

Существует еще одна возможная причина, по которой в эксперименте может наблюдаться подобного рода дисперсия — наличие контрастных неоднородностей малого масштаба и отсутствие сопротивления среды некоторым видам их относительной деформации. Тогда среда представляет собой акустический метаматериал с одной или несколькими частотами отсечки, моделью которого служит редуцированный континуум. В разделе 2.3.4 получено общее выражение (2.49), определяющее фазовую скорость волн в таких изотропных средах. Видим из уравнения (2.51), что верхняя оптическая ветвь имеет фазовую скорость, возрастающую при приближении к частоте отсечки как $1/\sqrt{\Delta\omega}$, а на высоких частотах убывающую как $1/\omega^2$, причем она стремится к некоторому постоянному значению, совпадающему с пределом для групповой скорости на высоких частотах. Подобное поведение фазовой скорости мы видим и в обсуждаемом эксперименте. Каковы же могут быть

физические основания для применения моделей редуцированных континуумов? Возможны различные варианты.

3.5.6.1 Редуцированная среда Коссера с анизотропной перевязкой между поворотной и трансляционной деформацией.

Агрегаты зерен, сформировавшиеся при осаждении, на высоких частотах могут совершать поворотные движения, градиенту которых не сопротивляется среда. В этом случае подходящей моделью может быть редуцированная среда Коссера. Возникшая из-за наличия силы тяжести анизотропия упаковки обеспечит перевязку продольной волны и волны сдвига – вращения. Выражение для фазовой скорости в данной среде для случая, когда ось анизотропии ортогональна волновому вектору, получено в разделе 3.2.3.7. Наблюдаемое экспериментально в среде поглощение может быть связано не только с диссипацией, а также с тем фактом, что приемник измеряет лишь продольную часть смешанной волны. Диссипация в такой среде, безусловно, будет влиять на дисперсионные кривые, но их характер выше частоты отсечки останется прежним для не слишком высоких частот. Оказывается возможным подобрать упругие и инерционные параметры так, чтобы экспериментальные данные хорошо совпадали с теоретическими (см., например, рис. 3.33). Для данных параметров оценка снизу для эффективного радиуса неоднородности r_0 составляет около 0.85 мм. Эта оценка получена из следующих соображений. Для шара с радиусом r_0 имеем $I = \frac{2}{5}r_0^2$, для сферы с тем же радиусом $I = \frac{2}{3}r_0^2$. Для любого сферически симметричного тела-точки с радиусом r_0 мажорируем $3I/2 \leqslant r_0^2$. Отсюда

$$r_0 \geqslant \sqrt{3I/2} = \sqrt{\frac{6\alpha}{\mu}}\frac{c_s}{\omega_0} \tag{3.467}$$

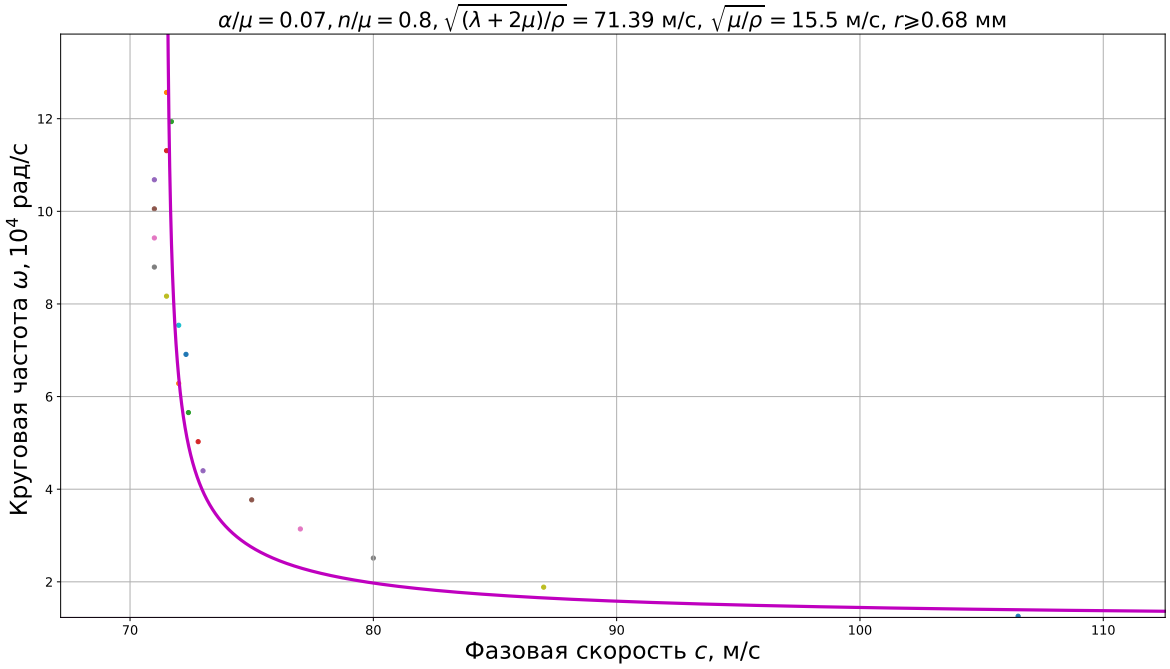

Рис. 3.33: Дисперсионная кривая упругой редуцированной среды Коссера с анизотропным осесимметричным перевязочным членом в упругой энергии и экспериментальные данные для порошка магнетита диаметром 65 мкм.

Если бы тело–точка являлось шаром, его радиус был бы больше примерно в $1,3$ раза данной оценки снизу. Наличие подобного рода тел–точек, моделирующих неоднородности, сформировавшиеся при осаждении порошка, возможно. Для окончательного вывода о применимости данной модели не хватает информации об упругих константах порошка и размере неоднородностей в упаковке: обычно агрегаты, формирующиеся в процессе осаждения в подобных порошках, имеют меньший размер, чем в примере, соответствующем рис. 3.33, однако неоднородности могут иметь и другое происхождение. Хорошее совпадение теоретической и экспериментальной кривой и личное сообщение аспиранта Ф.Р. Ботельо о том, что при сдвиговом начальном возмущении и измерении приходящей сдвиговой компоненты получались те же результаты, что и для сигнала в продольном направлении, говорят в пользу

модели редуцированной среды Коссера с анизотропной взаимосвязью различных типов деформаций, в которой данная волна является смешанной.

3.5.6.2 «Масса в массе» — материал с арочной структурой.

Рассмотрим другую возможную модель редуцированного континуума для описания реального эксперимента. Возможно, на распространение волн оказывает влияние наличие в среде областей с разной плотностью, например, пор, слабо заполненных материалом, не сообщающихся между собой непосредственно, и «несущего» скелета, проводящего волну. Это соответствует широко распространенной идее об арочном строении сыпучих сред [51, 81]. Будем рассматривать лишь объемные деформации в изотропной среде. Тогда модель становится одномерной (рассматриваем перемещения, коллинеарные волновому вектору). Рассмотрим ее простейший вариант: линейный упругий одномерный «несущий континуум» с плотностью ρ_1 и объемным модулем упругости K, оснащенный в каждой точке «динамическим гасителем» — осциллятором с некоторой плотностью ρ_0 и упругостью C. В трехмерном континууме это соответствует тому, что смещение центра масс замкнутой области – «поры» относительно центра масс ограничивающей ее «капсулы» несущего континуума вызывает упругие напряжения, то есть соответствует модели «масса в массе». Внутренние усилия в среде возникают как реакция на деформацию несущего континуума u_1' и на разность перемещений несущего континуума и распределенного динамического гасителя $u_1 - u_0$. Уравнения динамики записываются в виде

$$Ku_1'' + C(u_0 - u_1) = \rho_1 \ddot{u}_1, \tag{3.468}$$

$$C(u_1 - u_0) = \rho_0 \ddot{u}_0. \tag{3.469}$$

Как показано в разделе 2.5.1, дисперсионные соотношения модели «масса в массе» с точностью до обозначений совпадают с дисперсионными соотношениями для редуцированной упругой линейной изотропной среды Коссера. Пусть $\omega_0^2 = C/\rho_0, \omega_r^2 = C/\rho_1$, $c_{\text{inf}}^2 = K/\rho_1$. Граничная частота равна ω_r, а квадрат частоты отсечки — $\omega_0^2 + \omega_r^2 = C(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0})$.

Возможно подобрать параметры так, что экспериментальные данные будут весьма хорошо совпадать с теоретической кривой (рис. 3.34). Заметим,

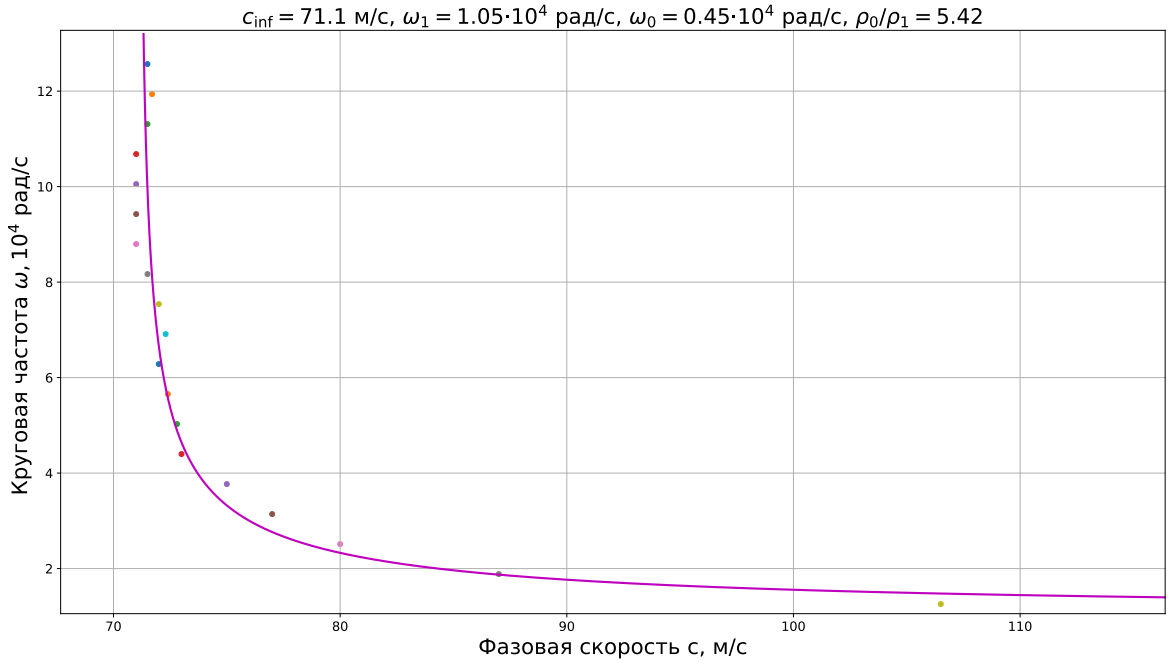

Рис. 3.34: Фазовая скорость в порошке магнетита 65 мкм. Экспериментальные данные обозначены точками, теоретическая кривая для модели акустического метаматериала арочной структуры — сплошной линией

что фазовая скорость на высоких частотах c_{inf} и частота отсечки $\sqrt{\omega_0^2 + \omega_r^2}$ определяются из экспериментальных данных с не очень большой погрешностью. В то же время различные отношения частот ω_0/ω_r и, соответственно, самые различные отношения плотностей ρ_0/ρ_1 дают теоретические кривые, достаточно хорошо совпадающие с экспериментальными результатами. Мож-

но лишь заметить, что ρ_0/ρ_1, по-видимому, больше 5. Это может быть связано с тем, что «несущий континуум» занимает малую часть общего объема сложного тела-точки, представляя собой «оболочку капсулы», и масса этой «оболочки» может быть заметно меньше массы «содержимого капсулы», даже если она заполнена менее плотным материалом. Плотности ρ_1, ρ_0 же вычисляются как масса доли несущего континуума/распределенного динамического гасителя в частице, деленная на объем всего тела–точки.

3.5.6.3 Численный эксперимент: аргументы в пользу модели редуцированной среды Коссера

В сотрудничестве с доктором Жаном-Ноэлем Ру (Jean-Noël Roux, университет Густава Эйфеля) и Егором Буклаковым (СПбПУ имени Петра Великого) был проведен численный эксперимент, основанный на методе дискретных элементов. Данный эксперимент является первым шагом к численному моделированию обсуждавшегося выше реального эксперимента, поэтому количественного сравнения результатов не проводилось. Была создана численная модель двумерной изотропной неупорядоченной упаковки порошка, состоящая из разнородных круглых частиц с упругими силами взаимодействия и слабой когезией. Упаковка помещена в прямоугольный контейнер (рис. 3.35). Зерна у левой стенки контейнера возбуждались синусоидальным импульсом. Движение системы подчиняется линейным уравнениям вблизи нелинейного равновесия. Измерялось прохождение продольного и поперечного сигнала. Было показано, что поперечная волна включает в себя поворотную и сдвиговую компоненту, и на достаточно высоких частотах наблюдается либо локализация, либо очень медленное распространение волн. На рисунке 3.36 показана доля энергии, которая остается у стенки контейнера после подачи синусоидального импульса через время, за которое волна

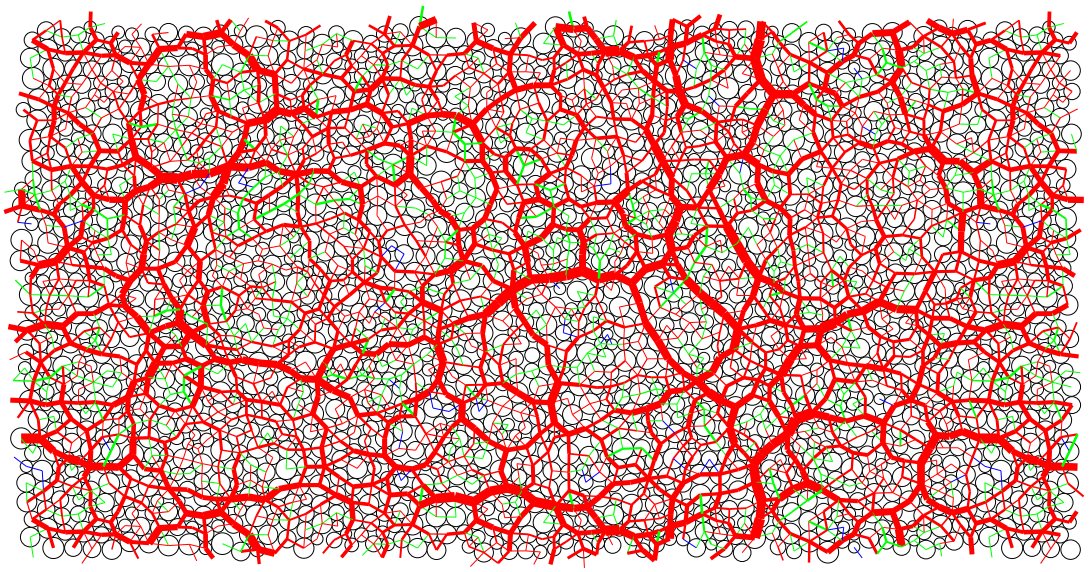

Рис. 3.35: Прямоугольный изотропный численный образец из 6300 зерен в равновесии. Величина нормальной реакции соответствует толщине линий. Красным цветом обозначены сжимающие силы, зеленым — растягивающие, синим — отсутствие сил. (Образец получен Ж.-Н. Ру.)

с низкой частотой достигает конца образца. За счет очагов локальной анизотропии, неоднородно ориентированных и распределенных в образце, этот эффект возникает и для продольной волны. Это еще один аргумент в пользу применимости редуцированных сред Коссера для консолидированных сыпучих материалов. По результатам исследований подготовлена статья в труды международной конференции Days on Diffraction 2023 и расширенные тезисы для 13-го Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. В других экспериментальных и численных работах [188–190], [221] полученные для неупорядоченных сыпучих сред дисперсионные соотношения также имеют вид, нетипичный для классических сред. Они имеют тот же характер, что и дисперсионные соотношения для редуцированной среды Коссера с диссипацией в области ниже частоты отсечки (рис. 3.24). По-видимому, в реальном эксперименте, описанном выше, измерения проводились для более высоких частот, чем в обсуждаемых численных моделях.

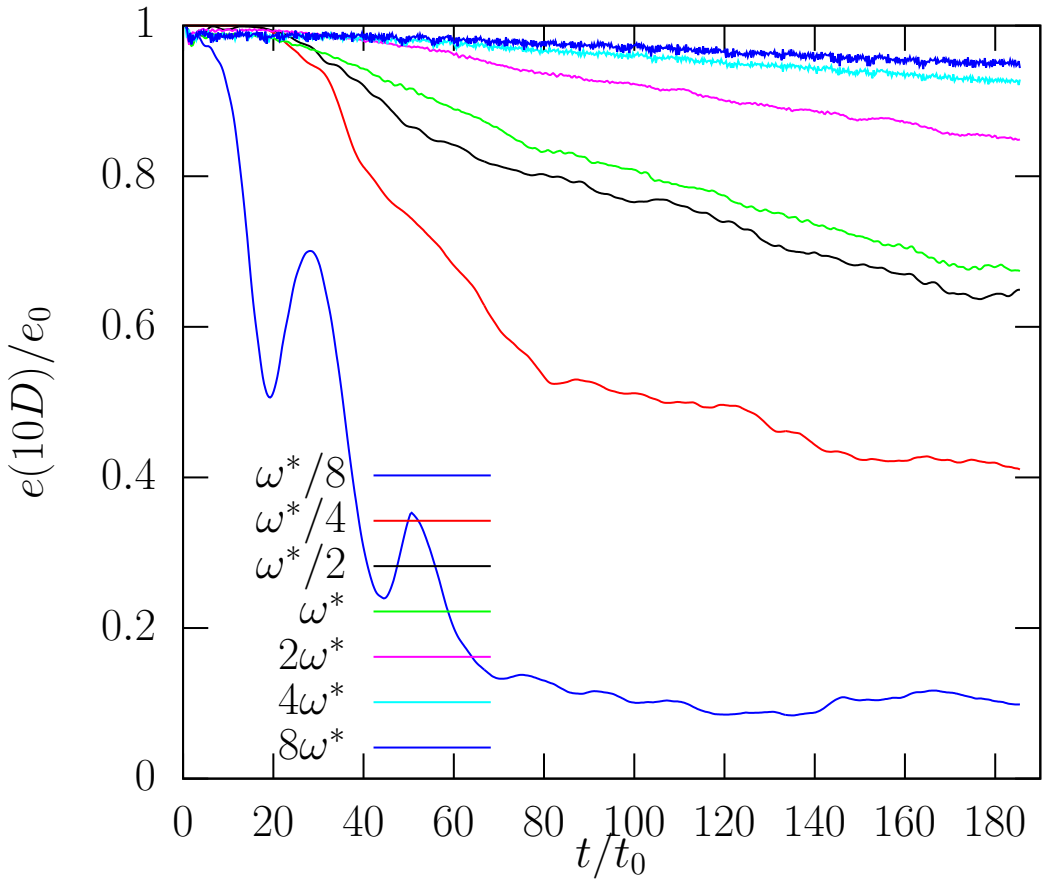

Рис. 3.36: Моделирование при помощи метода дискретных элементов распространения волны в прямоугольном контейнере с порошком. Поперечная волна. Доля энергии e/e_0, остающаяся на расстоянии 10 максимальных диаметров зерна от стенки, на которую был подан синусоидальный импульс, для различных частот. На низких частотах энергия распространяется, на высоких локализуется у стенки. Численная оценка частоты отсечки: $4.7\omega^*$, $t_0 = 1/\omega^*$.

3.6 Заключение.

В данной главе получены следующие результаты:

- Построены новые модели континуумов с поворотными степенями свободы, описывающие среды с неупорядоченной структурой поворотов (блоковые, зернистые, консолидированные сыпучие, с включениями), которые при определенных условиях демонстрируют свойства акустических метаматериалов, в том числе:

1. Нелинейная редуцированная среда Коссера
2. Редуцированная линейная среда Коссера с анизотропией различного типа, в том числе локальной, отвечающей за взаимосвязь различных типов деформации для коротких волн
3. Редуцированная среда Коссера со стесненным вращением
4. Вязкоупругие и пластическая линейные среды Коссера

- Исследованы особенности динамики и устойчивости данных сред:

1. Найден новый механизм неустойчивости нелинейной изотропной среды (при всестороннем растяжении).
2. Показано, что все данные изотропные линейные упругие среды, а также изотропная линейная редуцированная упругая среда Коссера являются акустическими метаматериалами по отношению к волне сдвига. Их динамика аналогична динамике некоторой классической среды с зависимостью от истории деформаций.
3. Введение локальной анизотропии дает приводит к аналогичному эффекту для продольной и смешанной волн.
4. Получена функция Грина для гармонических силы и момента в упругой изотропной редуцированной среде Коссера, ее характер свидетельствует о локализации части решения в определенной зоне частот и резонансах на ее границах. Подобные явления фиксируются сейсмологами.
5. Показано, что волна Рэлея в изотропной редуцированной среде Коссера имеет две ветви и запрещенную зону, находящуюся под запрещенной зоной для волны сдвига в трехмерной среде, оптическая ветвь обладает и частотой отсечки, и волновым числом отсечки.

6. Показано, что с ростом малой диссипации прохождение волн в запрещенных зонах различных редуцированных сред Коссера улучшается, появляется падающий участок дисперсионных кривых, для трансляционного трения он занимает всю запрещенную зону.

7. Предложена идея установки для воспроизводимого измерения скорости волн в когезивном порошке. Результаты эксперимента не описываются классической теорией, но описываются редуцированной моделью Коссера с локальной анизотропией или моделью «масса в массе».

По результатам данной главы можно сформулировать следующие **результаты, выносимые на защиту**:

1. Предложены различные модели редуцированных сред Коссера. Показано, что при линейных колебаниях они являются акустическими метаматериалами, рабочими зонами которых можно управлять при помощи нелинейного напряженно-деформированного состояния, малой диссипации и внешнего следящего момента.

2. Для сосредоточенных гармонических нагрузок в неограниченной изотропной упругой линейной редуцированной среде Коссера получена функция Грина, вид которой свидетельствует о возможности резонансных и/или локализованных вблизи источника решений.

3. Найден новый механизм неустойчивости нелинейных изотропных упругих сред Коссера с выпуклой энергией деформации при большом всестороннем растяжении, отсутствующий у классических сред.

Глава 4

Уравнения упругих гироконтинуумов.

Результаты данной главы опубликованы в [57, 104, 105, 115]. Соискатель является единственным автором работ [104,105]. Работа [57] выполнена в соавторстве с М.А. Дрепиным. Соискателю принадлежит постановка задачи и вывод нелинейных уравнений редуцированной среды Кельвина, М.А. Дрепину — линеаризация уравнений вблизи нелинейного состояния, анализ устойчивости и малых колебаний. Работа [115], первая часть которой изложена в диссертации, выполнена в соавторстве с проф. Ж.А. Моженом (G.A. Maugin, университет Пьера и Марии Кюри, Париж). Вклад проф. Можена заключался в редактировании статьи, обсуждении результатов и указании важных источников литературы. Содержание остальных частей статьи не включается в диссертационную работу, чтобы избежать перегрузки текста.

В данной главе будут обсуждаться нелинейные уравнения сред Кельвина, в том числе редуцированных сред, и управление волновыми свойствами линейных редуцированных сред Кельвина. Она посвящена задаче, поставленной в разделе 1.4:

- Предложить модели среды Кельвина или иного гироконтинуума, обладающие свойствами акустических метаматериалов, и исследовать влияние свойств континуума на дисперсионные соотношения и возможность управления рабочими зонами метаматериала при помощи внешней нагрузки

Энергия деформации упругих редуцированных сред Кельвина не зависит от градиента поворота тел-точек, хотя зависит от поворота их осей. Поэтому такие среды являются редуцированными в смысле определения, данного в главе 2. Они также являются редуцированными средами Коссера особого вида. Однако, несмотря на это, результаты предыдущих двух глав ни в какой степени не могут быть применимы к описанию редуцированных сред Кельвина. Причина этого состоит не только в том, что их определяющие уравнения носят особый характер, но и в том, что в динамическом члене баланса моментов для среды Кельвина превалирует гироскопическая сила, инерциальный член со второй производной по времени мал по сравнению с ней и не учитывается. В предыдущих главах, напротив, он учитывался, а гироскопическая сила отсутствовала. Поэтому динамика сред Кельвина сильно отличается от динамики сред, не являющихся гироконтинуумами.

4.1 Неоднородная среда Кельвина.

Среда Кельвина (рис. 4.1) — это особый тип среды Коссера со специфическими ограничениями для упругой энергии. Данная упругая среда состоит из вращающихся частиц с осевой симметрией (единичный вектор оси обозначим за $\mathbf{m}$). Их собственное вращение не вызывает напряжений в среде. Гироскопический член превалирует в динамической части закона баланса моментов. У данной среды существует точная аналогия с упругими непро-

водящими ферромагнетиками в состоянии, близком к состоянию магнитного насыщения в приближении квазимагнитостатики [118], чьи уравнения можно найти в книге [305]. Магнитная подсистема соответствует вращательным степеням свободы, а упругая — трансляционным. Вопрос выбора подходящих тензоров деформации для различных микрополярных континуумов с ограничениями на упругую энергию обсуждается в [66]. В работе [118] рассматривался случай однородной среды Кельвина, когда в натуральном состоянии все оси тел-точек сонаправлены, и были предложены тензоры деформации, которые не менялись при жестких движениях образца материала и при повороте тел-точек вокруг своих осей. Однако не всегда оси тел-точек сонаправлены в натуральной конфигурации, например, в материалах с геликоидальной магнитной структурой ситуация иная.

Простейшей *гиростатической средой* (рис. 4.2) назовем среду, состоящую из упруго взаимодействующих сферических тел-точек, содержащих внутри сфер быстро вращающиеся роторы. В некотором смысле такая среда близка по свойствам к среде Кельвина, как мы увидим в дальнейшем. Гироконтинуумы подобного рода были предложены в работах П.А. Жилина и Е.А. Ивановой [132, 133, 292].

Поворот тела-точки континуума описывается тензором $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\perp \cdot \mathbf{P}_\varphi$, где

$$\mathbf{P}_\varphi = (1 - \cos\varphi)\mathbf{mm} + \cos\varphi\mathbf{E} + \sin\varphi\mathbf{m} \times \mathbf{E}, \tag{4.1}$$

$\mathbf{m}$ — единичный вектор оси тела-точки в натуральной кофигурации. Угловая скорость тела-точки, как и ранее, находится из уравнения Пуассона $\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{P}$, $\boldsymbol{\omega} = \omega_\perp + \varphi\mathbf{m}'$, $\mathbf{m}' = \mathbf{P}\cdot\mathbf{m}$. Тензоры $\mathbf{A}, \mathbf{K}$ не меняются при жестких движениях материала и могут быть использованы как аргументы упругой энергии, чтобы обеспечить материальную объективность, однако необходимо

составить из них все независимые комбинации, в которые не входит φ и $\overset{\circ}{\nabla}\varphi$, чтобы учесть факт, что собственное вращение тел-точек или его градиент не вызывает напряжений в среде. Для однородной среды это было сделано в [118]. Формально можно использовать те же тензоры деформации и для неоднородной среды, однако это не всегда бывает удобно: предположения о том, что упругая энергия раскладывается в ряд Тейлора вблизи натурального состояния по тензорам деформации, может повлечь серьезные последствия при неудачном выборе тензоров деформации, например, исключить из рассмотрения некоторые члены в линейной теории, допускаемые основными фундаментальными законами. Поэтому вместо тензора $\mathbf{K}$ целесообразно использовать тензор

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{m}) \times \mathbf{m}, \tag{4.2}$$

трехмерный аналог используемого в теории оболочек Жилина тензора деформаций, чтобы учесть естественную кривизну спинов.

Уравнения динамики среды в предположении, что тензор инерции тела-точки инфинитезимален, а собственное вращение весьма велико, так что кинетический момент, соответствующий ему, является конечным, выглядят следующим образом

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{F} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \tag{4.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \rho\mathbf{L} = \rho I_m \boldsymbol{\omega} \times \dot{\varphi}\mathbf{m}', \tag{4.4}$$

где I_m — момент инерции тела-точки относительно оси симметрии.

В случае неоднородной среды Кельвина вместо системы тензоров дефор-

мации, рассмотренной в [118], можно рассмотреть систему

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{\top} - \mathbf{E})/2, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{m},\\ \boldsymbol{\mathcal{F}} = \hat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}^{\top} + ((\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{m})\times\mathbf{m})\times(\mathbf{E}+\boldsymbol{\varepsilon}),\end{gathered} \tag{4.5}$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{mm}$. Данная система является полной системой мер деформации, в которые не входят характеристики собственного вращения тел-точек. Соответствующие определяющие уравнения можно получить из нелинейных определяющих уравнений среды Коссера (3.5) путем дифференцирования энергии деформации как сложной функции:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{\top}\cdot\rho\Bigg(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{A} + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{m} + \left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}}}\right)^{\top}\cdot\hat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{a}\\ + \left(\left((\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}}})^{\top}\cdot((\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{m})\times\mathbf{m})\right)^{S}\cdot\mathbf{A}\right)\Bigg)\cdot\mathbf{P}^{\top},\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{\top}\cdot\rho\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}}}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}^{\top}. \tag{4.7}$$

Уравнения в данной форме можно линеаризовать относительно натуральной конфигурации, предполагая, что $\mathcal{U}$ разложима по своим аргументам в ряд Тейлора, без опасения потерять главные члены в линейной теории.

Далее мы будем рассматривать редуцированную среду Кельвина, в которой градиент поворота не вызывает напряжений. Это означает, что $\mathcal{U}$ не зависит от $\mathbf{K}$. Таким образом, $\mathcal{U}$ не зависит от $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, а тензор силовых напряжений

$$\boldsymbol{\tau} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{\top}\cdot\rho\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{A} + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{m}\right)\cdot\mathbf{P}^{\top}. \tag{4.8}$$

4.2 Динамика простейших упругих редуцированных среды Кельвина и гироконтинуума.

В предыдущих главах были рассмотрены акустические метаматериалы — редуцированные среды без динамического спина. Представляется интересным, как наличие спина, например, в случае, когда гироскопический член превалирует в кинетическом моменте, повлияет на динамику редуцированной среды. Будет ли такая среда акустическим метаматериалом? Возможно ли управлять ее свойствами при помощи внешних воздействий? Рассмотрим эти вопросы на примере двух сред с динамическим спином — простейшей среды Кельвина и гиростатической среды.

Редуцированная среда Кельвина показана схематически на рис. 4.1. Это среда Кельвина, в которой отсутствует упругая связь, реагирующая на градиент поворота осей частиц. На уровне аналогии между средой Кельвина и

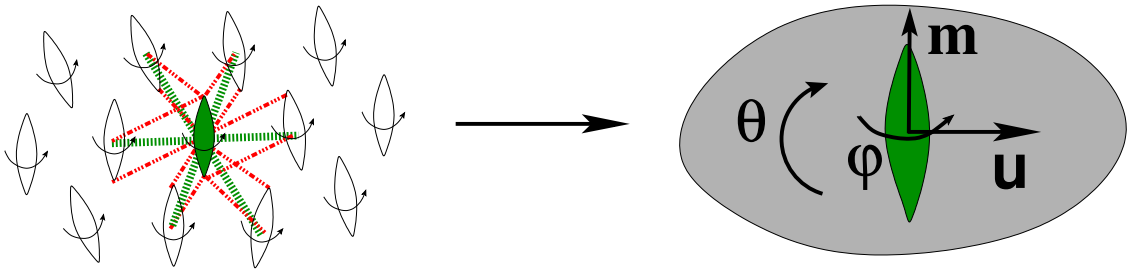

Рис. 4.1: Редуцированная среда Кельвина

магнитными материалами это означает, что мы пренебрегаем обменным взаимодействием, однако учитываем спин-решеточное взаимодействие. Возможно, это может быть подходящим приближенным описанием пьезомагнитных материалов выше точки Кюри.

Тело-точка простейшей гиростатической среды представляет собой малый жесткий контейнер, внутри которого ротор свободно вращается вокруг своей

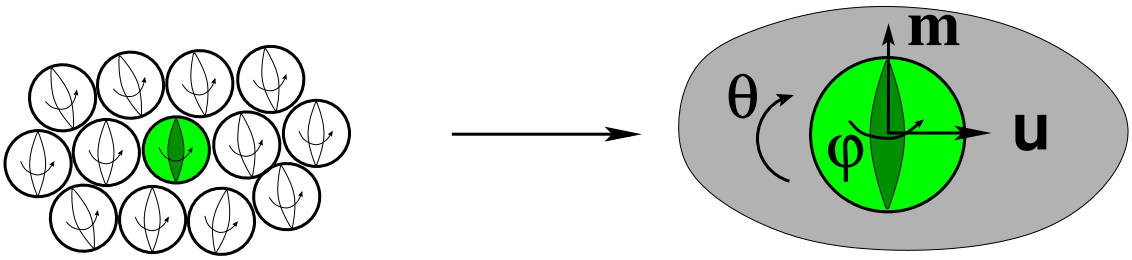

Рис. 4.2: Редуцированная гиростатическая среда

оси. Мы будем рассматривать случай, когда тензор инерции контейнера является сферическим. В натуральной конфигурации оси тел-точек направлены вдоль едичного вектора $\mathbf{m}$, не меняющегося в пространстве. Мы рассматриваем *редуцированную* гиростатическую среду: упругая энергия в ней не зависит от градиента поворота осей роторов (рис. 4.2).

Другими словами, мы рассматриваем «несущий» трансляционный континуум с «гироскопическими динамическими гасителями». Такие материалы создаются на практике [242, 327] с целью управления фронтами звуковых волн.

Упругий следящий внешний момент считаем пропорциональным поворотному перемещению. Такой момент можно создать, например, при помощи внешнего магнитного поля в магнитных материалах. Мы также можем создать его в механической среде. Например, роторы могут быть присоединены при помощи подшипников к магнитным стержням, укрепленных внутри сферических контейнеров, и затем на их направление можно влиять при помощи внешнего магнитного поля.

Мы рассматриваем простейший вариант обеих сред: линейную упругую изотропную гиростатическую среду со сферическим тензором инерции субчастицы-«контейнера» и осесимметричного ротора внутри него, и линейную упругую среду Кельвина с изотропным тензором упругости, соответству-

ющим трансляционным деформациям, отсутствием перекрестного члена в энергии между классической и поворотной деформацией, и изотропией в плоскости, ортогональной осям тел-точек.

Полагаем, что в натуральной конфигурации роторы / оси тел-точек коллинеарны ($\nabla\mathbf{m} = \mathbf{0}$).

4.2.1 Основные уравнения простейших редуцированных среды Кельвина и гиростатической среды.

4.2.1.1 Кинематика.

Простейшая редуцированная линейная гиростатическая среда. Движение сферы, содержащей гиростат, задается малым перемещением ее центра масс $\mathbf{u}$ и малым вектором поворота $\boldsymbol{\theta}$. В первом приближении тензор поворота сферы равен $\mathbf{P} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$. Движение гиростата внутри сферы совпадает с движением самой сферы с точностью до собственного вращения гиростата. Его тензор поворота равен $\mathbf{P}_g = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_\varphi(\varphi\mathbf{m})$,

$$\mathbf{P}_\varphi = (1 - \cos\varphi)\mathbf{m}\mathbf{m} + \cos\varphi\mathbf{E} + \sin\varphi\mathbf{m} \times \mathbf{E}, \tag{4.9}$$

где $\mathbf{m}$ — единичный вектор тела-точки в натуральной конфигурации. Рассматриваем случай $\nabla\mathbf{m} = \mathbf{0}$. Угловая скорость сферического контейнера равна $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ с точностью до членов высшего порядка, а угловая скорость ротора с точностью до $o^2(1)$ равна

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} + (\mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \dot{\varphi}\mathbf{m} = \dot{\varphi}\mathbf{m} + \boldsymbol{\theta} \times \dot{\varphi}\mathbf{m} + \dot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{4.10}$$

Заметим, что ось ротора в актуальной конфигурации определяется вектором $\mathbf{m}' = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{m}$, при этом $\dot{\mathbf{m}}' = \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}' = \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}$ (все величины записаны с точностью до $o^2(1)$).

Среда Кельвина. Движение каждого осесимметричного тела-точки описывается малым перемещением его центра масс $\mathbf{u}$, углом собственного вращения φ и малым вектором поворота оси тела-точки $\boldsymbol{\theta}$. Ось тела-точки задается вектором $\mathbf{m}$ в начальный момент времени, $\mathbf{m}'$ — в актуальный момент времени. Они отличаются на малую величину $\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{m}$. С точностью до $o^2(1)$ тензор поворота тела-точки равен

$$\mathbf{P} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_\varphi(\varphi \mathbf{m}), \tag{4.11}$$

где $\mathbf{P}_\varphi$ определяется уравнением (4.9). Таким образом, он совпадает с тензором поворота $\mathbf{P}_g$ гиростата внутри сферического тела-точки линейной гиростатической среды. Различие состоит в том, что в линейной гиростатической среде только сферы-«контейнеры» взаимодействуют друг с другом, а в среде Кельвина взаимодействуют осесимметричные тела-точки, т.е. это не вопрос кинематики. Угловая скорость тела-точки определяется выражением (4.10).

4.2.1.2 Кинетический момент и его производная по времени.

Собственное вращение ротора не влияет на распределение масс в телеточке гиростатической среды. Плотность тензора инерции в гиростатической среде и в среде Кельвина будем задавать одним и тем же выражением

$$\mathbf{I} = I_m \mathbf{m}'\mathbf{m}' + I(\mathbf{E} - \mathbf{m}'\mathbf{m}') = (I_m - I)\mathbf{m}'\mathbf{m}' + I\mathbf{E}. \tag{4.12}$$

С учетом выражений для угловых скоростей сферического контейнера ($\dot{\boldsymbol{\theta}}$) и ротора (4.10) в гиростатической среде / тела-точки в среде Кельвина получаем, что кинетический момент тела-точки в обеих средах равен

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\varphi} I_m \mathbf{m}'. \tag{4.13}$$

Если внешние нагрузки не влияют на собственное вращение роторов гиростатической среды / тел-точек среды Кельвина, то $\ddot{\varphi} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_2 &= \mathbf{I} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} + (I_m - I)(\mathbf{m}'\mathbf{m}')^{\cdot} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\varphi} I_m \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m} \\ &= \mathbf{I} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} + (I_m - I)(\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}'\mathbf{m}' + \mathbf{m}'\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}') \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + \dot{\varphi} I_m \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m} = \dot{\varphi} I_m \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m} + \mathbf{I} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} + o^2(1). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Если $\mathbf{I} = o(1)$, но $\dot{\varphi}$ велико, так что $M \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\varphi} I_m = O(1)$, то с точностью до $o^2(1)$

$$\dot{\mathbf{K}}_2 = M \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}. \tag{4.15}$$

4.2.1.3 Деформации и упругая энергия.

Деформации в простейшей редуцированной линейной гиростатической среде описываются тензором

$$\mathbf{g} = \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} = \nabla \mathbf{u}^S + (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) \times \mathbf{E}. \tag{4.16}$$

В случае полной линейной среды Коссера или полной линейной гиростатической среды энергия деформации также зависит от $\nabla\boldsymbol{\theta}$. Однако мы рассматриваем редуцированную среду, которая по своему определению запрещает данную зависимость.

Данный тензор деформации также получается при линеаризации системы нелинейных тензоров деформации (4.5) после исключения тензора $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Простейшая редуцированная линейная гиростатическая среда. Рассмотрим простейший вариант среды, а именно среду, чьи упругие тензоры изотропны. Тогда плотность энергии деформации задается тем же соотношением, что и для редуцированной линейной упругой изотропной среды Коссера (см. раздел 2.9):

$$\rho\,\mathcal{U} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}^S \cdot\cdot\, \mathbf{C} \cdot\cdot\, \nabla\mathbf{u}^S + \alpha(\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2)^2), \tag{4.17}$$

где ρ — плотность,

$$\mathbf{C} = \lambda\mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)^S(\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n)^S, \tag{4.18}$$

а $\mathbf{e}_m$ — некий ортонормальный базис. Для редуцированного линейного гиростатического континуума общего вида $\rho\mathcal{U}$ — квадратичная форма $\mathbf{g}$, но изотропия влечет данный частный вид упругой энергии, в частности, исключая перекрестный член между $\mathbf{g}^S$ и $\mathbf{g}^A$. Симметричная часть тензора деформации $\mathbf{g}^S = \nabla\mathbf{u}^S$ — это тензор деформации в линейной классической теории упругости. Антисимметричная часть $\mathbf{g}^A = (\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2)\times\mathbf{E}$ описывает поворот сферического контейнера в гиростатической среде. Материал сопротивляется проекции вектора данного относительного поворота на ось ротора в гиростатической среде $(\boldsymbol{\theta} - \nabla\times\mathbf{u}/2)\cdot\mathbf{m}$.

Простейшая редуцированная среда Кельвина. В среде Кельвина собственное вращение тела-точки относительно ее оси $\mathbf{m}$ не вызывает напряжений: $\partial_\varphi\mathcal{U} = 0$. В линейном приближении $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla\mathbf{u}^S$, $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{m} + (\nabla\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{m}$.

Таким образом, тензор деформации, от которого зависит упругая энергия, в линейном случае выглядит следующим образом:

$$\mathbf{g}^S - \mathbf{g}_\times \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{E}/2 = \nabla \mathbf{u}^S + (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{E}. \tag{4.19}$$

Здесь $\mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{mm}$. В полной линейной среде Кельвина, теория которой предложена в [283], упругая энергия зависит от того же тензора деформаций и от $\nabla\boldsymbol{\theta}$. Мы рассматриваем редуцированную среду, вследствие чего $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \nabla\theta} = \mathbf{0}$. Выберем простейший вариант плотности энергии деформации:

$$\rho\,\mathcal{U} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^S \cdot\cdot\, \mathbf{C} \cdot\cdot\, \nabla \mathbf{u}^S + \alpha((\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) \cdot \mathbf{a})^2),$$

где $\mathbf{C}$ — изотропный тензор, определяемый выражением (4.18). Поскольку взаимодействующие тела-точки осесимметричны, в среде имеется ось анизотропии $\mathbf{m}$. Поэтому выражение для энергии деформации содержит тензор $\mathbf{a}$. В плоскости, определяемой данным тензором-проектором, выбранный вариант среды является изотропным.

4.2.1.4 Определяющие уравнения.

По определению линейного редуцированного гиростатического континуума работа на собственном вращении роторов не совершается. Таким образом, баланс энергии выглядит так же, как если бы роторы не обладали спином собственного вращения, то есть в этом случае он совпадает с балансом энергии для линейной редуцированной среды Коссера, обсуждаемым в разделе 2.9.

$$\rho\dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau}^\top \cdot\cdot\, \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\tau}^\top \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{g}}. \tag{4.20}$$

Работа, совершаемая тензором моментных напряжений на любом тензоре поворотных деформаций $\nabla\dot{\boldsymbol{\theta}}$, равна нулю по определению редуцированной среды. Таким образом, тензор моментных напряжений равен нулю.

Тот же аргумент (работа не совершается на собственном вращении телточек) приводит к такому же выражению для баланса энергии в редуцированной среде Кельвина. Тензор моментных напряжений оказывается равным нулю по той же причине, поскольку среда является редуцированной, и на $\nabla\dot{\boldsymbol{\theta}}$ не совершается работы. Данная форма баланса энергии (в форме Жилина) позволяет записать нам определяющие уравнения для обеих сред

$$\boldsymbol{\tau} = \rho\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{g}}. \tag{4.21}$$

Учитывая выражения для упругой энергии для обеих сред, можно записать определяющие уравнения. Для редуцированной гиростатической среды

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\,\mathbf{E} + 2\mu(\nabla\mathbf{u})^S + 2\alpha(\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u})\times\mathbf{E}, \tag{4.22}$$

а для редуцированной среды Кельвина

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\,\mathbf{E} + 2\mu(\nabla\mathbf{u})^S + 2\alpha(\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{E}. \tag{4.23}$$

Уравнения простейшей редуцированной среды Кельвина также можно получить из нелинейных (4.8), отбрасывая малые высшего порядка и делая необходимые предположения о симметрии тензоров.

4.2.2 Динамика под действием внешнего объемного следящего момента при отсутствии внешней объемной силы.

Обозначим $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{a}$. В обеих средах под действием внешнего объемного следящего момента с плотностью $b\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ (например, производимого при помощи магнитной индукции) баланс сил и баланс моментов выглядят следующим образом

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \tag{4.24}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\times} - b\tilde{\boldsymbol{\theta}} = M\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}. \tag{4.25}$$

Редуцированная гиростатическая среда. Используя определяющие уравнения для редуцированного гиростатического континуума (4.22), мы получаем уравнения динамики в перемещениях

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \alpha\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\theta}) = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \tag{4.26}$$

$$4\alpha(\nabla \times \mathbf{u}/2 - \boldsymbol{\theta}) - b\,\tilde{\boldsymbol{\theta}} = M\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}. \tag{4.27}$$

Уравнение (4.27) может быть записано в виде

$$(\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) \cdot \mathbf{m} = 0, \tag{4.28}$$

$$4\alpha(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \nabla \times \mathbf{u}/2) \cdot \mathbf{a} + b\,\tilde{\boldsymbol{\theta}} + M\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \times \mathbf{m} = \mathbf{0}. \tag{4.29}$$

Учитывая (4.28), можем записать баланс сил в следующем виде

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \alpha\nabla \times \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\theta}) = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \tag{4.30}$$

Ограничение (4.28) определяет величину $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{m}$, которая не входит ни в модифицированный баланс сил (4.30), ни в плоскую часть баланса моментов (4.29) для гиростатической среды. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением лишь плоской части баланса моментов (4.29) и баланса сил (4.30).

Редуцированная среда Кельвина. Используя определяющие уравнения редуцированной среды Кельвина (4.23), получаем ее уравнения динамики в перемещениях

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \alpha\nabla \times \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\theta}) = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \qquad (4.31)$$

$$4\alpha(\nabla \times \mathbf{u}/2 - \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{a} - b\,\tilde{\boldsymbol{\theta}} = M\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}. \qquad (4.32)$$

Заметим, что баланс сил для редуцированной среды Кельвина (4.31) совпадает с модифицированным балансом сил для редуцированного гиростатического континуума (4.30), а баланс моментов для редуцированной среды Кельвина (4.32) — с плоской частью баланса моментов для редуцированного гиростатического континуума (4.29).

В среде Кельвина проекция поворота тела-точки относительно окружающей среды на ось тела-точки $\mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2)$ произвольна и не вызывает напряжений в среде, упругая энергия от нее не зависит. В редуцированном гиростатическом континууме при отсутствии внешнего объемного момента, параллельного $\mathbf{m}$, имеем $\mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) = 0$. Кроме $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{m}$, остальные кинематические величины подчиняются одним и тем же волновым уравнениям (4.29), (4.30) для обеих сред.

Волна растяжения – сжатия и волна сдвига – вращения. Заметим, что $\nabla \cdot \mathbf{u}$ входит лишь в баланс сил (4.30). Вычисляя дивергенцию от обеих

частей этого уравнения, мы получим, что волна растяжения–сжатия в данной среде является классической:

$$(\lambda + 2\mu)\triangle\nabla \cdot \mathbf{u} = \rho(\nabla \cdot \mathbf{u})^{\cdot\cdot}, \tag{4.33}$$

а ее скорость равна $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$. На нее не оказывают влияния поворотные степени свободы. Для поперечной волны $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, поэтому из выражений (4.29), (4.30) мы получаем уравнения для волны сдвига–вращения $\mathbf{u}_s$:

$$\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}_s)+\alpha\nabla\times\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{u}_s-2\boldsymbol{\theta})=-\rho\ddot{\mathbf{u}}_s, \tag{4.34}$$

$$4\alpha(\nabla \times \mathbf{u}_s/2 - \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{a} - b\,\tilde{\boldsymbol{\theta}} = M\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}. \tag{4.35}$$

Тот факт, что волна растяжения–сжатия и волна сдвига–вращения отделяются друг от друга, имеет место вследствие изотропии определенных упругих тензоров. В общем (анизотропном) случае в упругой энергии существует перекрестный член между $\nabla\mathbf{u}^S$ и $\mathbf{a} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \nabla \times \mathbf{u}/2)$ и, вообще говоря, волны будут смешанными.

4.2.3 Режим регулярной прецессии.

Введем характеристическую частоту $\omega_b = \frac{4\alpha+b}{M}$. Пусть векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m}$ образуют ортонормальный правоориентированный базис. Уравнения движения (4.29), (4.30) допускают особое решение:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} \equiv \mathbf{0},\\
&\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \theta_0(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)e^{i\omega_b t} =\\
&\qquad = \theta_0(\mathbf{e}_1\cos\omega_b t - \mathbf{e}_2\sin\omega_b t + i(\mathbf{e}_1\sin\omega_b t + \mathbf{e}_2\cos\omega_b t)),
\end{aligned} \tag{4.36}$$

соответствующее вращению вектора $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ вокруг $\mathbf{m}$ с угловой скоростью $-\omega_b$. Это означает, что тела-точки среды Кельвина совершают регулярную прецессию с углом нутации θ_0, скоростью прецессии $-\omega_b$ и скоростью собственного вращения $\dot{\varphi}$ (прецессию сферических контейнеров, сопровождаемую собственным вращением роторов, в случае редуцированной гиростатической среды). Это движение показано на рис. 4.2.3.

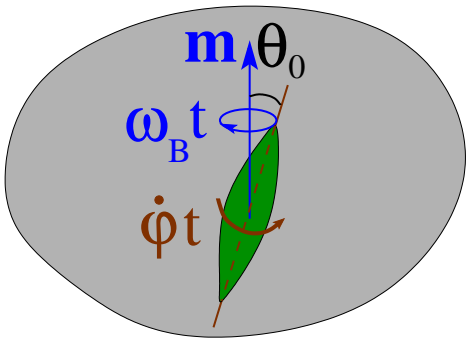

Рис. 4.3: Регулярная прецессия, $\omega = \omega_b$, центры масс неподвижны.

4.2.4 Гармонические волны сдвига–вращения. Уравнение Кристоффеля.

Будем искать решение уравнений (4.34), (4.35) в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$. Получим

$$\mu\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u}_s) + 2i\alpha\mathbf{k}\times(\mathbf{a}\cdot(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - i\mathbf{k}\times\mathbf{u}_s/2)) = -\rho\omega^2\mathbf{u}_s, \tag{4.37}$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{k}i\times\mathbf{u}_s)/2 = \frac{\omega_b}{\omega_0}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + i\frac{\omega}{\omega_0}\,\tilde{\boldsymbol{\theta}}\times\mathbf{m}, \tag{4.38}$$

где $\omega_0 = \frac{4\alpha}{M}$. Если внешний объемный момент равен нулю, то $\omega_0 = \omega_b$. Ниже мы будем использовать закон баланса моментов, чтобы выразить $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ через $\mathbf{u}_s$ и получить редуцированное уравнение Кристоффеля для $\mathbf{u}_s$.

Уравнение (4.38) можно переписать в виде

$$i\mathbf{a}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{u}_s)/2=\frac{\omega_b}{\omega_0}(\mathbf{a}-i\frac{\omega}{\omega_b}\mathbf{m}\times\mathbf{a})\cdot\tilde{\boldsymbol{\theta}}. \tag{4.39}$$

Умножим слева скалярно данное уравнение на тензор

$$(\mathbf{a}-i\frac{\omega}{\omega_b}\mathbf{m}\times\mathbf{E})^\top=(\mathbf{a}+i\frac{\omega}{\omega_b}\mathbf{m}\times\mathbf{E}). \tag{4.40}$$

Дисперсионное соотношение при этом не приобретет паразитных корней, так как для любого тензора второго ранга $\boldsymbol{\Lambda}$ верно $\det(\boldsymbol{\Lambda}^\top\cdot\boldsymbol{\Lambda})=(\det\boldsymbol{\Lambda})^2$.

Используя тождество

$$(\mathbf{a}+i\frac{\omega}{\omega_b}\mathbf{m}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{a}-i\frac{\omega}{\omega_b}\mathbf{m}\times\mathbf{a})=\mathbf{a}+\frac{\omega^2}{\omega_b^2}\mathbf{m}\times\mathbf{a}\times\mathbf{m}=(1-\frac{\omega^2}{\omega_b^2})\mathbf{a}, \tag{4.41}$$

получаем из уравнения (4.39) при условии $\omega\neq\omega_b$

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}=-\frac{\omega_0\omega_b}{\omega^2-\omega_b^2}(i\mathbf{a}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{u}_s)-\frac{\omega}{\omega_b}\mathbf{m}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u}_s)). \tag{4.42}$$

Можем выразить величину $\mathbf{a}\cdot(\tilde{\boldsymbol{\theta}}-i\mathbf{k}\times\mathbf{u})/2$, входящую в баланс сил (4.37), через $\mathbf{u}_s$, и получить редуцированное уравнение Кристоффеля для трансляционного перемещения.

Вычислим последний член в левой части уравнения (4.37). Как и ранее, пусть $\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{k}/k$, $k=|\mathbf{k}|$.

$$\begin{aligned}2\alpha i\mathbf{k}\times(\tilde{\boldsymbol{\theta}}-i\mathbf{a}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{u}/2))&=\alpha k^2(1+\frac{\omega_0\omega_b}{\omega^2-\omega_b^2})(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{m})(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{m})\cdot\mathbf{u}_s\\&-\alpha k^2(1+\frac{\omega_0\omega_b}{\omega^2-\omega_b^2})\mathbf{u}_s-i\alpha k^2\frac{\omega_0\omega}{\omega^2-\omega_b^2}\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{m}(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{u}_s\end{aligned} \tag{4.43}$$

Подставляя это выражение в (4.37), мы получаем редуцированное уравнение

Кристоффеля для трансляционного перемещения сдвига:

$$(\rho\omega^2 - (\mu + \alpha(1 + \frac{\omega_0\omega_b}{\omega^2 - \omega_b^2}))k^2)\mathbf{u}_s + \alpha k^2(1 + \frac{\omega_0\omega_b}{\omega^2 - \omega_b^2})(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{m})(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{u}_s$$
$$- i\alpha k^2 \frac{\omega_0\omega}{\omega^2 - \omega_b^2}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{m}(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_s = \mathbf{0}. \quad (4.44)$$

4.2.5 Распространение волн ортогонально начальному спину.

Рассмотрим случай $\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = 0$. Обозначим $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{m}$. Тогда задача (4.44) принимает форму

$$\mathbf{0} = (\rho\omega^2 - \mu k^2)\mathbf{e}\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_s + (\rho\omega^2 - (\mu + \alpha(1 + \frac{\omega_0\omega_b}{\omega^2 - \omega_b^2}))k^2)\mathbf{m}\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_s. \quad (4.45)$$

Если $\mathbf{u}_s = u_0\mathbf{e}$, то волна сдвига — та же, что и в классической среде ($\omega = \sqrt{\mu/\rho}\, k$). При этом она является чисто трансляционной: баланс моментов (4.38) в данном частном случае сводится к уравнению

$$\frac{\omega_b}{\omega_0}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + i\frac{\omega}{\omega_0}\tilde{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (4.46)$$

что соответствует регулярной прецессии тела-точки с частотой ω_b, при этом $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ не меняется в пространстве.

Имеется и другое решение для волны сдвига: $\mathbf{u}_s = u_0\mathbf{m}$,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2}\frac{\omega^2 - \omega_b^2}{\omega^2 - \omega_{1b}^2} \quad (4.47)$$

где

$$c_{S\alpha}^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}, \quad \omega_{1b}^2 = \omega_b^2 - \frac{\alpha\omega_0\omega_b}{\mu + \alpha}. \quad (4.48)$$

Поскольку $\omega_b = \frac{4\alpha+b}{M}$,

$$\omega_{1b}^2 = \frac{4\alpha+b}{M^2}\left(\frac{4\alpha}{1+\alpha/\mu}+b\right). \tag{4.49}$$

Если оба множителя положительны, $\omega_{1b}^2 < \omega_b^2$. Если они оба отрицательны, то $\omega_{1b} > |\omega_b|$. Если их знаки различны, ω_{1b} — чисто мнимое число.

Поведение ветви (4.47) при $\omega \to 0$ определяется выражением

$$\frac{\omega^2}{k^2} \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} c_{S\alpha}^2 \frac{\omega_{1b}^2}{\omega_b^2} = c_s^2(1+\frac{\alpha}{\mu}(1-\frac{4\alpha}{4\alpha+b})). \tag{4.50}$$

В то время как волна растяжения – сжатия не отличается от классической, волна сдвига – вращения, если направление ее распространения не ортогонально оси роторов, дисперсивна и поляризована. Одна из ее ветвей имеет запрещенную зону, а другая — нет. Если направление распространения волны параллельно оси роторов, поляризация является круговой и не зависит от частоты, а если волна распространяется под (не прямым) углом, поляризация является эллиптической и частотно зависимой. Если волновой вектор ортогонален осям роторов, одна ветвь совпадает с классической плоской волной сдвига, а другая также является плоской, но обладает дисперсией и зоной непропускания, ее дисперсионное соотношение аналогично соотношению для изотропной редуцированной среды Коссера, полученному в разделе 3.2.2.1.

1. $\underline{b > 0.}$

   Из уравнения (4.50) видно, что скорость на низких частотах лежит в области $[c_s; c_{S\alpha})$. График дисперсионного соотношения представлен на рис. 4.4.

2. $\underline{-4\alpha/(1+\alpha/\mu) < b < 0.}$ Скорость на низких частотах ниже c_s. График соотношения представлен на рис. 4.4.

3. $-4\alpha < b \leqslant -4\alpha/(1+\alpha/\mu)$. Здесь материал теряет устойчивость, поскольку нижняя ветвь волны сдвига – вращения превращается в растущие колебания.

4. $b = -4\alpha$. Здесь снова появляется нижняя ветвь волны сдвига – вращения, она недисперсивна: $\omega = c_{S\alpha}k$, ее скорость больше, чем скорость другой волны сдвига, где $\mathbf{u}\cdot\mathbf{m} = 0$. При данных параметрах возможно решение, соответствующее отклонению осей тел-точек на одну и ту же постоянную во времени и пространстве величину, при этом центры масс неподвижны. Строго говоря, материал не является устойчивым.

5. $b < -4\alpha$.

   В этом случае $|\omega_b| < \omega_{1b}$, и дисперсионные кривые $\omega(k)$ обладают падающими участками (рис. 4.5). В этих областях среда является дважды отрицательным акустическим метаматериалом по отношению к данному виду волны. У нее также имеется запрещенная зона $(|\omega_b|;\omega_{1b}]$, где она ведет себя как единожды отрицательный акустический метаматериал. Интересно, что в данной среде имеется также запрещенная зона для волнового числа, то есть волны определенной длины не существуют в данной среде. Зеленым на этом и следующем рисунке обозначены участки с малой дисперсией, синим — с существенной дисперсией, красным — запрещенная зона.

   Кажется странным, что при увеличении модуля отрицательного коэффициента в следящем моменте возникло устойчивое, по крайней мере на низких частотах, решение. Это связано, по-видимому, с тем, что в инерциальном члене баланса моментов учтена лишь гироскопическая сила, а вторая производная вектора малого поворота считается пренебрежимо малой. Если учитывать данную вторую производную, среда окажется

неустойчивой по отношению к высокочастотным возмущениям.

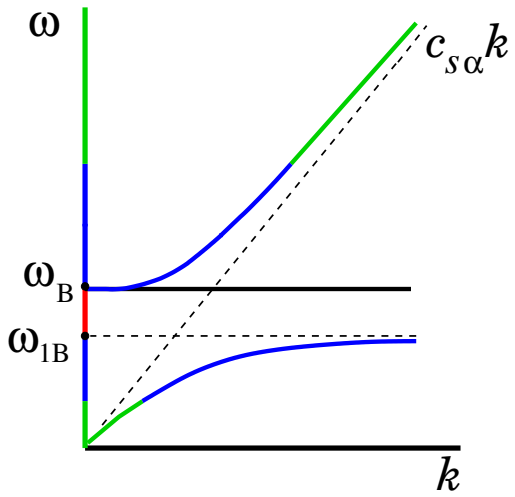

Рис. 4.4: Дисперсионные кривые для редуцированной среды Кельвина, волны сдвига – вращения. Волна сдвига – вращения распространяется ортогонально осям тел-точек, **u** коллинеарно им, $4\alpha + b > 0$. Нижняя ветвь исчезает (появляется неустойчивость) при $4\alpha + b(1 + \alpha/\mu) < 0$.

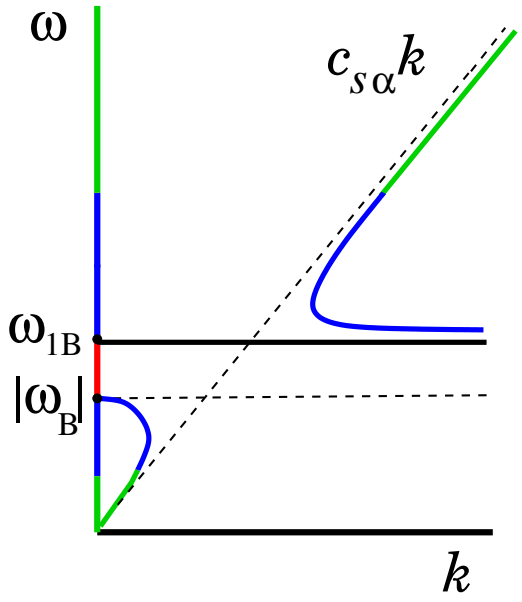

Рис. 4.5: Дисперсионные кривые для редуцированной среды Кельвина, волны сдвига – вращения. Волна сдвига – вращения распространяется ортогонально осям тел-точек, **u** коллинеарно им, $4\alpha + b < 0$.

Фазовая и групповая скорости волны при $\omega \to \infty$ стремятся к $c_{S\alpha}$.

4.2.6 Распространение волн вдоль начального спина.

Если волна распространяется параллельно осям тел-точек, уравнение Кристоффеля (4.44) принимает форму

$$(\rho\omega^2 - (\mu + \alpha(1 + \frac{\omega_0\omega_b}{\omega^2 - \omega_b^2}))k^2)\mathbf{u}_s - i\alpha k^2 \frac{\omega_0\omega}{\omega^2 - \omega_b^2}(\mathbf{m} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_s = \mathbf{0}. \quad (4.51)$$

Получаем решение для волны сдвига-вращения с круговой поляризацией: $\mathbf{u}_s = u_0(\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2)e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m}$ — ортонормальный базис, при этом дисперсионная ветвь

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2} \frac{\omega + \omega_b}{\omega + \omega_{1b}^2/\omega_b}, \quad (4.52)$$

соответствует собственному вектору $\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$, т.е. вектору перемещения, вращающемуся в том же направлении, что и оси тел-точек, а дисперсионная ветвь

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2} \frac{\omega - \omega_b}{\omega - \omega_{1b}^2/\omega_b}, \quad (4.53)$$

соответствует собственному вектору с запрещенной зоной $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$, т.е. вектору перемещения, вращающемуся в направлении, противоположном собственному вращению тел-точек.

Заметим, что поведение при $\omega \to 0$ также определяется выражением (4.50) для обеих ветвей, и скорость при $\omega \to \infty$ стремится к $c_{S\alpha}$, как и ранее.

В данном случае обе ветви являются дисперсивными, хотя ветвь без запрещенной зоны обладает гораздо более слабой дисперсией, чем другая. В зависимости от внешнего момента имеются следующие варианты:

1. $\underline{b \geqslant 0.}$

   В этом случае $\omega_b > 0$, $\omega_{1b}^2 > 0$, $\omega_{1b}^2/\omega_b < \omega_b$, скорость при $\omega \to 0$ совпадает

со скоростью для $\mathbf{k}\cdot\mathbf{m}=0$, и находится между c_s и $c_{S\alpha}$. Ветвь, соответствующая вектору перемещений $\mathbf{u}$, вращающемуся противоположно собственному вращению тел-точек, имеет запрещенную зону $(\omega_{1b}^2/\omega_b;\omega_b)$, а соответствующая $\mathbf{u}$, вращающемуся в том же направлении, не имеет (рисунок 4.6). На этом рисунке и далее разными цветами (бирюзовым и зеленым) обозначены различно поляризованные волны.

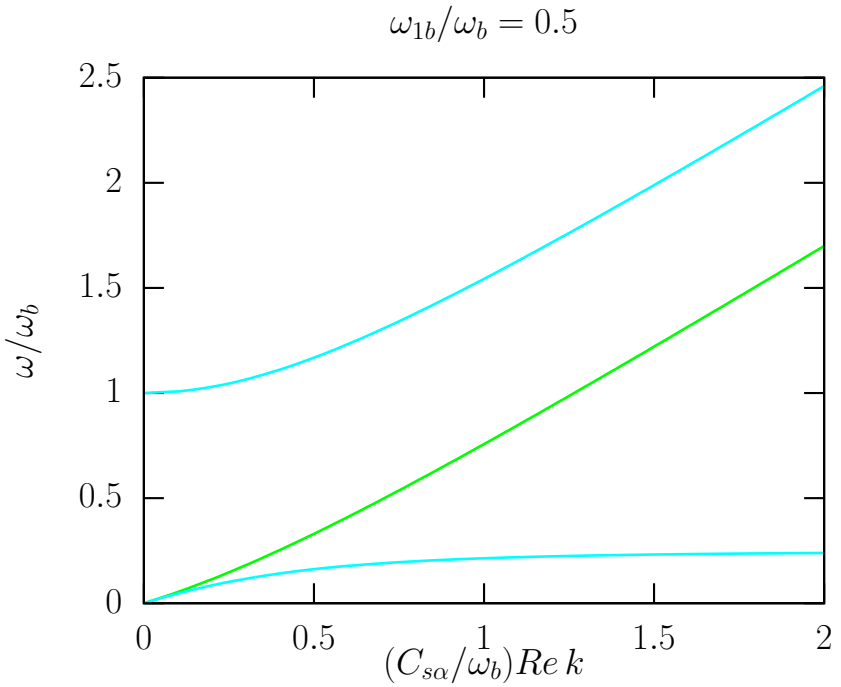

Рис. 4.6: Дисперсионные кривые редуцированной среды Кельвина. Волна сдвига – вращения с круговой поляризацией распространяется параллельно осям тел-точек, $b > -4\alpha/(1+\alpha/\mu)$.

2. $\underline{-4\alpha/(1+\alpha/\mu) < b < 0.}$

В этом случае $\omega_{1b}^2 > 0$, $0 < \omega_{1b} < \omega_b$, $\omega_{1b}^2/\omega_b < \omega_b$, скорость при $\omega \to 0$ равна скорости для $\mathbf{k}\cdot\mathbf{m}=0$ и меньше c_s. Ветвь, поляризованная противоположно собственному вращению роторов, обладает запрещенной зоной $(\omega_{1b}^2/\omega_b;\omega_b)$, а волна, поляризованная в том же направлении, не имеет ее (рис. 4.6). Качественно это совпадает со случаем $\mathbf{k}\cdot\mathbf{m}=0$.

3. $\underline{-4\alpha < b \leqslant -4\alpha/(1+\alpha/\mu)}$. Этот случай мы не будем рассматривать, так как материал неустойчив по отношению к низкочастотным сдвиговым возмущениям для волны, распространяющейся ортогонально направлению собственного вращения тел-точек.

4. $\underline{b = -4\alpha}$. При таком внешнем моменте $\omega_b = 0, \omega_{1b} = 0$, $\frac{\omega_{1b}^2}{\omega_b} = -\omega_0 \frac{\alpha}{\mu+\alpha}$.

   В этом случае баланс моментов (4.35) принимает вид

$$\frac{2\alpha}{M} \nabla \times \mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}, \tag{4.54}$$

   или, после преобразования Фурье,

$$\frac{2\alpha}{M} \mathbf{k} \times \mathbf{u} = \omega \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{m}, \tag{4.55}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{2\alpha k}{M\omega} (\hat{\mathbf{k}}\mathbf{m} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{m} \cdot \mathbf{k}) = \mp \frac{2\alpha k}{M\omega} \mathbf{u}. \tag{4.56}$$

   Дисперсионные кривые подчиняются соотношению

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2} \cdot \frac{\omega}{\omega \mp \frac{\alpha\omega_0}{\mu+\alpha}} \tag{4.57}$$

   В отличие от случая $b > -4\alpha/(1+\alpha/\mu)$, ветвь для волны, поляризованной по собственному вращению тел-точек, имеет частоту отсечки $\omega_0\alpha/(\mu+\alpha)$. Над ней есть падающий участок дисперсионной кривой. Ветвь с противоположной поляризацией не имеет полосы непропускания. Качественно ветви выглядят аналогично графику на рисунке (4.7), но нижняя ветвь кривой с запрещенной зоной отсутствует. Однако, как было показано выше, при данных параметрах, строго говоря, среда не является устойчивой.

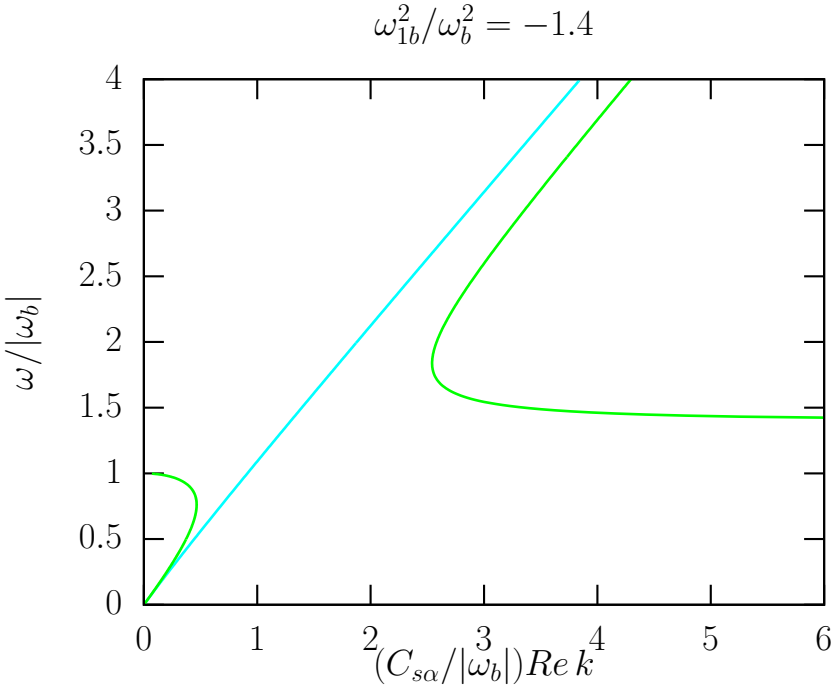

Рис. 4.7: Дисперсионные кривые редуцированной среды Кельвина. Волна сдвига – вращения с круговой поляризацией распространяется параллельно осям тел-точек, $b < -4\alpha$.

5. $\underline{b < -4\alpha.}$

В данном случае имеем $\omega_{1b}^2/\omega_b < \omega_b < 0$. Таким образом, ветвь с вектором перемещений $\mathbf{u}$, вращающимся в том же направлении, что и тела-точки вокруг своих осей, выглядит следующим образом

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2}\frac{\omega - |\omega_b|}{\omega - |\omega_{1b}^2/\omega_b|}. \tag{4.58}$$

Она обладает запрещенной зоной $(|\omega_b|; |\omega_{1b}^2/\omega_b|)$ и падающими участками дисперсионных кривых над и под ней.

Ветвь, соответствующая собственному вектору $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$, т.е. поляризации

против собственного вращения тел-точек, подчиняется соотношению

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2} \frac{\omega + |\omega_b|}{\omega + |\omega_{1b}^2/\omega_b|} \tag{4.59}$$

и не имеет запрещенной зоны, в отличие от случая положительного следящего момента.

Обе ветви показаны на рисунке 4.7. Качественно они выглядят аналогично случаю $\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = 0$, но обе являются дисперсивными.

4.2.7 Распространение волн в произвольном направлении.

Рассмотрим общий случай уравнения Кристоффеля (4.44). Будет показано, что волна является поляризованной, и ее поляризация является частотнозависимой. Обозначим $\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{m}/|\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{m}|$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})/|\mathbf{m} \cdot (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})|$. Легко видеть, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\hat{\mathbf{k}}$ формируют правый ортонормальный базис. Будем искать функцию $\beta(\omega)$ такую, что $\mathbf{e}_1 + i\beta\mathbf{e}_2$ будет собственным вектором для редуцированного уравнения Кристоффеля (4.44). Подставляя данное выражение в (4.44), после упрощения получим уравнение для β:

$$\beta^2 + 2\beta\xi - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta(\omega) = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 + 1}, \tag{4.60}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{m})^2}{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{m}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_b}{\omega} \frac{b}{4\alpha} \right). \tag{4.61}$$

Подставляя собственный вектор $\mathbf{e}_1 + i\beta\mathbf{e}_2$ в уравнение Кристоффеля (4.44), получим дисперсионное соотношение

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{S\alpha}^2} \frac{\omega^2 - \omega_b^2}{\omega^2 - \omega_{1b}^2 + \beta_{\mp}\omega\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{m}\, (\omega_b - \frac{\omega_{1b}^2}{\omega_b})} \tag{4.62}$$

Данное выражение в случаях, когда $\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = 0$ и $\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = 0$, дает результаты, полученные в предыдущих разделах. Анализируя его, получаем:

1. При $\omega \to \infty$ одна из ветвей имеет фазовую и групповую скорости, стремящиеся к $c_{S\alpha}$, а другая $c_{S\alpha}\sqrt{1 - |\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{m}|^2 \frac{\alpha}{\mu+\alpha}}$ (она является более медленной).

2. Для $\omega \to 0$ мы получаем две ветви со скоростями

$$c_s\sqrt{1 + \frac{\alpha}{\mu}\frac{b}{4\alpha + b}} \quad \text{и} \quad c_s\sqrt{1 + |\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{m}|^2\frac{\alpha}{\mu}\frac{b}{4\alpha + b}}. \tag{4.63}$$

3. При $-4\alpha/(1 + \alpha/\mu) < b < 0$ волна на низких частотах медленнее, чем классическая волна сдвига со скоростью c_s. При $b > 0$ и $b < -4\alpha$ она быстрее ее.

   При $b \geqslant 0$ существует одна волна с запрещенной зоной и другая без нее.

   При $b < -4\alpha$ могут существовать зоны с падающим участком дисперсионных кривых, поведение кривых существенно зависит от параметров и направления распространения волны.

Приведем лишь некоторые численные примеры (рисунки 4.8 – 4.11), не исследуя вопрос аналитически. Мы видим, что когда направление распространения волн не является ортогональным или параллельным осям тел-точек, ветви становятся «смешанными» и сильно дисперсивными рядом с точкой пересечения «парциальных» кривых (для особых направлений распространения волны). В точке, где ветви наиболее близко подходят друг к другу, они имеют одинаковую групповую скорость, как это наблюдается в случае магнитоакустического резонанса [98]. Меняя внешний момент или скорость собственного вращения тел-точек, мы можем управлять параметрами запрещенных зон и падающих участков, где среда является акустическим метама-

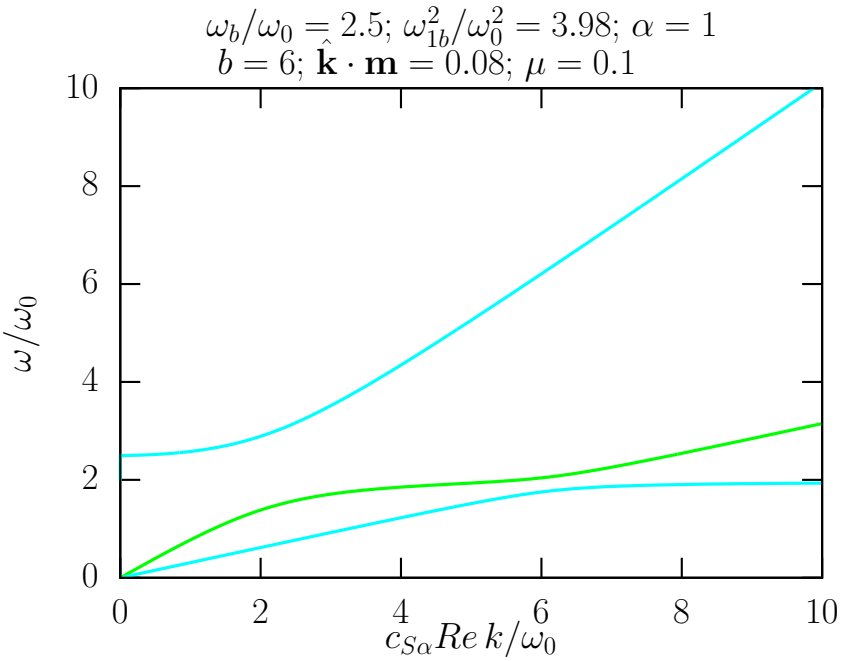

Рис. 4.8: Дисперсионные кривые редуцированной среды Кельвина. Волна сдвига – вращения с эллиптической частотно-зависимой поляризацией, $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{m} = 0.008$, $b > 0$.

териалом по отношению к определенным типам волн. Подробное аналитическое исследование вопроса является предметом будущих исследований.

Анизотропный член, даже малый, перевязывающий классическую деформацию и волну сдвига – вращения, по всей видимости, приведет к существованию смешанных волн, где все компоненты будут подвержены влиянию поворотных степеней свободы. Это также является одним из возможных направлений будущей работы.

4.3 Заключение.

В данной главе рассмотрены два вида однородных упругих сред, чьи тела–точки обладают конечным динамическим спином. Одна из них — среда Кельвина, частицы которой могут свободно вращаться вокруг своих осей,

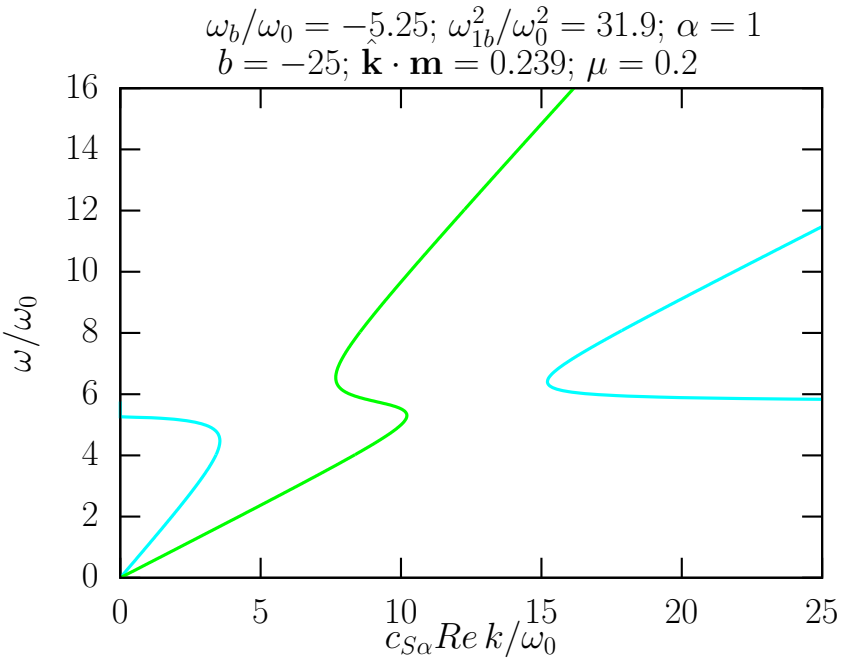

Рис. 4.9: Дисперсионные кривые редуцированной среды Кельвина. Волна сдвига – вращения с эллиптической частотно-зависимой поляризацией, $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{m} = 0.239$, $b < -4\alpha$.

не вызывая напряжений в среде. Другая — «гиростатическая» среда, состоящая из сферических тел-точек, содержащих роторы. Гироскопический член превалирует в динамике обоих сред. В натуральной конфигурации считаем направления осей всех роторов (или тел-точек в среде Кельвина) направленными вдоль единичного вектора $\mathbf{m}$ и совершающими собственное вращение с одной и той же угловой скоростью. В обоих случаях будем рассматривать редуцированные среды, упругая энергия которых не зависит от градиента поворота, но зависит от других трансляционных или поворотных деформаций. Мы подвергаем эти среды воздействию внешнего объемного следящего момента, пропорционального вектору малого поворота оси. Такой момент может быть, например, связан с наличием внешней магнитной индукции.

Показано, что в данных средах существуют поляризованные гармонические волны сдвига. Единственное исключение представляет собой случай, ко-

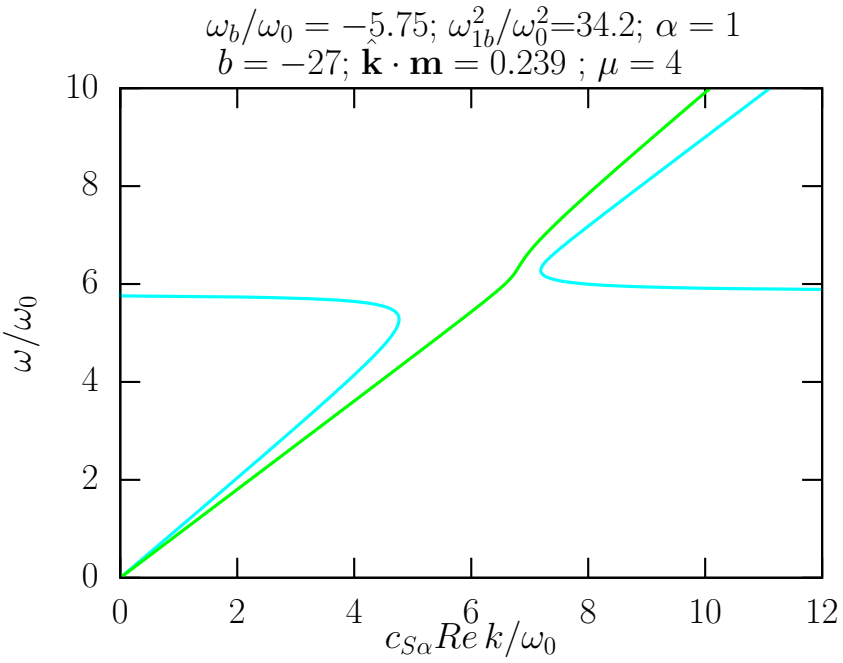

Рис. 4.10: Дисперсионные кривые редуцированной среды Кельвина. Волна сдвига – вращения с эллиптической частотно-зависимой поляризацией, $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{m} = 0.239$, $b < -4\alpha$.

гда волновой вектор ортогонален осям тел-точек $\mathbf{m}$ в натуральной конфигурации: в этом случае существует две плоских волны сдвига, одна обладает полосой непропускания, а другая — такая же, как в классической среде. Для направления распространения волн, параллельного $\mathbf{m}$, поляризация оказывается круговой и не зависит от частоты. Во всех других случаях поляризация является эллиптической и зависит от частоты и от направления распространения волны относительно $\mathbf{m}$. Если внешний следящий момент положителен (стремится уменьшить поворотное смещение тела-точки), одна из поляризованных волн обладает полосой непропускания, а другая — нет. Изменяя внешнюю нагрузку, можно изменить полосу непропускания. Воздействуя отрицательным следящим моментом, в зависимости от направления распространения волн и от параметров мы можем выйти в зону неустойчивости либо получить ниспадающие участки для одной из дисперсионных кривых

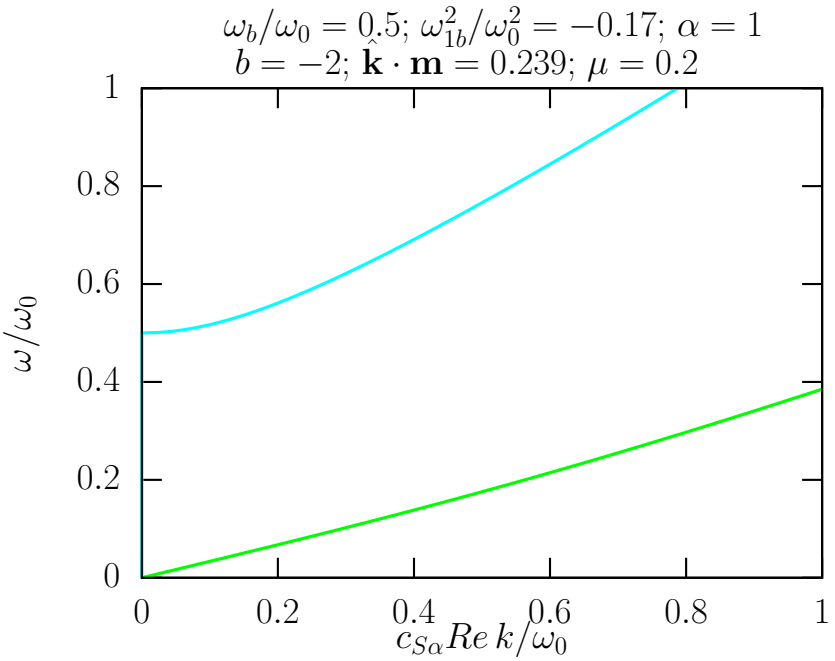

Рис. 4.11: Дисперсионные кривые редуцированной среды Кельвина. Волна сдвига – вращения с эллиптической частотно-зависимой поляризацией, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = 0.239$, $b < -4\alpha$.

рядом с запрещенной зоной. Таким образом, данные среды ведут себя как умные акустические метаматериалы, единожды или дважды отрицательные в зависимости от направления волнового вектора, поляризации волны, внешнего воздействия и области частот.

По результатам данной главы можно сформулировать следующие **результаты, выносимые на защиту**:

1. Предложены модели простейшей редуцированной среды Кельвина, имеющей аналогию с магнитоупругими материалами, и простейшей гиростатической среды. Показано, что обе среды являются акустическими метаматериалами, рабочую зону и тип которых можно менять при помощи внешнего следящего момента.

Заключение.

В диссертации рассмотрены континуумы сложной структуры, условно представимые в виде «несущего континуума», оснащенного в каждой точке «распределенным динамическим гасителем». Субконтинуумы могут иметь различную природу. Так, «несущему континууму» могут соответствовать трансляционные степени свободы, а «динамическому гасителю» — вращательные.

Поставленная в разделе 1.4 цель диссертационной работы достигнута, все задачи выполнены:

— во **второй главе** рассмотрены общие закономерности поведения линейных редуцированных сред произвольной природы без конечного динамического спина. Получены следующие результаты:

1. Введено понятие и развита теория упругих редуцированных сред типа «несущий континуум + распределенный динамический гаситель», упругая энергия которых не зависит от деформации гасителя. Показано, что такие линейные среды являются акустическими метаматериалами, то есть обладают запрещенными зонами частот или зонами аномального преломления (падающими участками дисперсионных кривых).

2. Показано, как, управляя взаимосвязью субконтинуумов или внешним следящим воздействием, можно изменять рабочие зоны метаматериала и их тип. Наиболее эффективным инструментом управления волновыми

свойствами изотропного материала оказывается взаимосвязь «деформация несущего континуума — обобщенная координата динамического гасителя», а гиротропного — она же в сочетании со взаимосвязью обеих координат. Для этих материалов поперечная волна более чувствительна к характеристикам среды. Усиливая взаимосвязь континуумов, получаем для нее зону аномального преломления.

3. Добавление линейной диссипации к одной из упругих связей редуцированной среды обеспечивает существование бегущей затухающей волны почти на всех частотах. Малая диссипация (кроме диссипации в основании несущего континуума) может уменьшать затухание волны с расстоянием в части запрещенных зон и приводит к возникновению падающих участков дисперсионных кривых. Во всех рассмотренных вязкоупругих редуцированных средах логарифмический декремент колебаний зависит от частоты немонотонно (что часто наблюдается в геосреде), уменьшаясь в запрещенных зонах с ростом малой диссипации.

— в **третьей главе** рассмотрены редуцированные среды Коссера различного типа. Получены следующие результаты:

1. Построены новые модели континуумов с поворотными степенями свободы для сред с неупорядоченной структурой поворотов (блоковых, зернистых, консолидированных сыпучих, с включениями), которые могут демонстрировать свойства акустических метаматериалов, в том числе:

   - нелинейная редуцированная среда Коссера;
   - редуцированная линейная среда Коссера с анизотропией различного типа, в том числе локальной, отвечающей за взаимосвязь различных типов деформации для коротких волн;

- редуцированная псевдосреда Коссера, в том числе анизотропная;
- различные вязкоупругие и пластическая линейные среды Коссера.

2. Исследованы особенности динамики и устойчивости данных сред.

   - Найден новый механизм неустойчивости нелинейной изотропной среды (при всестороннем растяжении).
   - Показано, что изотропные линейные упругие среды Коссера являются акустическими метаматериалами по отношению к волне сдвига. Запрещенной зоной можно управлять при помощи предварительного напряженного состояния. Введение локальной анизотропии приводит к аналогичному эффекту для продольной и смешанной волн.
   - Получена функция Грина для гармонических сосредоточенных силы и момента в упругой изотропной редуцированной среде Коссера, ее характер свидетельствует о локализации части решения в определенной зоне частот и резонансах на ее границах.
   - Показано, что волна Рэлея в изотропной редуцированной среде Коссера имеет две ветви и запрещенную зону, находящуюся под запрещенной зоной для волны сдвига в трехмерной среде, оптическая ветвь обладает и частотой отсечки, и волновым числом отсечки.
   - Найдена зависимость волновых свойств различных редуцированных сред Коссера от параметров предварительного напряженного состояния, анизотропии и диссипации
   - Осесимметричный тензор инерции частицы приводит к возникновению двух различных волн сдвига с разными запрещенными зонами.
   - Показано, что с ростом малой диссипации прохождение волн в бывших запрещенных зонах различных редуцированных сред Коссера

улучшается, появляется падающий участок дисперсионных кривых, для трансляционного трения он занимает всю запрещенную зону.

- Предложена идея установки для воспроизводимого измерения скорости волн в когезивном порошке, результаты эксперимента описываются редуцированной моделью Коссера с локальной анизотропией или моделью «масса в массе».

В **четвертой главе** предложена модель редуцированной среды Кельвина — гироконтинуум, частицы которого вращаются с большой скоростью вокруг своих осей, при этом не вызывая напряжений в среде, и модель редуцированной среды из контейнеров с гиростатами. В обеих средах градиент осей тел-точек не вызывает напряжений. Существует аналогия между средой Кельвина и магнитоупругими материалами. Получены следующие результаты:

1. Простейшие среда Кельвина и гиростатическая среда являются акустическими метаматериалами для поперечных волн с поляризацией, направленной против собственного вращения тел-точек.

2. Рабочие зоны и тип данных метаматериалов можно менять при помощи внешнего следящего момента. Размагничивающий момент расширяет запрещенную зону и может превратить ее в зону аномального преломления.

3. Свободные поперечные волны, бегущие ортогонально осям тел-точек, являются плоскими, все остальные обладают эллиптической частотно-зависимой или круговой поляризацией.

Подводя итог, сформулируем **результаты, выносимые на защиту**:

1. Введено понятие и развита теория упругих редуцированных сред типа «несущий континуум + распределенный динамический гаситель», упругая энергия которых не зависит от градиента обобщенной координаты

гасителя. Показано, что линейные упругие редуцированные среды являются акустическими метаматериалами вне зависимости от природы своих степеней свободы, то есть их дисперсионные кривые обладают запрещенными зонами или падающими участками.

2. Показано, как, управляя взаимосвязью субконтинуумов или внешним следящим воздействием, можно изменять рабочие зоны метаматериала и их тип. Наиболее эффективно управлять волновыми свойствами изотропного материала позволяет взаимосвязь «градиент координаты несущего континуума – координата динамического гасителя», а гиротропного — она же в сочетании со взаимосвязью обеих координат.

3. Добавление линейной диссипации к упругим связям редуцированной среды обеспечивает существование бегущей затухающей волны почти на всех частотах. Малая диссипация почти всегда способствует уменьшению поглощения волны в запрещенной зоне и превращает ее часть в падающий участок — рабочую зону дважды отрицательного акустического метаматериала.

4. Предложены различные модели редуцированных сред Коссера. Показано, что при линейных колебаниях они являются акустическими метаматериалами, рабочими зонами которых можно управлять при помощи нелинейного напряженно-деформированного состояния, малой диссипации и внешнего следящего момента.

5. Для сосредоточенных гармонических нагрузок в неограниченной изотропной упругой линейной редуцированной среде Коссера получена функция Грина, вид которой свидетельствует о возможности резонансных или локализованных вблизи источника решений.

6. Найден новый механизм неустойчивости нелинейных изотропных упругих сред Коссера с выпуклой энергией деформации при большом всестороннем растяжении, отсутствующий у классических сред.

7. Предложены модели простейшей редуцированной среды Кельвина, имеющей аналогию с магнитоупругими материалами, и простейшей гиростатической среды. Показано, что обе среды являются акустическими метаматериалами, рабочую зону и тип которых можно менять при помощи внешнего следящего момента.

Результаты 1–3 получены в главе 2, результаты 4–6 в главе 3, результат 7 — в главе 4. Все они являются **новыми и актуальными**, получены автором самостоятельно.

Диссертационная работа открывает возможность поиска новых акустических метаматериалов среди редуцированных сред и управления их свойствами. Среди тем будущих исследований — влияние нелинейности и диссипации на волны в редуцированных гироконтинуумах (соискатель руководит кандидатской диссертационной работой по этой тематике), нестационарные задачи для редуцированных сред Коссера, распространение ультразвука в зернистых средах (соискатель являлась вторым руководителем диссертационной работы [217], защищенной в 2017 г. в университете Севильи с оценкой cum laude), поверхностные волны в редуцированных средах с диссипацией и анизотропией, создание акустических метаматериалов с богатыми волновыми свойствами, обусловленными комбинированной взаимосвязью субконтинуумов.

Литература

[1] 3D auxetic single material periodic structure with ultra-wide tunable bandgap / D'Alessandro L., Zega V., Ardito R., and Corigliano A. // Scientific reports. — 2018. — Vol. 8, no. 1. — P. 2262.

[2] Abreu R., Durand S., Thomas C. The Asymmetric Seismic Moment Tensor in Micropolar Media // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2018. — Vol. 108, no. 3A. — P. 1160–1170.

[3] Abreu R., Kamm J., Reiß A.-S. Micropolar modelling of rotational waves in seismology // Geophysical Journal International. — 2017. — Vol. 210, no. 2. — P. 1021–1046.

[4] Abreu R., Thomas C., Durand S. Effect of observed micropolar motions on wave propagation in deep Earth minerals // Physics of the Earth and Planetary Interiors. — 2018. — Vol. 276. — P. 215–225.

[5] Acoustic band structure of periodic elastic composites / Kushwaha M.S., Halevi P., Dobrzynski L., and Djafari-Rouhani B. // Physical review letters. — 1993. — Vol. 71, no. 13. — P. 2022.

[6] Acoustic metamaterials for noise reduction: a review / Gao N., Zhang Zh., Deng J., Guo X., Cheng B., and Hou H. // Advanced Materials Technologies. — 2022. — Vol. 7, no. 6. — P. 2100698.

[7] Acoustic metamaterials for sound focusing and confinement / Guenneau S., Movchan A., Pétursson G., and Ramakrishna S.A. // New Journal of physics. — 2007. — Vol. 9, no. 11. — P. 399.

[8] Acoustic metamaterials with spinning components / Zhao D., Wang Y.-T., Fung K.-H., Zhang Zh.-Q., and Chan Ch.T. // Physical Review B. — 2020. — Vol. 101, no. 5. — P. 054107.

[9] Acoustic subwavelength imaging of subsurface objects with acoustic resonant metalens / Cheng Y., Zhou Ch., Wei Q., Wu D.J., and Liu X.J. // Applied Physics Letters. — 2013. — Vol. 103, no. 22.

[10] Altenbach H., Eremeyev V.A. Cosserat media // Generalized Continua from the Theory to Engineering Applications. — Springer, 2013. — P. 65–130.

[11] Altenbach H., Eremeyev V.A. Strain rate tensors and constitutive equations of inelastic micropolar materials // International Journal of Plasticity. — 2014. — Vol. 63. — P. 3–17.

[12] Altenbach H., Naumenko K., Zhilin P.A. A micro-polar theory for binary media with application to phase-transitional flow of fiber suspensions // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2003. — Vol. 15. — P. 539–570.

[13] Amorphous topological insulators constructed from random point sets / Mitchell N.P., Nash L.M., Hexner D., Turner A.M., and Irvine W.T.M. // Nature Physics. — 2018. — Vol. 14, no. 4. — P. 380–385.

[14] Analysis of the wave solution of the elastokinetic equations of a Cosserat continuum for the case of bulk plane waves / Kulesh M.A., Matveenko V.P.,

Ulitin M.V., and Shardakov I.N. // Journal of applied mechanics and technical physics. — 2008. — Vol. 49. — P. 323–329.

[15] Anisotropic structure of two-dimensional linear cosserat elasticity / Auffray N., El Ouafa S., Rosi G., and Desmorat B. // Mathematics and Mechanics of Complex Systems. — 2023. — Vol. 10, no. 4. — P. 321–356.

[16] Antman S.S., Carbone E.R. Shear and necking instabilities in nonlinear elasticity // Journal of Elasticity. — 1977. — Vol. 7, no. 2. — P. 125–151.

[17] Application of micropolar theory to the description of the skin effect due to hydrogen saturation / Frolova K., Vilchevskaya E., Bessonov N., Müller W., Polyanskiy V., and Yakovlev Yu. // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2022. — Vol. 27, no. 6. — P. 1092–1110.

[18] Askes H., Metrikine A.V. Higher-order continua derived from discrete media: continualisation aspects and boundary conditions // International Journal of Solids and Structures. — 2005. — Vol. 42, no. 1. — P. 187–202.

[19] Bagdoev A.G., Erofeyev V.I., Shekoyan A.V. Wave dynamics of generalized continua. — Springer, 2016.

[20] Band gap tunability of magneto-elastic phononic crystal / Bou Matar O., Robillard J.F., Vasseur J.O., Hladky-Hennion A.-C., Deymier P.A., Pernod Ph., and Preobrazhensky V. // Journal of Applied Physics. — 2012. — Vol. 111, no. 5. — P. 054901.

[21] Belyaev A.K. On the application of the locality principle in structural dynamics // Acta mechanica. — 1990. — Vol. 83, no. 3-4. — P. 213–222.

[22] Belyaev A.K. High frequency dynamics of engineering structures. — Springer, 2004.

[23] Besdo D. Towards a Cosserat-theory describing motion of an originally rectangular structure of blocks // Archive of Applied Mechanics. — 2010. — Vol. 80. — P. 25–45.

[24] A Biot–Cosserat two-dimensional elastic nonlinear model for a micromorphic medium / Giorgio I., De Angelo M., Turco E., and Misra A. // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2019. — P. 1–13.

[25] Biot M.A. Theory of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range // J. Acoust. Soc. Am. — 1956. — Vol. 28. — P. 168–178.

[26] Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // The Journal of the acoustical Society of america. — 1956. — Vol. 28, no. 2. — P. 179–191.

[27] Bondar M.P., Dmitriev A.I. Investigation of the development of plastic deformation in mesocomposite materials under dynamic loading in relation to the formation of their connection with metals // Physical mesomechanics. — 2015. — Vol. 18, no. 3.

[28] Borodin E.N., Mayer A.E., Gutkin M.Yu. Coupled model for grain rotation, dislocation plasticity and grain boundary sliding in fine-grained solids // International Journal of Plasticity. — 2020. — Vol. 134. — P. 102776.

[29] Botello F. Ruiz, Castellanos A., Tournat V. Ultrasonic probing of cohesive granular media at very low consolidation // Ultrasonics. — 2016. — Vol. 69. — P. 193–200.

[30] Bouchon M., Aki K. Strain, tilt, and rotation associated with strong ground motion in the vicinity of earthquake faults // Bulletin of the Seismological Society of America. — 1982. — Vol. 72, no. 5. — P. 1717–1738.

[31] Boutin C. Acoustics of porous media with inner resonators // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2013. — Vol. 134, no. 6. — P. 4717–4729.

[32] Brocato M., Capriz G. Gyrocontinua // International journal of solids and structures. — 2001. — Vol. 38, no. 6-7. — P. 1089–1103.

[33] Brocato M., Capriz G. Control of beams and chains through distributed gyroscopes // AIAA journal. — 2009. — Vol. 47, no. 2. — P. 294–302.

[34] Brun M., Jones I.S., Movchan A.B. Vortex-type elastic structured media and dynamic shielding // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2012. — Vol. 468, no. 2146. — P. 3027–3046.

[35] Cambou B., Dubujet Ph., Nouguier-Lehon C. Anisotropy in granular materials at different scales // Mechanics of materials. — 2004. — Vol. 36, no. 12. — P. 1185–1194.

[36] Capriz G. Continua with microstructure. — Springer Science & Business Media, 2013. — Vol. 35.

[37] Casey J. Pseudo-rigid continua: basic theory and a geometrical derivation of Lagrange's equations // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2004. — Vol. 460, no. 2047. — P. 2021–2049.

[38] Castellani A., Boffi G. Rotational components of the surface ground motion during an earthquake // Earthquake engineering & structural dynamics. — 1986. — Vol. 14, no. 5. — P. 751–767.

[39] Castellanos A. The relationship between attractive interparticle forces and bulk behaviour in dry and uncharged fine powders // Advances in physics. — 2005. — Vol. 54, no. 4. — P. 263–376.

[40] Castellanos A., Valverde J.M., Quintanilla M.A.S. The Sevilla powder tester: a tool for characterizing the physical properties of fine cohesive powders at very small consolidations // KONA Powder and Particle Journal. — 2004. — Vol. 22. — P. 66–81.

[41] Chaki M. Sh., Singh A.K. Scattering and propagation characteristics of SH wave in reduced Cosserat isotropic layered structure at irregular boundaries // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2021. — Vol. 44, no. 7. — P. 6143–6163.

[42] Chattopadhyay G., Bhattacharyya R.K. Computation of Green's tensor and wave propagation in the random granular elastic medium // International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. — 2021. — Vol. 22, no. 1. — P. 1–20.

[43] Chesnais C., Boutin C., Hans S. Effects of the local resonance on the wave propagation in periodic frame structures: Generalized Newtonian mechanics // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2012. — Vol. 132, no. 4. — P. 2873–2886.

[44] Continuum micro-dilatation modeling of auxetic metamaterials / Lurie S.A., Kalamkarov A.L., Solyaev Yu.O., Ustenko A.D., and Volkov A.V. // International Journal of Solids and Structures. — 2018. — Vol. 132. — P. 188–200.

[45] Corfdir A., Lerat P., Roux J.-N. Translation and rotation of grains within an interface between granular media and structure // Powders and grains. — Balkema, 2001.

[46] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. — A. Hermann et fils, 1909.

[47] Craster R.V., Guenneau S. Acoustic metamaterials: Negative refraction, imaging, lensing and cloaking. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 166.

[48] Cummer S.A., Christensen J., Alù A. Controlling sound with acoustic metamaterials // Nature Reviews Materials. — 2016. — Vol. 1, no. 3. — P. 16001.

[49] Curie P. Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique // Journal de physique théorique et appliquée. — 1894. — Vol. 3, no. 1. — P. 393–415. — In French.

[50] Cveticanin L., Cveticanin D. Acoustic metamaterials: Theory and application // Acoustics and Vibration of Mechanical Structures—AVMS-2017: Proceedings of the 14th AVMS Conference, Timisoara, Romania, May 25–26, 2017 / Springer. — 2018. — P. 21–32.

[51] Da Silva B. Talia S., Elshafie M.Z.E.B. Arching in granular soils: experimental observations of deformation mechanisms // Géotechnique. — 2021. — Vol. 71, no. 10. — P. 866–878.

[52] De Josselin de Jong G. Discussion: The double sliding, free rotating model for granular assemblies // Géotechnique. — 1973. — Vol. 23, no. 3. — P. 459–462.

[53] Dell'Isola F., Giorgio I., Andreaus U. Elastic pantographic 2D lattices: a numerical analysis on the static response and wave propagation // Proceedings of the Estonian Academy of Sciences. — 2015. — Vol. 64, no. 3. — P. 219.

[54] Deymier P.A. Acoustic metamaterials and phononic crystals. — Springer Science & Business Media, 2013. — Vol. 173.

[55] Di Carlo A., Naili S., Quiligotti S. Sur le remodelage des tissus osseux anisotropes // Comptes Rendus Mécanique. — 2006. — Vol. 334, no. 11. — P. 651–661.

[56] Diepolder W., Mannl V., Lippman H. The Cosserat continuum, a model for grain rotations in metals? // International journal of plasticity. — 1991. — Vol. 7, no. 4. — P. 313–328.

[57] Drepin M.A., Grekova E.F. Non-linear simplest reduced Kelvin's medium in the vicinity of the spherical stress state: waves and instabilities // Sixty Shades of Generalized Continua: Dedicated to the 60th Birthday of Prof. Victor A. Eremeyev. — Springer, 2023. — P. 117–140.

[58] Dynamic effective mass of granular media and the attenuation of structure-borne sound / Valenza J., Hsu Ch.-J., Ingale R., Gland N., Makse H.A., and Johnson D.L. // Physical Review E. — 2009. — Vol. 80, no. 5. — P. 051304.

[59] Dynamic failure of dry and fully saturated limestone samples based on incubation time concept / Petrov Yu.V., Smirnov I.V., Volkov G.A., Abramian A.K., Bragov A.M., and Verichev S.N. // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. — 2017. — Vol. 9, no. 1. — P. 125–134.

[60] Dyskin A.V., Pasternak E. et al. Slow waves in blocky rock mass // 9th Australasian Congress on Applied Mechanics (ACAM9) / Engineers Australia. — 2017. — P. 226.

[61] Effect of the microstructure on the propagation velocity of ultrasound in magnetic powders / Botello F.R., Quintanilla M.A.S., Castellanos A., Grekova E.F., and Tournat V. // Ultrasonics. — 2018. — Vol. 82. — P. 153–160.

[62] Elastic metamaterials with inertial locally resonant structures: Application to lensing and localization / Bigoni D., Guenneau S., Movchan A.B., and Brun M. // Physical Review B. — 2013. — Vol. 87, no. 17. — P. 174303.

[63] Elastic wave propagation in confined granular systems / Somfai E., Roux J.-N., Snoeijer J.H., Van Hecke M., and Van Saarloos W. // Physical Review E. — 2005. — Vol. 72, no. 2. — P. 021301.

[64] Eremeyev V.A. On the material symmetry group for micromorphic media with applications to granular materials // Mechanics Research Communications. — 2018. — Vol. 94. — P. 8–12.

[65] Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. Foundations of micropolar mechanics. — Springer Science & Business Media, 2012.

[66] Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. Material symmetry group of the non-linear polar-elastic continuum // International Journal of Solids and Structures. — 2012. — Vol. 49, no. 14. — P. 1993–2005.

[67] Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. Material symmetry group and constitutive equations of micropolar anisotropic elastic solids //

Mathematics and Mechanics of Solids. — 2016. — Vol. 21, no. 2. — P. 210–221.

[68] Eremeyev V.A., Reccia E. Nonlinear strain gradient and micromorphic one-dimensional elastic continua: Comparison through strong ellipticity conditions // Mechanics Research Communications. — 2022. — Vol. 124. — P. 103909.

[69] Ericksen J.L. The simplest problems for elastic Cosserat surfaces // Journal of Elasticity. — 1972. — Vol. 2, no. 2. — P. 101–107.

[70] Eringen A.C. Linear theory of micropolar viscoelasticity // International Journal of Engineering Science. — 1967. — Vol. 5, no. 2. — P. 191–204.

[71] Eringen A.C. Nonlocal polar elastic continua // International journal of engineering science. — 1972. — Vol. 10, no. 1. — P. 1–16.

[72] Eringen A.C. Microcontinuum field theories: II. Fluent media. — Springer Science & Business Media, 2001. — Vol. 2.

[73] Eringen A.C. Microcontinuum field theories: I. Foundations and solids. — Springer Science & Business Media, 2012.

[74] Eringen A.C., Maugin G.A. Electrodynamics of Continua. — New York : Springer-Verlag, 1990.

[75] Erofeev V.I., Kolesov D.A., Malkhanov A.O. Nonlinear localized waves of deformation in the class of metamaterials as set as the mass-in-mass chain // New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics: A Tribute to Wolfgang H. Müller. — 2019. — P. 105–116.

[76] Erofeev V.I., Kolesov D.A., Malkhanov A.O. Nonlinear Localized Longitudinal Waves in a Metamaterial Designed as a “Mass-In-Mass” Chain // Acoustical Physics. — 2022. — Vol. 68, no. 5. — P. 423–426.

[77] Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O. Stationary longitudinal thermoelastic waves and the waves of the rotation type in the nonlinear micropolar medium // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2017. — Vol. 97, no. 9. — P. 1064–1071.

[78] Erofeev V.I., Pavlov I.S. Propagation and Interaction of Nonlinear Waves in Generalized Continua // Structural Modeling of Metamaterials. — 2021. — P. 147–193.

[79] Erofeev V.I., Pavlov I.S. Structural modeling of metamaterials. — Springer, 2021.

[80] Erofeyev V.I. Wave processes in solids with microstructure. — World Scientific, 2003. — Vol. 8.

[81] Evans Ch.H. An examination of arching in granular soils : Ph. D. thesis ; Massachusetts Institute of Technology. — 1983.

[82] Evolution of disturbances that propagate in viscoelastic metamaterial / Kolesov D.A., Erofeev V.I., Krupenin V.L., and Malkhanov A.O. // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2020. — Vol. 747, no. 1. — P. 012053.

[83] Experimental Verification of 2D Cosserat Chirality with Stretch-Micro-Rotation Coupling in Orthotropic Metamaterials with Granular Motif /

Giorgio I., Hild F., Gerami E., dell'Isola F., and Misra A. // Mechanics Research Communications. — 2022. — P. 104020.

[84] Extended isogeometric analysis for dynamic fracture in multiphase piezoelectric/piezomagnetic composites / Bui T.Q., Hirose S., Zhang Ch., Rabczuk T., Wu Ch.-T., Saitoh T., and Lei J. // Mechanics of Materials. — 2016. — Vol. 97. — P. 135–163.

[85] Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures / Pendry J.B., Holden A.J., Stewart W.J., and Youngs I. // Physical review letters. — 1996. — Vol. 76, no. 25. — P. 4773.

[86] Fan K., Padilla W.J. Dynamic electromagnetic metamaterials // Materials Today. — 2015. — Vol. 18, no. 1. — P. 39–50.

[87] Fleck N.A., Shu J.Y. Microbuckle initiation in fibre composites: a finite element study // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1995. — Vol. 43, no. 12. — P. 1887–1918.

[88] Frazier M.J., Hussein M.I. Viscous-to-viscoelastic transition in phononic crystal and metamaterial band structures // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2015. — Vol. 138, no. 5. — P. 3169–3180.

[89] Gade M., Raghukanth S.T.G. Seismic ground motion in micropolar elastic half-space // Applied Mathematical Modelling. — 2015. — Vol. 39, no. 23-24. — P. 7244–7265.

[90] Generalized macroscale model for Cosserat elasticity using Generalized Multiscale Finite Element Method / Ammosov D., Efendiev Ya., Grekova E., and Vasilyeva M. // Journal of Computational Physics. — 2022. — Vol. 461. — P. 111011.

[91] Giannini D., Schevenels M., Reynders E.P.B. Rotational and multimodal local resonators for broadband sound insulation of orthotropic metamaterial plates // Journal of Sound and Vibration. — 2023. — Vol. 547. — P. 117453.

[92] Gilabert F.A., Roux J.-N., Castellanos A. Computer simulation of model cohesive powders: influence of assembling procedure and contact laws on low consolidation states // Physical review E. — 2007. — Vol. 75, no. 1. — P. 011303.

[93] Gilabert F.A., Roux J.-N., Castellanos A. Computer simulation of model cohesive powders: Plastic consolidation, structural changes, and elasticity under isotropic loads // Physical Review E. — 2008. — Vol. 78, no. 3. — P. 031305.

[94] Goddard J.D. From granular matter to generalized continuum // Mathematical models of granular matter. — Springer, 2008. — P. 1–22.

[95] Goddard J.D. Continuum modeling of granular media // ASME Applied Mechanics Reviews. — 2014. — Vol. 66, no. 5. — P. 050801.

[96] Green A.E., Naghdi P.M. Micropolar and director theories of plates // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1967. — Vol. 20, no. 2. — P. 183–199.

[97] Green A.E., Naghdi P.M. A unified procedure for construction of theories of deformable media. III. Mixtures of interacting continua // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences. — 1995. — Vol. 448, no. 1934. — P. 379–388.

[98] Grekova E.F. Ferromagnets and Kelvin's medium: basic equations and wave processes // Journal of Computational Acoustics. — 2001. — Vol. 9, no. 02. — P. 427–446.

[99] Grekova E.F. Small perturbations of the spherical prestressed state in a nonlinear isotropic elastic reduced Cosserat medium: waves and instabilities // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2011 / IEEE. — 2011. — P. 78–82.

[100] Grekova E.F. Nonlinear isotropic elastic reduced Cosserat continuum as a possible model for geomedium and geomaterials. Spherical prestressed state in the semilinear material // Journal of Seismology. — 2012. — Vol. 16, no. 4. — P. 695–707.

[101] Grekova E.F. On one class of theoretically constructed isotropic single negative continuous acoustic metamaterials // Days on Diffraction (DD), 2014 / IEEE. — 2014. — P. 101–106.

[102] Grekova E.F. Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2016. — Vol. 21, no. 1. — P. 73–93.

[103] Grekova E.F. Waves in the reduced elastic Cosserat medium with transversal anisotropy of the coupling between linear rotational and translational deformations: Linearization near natural and axisymmetric prestressed state. Special directions // Days on Diffraction (DD), 2017 / IEEE. — 2017. — P. 147–153.

[104] Grekova E.F. Harmonic waves in the simplest reduced Kelvin's and gyrostatic media under an external body follower torque // 2018 Days on Diffraction (DD) / IEEE. — 2018. — P. 142–148.

[105] Grekova E.F. Simplest linear homogeneous reduced gyrocontinuum as an acoustic metamaterial // Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials 1. — Springer, 2018. — P. 375–386.

[106] Grekova E.F. Waves in elastic reduced Cosserat medium with anisotropy in the term coupling rotational and translational strains or in the dynamic term // Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures. — Springer, 2018. — P. 143–156.

[107] Grekova E.F. Nonlinear isotropic elastic reduced and full Cosserat media: waves and instabilities // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2019. — Vol. 31, no. 6. — P. 1805–1824.

[108] Grekova E.F. Reduced enhanced elastic continua as acoustic metamaterials // Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. — Springer, 2019. — P. 253–268.

[109] Grekova E.F. Viscoelastic reduced enhanced isotropic continua as acoustic metamaterials // Philosophical Transactions of the Royal Society A. — 2022. — Vol. 380, no. 2237. — P. 20210371.

[110] Grekova E.F., Abreu R. Isotropic linear viscoelastic reduced Cosserat medium: an acoustic metamaterial and a first step to model geomedium // New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. — Springer, 2019. — P. 165–185.

[111] Grekova E.F., Herman G.C. Wave propagation in rocks modeled as reduced Cosserat continuum // 66th EAGE Conference & Exhibition / European Association of Geoscientists & Engineers. — 2004. — P. cp–3–00466.

[112] Grekova E.F., Herman G.C. Soils and rocks in terms of anisotropic reduced Cosserat continuum: peculiarities of wave propagation // Powders and Grains 2005, Two Volume Set: Proceedings of the International Conference on Powders & Grains 2005, Stuttgart, Germany, 18-22 July 2005 / Taylor & Francis. — 2005. — P. 425.

[113] Grekova E.F., Herman G.C. Wave propagation in rocks modeled as reduced Cosserat continuum with weak anisotropy // 67th EAGE Conference & Exhibition / EAGE Publications BV. — 2005. — P. cp–1.

[114] Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2009. — Vol. 99, no. 2B. — P. 1423–1428.

[115] Grekova E.F., Maugin G.A. Modelling of complex elastic crystals by means of multi-spin micromorphic media // International Journal of Engineering Science. — 2005. — Vol. 43, no. 5-6. — P. 494–519.

[116] Grekova E.F., Piatysheva A.P. Reduced linear viscoelastic isotropic Cosserat medium with translational viscosity: a double negative acoustic metamaterial // Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures. — Springer, Cham, 2020. — P. 153–167.

[117] Grekova E.F., Porubov A.V., dell'Isola F. Reduced linear constrained elastic and viscoelastic homogeneous Cosserat media as acoustic metamaterials // Symmetry. — 2020. — Vol. 12. — P. 521.

[118] Grekova E., Zhilin P. Basic equations of Kelvin's medium and analogy with ferromagnets // Journal of Elasticity. — 2001. — Vol. 64, no. 1. — P. 29–70.

[119] Guenneau S., Craster R.V. Fundamentals of acoustic metamaterials // Acoustic Metamaterials: Negative Refraction, Imaging, Lensing and Cloaking. — Springer, 2013. — P. 1–42.

[120] Guidotti R., Castellani A., Stupazzini M. Near-Field Earthquake Strong Ground Motion Rotations and Their Relevance on Tall Buildings // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2018. — Vol. 108, no. 3A. — P. 1171–1184.

[121] Gusev V.E., Aleshin V., Tournat V. Acoustic waves in an elastic channel near the free surface of granular media // Physical Review Letters. — 2006. — Vol. 96, no. 21. — P. 214301.

[122] Gusev V.E., Wright O.B. Double-negative flexural acoustic metamaterial // New Journal of Physics. — 2014. — Vol. 16, no. 12. — P. 123053.

[123] Gutkin M.Yu., Ovid'ko I.A., Skiba N.V. Crossover from grain boundary sliding to rotational deformation in nanocrystalline materials // Acta Materialia. — 2003. — Vol. 51, no. 14. — P. 4059–4071.

[124] Hammam A.H., Eliwa M. Comparison between results of dynamic & static moduli of soil determined by different methods // HBRC Journal. — 2013. — Vol. 9, no. 2. — P. 144–149.

[125] Harris D. Some properties of a new model for slow flow of granular materials // Meccanica. — 2006. — Vol. 41. — P. 351–362.

[126] Harris D., Grekova E.F. A hyperbolic well-posed model for the flow of granular materials // Journal of Engineering Mathematics. — 2005. — Vol. 1, no. 52. — P. 107–135.

[127] Hassanpour S., Heppler G.R. Theory of micropolar gyroelastic continua // Acta Mechanica. — 2016. — Vol. 227, no. 5. — P. 1469–1491.

[128] Huang H.H., Sun C.T., Huang G.L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials // International Journal of Engineering Science. — 2009. — Vol. 47, no. 4. — P. 610–617.

[129] Hudson J.A., Knopoff L. Predicting the overall properties of composite materials with small-scale inclusions or cracks // Scattering and Attenuation of Seismic Waves, Part II. — 1989. — P. 551–576.

[130] Ieşan D. A theory of prestressed thermoelastic Cosserat continua // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: Applied Mathematics and Mechanics. — 2008. — Vol. 88, no. 4. — P. 306–319.

[131] Introduction to the special issue on rotational seismology and engineering applications / Lee W.H.K, Çelebi M., Todorovska M.I., and Igel H. // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2009. — Vol. 99, no. 2B. — P. 945–957.

[132] Ivanova E.A. Description of mechanism of thermal conduction and internal damping by means of two-component Cosserat continuum // Acta Mechanica. — 2014. — Vol. 225, no. 3. — P. 757–795.

[133] Ivanova E.A. A new model of a micropolar continuum and some electromagnetic analogies // Acta Mechanica. — 2015. — Vol. 226, no. 3. — P. 697–721.

[134] Ivanova E.A. Description of nonlinear thermal effects by means of a two-component Cosserat continuum // Acta Mechanica. — 2017. — Vol. 228, no. 6. — P. 2299–2346.

[135] Ivanova E.A. Thermal effects by means of two-component Cosserat continuum // Encyclopedia of Continuum Mechanics. — 2017. — P. 1–12.

[136] Ivanova E.A. Thermal effects by means of two-component Cosserat continuum // Encyclopedia of Continuum Mechanics. — 2020. — P. 2455–2466.

[137] Ivanova E.A. A new approach to modeling of thermal and electrical conductivities by means of the Cosserat continuum // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2022. — Vol. 34, no. 5. — P. 1313–1342.

[138] Ivanova E., Vilchevskaya E. Description of thermal and micro-structural processes in generalized continua: Zhilin's method and its modifications // Generalized Continua as Models for Materials: with Multi-scale Effects or Under Multi-field Actions. — Springer, 2013. — P. 179–197.

[139] Ivanova E.A., Vilchevskaya E.N. Micropolar continuum in spatial description // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2016. — Vol. 28. — P. 1759–1780.

[140] Kafadar C.B., Eringen A.C. Micropolar media — I: the classical theory // International Journal of Engineering Science. — 1971. — Vol. 9, no. 3. — P. 271–305.

[141] Karachevtseva Iu., Pasternak E., Dyskin A. Wave propagation in geomaterials in the presence of rotation-induced negative stiffness // EGU General Assembly Conference Abstracts. — 2017. — Vol. 19. — P. 17404.

[142] Krushynska A.O., Kouznetsova V.G., Geers M.G.D. Towards optimal design of locally resonant acoustic metamaterials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2014. — Vol. 71. — P. 179–196.

[143] Krushynska A.O., Kouznetsova V.G., Geers M.G.D. Visco-elastic effects on wave dispersion in three-phase acoustic metamaterials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2016. — Vol. 96. — P. 29–47.

[144] Kulesh M.A., Grekova E.F. Rayleigh-type waves for the isotropic elastic reduced Cosserat half-space application in rocks and soils // Saint Petersburg 2006 International Conference and Exhibition. — 2006.

[145] Kumar R.S., McDowell D.L. Generalized continuum modeling of 2-D periodic cellular solids // International Journal of solids and structures. — 2004. — Vol. 41, no. 26. — P. 7399–7422.

[146] Kumari R., Singh A.K., Chaki M.S. Influence of abrupt thickening on the shear wave propagation on reduced Cosserat media with imperfect interface // International Journal of Geomechanics. — 2022. — Vol. 22, no. 4. — P. 04022018.

[147] Kuznetsov S.V. Seismic waves and seismic barriers // Acoustical Physics. — 2011. — Vol. 57. — P. 420–426.

[148] Lakes R.S. Stability of Cosserat solids: size effects, ellipticity and waves // Journal of Mechanics of Materials and Structures. — 2018. — Vol. 13, no. 1. — P. 83–91.

[149] Lalin V., Zdanchuk E. Nonlinear thermodynamic model for reduced Cosserat continuum // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. — 2014. — Vol. 8, no. 1. — P. 208–213.

[150] Lalin V., Zdanchuk E. The initial boundary-value problem for a mathematical model for granular medium // Applied Mechanics and Materials. — 2015. — Vol. 725. — P. 863–868.

[151] Lalin V.V., Zdanchuk E.V. Conditions on the surface of discontinuity for the reduced Cosserat continuum // Mater. Phys. Mech. — 2017. — Vol. 31, no. 1-2. — P. 28–31.

[152] Large scale mechanical metamaterials as seismic shields / Miniaci M., Krushynska A., Bosia F., and Pugno N.M. // New Journal of Physics. — 2016. — Vol. 18, no. 8. — P. 083041.

[153] Lee W.H.K., Igel H., Trifunac M.D. Recent advances in rotational seismology // Seismological Research Letters. — 2009. — Vol. 80, no. 3. — P. 479–490.

[154] Li J., Chan Ch.T. Double-negative acoustic metamaterial // Physical Review E. — 2004. — Vol. 70, no. 5. — P. 055602.

[155] Lightweight auxetic metamaterials: Design and characteristic study / Han D., Ren X., Zhang Y., Zhang X.Yu., Zhang X.G., Luo Ch., and Xie Y.M. // Composite Structures. — 2022. — Vol. 293. — P. 115706.

[156] Limat L. Effets rotationnels dans le cisaillement d'un milieu granulaire // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy. — 1998. — Vol. 326, no. 8. — P. 501–509.

[157] Lippmann H. Cosserat plasticity and plastic spin // ASME Applied Mechanics Reviews. — 1995. — Vol. 48, no. 11. — P. 753–762.

[158] Liu H.-P., Anderson D.L., Kanamori H. Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. — 1976. — Vol. 47, no. 1. — P. 41–58.

[159] Locally resonant sonic materials / Liu Zh., Zhang X., Mao Y., Zhu Y.Y., Yang Zh., Chan Ch.T., and Sheng P. // Science. — 2000. — Vol. 289, no. 5485. — P. 1734–1736.

[160] Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. The application of the multiscale models for description of the dispersed composites // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. — 2005. — Vol. 36, no. 2. — P. 145–152.

[161] Ma G., Sheng P. Acoustic metamaterials: From local resonances to broad horizons // Science advances. — 2016. — Vol. 2, no. 2. — P. e1501595.

[162] Magnetoactive acoustic metamaterials / Yu K., Fang N.X., Huang G., and Wang Q. // Advanced Materials. — 2018. — Vol. 30, no. 21. — P. 1706348.

[163] Mandel J. Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques // International Journal of Solids and Structures. — 1973. — Vol. 9, no. 6. — P. 725–740.

[164] Marin M., Öchsner A., Vlase S. A final boundary problem for modeling a thermoelastic Cosserat body // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2022. — Vol. 34, no. 2. — P. 627–636.

[165] Marqués R., Martin F., Sorolla M. Metamaterials with negative parameters: theory, design, and microwave applications. — John Wiley & Sons, 2011.

[166] Masiani R., Trovalusci P. Cosserat and Cauchy materials as continuum models of brick masonry // Meccanica. — 1996. — Vol. 31. — P. 421–432.

[167] Maugin G.A. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids. — Oxford : Elsevier Science Publishers, 1988.

[168] Maugin G.A. Non-classical continuum mechanics. — Springer, 2017.

[169] Maugin G.A., Eringen A.C. Deformable magnetically saturated media — I — Field equations // J. Math. Phys. — 1972. — no. 13. — P. 143–155.

[170] Maugin G.A., Eringen A.C. Deformable magnetically saturated media — II — Constitutive theory // J. Math. Phys. — 1972. — no. 13. — P. 1334–1347.

[171] Merkel A., Tournat V., Gusev V. Dispersion of elastic waves in three-dimensional noncohesive granular phononic crystals: properties of rotational modes // Physical Review E. — 2010. — Vol. 82, no. 3. — P. 031305.

[172] Merkel A., Tournat V., Gusev V. Experimental evidence of rotational elastic waves in granular phononic crystals // Physical Review Letters. — 2011. — Vol. 107, no. 22. — P. 225502.

[173] Mescheryakov Yu.I., Atroshenko S.A. Multiscale rotations in dynamically deformed solids // International journal of solids and structures. — 1992. — Vol. 29, no. 22. — P. 2761–2778.

[174] Method for calculating the characteristics of elastic state media with internal degrees of freedom / Romashin S.N., Presnetsova V.Yu., Frolenkova L.Yu., and Shorkin V.S. // Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials. — 2016. — P. 363–376.

[175] Metrikine A.V., Prokhorova J.M. On the uniqueness of the lagrangian of gradient elastic continua // Mechanics of Generalized Continua: One Hundred Years After the Cosserats. — Springer, 2010. — P. 149–160.

[176] Micropolar medium in a funnel-shaped crusher / Fomicheva M., Vilchevskaya E.N., Bessonov N., and Müller W.H. // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2021. — Vol. 33. — P. 1347–1362.

[177] Miklowitz J. Elastic Waves and Waveguides. — North-Holland, 1980.

[178] Effects of couple-stresses in linear elasticity : Rep. / Columbia University, New York ; executor: Mindlin R.D., Tiersten H.F. : 1962.

[179] Misra A., Poorsolhjouy P. Identification of higher-order elastic constants for grain assemblies based upon granular micromechanics // Mathematics and Mechanics of Complex Systems. — 2015. — Vol. 3, no. 3. — P. 285–308.

[180] Misra A., Poorsolhjouy P. Granular micromechanics based micromorphic model predicts frequency band gaps // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2016. — Vol. 28, no. 1-2. — P. 215–234.

[181] Modelling and experimental verification of a single phase three-dimensional lightweight locally resonant elastic metamaterial with complete low frequency bandgap / D'Alessandro L., Belloni E., D'Alo G., Daniel L., Ardito R., Corigliano A., and Braghin F. // 2017 11th international congress on engineered materials platforms for novel wave phenomena (metamaterials) / IEEE. — 2017. — P. 70–72.

[182] Mohan L.S., Nott P.R., Rao K.K. A frictional Cosserat model for the flow of granular materials through a vertical channel // Acta Mechanica. — 1999. — Vol. 138. — P. 75–96.

[183] Mohan L.S., Rao K.K., Nott P.R. A frictional Cosserat model for the slow shearing of granular materials // Journal of Fluid Mechanics. — 2002. — Vol. 457. — P. 377–409.

[184] Molerón M., Daraio Ch. Acoustic metamaterial for subwavelength edge detection // Nature communications. — 2015. — Vol. 6, no. 1. — P. 8037.

[185] Moon F.C., Mow C.C. Wave propagation in a composite material containing dispersed rigid spherical inclusions. — Rand, 1970.

[186] Morozov N.F., Bratov V.A., Kuznetsov S.V. Seismic barriers for protection against surface and headwaves: multiple scatters and metamaterials // Mechanics of Solids. — 2021. — Vol. 56. — P. 911–921.

[187] Morozov N.F., Petrov Y.V. Incubation time based testing of materials // European Journal of Mechanics-A/Solids. — 2006. — Vol. 25, no. 4. — P. 670–676.

[188] Mouraille O. Sound propagation in dry granular: discrete elements simulations, theory, and experiments. — Gildeprint Drukkerijen, University of Twente. The Netherlands, 2012. — P. 135.

[189] Mouraille O., Luding S. Sound wave propagation in weakly polydisperse granular materials // Ultrasonics. — 2008. — Vol. 48, no. 6-7. — P. 498–505.

[190] Mouraille O., Mulder W.A., Luding S. Sound wave acceleration in granular materials // J. Stat. Mech. — 2006. — P. P07023.

[191] Mühlhaus H.-B., Vardoulakis I. The thickness of shear bands in granular materials // Geotechnique. — 1987. — Vol. 37, no. 3. — P. 271–283.

[192] Müller W.H., Vilchevskaya E.N. Micropolar theory with production of rotational inertia: A rational mechanics approach // Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials 1. — Springer, 2018. — P. 581–606.

[193] Negative refractive index and acoustic superlens from multiple scattering in single negative metamaterials / Kaina N., Lemoult F., Fink M., and Lerosey G. // Nature. — 2015. — Vol. 525, no. 7567. — P. 77–81.

[194] Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Archive for rational Mechanics and Analysis. — 1958. — Vol. 2, no. 1. — P. 197–226.

[195] Non-Sinusoidal Waves in a Metamaterial, Specified as a Nonlinear Elastic Lattice with a Center of Symmetry / Kolesov D., Erofeev V.I., Malkhanov A.O., and Shekoyan A.V. // Key Engineering Materials. — 2022. — Vol. 910. — P. 976–981.

[196] Nonlinear Models of Microstructured Media / Erofeev V.I., Pavlov I.S., Erofeev V.I., and Pavlov I.S. // Structural Modeling of Metamaterials. — 2021. — P. 109–127.

[197] Norris A.N., Shuvalov A.L. Elastic cloaking theory // Wave Motion. — 2011. — Vol. 48, no. 6. — P. 525–538.

[198] Oda M., Iwashita K. Mechanics of granular materials: an introduction. — Taylor & Francis, 1999.

[199] Optimised graded metamaterials for mechanical energy confinement and amplification via reinforcement learning / Rosafalco L., De Ponti J.M.,

Iorio L., Ardito R., and Corigliano A. // European Journal of Mechanics-A/Solids. — 2023. — Vol. 99. — P. 104947.

[200] Ovid'ko I.A., Sheinerman A.G. Free surface effects on rotational deformation in nanocrystalline materials // Journal of Materials Science. — 2016. — Vol. 51. — P. 6444–6451.

[201] Pantographic metamaterials: an example of mathematically driven design and of its technological challenges / Dell'Isola F., Seppecher P., Alibert J.J., Lekszycki T., Grygoruk R., Pawlikowski M., Steigmann D., Giorgio I., Andreaus U., Turco E., et al. // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2019. — Vol. 31, no. 4. — P. 851–884.

[202] Pasternak E., Mühlhaus H.-B. Generalised homogenisation procedures for granular materials // Mathematics and Mechanics of Granular Materials. — 2005. — P. 199–229.

[203] Paszkiewicz T., Pruchnik M., Zieliński P. Unified description of elastic and acoustic properties of cubic media: elastic instabilities, phase transitions and soft modes // The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. — 2001. — Vol. 24, no. 3. — P. 327–338.

[204] Pau A., Trovalusci P. Block masonry as equivalent micropolar continua: the role of relative rotations // Acta Mechanica. — 2012. — Vol. 223, no. 7. — P. 1455–1471.

[205] Petrov Yu.V., Morozov N.F., Smirnov V.I. Structural macromechanics approach in dynamics of fracture // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. — 2003. — Vol. 26, no. 4. — P. 363–372.

[206] Piatysheva A.P., Grekova E.F. Reduced linear viscoelastic isotropic Cosserat medium with rotational viscosity: an acoustic metamaterial // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2021. — Vol. 33, no. 4. — P. 1765–1780.

[207] Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A. On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum // International Journal of Solids and Structures. — 2009. — Vol. 46, no. 3-4. — P. 774–787.

[208] Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A. On vectorially parameterized natural strain measures of the non-linear Cosserat continuum // International Journal of Solids and Structures. — 2009. — Vol. 46, no. 11-12. — P. 2477–2480.

[209] Poorsolhjouy P., Misra A. Granular micromechanics based continuum model for grain rotations and grain rotation waves // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2019. — Vol. 129. — P. 244–260.

[210] Porubov A.V. Nonlinear wave localization in an acoustic metamaterial // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2023. — Vol. 119. — P. 107095.

[211] Porubov A.V., Antonov I.D. On control of harmonic waves in an acoustic metamaterial // Mechanics Research Communications. — 2021. — Vol. 116. — P. 103745.

[212] Porubov A.V., Grekova E.F. On nonlinear modeling of an acoustic metamaterial // Mechanics Research Communications. — 2020. — Vol. 103. — P. 103464.

[213] Porubov A.V., Krivtsov A.M. Dispersive propagation of localized waves in a mass-in-mass metamaterial lattice // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2022. — Vol. 34, no. 6. — P. 1475–1483.

[214] Quasitopological rotational waves in mechanical granular graphene / Zheng L.-Y., Theocharis G., Tournat V., and Gusev V. // Physical Review B. — 2018. — Vol. 97, no. 6. — P. 060101.

[215] Rayleigh Waves in the Cosserat Half-Space (Reduced Model) and Half-Space of Damaged Material / Erofeev V., Antonov A., Leonteva A., and Malkhanov A. // Sixty Shades of Generalized Continua: Dedicated to the 60th Birthday of Prof. Victor A. Eremeyev. — Springer, 2023. — P. 171–190.

[216] Research on bandgap property of a novel small size multi-band phononic crystal / Dong Y., Yao H., Du J., Zhao J., and Ding Ch. // Physics Letters A. — 2019. — Vol. 383, no. 4. — P. 283–288.

[217] Ruiz Botello F. Propagación del sonido en medios granulares cohesivos : Ph. D. thesis ; Universidad de Sevilla. — 2017.

[218] Sadovskaya O.V., Sadovskii V.M. Analysis of rotational motion of material microstructure particles by equations of the Cosserat elasticity theory // Acoustical Physics. — 2010. — Vol. 56, no. 6. — P. 942–950.

[219] Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. On the acoustic approximation of thermomechanical description of a liquid crystal // Physical Mesomechanics. — 2013. — Vol. 16. — P. 312–318.

[220] Sadovskii V., Sadovskaya O., Varygina M. Numerical solution of dynamic problems in couple-stressed continuum on multiprocessor computer

systems // Int. J. Numer. Anal. Mod. B. — 2011. — Vol. 2, no. 2-3. — P. 215–230.

[221] Saitoh K., Shrivastava R.K., Luding S. Rotational sound in disordered granular materials // Physical Review E. — 2019. — Vol. 99, no. 1. — P. 012906.

[222] Sato H., Fehler M.C., Maeda T. Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth. — Springer, 2012. — Vol. 496.

[223] Schwartz L.M., Johnson D.L., Feng Sh. Vibrational modes in granular materials // Physical review letters. — 1984. — Vol. 52, no. 10. — P. 831.

[224] Seismic barriers filled with granular metamaterials: Mathematical models for granular metamaterials / Kuznetsov S., Morozov N., Bratov V., and Ilyashenko A. // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1787, no. 1. — P. 012041.

[225] Seismic rotation waves: basic elements of theory and recording / Teisseyre R., Suchcicki J., Teisseyre K.P., Wiszniowski J., and Palangio P. // Annals of Geophysics. — 2003. — Vol. 46, no. 4. — P. 671–685.

[226] Shaat M., Abdelkefi A. On a second-order rotation gradient theory for linear elastic continua // International Journal of Engineering Science. — 2016. — Vol. 100. — P. 74–98.

[227] Sharkskin-inspired magnetoactive reconfigurable acoustic metamaterials / Lee K.H., Yu K., Xin A., Feng Zh., Wang Q., et al. // Research. — 2020. — Vol. 2020.

[228] Shorkin V.S., Vilchevskaya E.N., Altenbach H. Linear theory of micropolar media with internal nonlocal potential interactions // ZAMM-Journal

of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2023. — P. e202300099.

[229] Special rotational deformation as a toughening mechanism in nanocrystalline solids / Morozov N.F., Ovid'ko I.A., Sheinerman A.G., and Aifantis E.C. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2010. — Vol. 58, no. 8. — P. 1088–1099.

[230] Stefanou I., Sulem J., Rattez H. Cosserat approach to localization in geomaterials. — Springer Basel, Switzerland, 2017. — Vol. 730.

[231] Stefanou I., Sulem J., Vardoulakis I. Three-dimensional Cosserat homogenization of masonry structures: elasticity // Acta Geotechnica. — 2008. — Vol. 3. — P. 71–83.

[232] Steinmann P. A view on the variational setting of micropolar continua // Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive-Frictional Materials. — Springer, 2001. — P. 75–88.

[233] Steinmann P., Stein E. A unifying treatise of variational principles for two types of micropolar continua // Acta Mechanica. — 1997. — Vol. 121, no. 1-4. — P. 215–232.

[234] Study of rotational ground motion in the near-field region / Stupazzini M., de la Puente J., Smerzini Ch., Käser M., Igel H., and Castellani A. // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2009. — Vol. 99, no. 2B. — P. 1271–1286.

[235] Suiker A.S.J., Metrikine A.V., De Borst R. Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete

lattice models // International Journal of Solids and Structures. — 2001. — Vol. 38, no. 9. — P. 1563–1583.

[236] Surface waves in granular phononic crystals / Pichard H., Duclos A., Groby J.-P., Tournat V., Zheng L., and Gusev V.E. // Physical Review E. — 2016. — Vol. 93, no. 2. — P. 023008.

[237] Symmetry and applied variational models for strain gradient anisotropic elasticity / Lurie S.A., Belov P.A., Solyaev Yu.O., Lykosova E.D., and Volkov A.V. // Nanoscience and Technology: An International Journal. — 2021. — Vol. 12, no. 1.

[238] Teisseyre R. Why rotation seismology: Confrontation between classic and asymmetric theories // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2011. — Vol. 101, no. 4. — P. 1683–1691.

[239] Teisseyre R., Boratyński W. Deviations from symmetry and elasticity: asymmetric continuum mechanics // Earthquake source asymmetry, structural media and rotation effects. — Springer, 2006. — P. 31–41.

[240] Theoretical study on dispersion relations of chiral acoustic metamaterials considering mass-rotation / Yang F., Yang J.-Sh., Wang Y., Li Sh., Zhang M.-G., Schmidt R., and Schröder K.-U. // European Journal of Mechanics-A/Solids. — 2023. — Vol. 100. — P. 105005.

[241] Tong Q., Li J., Wang Sh. Acoustic circular dichroism in a three-dimensional chiral metamaterial // Physical Review B. — 2023. — Vol. 107, no. 13. — P. 134103.

[242] Topological mechanics of gyroscopic metamaterials / Nash L.M., Kleckner D., Read A., Vitelli V., Turner A.M., and Irvine W.T.M. //

Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2015. — Vol. 112, no. 47. — P. 14495–14500.

[243] Toupin R.A., Bernstein B. Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1961. — Vol. 33, no. 2. — P. 216–225.

[244] Transformation elastodynamics and active exterior acoustic cloaking / Guevara Vasquez F., Milton G.W., Onofrei D., and Seppecher P. // Acoustic metamaterials: negative refraction, imaging, lensing and cloaking. — 2013. — P. 289–318.

[245] Trovalusci P., Masiani R. Non-linear micropolar and classical continua for anisotropic discontinuous materials // International Journal of Solids and Structures. — 2003. — Vol. 40, no. 5. — P. 1281–1297.

[246] Turco E. In-plane shear loading of granular membranes modeled as a Lagrangian assembly of rotating elastic particles // Mechanics Research Communications. — 2018. — Vol. 92. — P. 61–66.

[247] Ultra-broadband absorption by acoustic metamaterials / Jiang X., Liang B., Li R.-Q., Zou X.-Y., Yin L.-L., and Cheng J.-Ch. // Applied Physics Letters. — 2014. — Vol. 105, no. 24.

[248] Ultrasound experiments on acoustical activity in chiral mechanical metamaterials / Frenzel T., Köpfler J., Jung E., Kadic M., and Wegener M. // Nature communications. — 2019. — Vol. 10, no. 1. — P. 3384.

[249] Vardoulakis I. Shear-banding and liquefaction in granular materials on the basis of a Cosserat continuum theory // Ingenieur-Archiv. — 1989. — Vol. 59, no. 2. — P. 106–113.

[250] Varygina M.P., Sadovskaya O.V., Sadovskii V.M. Resonant properties of moment Cosserat continuum // Journal of applied mechanics and technical physics. — 2010. — Vol. 51. — P. 405–413.

[251] Vasiliev A.A., Dmitriev S.V. Discrete and multifield models of a Cosserat chain: one-period and two-period solutions // Russian Physics Journal. — 2016. — Vol. 59. — P. 961–970.

[252] Vasiliev A.A., Miroshnichenko A.E., Dmitriev S.V. Multi-field modeling of a Cosserat lattice: Models, wave filtering, and boundary effects // European Journal of Mechanics-A/Solids. — 2014. — Vol. 46. — P. 96–105.

[253] Vasiliev A.A., Pavlov I.S. Models and some properties of Cosserat triangular lattices with chiral microstructure // Letters on Materials. — 2019. — Vol. 9, no. 1. — P. 45–50.

[254] Vibration isolation in a system using granular medium / Sato T., Tanaka K., Aida Sh., and Mouri Yo. // JSME international journal. Ser. C, Dynamics, control, robotics, design and manufacturing. — 1995. — Vol. 38, no. 3. — P. 434–440.

[255] Vilchevskaya E.N., Müller W.H., Eremeyev V.A. Extended micropolar approach within the framework of 3M theories and variations thereof // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2022. — Vol. 34, no. 2. — P. 533–554.

[256] Viscous second gradient porous materials for bones reconstructed with bio-resorbable grafts / Giorgio I., Andreaus U., dell'Isola F., and Lekszycki T. // Extreme Mechanics Letters. — 2017. — Vol. 13. — P. 141–147.

[257] Wang Y.C., Lakes R.S. Composites with inclusions of negative bulk modulus: extreme damping and negative Poisson's ratio // Journal of Composite Materials. — 2005. — Vol. 39, no. 18. — P. 1645–1657.

[258] Wang Ya.-F., Wang Yu.-Sh., Laude V. Wave propagation in two-dimensional viscoelastic metamaterials // Physical Review B. — 2015. — Vol. 92, no. 10. — P. 104110.

[259] Wave propagation in relaxed micromorphic continua: modeling metamaterials with frequency band-gaps / Madeo A., Neff P., Ghiba I.-D., Placidi L., and Rosi G. // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2015. — Vol. 27, no. 4-5. — P. 551–570.

[260] Weak localization of seismic waves / Larose E., Margerin L., Van Tiggelen B.A., and Campillo M. // Physical review letters. — 2004. — Vol. 93, no. 4. — P. 048501.

[261] Whittaker E. A History of the Theories of Aether and Electricity: Vol. I: The Classical Theories; Vol. II: The Modern Theories, 1900-1926. — Courier Dover Publications, 1951.

[262] Wu Y., Yang M., Sheng P. Perspective: Acoustic metamaterials in transition // Journal of Applied Physics. — 2018. — Vol. 123, no. 9.

[263] Yang M., Sheng P. Sound absorption structures: From porous media to acoustic metamaterials // Annual Review of Materials Research. — 2017. — Vol. 47. — P. 83–114.

[264] Zhang X., Qu Zh., Wang H. Engineering acoustic metamaterials for sound absorption: From uniform to gradient structures // Iscience. — 2020. — Vol. 23, no. 5.

[265] Zhao Sh., Zhao J., Guo N. Universality of internal structure characteristics in granular media under shear // Physical Review E. — 2020. — Vol. 101, no. 1. — P. 012906.

[266] Zhilin P.A. Mechanics of deformable directed surfaces // International Journal of Solids and Structures. — 1976. — Vol. 12, no. 9-10. — P. 635–648.

[267] A design strategy to match the band gap of periodic and aperiodic metamaterials / D'Alessandro L., Krushynska A.O., Ardito R., Pugno N.M., and Corigliano A. // Scientific reports. — 2020. — Vol. 10, no. 1. — P. 16403.

[268] The modified indeterminate couple stress model: Why Yang et al.'s arguments motivating a symmetric couple stress tensor contain a gap and why the couple stress tensor may be chosen symmetric nevertheless / Münch I., Neff P., Madeo A., and Ghiba I.-D. // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2017. — Vol. 97, no. 12. — P. 1524–1554.

[269] A review on wave propagation modeling in band-gap metamaterials via enriched continuum models / Madeo A., Neff P., Barbagallo G., d'Agostino M.V., and Ghiba I.-D. // Mathematical modelling in solid mechanics. — 2017. — P. 89–105.

[270] A second gradient continuum model accounting for some effects of micro-structure on reconstructed bone remodelling / Madeo A., George D., Lekszycki T., Nierenberger M., and Rémond Y. // Comptes Rendus Mécanique. — 2012. — Vol. 340, no. 8. — P. 575–589.

[271] Альтенбах Х., Жилин П.А. Общая теория упругих простых оболочек // Успехи механики. — 1988. — Т. 11, № 4. — С. 107–148.

[272] Анисимов А.Е., Зданчук Е.В., Лалин В.В. Поверхность разрыва в анизотропной редуцированной среде Коссера. Теорема единственности для задач динамики с разрывами // Прикладная математика и механика. — 2020. — Т. 84, № 1. — С. 77–84.

[273] Аэро Э.Л. Нелинейная динамика и кинетика переходов Фредерикса в нематических жидких кристаллах // Высокомолекулярные соединения. Серия А. — 2005. — Т. 47, № 8. — С. 1382–1393.

[274] Аэро Э.Л., Бессонов Н.М., Булыгин А.Н. Динамика моментной анизотропной жидкости // Прикладная математика и механика. — 1996. — Т. 60, № 5. — С. 778.

[275] Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. — 1960. — Т. 2, № 7. — С. 1399–1409.

[276] Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел: В 2-х ч.: Пер. с англ. — Наука, 1984.

[277] Бобровницкий Ю.И. Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред // Акустический журнал. — 2015. — Т. 61, № 3. — С. 283–283.

[278] Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журнал. — 2010. — Т. 56, № 2. — С. 147–151.

[279] Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М. Поглощение звука и метаматериалы (обзор) // Акустический журнал. — 2018. — Т. 64, № 5. — С. 517–525.

[280] Бородин И.Н., Абрамян А.К. Проблема неопределенности параметров прочности при численном моделировании динамического разрушения известняка // Вычислительная механика сплошных сред. — 2017. — Т. 10, № 3. — С. 341–350.

[281] Веселаго В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ // Успехи физических наук. — 1967. — Vol. 92, no. 7. — P. 517–526.

[282] Вильчевская Е.Н. Тензорная алгебра и тензорный анализ // СПб.: Изд-во Политехнического ун-та. — 2012.

[283] Гаврилов С.Н. Математическая модель среды Кельвина // Труды XXIII Школы–семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем. — Санкт-Петербург, ИПМаш РАН. — 1996. — С. 229–240.

[284] Гордиенко В.В. О вязкости вещества тектоносферы континентов и океанов // Геология и полезные ископаемые Мирового океана. — 2017. — № 1 (47). — С. 45–57.

[285] Грекова Е.Ф. Линейная редуцированная среда Коссера с шаровым тензором инерции, вращения в которой не наблюдаются в эксперименте // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2012. — № 5. — С. 58–64.

[286] Грекова Е.Ф. Об одном классе единожды отрицательных акустических метаматериалов // Доклады академии наук. — 2015. — Т. 462, № 3. — С. 295–295.

[287] Гуляев Ю.В., Тарасенко С.В., Шавров В.Г. Спин-волновая акустика антиферромагнитных структур как магнитоакустических метаматериалов // Успехи физических наук. — 2011. — Т. 181, № 6. — С. 595–626.

[288] Друянов Б.А. Прикладная теория пластичности пористых тел. — Машиностроение, 1989. — С. 164.

[289] Еремеев В.А. Фазовые превращения в сильно деформированных нематических жидких кристаллах // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2002. — № 10. — С. 26–31.

[290] Ерофеев В.И., Потапов А.И. Нелинейные продольные волны в упругих средах с моментными напряжениями // Акустический журнал. — 1991. — Т. 37, № 3. — С. 477.

[291] Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве // СПб.: Нестор. — 2001. — С. 276.

[292] Жилин П.А. Рациональная механика сплошных сред. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012.

[293] Жилин П.А. Построение модели электромагнитного поля с позиций рациональной механики // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. Физика сплошных сред. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 77–97.

[294] Зубов Л.М., Еремеев В.А. Уравнения вязкоупругой микрополярной жидкости // Докл. АН (Россия). — 1996. — Т. 351, № 4. — С. 472–475.

[295] Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Особенности расчета изгибной жесткости нанокристаллов // Доклады Академии наук. — 2002. — Т. 385, № 4. — С. 494–496.

[296] Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Получение макроскопических соотношений упругости сложных кристаллических решеток с учетом моментных взаимодействий на микроуровне // Прикладная математика и механика. — 2007. — Т. 71, № 4. — С. 595–615.

[297] Кильчевский Н.А., Кильчинская Г.А., Ткаченко Н.Е. Аналитическая механика континуальных систем. — Наукова думка, 1979. — С. 188.

[298] Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. — Наука, 1984. — С. 403.

[299] Кривцов А.М., Лобода О.С. Описание упругих свойств двухатомных кристаллов со структурой алмаза и сфалерита с использованием моментного взаимодействия // Физическая мезомеханика. — 2012. — Т. 15, № 2. — С. 23–29.

[300] Кулеш М.А., Грекова Е.Ф., Шардаков И.Н. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // Акустический журнал. — 2009. — Т. 55, № 2. — С. 216–225.

[301] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. — Наука, 1965. — Т. 7. — С. 247.

[302] Лоренц Г.А. Теории и модели эфира: Пер. с англ./Под ред. — А.К. Тимирязева. М.-Л.: ОНТИ, 1936. — С. 68.

[303] Лурье А.И. Теория упругости. — Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. — С. 940.

[304] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. — Наука, 1980. — С. 540.

[305] Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. — Мир, 1991. — С. 560.

[306] Новацкий В. Моментные напряжения в термоупругости // Прикладная механика. — 1967. — Т. 3, № 1. — С. 3–17.

[307] Новацкий В. Теория упругости. — Мир, 1975. — С. 872.

[308] Оболенцева И.Р. О свойствах симметрии тензора гирации, характеризующего пространственную дисперсию упругих свойств // Упругие волны в гиротропных и анизотропных средах / под ред. Оболенцева И.Р. — Новосибирск. Наука, 1993. — С. 5–24.

[309] Описание кристаллической упаковки частиц с учетом моментных взаимодействий / Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. и Фирсова А.Д. // Известия Академии наук. Механика твердого тела. — 2003. — № 4. — С. 110–128.

[310] Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. — Физматлит, 2003. — С. 398.

[311] Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. — 1964. — Т. 28, № 3. — С. 401.

[312] Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. — М.: Наука, 1976. — С. 328.

[313] Петров Ю.В., Груздков А.А., Братов В.А. Структурно-временна́я теория разрушения как процесса, протекающего на разных масштабных уровнях // Физическая мезомеханика. — 2012. — Т. 15, № 2. — С. 15–21.

[314] Применение моментного взаимодействия к построению устойчивой модели кристаллической решетки графита / Беринский И.Е., Иванова Е.А., Кривцов А.М. и Морозов Н.Ф. // Изв. РАН. МТТ. — 2007. — Т. 5. — С. 6–16.

[315] Роско К. Значение деформаций в механике грунтов // Периодический сборник переводов иностранных статей. Механика. — 1971. — Т. 3. — С. 91–145.

[316] Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. — Физматлит, 2008. — С. 368.

[317] Садовский В.М., Садовская О.В., Варыгина М.П. Анализ резонансного возбуждения блочной среды на основе уравнений моментного континуума Коссера // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. — 2013. — Т. 5, № 1.

[318] Садовский В.М., Садовская О.В., Похабова М.А. Моделирование упругих волн в блочной среде на основе уравнений континуума Коссера // Вычислительная механика сплошных сред. — 2014. — Т. 7, № 1. — С. 52–60.

[319] Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред / Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Синёв А.В. и Мугин О.О. — Физматлит, 2004. — С. 176.

[320] Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. — Судостроение, 1972. — С. 376.

[321] Слепян Л.И., Царева О.В. Поток энергии при нулевой групповой скорости несущей волны // Доклады Академии наук СССР. Теория упругости. — 1987. — Т. 294, № 4. — С. 818–822.

[322] Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. — Гос. изд-во лит-ры по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960. — С. 131.

[323] Сорокин Д.В., Бабкина Л.А., Бразговка О.В. Проектирование элементов конструкций различного назначения на основе топологической оптимизации // Космические аппараты и технологии. — 2022. — Т. 6, № 2 (40). — С. 61–82.

[324] Структура и свойства Fe–Ga-сплавов–перспективных материалов для электроники / Головин И.С., Палачева В.В., Мохамед А.К. и Балагуров А.М. // Физика металлов и металловедение. — 2020. — Т. 121, № 9. — С. 937–980.

[325] Федотовский В.С. Поперечные волны в дисперсном метаматериале со сферическими включениями // Акустический журнал. — 2015. — Т. 61, № 3. — С. 311–311.

[326] Шерман С.И., Горбунова Е.А. Реология среды в межблоковых сейсмоактивных разломах континентальной литосферы-ключ к генерации сильнейших землетрясений в Центральной Азии // Геодинамика и тектонофизика. — 2018. — Т. 9, № 3. — С. 571–586.

[327] “Deflecting elastic prism” and unidirectional localisation for waves in chiral elastic systems / Carta G., Jones I.S., Movchan N.V., Movchan A.B., and Nieves M.J. // Scientific Reports. — 2017. — Vol. 7, no. 1. — P. 26.