

На правах рукописи



ГРЕКОВА Елена Федоровна

Динамика редуцированных сред Коссера и гироконтинуумов

Специальность 1.1.8 — механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург

2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт проблем машиноведения Российской академии наук» (ИПМаш РАН).

Официальные
оппоненты: **ЕРОФЕЕВ Владимир Иванович**,
профессор, доктор физико-математических наук, директор
Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт проблем машиностроения РАН»

САДОВСКИЙ Владимир Михайлович,
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, заведующий отделом вычислительной механики деформируемых сред Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук

ШОРКИН Владимир Сергеевич,
профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры технической физики и математики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

Ведущая
организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук (ИПМех РАН)

Защита состоится «19» декабря 2023 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета 24.1.097.01 по защите докторских и кандидатских диссертаций при ФГБУН «Институт проблем машиноведения Российской академии наук» по адресу: 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., д. 61.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ и на сайте ФГБУН «Институт проблем машиноведения Российской академии наук».

Автореферат разослан « » 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.097.01
доктор технических наук

Седакова Елена Борисовна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Создание новых сложных материалов с желаемыми динамическими свойствами — требование и двигатель развития современного инженерного дела. Они необходимы для сбора акустической энергии, управления ее потоками, виброизоляции, предохранения объектов от повреждений или их целенаправленного контролируемого разрушения, требуемого в рабочих процессах добывающей и обрабатывающей промышленности. Для практических целей, например, в сейсморазведке, при ультразвуковых исследованиях, также необходимо учитывать сложную структуру существующих сред: дополнительные степени свободы неоднородностей, зерен, агрегатов, блоков, включений. В связи с этим в механике развивается актуальная область исследований — теория сред сложной структуры, частицы которых — сложные бесконечно малые объекты с дополнительными степенями свободы: вращательными, деформационными и другими. Подобные модели необходимы в биомеханике, теории электромагнитных сплошных сред (Джорджо, Ерофеев, Еремеев, Жилин, Лурье, Можен, Новацкий, Тьерстен, Шоркин, Эринген), для описания жидких кристаллов, зернистых сред, различных композитов, в том числе акустических метаматериалов, многофазных сред (Аэро, Бессонов, Буи, Вильчевская, Грин, Еремеев, Зубов, Мюллер). Микроструктура материала играет важную роль в процессах динамического разрушения (Абрамян, Бородин, Мещеряков, Морозов, Петров). Нередко в таких средах существенны вращательные степени свободы (Альтенбах, Еремеев, Ерофеев, Жилин, Пау, Чженг, Шаат). Континуум из малых твердых тел с поворотными степенями свободы называется микрополярной средой (Эринген), или средой Коссера в честь братьев Коссера, в 1909 г. предложивших его трехмерную теорию. Поэтому задача создания континуальных микрополярных моделей, в том числе интеллектуальных, для описания акустических метаматериалов и сред с включениями, блоковой и зернистой структуры, является весьма актуальной.

Степень разработанности темы. Важным примером сред с микроструктурой, широко используемых на практике, являются акустические метаматериалы. Это, как правило, искусственные композиты с эффективными отрицательными упругими и/или инерционными характеристиками по отношению к статической нагрузке или гармоническим волнам в определенной зоне частот (Ерофеев, Еремеев, дель Изола, Каина, Ли, Лурье). Эти среды используются для управления фронтами волн, потоками энергии, фокусировки звука, защиты от вибраций (Генно, Гевара, Гао, Жанг, Каммер, Ма, Мильтон, Цветиканин). В данной работе метаматериалы понимаются в динамическом смысле. В таком случае их дисперсионные кривые обладают запрещенными зонами частот или зонами аномального преломления — падающими участками

ми (Каина, Ли и др.) Эти области частот называются рабочими зонами метаматериала. Запрещенная зона соответствует «единожды отрицательному» акустическому метаматериалу, а зона аномального преломления — «дважды отрицательному».

Охватить существующую обширную литературу по метаматериалам не представляется возможным. Вначале была развита теория электромагнитных метаматериалов, где пионерские работы принадлежат Веселаго и Пендри. Одна из первых работ по акустическим метаматериалам — работа Кушвахи, Халеви, Добжиньского и Джафари-Рухани (1993), где рассматривались упругие композиты периодической структуры с включениями — резонаторами. В дальнейшем такие материалы стали создаваться на практике и исследоваться (Бобровницкий, Бутен, Ву, Деймьер, Жанг, Лиу, Крастер, Чжанг, Шенг, Янг). Обычно уравнения метаматериалов получают в результате рассмотрения *a priori* заданной микроструктуры (Бигони, Ерофеев, Кривцов, Лурье, Павлов, Порубов, Хуанг). Наиболее популярная модель — структура из объектов “масса в массе”: массивных частиц, внутри которых содержится другая материальная точка-резонатор (Лиу, Уиллис, Хуанг, Чан, Шенг). Частный вид континуума, моделирующего метаматериал, — «ослабленная микроморфная среда», — предложен в работах Мадео, Неффа и соавторов. Однако неясно, какие свойства континуальных моделей обеспечивают дисперсионное поведение, характерное для акустических метаматериалов. Сравнительно мало работ по акустическим метаматериалам с поворотными степенями свободы (Васильев, Гусев, Джаннини, Джонс, Ерофеев, Карта, Мовчан, Митчелл, Павлов, Оффрэ, Тонг, Федотовский, Френзель, Янг), хотя они демонстрируют наиболее интересные волновые свойства. Роль диссипации в метаматериалах остается недостаточно изученной (Фразьер, Молерон).

В композитах с включениями, зернистых, блоковых, консолидированных сыпучих средах на разных масштабах важны поворотные степени свободы, особенно в процессах сдвига, перестройки структуры, при ударных воздействиях (Атрошенко, Бесдо, Вардулакис, Годдард, Гуткин, Дьеполдер, Лима, Липпманн, Матвеев, Мещеряков, Овидько, Пау, Садовские, Тессейры). Однако в этих средах нет взаимодействия, которое бы противодействовало взаимному повороту частиц (Мандель). Нередко эти среды обладают запрещенными зонами частот или падающими участками дисперсионных кривых (Людинг, Масиани, Мисра, Меркель, Мурай, Сайто, Сулем), при ударных воздействиях имеют место явления локализации (Братов, Кузнецов, Морозов, Лароз, Сомфай), а в геосредах логарифмический декремент немонотонно зависит от частоты (Сато). Шварцем, Джонсоном и Фенгом для описания сыпучих сред (1984) была предложена линейная изотропная упругая микрополярная теория, в которой отсутствует сопротивление градиенту поворота.

Позднее она была названа редуцированной средой Коссера (Масиани, Тривалуши). Однако ее волновые свойства не были исследованы, а также данная теория не учитывала нелинейность, диссипативные свойства, анизотропию (в том числе локальную, то есть заметную лишь на малых масштабах), что может быть важно в сыпучих средах и грунтах (Сато, Оболенцева, Ода, Ивашиита). В зернистых средах при всестороннем растяжении или близком к нему состоянию наблюдается пластическое течение и перестройка материала (Дружанов, Роско). Начало пластического течения или иные изменения структуры могут быть связаны с неустойчивостью нелинейного упругого материала (Антман, Пашкевич), однако классическая упругая изотропная нелинейная упругая среда с выпуклой энергией становится неустойчивой при всестороннем сжатии, но не при всестороннем растяжении (Тупин). Таким образом, необходима разработка микрополярных теорий, описывающих данные среды, исследование их волновых свойств и устойчивости с учетом предварительного напряженного состояния, анизотропии и диссипации.

Особое место среди микрополярных сред занимают гироконтинуумы — материалы с большими скоростями вращения частиц, например, акустические гироскопические метаматериалы (Брун, Джонс, Карта, Мовчан, Митчелл), среда Кельвина (Жилин, Гаврилов, Грекова), уравнения которой аналогичны уравнениям магнитоупругих сред, и другие (Брокато, Иванова, Каприц). В антиферромагнетиках и магнитоупругих композитах существуют зоны непропускания для магнитоупругих волн (Бу Матар, Гуляев).

Несмотря на достигнутый прогресс, в данной области остаются нерешенные задачи. Поэтому разработка моделей Коссера без больших скоростей вращения и гироконтинуумов, обладающих свойствами акустических метаматериалов, представляется актуальной задачей.

Объект исследования: среды сложной структуры, обладающие свойствами акустических метаматериалов.

Целью диссертационной работы является развитие теории континуумов сложной структуры, в том числе с поворотными степенями свободы, обладающих свойствами акустических метаматериалов, при помощи феноменологических методов механики сплошной среды.

Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие **задачи диссертационной работы:**

1. Предложить новый класс континуумов, демонстрирующих свойства акустических метаматериалов, в том числе континуумов с поворотными степенями свободы.
2. Исследовать влияние параметров континуума (свойств симметрии, упругих, диссипативных и инерционных констант) на свойства дисперсионных соотношений метаматериала для различных типов волн.

3. Предложить континуальные модели с поворотными степенями свободы для зернистых, блоковых, консолидированных сыпучих сред и композитов с жесткими включениями, в которых нет упорядоченной структуры поворотов, обладающие свойствами акустических метаматериалов, в том числе учитывающие нелинейность, произвольные внешние нагрузки, локальную и иную анизотропию, диссипацию.
4. Найти особенности динамики и устойчивости данных сред.
5. Найти зависимость волновых свойств этих континуумов от диссипативных параметров и параметров анизотропии, предварительного напряженного состояния.
6. Предложить модели среды Кельвина или иного гироконтинуума, обладающие свойствами акустических метаматериалов. Исследовать влияние параметров континуума на дисперсионные соотношения и возможность управления рабочими зонами метаматериала при помощи внешней нагрузки.

Метод исследования основан на применении фундаментальных законов механики, принципа материальной объективности, тензорной алгебры и анализа, асимптотических разложений, дисперсионного анализа. При построении нелинейной модели редуцированной среды Коссера используется баланс энергии в форме Жилина.

Научная новизна состоит в разработке нового подхода к моделированию акустических метаматериалов и сред, которые не сопротивляются взаимному повороту частиц (зернистых, блоковых, с включениями, магнестрикционных со слабым обменным взаимодействием) — теории редуцированных сплошных сред сложной структуры, в том числе микрополярных, включая нелинейные, с локальной анизотропией, хиральные, диссипативные, с большими скоростями вращения частиц, интеллектуальные; в исследовании динамических свойств таких сред. Показано, что редуцированные среды, упругая энергия которых не зависит от некоторых видов деформации, обладают запрещенными зонами частот или зонами аномального преломления, что добавление определенных видов диссипации в материал может улучшать прохождение волны в запрещенных в упругом случае зонах частот и приводить к появлению зон аномального преломления, что в редуцированной среде Коссера возможны явления локализации. Найден новый механизм неустойчивости определенного класса редуцированных сред Коссера при всестороннем растяжении, предложены модели редуцированной среды Кельвина и редуцированной гиростатической среды для акустических гироскопических и магнестрикционных метаматериалов и проведен их дисперсионный анализ. Новыми являются все перечисленные ниже выносимые на защиту результаты.

Теоретическая и практическая значимость работы. В рамках теории сплошных сред сложной структуры предложено новое направление — теория редуцированных упругих и вязкоупругих сред, которое открывает возможности к поиску и разработке умных акустических метаматериалов различной природы. Редуцированные среды Коссера могут служить в качестве моделей для различных сред с неупорядоченной структурой поворотов (геосреды, сред блоковой и зернистой структуры, композитов с включениями и др.), в ротационной сейсмологии. Результаты, полученные в рамках данных моделей, перспективны с точки зрения сейсморазведки. Редуцированные гироконтинуумы применимы в качестве модели для акустических материалов с гироскопическими элементами, разрабатываемых в последние годы для управления волновыми фронтами. Также они могут служить моделью для магнитострикционных сред со слабым обменным взаимодействием, например, для материалов, созданных на основе терфенола-D.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Введено понятие и развита теория упругих редуцированных сред типа «несущий континуум + распределенный динамический гаситель», упругая энергия которых не зависит от градиента обобщенной координаты гасителя. Показано, что линейные упругие редуцированные среды при определенных требованиях к их упругой и кинетической энергии являются акустическими метаматериалами вне зависимости от природы своих степеней свободы, то есть их дисперсионные кривые обладают запрещенными зонами или падающими участками.
2. Показано, как, управляя взаимосвязью субконтинуумов или внешним следящим воздействием, можно изменять рабочие зоны метаматериала и их тип. Наиболее эффективно управлять волновыми свойствами изотропного материала позволяет взаимосвязь «градиент координаты несущего континуума – координата динамического гасителя», а гиротропного — она же в сочетании со взаимосвязью обеих координат.
3. Показано, что добавление линейной диссипации к упругим связям редуцированной среды обеспечивает существование бегущей затухающей волны почти на всех частотах. Малая диссипация может способствовать более медленному затуханию колебаний в запрещенной зоне упругого материала и превращать ее часть в падающий участок — рабочую зону дважды отрицательного акустического метаматериала.
4. Предложены различные модели редуцированных сред Коссера. Показано, что при линейных колебаниях они являются акустическими метаматериалами, рабочими зонами которых можно управлять при помощи нелинейного напряженно-деформированного состояния, малой диссипации и внешнего следящего момента.

5. Для сосредоточенных гармонических нагрузок в неограниченной изотропной упругой линейной редуцированной среде Коссера получена функция Грина, вид которой свидетельствует о возможности резонансных или локализованных вблизи источника решений.
6. Найден новый механизм неустойчивости нелинейных изотропных упругих сред Коссера с выпуклой энергией деформации при большом всестороннем растяжении, отсутствующий у классических сред.
7. Предложены модели простейшей редуцированной среды Кельвина, имеющей аналогию с магнитоупругими материалами, и простейшей гиросtatической среды. Показано, что обе среды являются акустическими метаматериалами, рабочую зону и тип которых можно менять при помощи внешнего следящего момента.

Все основные научные результаты являются новыми, получены автором самостоятельно.

Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается корректным использованием математических методов и фундаментальных законов механики, подтверждается сравнением аналитических и численных результатов, качественным совпадением эффектов, предсказанных теорией, с реальными и численными динамическими экспериментами для композитов с включениями и сыпучих сред.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались более чем на 50 международных конференциях в России и за рубежом, были представлены на семинарах ИПМаш РАН, СПбПУ Петра Великого, рабочих встречах исследовательской группы Shell E.&P. и Санкт-Петербургского научного кластера, семинаре исследовательской группы университета Севильи «Электродинамика и механика когезивных сыпучих сред», семинаре под руководством Ж.А. Можена лаборатории «Моделирование в механике» (университет Пьера и Марии Кюри), семинаре лаборатории Навье (университет Густава Эйфеля, Национальная школа мостов и французский Национальный центр научных исследований), семинаре лаборатории Школы машиностроения и электротехники (Технологический институт Харбина). По теме диссертации автор работала в рамках проектов:

- Совместный проект компании Шелл (Shell E.&P.) и РАН «Волны в сложных средах» (2003–2006), руководителем которого с российской стороны являлась соискатель.
- «Мелкодисперсный порошок как нелинейная полярная среда: межчастичное взаимодействие и континуальная теория», персональный грант РАН для молодых ученых N 95 (2000–2002);
- «Нелинейные упругие полярные среды: аналогии и выбор тензоров деформации», персональный грант фонда «Молодые ученые России», 2001

- «Электрогидродинамика суспензий и реология когезивных сыпучих сред», грант правительства Андалузии в категории «выдающиеся проекты», 2006–2009 (исполнитель);
- три гранта правительства Испании, посвященных механике и физике сыпучих и текучих сред (2007–2011, 2011–2014, 2014–2018, участник);
- два гранта РФФИ (1999–2001, 2017–2019, участник).

Работа выполнена при поддержке Правительства Российской Федерации (госзадание «FSEG-2020-0021»).

Публикации. Результаты исследований отражены в 28 работах [1–28], индексируемых в Scopus и/или Web of Science. Из них 9 работ в квартиле Q1, 4 работы в квартиле Q2 по рейтингу Scopus.

Личный вклад автора. Все основные результаты, выносимые на защиту, принадлежат автору. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь материал, полученный автором; вклад соавторов оговорен отдельно. Работы [2, 8, 9, 11–13, 15–21] написаны без соавторов. В работе [1] автору принадлежит постановка задачи и вывод нелинейных определяющих уравнений редуцированной среды Кельвина, в работах [5, 10, 26–28] — аналитические результаты, в работе [3] — аналитическая часть тестовой задачи, в работах [4, 6] — постановка задачи, асимптотика для вещественной части волнового числа, в работе [7] — частичный анализ решения в континуальном приближении, в работе [14] — идея экспериментальной установки для воспроизводимого измерения динамических свойств когезивного порошка, анализ отличия роли магнитного поля во время процесса упаковки и при применении к созданной упаковке, в работе [22] — аналитическая часть решения для безграничной редуцированной среды Коссера и характеристика дисперсионных кривых волны Рэлея, в работах [23, 24] — изучение асимптотических свойств дисперсионных кривых волны Рэлея в редуцированной среде Коссера, в работе [25] — уравнения динамики пластической редуцированной среды Коссера. В совместных работах анализ результатов производился в сотрудничестве с соавторами.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 401 страницу, она содержит 74 рисунка, список литературы включает 327 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит определение основных понятий, описание предмета и метода исследования, сведения о структуре диссертации, положения, выносимые на защиту, сведения о теоретической и практической значимости работы, о ее апробации.

Первая глава посвящена аналитическому обзору литературы. Выводы из обзора позволяют сформулировать цель и задачи диссертационной работы.

Во **второй главе** в **разделах 2.1–2.4** рассматривается упругий линейный континуум произвольной природы, подчиняющийся уравнениям Лагранжа. Среда состоит из двух субконтинуумов — несущего континуума и распределенного динамического гасителя, которые характеризуются векторами обобщенных координат произвольной размерности $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_0$, соответственно. Массовая плотность упругой энергии U континуума зависит $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \nabla \mathbf{q}_1$, где ∇ — оператор-градиент, но не зависит от $\nabla \mathbf{q}_0$, то есть частицы «распределенного динамического гасителя» не соединены между собой непосредственно. Такой континуум называется *редуцированным*. Его пример показан на рис. 1. Идея редуцированной среды имеет общие черты с континуально-дискретным

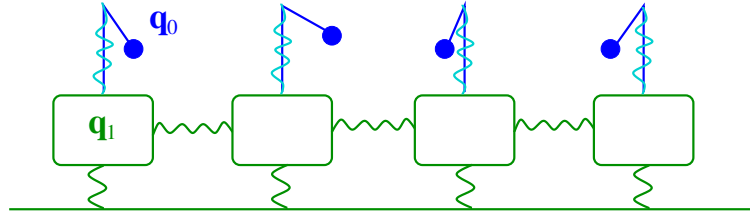


Рис. 1. Редуцированный континуум.

подходом (Беляев), рассматривающим сплошную среду с внедренными в нее не контактирующими между собой дискретными элементами. Скорости и ускорения $\dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i$ предполагаются малыми (в этой главе не рассматриваются редуцированные континуумы с гироскопическими силами). Полагаем, что континуум удовлетворяет требованиям материальной объективности (Нолл). Уравнениями динамики упругой среды служат модифицированные векторные уравнения Лагранжа (Кильчевский и др.). Для редуцированного континуума они записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_1} + \nabla \cdot \frac{\partial L}{\partial \nabla \mathbf{q}_1} = \mathbf{0}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_0} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_0} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Здесь $L = K - U$ — лагранжиан, K — массовая плотность кинетической энергии.

Рассмотрен случай, когда массовые плотности упругой и кинетической энергии линейного редуцированного упругого материала имеют вид

$$U = \nabla \mathbf{q}_1^\top \cdot \cdot^4 \mathbf{K} \cdot \cdot \nabla \mathbf{q}_1 / 2 + C_{11} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_1 / 2 + \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{C}_{00} \cdot \mathbf{q}_0 / 2 + \nabla \mathbf{q}_1^\top \cdot \cdot^3 \mathbf{N}_{10} \cdot \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{C}_{10} \cdot \mathbf{q}_0, \quad (2)$$

$$K = \dot{\mathbf{q}}_0 \cdot \mathbf{A}_{00} \cdot \dot{\mathbf{q}}_0 / 2 + A_{11} \dot{\mathbf{q}}_1 \cdot \dot{\mathbf{q}}_1 / 2. \quad (3)$$

Здесь ${}^4\mathbf{K}$, C_{11} , $\mathbf{C}_{00}$, $\mathbf{N}_{10}$, $\mathbf{C}_{10}$ — упругие характеристики, $\mathbf{A}_{00}$ и A_{11} — инерционные. Свертка тензоров $\cdot$ линейна по своим аргументам, для полиад $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \lambda_n \cdot \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n = \lambda_1 \dots (\lambda_{n-1} \cdot \zeta_2)(\lambda_n \cdot \zeta_1) \zeta_3 \dots \zeta_n$. Потребуем $\mathbf{C}_{00} = \omega_0^2 \mathbf{A}_{00}$. Тогда несущий континуум обладает парциальной частотой колебаний $\omega_1 = \sqrt{C_{11}/A_{11}}$, а распределенный динамический гаситель — парциальной частотой ω_0 . Можно ожидать, что динамический гаситель вблизи своей парциальной частоты будет захватывать энергию колебаний, поскольку между его частицами отсутствует упругая связь.

Примерами редуцированных континуумов могут служить широко используемая модель акустического метаматериала «масса в массе» (Лиу, Шенг и др.) и упругая изотропная линейная редуцированная среда Коссе-ра (Шварц, Джонсон, Фенг), подробно рассмотренная в третьей главе, в которой, помимо реакции на $\nabla \mathbf{u}^S$ ($\mathbf{u}$ — перемещение), связанной с параметрами Ламе λ, μ , присутствует антисимметричная часть тензора напряжений

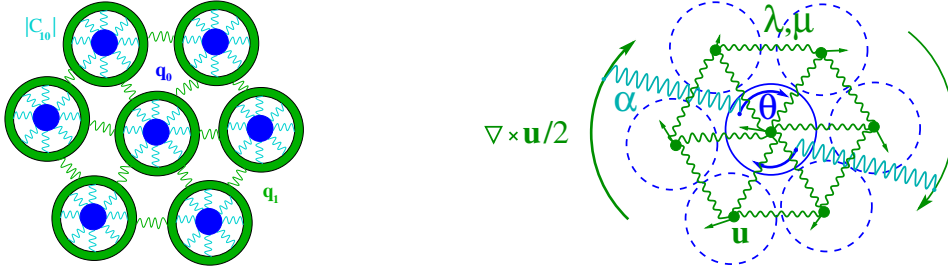


Рис. 2. Масса в массе (слева) и редуцированная среда Коссе-ра (справа). $|C_{10}|$ — жесткость реакции на относительное смещение $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0$ (слева).

$\alpha(\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) \times \mathbf{E}$ — реакция на разность микроповорота (малого вектора поворота частицы $\boldsymbol{\theta}$) и макropоворота (вихревой деформации окрестности $\nabla \times \mathbf{u}/2$). Здесь $\mathbf{E}$ — единичный тензор, α — упругий модуль Коссе-ра.

Уравнения динамики (1) при U, K , заданных системой (2), (3), таковы:

$$\mathbf{A}_{00} \cdot (\ddot{\mathbf{q}}_0 + \omega_0^2 \mathbf{q}_0) + \nabla \mathbf{q}_1^\top \cdot {}^3\mathbf{N}_{10} + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{C}_{10} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

$$A_{11}(\ddot{\mathbf{q}}_1 + \omega_1^2 \mathbf{q}_1) + \mathbf{C}_{10} \cdot \mathbf{q}_0 - \nabla \cdot ({}^4\mathbf{K} \cdot \nabla \mathbf{q}_1 + {}^3\mathbf{N}_{10} \cdot \mathbf{q}_0) = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Ищем гармонические решения данных уравнений в виде $\mathbf{q}_i = \mathbf{Q}_i e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, ω — частота волны, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы, t — время. Выражая $\mathbf{q}_0$ через $\mathbf{q}_1$ из (4) при $\omega \neq \omega_0$, подставляем в уравнение (5) и получаем уравнение Кристоффеля для свободных колебаний несущего континуума с эффективными частотно-зависимыми характеристиками, которые

могут оказаться отрицательными в некоторых диапазонах частот:

$$(\mathbf{k} \cdot {}^4\mathbf{K} \cdot \mathbf{k} + (\omega_1^2 - \omega^2)A_{11}\mathbf{E} + (\omega^2 - \omega_0^2)^{-1}[\mathbf{C}_{10} \cdot \mathbf{A}_{00}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{10}^\top + \mathbf{k} \cdot {}^3\mathbf{N}_{10} \cdot \mathbf{A}_{00}^{-1} \cdot (\mathbf{k} \cdot {}^3\mathbf{N}_{10})^\top - 2i(\mathbf{k} \cdot {}^3\mathbf{N}_{10} \cdot \mathbf{A}_{00}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{10}^\top)^A]) \cdot \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}. \quad (6)$$

В анизотропном многомерном случае рассматриваются два варианта:

- 1) ${}^3\mathbf{N}_{10} \neq \mathbf{0}, \mathbf{C}_{10} = \mathbf{0}$; (взаимосвязь «деформация несущего континуума – координата динамического гасителя»)
- 2) ${}^3\mathbf{N}_{10} = \mathbf{0}, \mathbf{C}_{10} \neq \mathbf{0}$ (взаимосвязь «координата несущего континуума – координата динамического гасителя»).

На частоте ω_0 возможен режим $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{0}, \mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega_0 t}$ в случае 1 при $\nabla \cdot ({}^3\mathbf{N}_{10} \cdot \mathbf{Q}_0) = \mathbf{0}$. В случае 2 на частоте ω_0 для невырожденного $\mathbf{C}_{10}$ при $\omega = \omega_0$ не существует волнового числа $k = |\mathbf{k}|$, в том числе комплексного, то есть отсутствуют даже затухающие колебания.

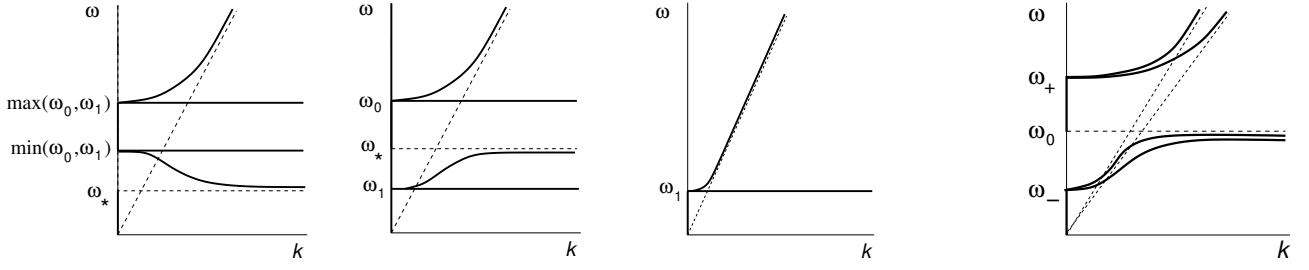
Асимптотический анализ вблизи парциальных частот показывает, что в зависимости от них и взаимосвязи субконтинуумов в анизотропном материале существуют запрещенные зоны и/или зоны аномального преломления, возможно, за исключением особых направлений распространения волн.

Для изотропной среды с трехмерными субконтинуумами одно из условий $\mathbf{C}_{10} = \mathbf{0}, {}^3\mathbf{N}_{10} = \mathbf{0}$ обязательно выполняется в силу симметрии. Удастся получить точные дисперсионные соотношения, качественно картина для поперечных волн совпадает с анизотропным случаем. Краткая сводка результатов и графики для изотропного материала приведены в таблице 1.

Для изотропного случая возникают новые характеристические частоты $\omega_*, \omega_\pm$ — границы рабочих зон, выражения для которых не приводятся ради краткости. Выполняется $\omega_* < \omega_0, 0 \leq \omega_- < \omega_0 < \omega_+$. При усилении взаимосвязи субконтинуумов ω_* уменьшается, а частоты $\omega_\pm$ удаляются от ω_0 .

Таблица 1
Дисперсионные свойства редуцированной упругой среды

Анизотропный случай	
Взаимосвязь $\nabla \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0$	Взаимосвязь $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0$
1) <u>$\omega_0 > \omega_1$, слабая взаимосвязь:</u> запрещенные зоны под ω_0 и под ω_1	Запрещенная
2) <u>иначе:</u> ω_0, ω_1 — границы запрещенных зон (зоны лежат между частотами), падающий участок под наименьшей из частот	зона над $\omega = 0$ и ω_0
Изотропный случай	
Взаимосвязь $\nabla \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0$	Взаимосвязь $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0$



поперечная волна	продольная волна	продольная и поперечная волна
$c_{\text{inf}}^2 k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_1^2)}{\omega^2 - \omega_*^2}$		$c_{\text{inf}}^2 k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{\omega^2 - \omega_0^2}$

Здесь c_{inf} — предел фазовой скорости волны на высоких частотах. Заметим, что для материала “масса в массе” $\omega_- = 0$, а для изотропной линейной редуцированной среды Коссера $\omega_1 = 0$, поэтому у данных сред существует акустическая (выходящая из начала координат) дисперсионная ветвь с ненулевой скоростью. Дисперсионные соотношения этих сред совпадают с точностью до обозначений.

Изложенное выше составляет материал **разделов 2.1–2.3**. В **разделе 2.4** рассматривается особая гиротропная среда, каждый из субконтинуумов которой обладает изотропными характеристиками, но параметр взаимосвязи между континуумами при отражении меняет знак. В данном случае в уравнении Кристоффеля (6) мнимая часть не равна нулю. В материале существуют бегущие поляризованные волны почти на всех частотах, часть из них затухает, существует множество зон аномального преломления. Дисперсионное поведение крайне разнообразно и чувствительно к взаимосвязи субконтинуумов (рис. 3). В **разделе 2.5** приведены примеры редуцированных линейных упругих сред с поворотными степенями свободы.

Разделы 2.6–2.13 посвящены вязкоупругим редуцированным линейным средам. К существующим упругим связям добавляется линейная диссипация типа Кельвина–Фойгта, получено уравнение Кристоффеля для несущего континуума. Поочередно рассматриваются различные типы диссипации (в несущем континууме, основании динамического гасителя, взаимосвязи субконтинуумов и т.д.) для изотропных сред и особой гиротропной среды, рассмотренной выше. На рис. 4 приведен пример для случая диссипации в несущем континууме. Видим, что в бывших запрещенных зонах диссипация приводит к существованию бегущей затухающей волны, логарифмический декремент становится конечным, и в них возникают участки аномального преломления, затухание волны по координате уменьшается с ростом малой диссипации.

Анализ показывает, что бегущая затухающая волна возникает почти на всех частотах для любого вида диссипации, ее логарифмический декре-

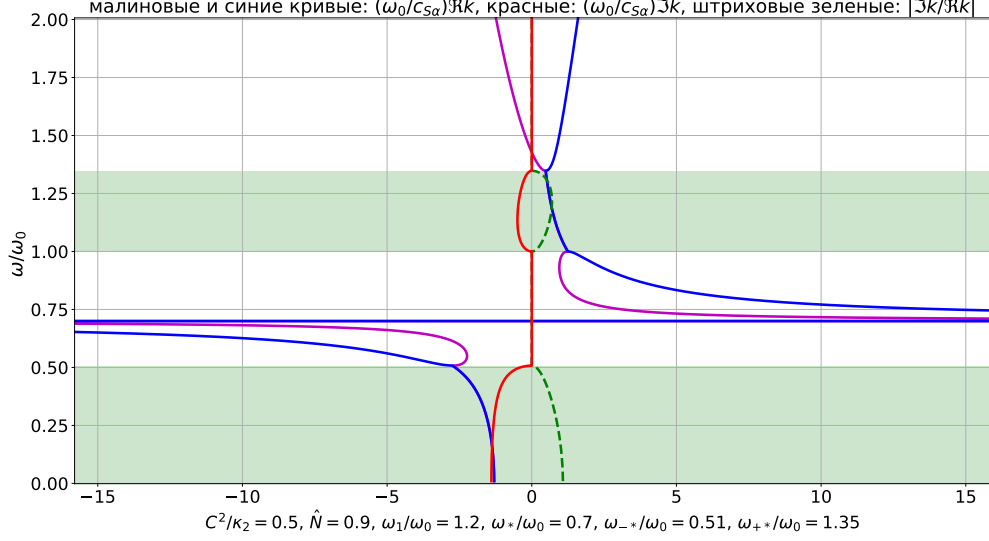


Рис. 3. Дисперсионные кривые поперечной волны в гиротропной среде, $\omega_{\pm*}$ — границы зон затухания, $c_{s\alpha}$ — скорость на высоких частотах, C^2/κ_2 , $\hat{N}$ — параметры связи между субконтинуумами.

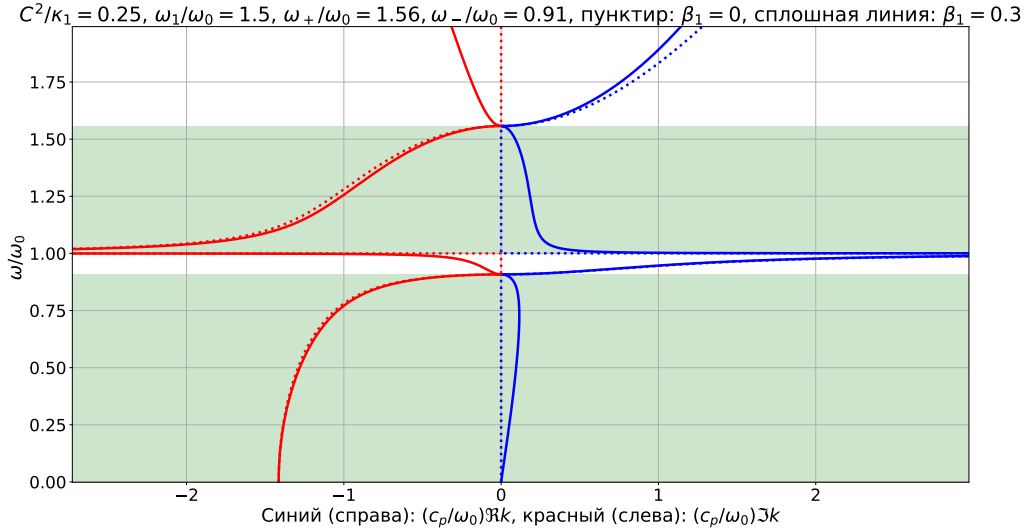


Рис. 4. Дисперсионные кривые для продольной волны в изотропном редуцированном континууме. Пунктир: упругая среда, сплошная линия — вязкоупругая, β_1 — параметр диссипации в несущем континууме. Запрещенные в упругой среде зоны закрашены зеленым цветом. C^2/κ_1 — параметр взаимосвязи субконтинуумов и их инерционно-упругих характеристик.

мент становится конечным и немонотонно зависит от частоты, убывая с ростом малого параметра диссипации. Получены асимптотические приближения дисперсионных соотношений для малых параметров диссипации. Для определенных областей параметров все виды диссипации могут приводить к появлению зон аномального преломления в бывших запрещенных зонах для

поперечной волны, а для продольной волны — за исключением вязкости в основании несущего континуума. Затухание волны по координате в бывшей запрещенной зоне может уменьшаться или увеличиваться с ростом диссипативного параметра в зависимости от вида вязкости, зоны частот и взаимного расположения парциальных частот. Кроме вязкости в основании несущего континуума, для других типов диссипации существуют комбинации параметров, при которых затухание волны по координате в некоторой зоне частот уменьшается.

В разделе 2.14 подведены итоги главы:

1. Введено понятие упругой *редуцированной среды* — среды, состоящей из двух взаимосвязанных субконтинуумов («несущий континуум + распределенный динамический гаситель»), такой, что упругая энергия не зависит от деформации гасителя. Показано, что вне зависимости от своей природы такая линейная среда, подчиняющаяся уравнениям Лагранжа, в том числе анизотропная, с любым количеством степеней свободы, при определенных требованиях к лагранжиану обладает запрещенными зонами частот или зонами аномального преломления для определенных типов волн.
2. Показано, что изотропная упругая редуцированная среда, несущий континуум и динамический гаситель которой описываются трехмерными векторами обобщенных координат, может изменить характер рабочей зоны для поперечной волны с запрещенной на зону аномального преломления при достаточно сильной взаимосвязи субконтинуумов «деформация несущего континуума + обобщенная координата динамического гасителя». Для гиротропного материала эта взаимосвязь в сочетании со взаимосвязью обобщенных векторных координат несущего континуума и динамического гасителя обеспечивает вариативное дисперсионное поведение, наличие и характеристики рабочих зон весьма чувствительны к параметру комбинированной взаимосвязи.
3. Показано, что вязкоупругая редуцированная среда, модель которой получается модификацией упругой редуцированной среды при помощи добавления линейной диссипации к одной из существующих упругих связей, также ведет себя как акустический метаматериал. Такая диссипация обеспечивает наличие затухающей бегущей волны почти на всех частотах. Она может уменьшать затухание волны по координате в запрещенных зонах упругой среды и приводить к возникновению зон аномального преломления. Исключение составляет диссипация в упругом основании несущего континуума.

Это позволяет сформулировать положения 1–3 из списка выносимых на защиту результатов (стр. 7).

Третья глава диссертации посвящена выводу уравнений упругой редуцированной среды Коссера и изучению ее волнового поведения. Определим данную среду как микрополярную среду, в которой градиент поворота не вызывает напряжений. Ее линейный изотропный вариант, предложенный Шварцем, Джонсоном и Фенгом, является редуцированной средой в смысле определения главы 2. Роль динамического гасителя играют поворотные степени свободы, а несущего континуума — трансляционные. В средах с неупорядоченной структурой поворотов (блоковых, зернистых, сыпучих — рис. 5) нет взаимодействия, которое уменьшает градиент поворота (Мандель), возникают лишь усилия, противодействующие повороту частицы относительно окрестности. В **разделе 3.1** получены основные уравнения различных

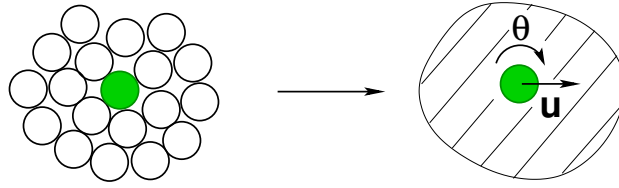


Рис. 5. Редуцированная среда Коссера: материал и континуальная модель

упругих редуцированных сред Коссера: нелинейные, линеаризованные вблизи предварительного напряженного состояния, линеаризованные вблизи натурального состояния, уравнения изотропной и анизотропной среды, уравнения редуцированной среды Коссера со стесненным вращением.

Получим уравнения *нелинейной редуцированной среды Коссера*. Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор в актуальной конфигурации, $\mathbf{r}$ — в отсчетной, $\mathbf{P}$ — тензор поворота в актуальной конфигурации, $\overset{\circ}{\nabla}$ — градиент по отсчетной конфигурации. Из баланса энергии в форме Жилина получаем, что поскольку среда не реагирует на градиент поворота, моментные напряжения в ней равны нулю, плотность упругой энергии $\rho\mathcal{U}$ зависит только от деформации $\mathbf{A} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$, и

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^\top. \quad (7)$$

Тензор силовых напряжений асимметричен. Уравнения динамики в локальной форме записываются в виде:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{R}}, \quad \boldsymbol{\tau}_\times + \rho \mathbf{L} = \rho (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}). \quad (8)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость частицы, $\rho \mathbf{I}$ — плотность тензора инерции, $\boldsymbol{\tau}_\times = [\boldsymbol{\tau}_i \boldsymbol{\tau}_j]_\times = \boldsymbol{\tau}_i \times \boldsymbol{\tau}_j$ — векторный инвариант тензора $\boldsymbol{\tau}$ (связан с моментом внутренних сил), $\rho \mathbf{F}$ — плотность внешних объемных сил, $\rho \mathbf{L}$ — внешнего объемного момента. Далее основные уравнения упругой редуцированной среды

Коссера общего вида линеаризованы вблизи произвольного предварительного напряженного состояния, подробно рассмотрена изотропная среда вблизи трансверсально-изотропного и изотропного предварительного напряженного состояния.

Рассмотрим последний случай — *редуцированную изотропную среду Коссера вблизи состояния всестороннего растяжения – сжатия*. Величины в предварительном напряженном состоянии будем обозначать индексом $()_s$. Положим тензор инерции шаровым: $\rho I \mathbf{E}$. Вблизи состояния $\boldsymbol{\tau}_s = \tau \mathbf{E}$, $\mathbf{R}_s = A \mathbf{r}$, $\mathbf{P}_s = \mathbf{E}$ рассмотрим малые приращения: $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ — вектор малых перемещений, $\mathbf{P} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$, $\boldsymbol{\theta}$ — вектор малого поворота. Получены уравнения в перемещениях

$$(\lambda' + 2\mu') \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu' + \alpha') \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha' \nabla \times \boldsymbol{\theta} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (9)$$

$$2\alpha' \nabla \times \mathbf{u} - 4\alpha' \boldsymbol{\theta} = \rho I \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (10)$$

Эффективные упругие константы λ' и μ' аналогичны константам Ламе, вместе с эффективным модулем Коссера α' они определяются выражениями:

$$\alpha' = \frac{\alpha_s}{A} - \frac{\tau}{2}, \quad \mu' = \frac{\mu_s}{A} + \frac{\tau}{2}, \quad \lambda' + 2\mu' = \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{A}, \quad \tau = \frac{\rho_0}{A^3} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}} \Big|_s. \quad (11)$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{A}^2} \right]_s = \lambda_s \mathbf{E} \mathbf{E} + 2\mu_s (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n)^S (\mathbf{i}^m \mathbf{i}^n)^S + 2\alpha_s (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n)^A (\mathbf{i}^m \mathbf{i}^n)^A. \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{i}_m$ — ортонормальный базис. При линеаризации вблизи натурального состояния (без напряжений) $\tau = 0$, $A = 1$. Уравнения имеют ту же форму, однако предварительное напряженное состояние может привести к отрицательности эффективных упругих констант даже для выпуклой энергии.

Определяющие уравнения *линейной анизотропной редуцированной среды Коссера* вблизи натурального состояния таковы:

$$\rho \mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^\top \cdot \cdot \mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g}. \quad (13)$$

Тензор $\mathbf{X}$ выражается через вторую производную U по $\mathbf{A}$ в натуральном состоянии. Эти же уравнения, разложив правые и левые диады $\mathbf{X}$ на симметричную и антисимметричную части, можно представить в виде

$$\boldsymbol{\tau}^S = \mathbf{C} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}^S + \mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \cdot (2\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}), \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\tau}^A = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\alpha} \cdot (2\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u})/4 + \nabla \mathbf{u}^S \cdot \cdot \mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \times \mathbf{E}. \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{C}$ — тензор упругости 4-го ранга, обладающий теми же свойствами перестановочности, что и в классической теории, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^\top$ — тензор второго ранга, $\mathbf{S}_k = \mathbf{S}_k^\top$ — тензоры второго ранга, $\mathbf{n}_k$ — векторы. Тензор $\mathbf{S}_k \mathbf{n}_k$ обеспечивает наличие перекрестного члена между классическими $\nabla \mathbf{u}^S$ и поворотными $\boldsymbol{\theta} = \nabla \times \mathbf{u}/2$ деформациями. В изотропном случае он равен $\mathbf{0}$.

Изотропная теория, предложенная Шварцем, Джонсоном и Фенгом, следует из данной, если положить

$$\mathbf{S}_k \mathbf{n}_k = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\alpha} = 4\alpha \mathbf{E}, \quad \mathbf{C} = \lambda \mathbf{E} \mathbf{E} + 2\mu (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n)^S (\mathbf{i}^m \mathbf{i}^n)^S + 2\alpha (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n)^A (\mathbf{i}^m \mathbf{i}^n)^A, \quad (16)$$

λ, μ — параметры Ламе, α — модуль Коссера, $\boldsymbol{\tau} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{E} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S + 2\alpha \nabla \mathbf{u}^A$.

Локальная анизотропия. В сыпучих и зернистых средах существует локальная анизотропия — проявляющаяся лишь на малых масштабах. В работе предлагается одна из возможных моделей локальной анизотропии — связанная с существованием перекрестного члена в энергии между трансляционными и поворотными деформациями, определяемого тензором $\mathbf{S}_k \mathbf{n}_k$. При условии, что тензоры $\mathbf{C}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ будут изотропными, данная анизотропия будет проявляться лишь на определенных длинах волн. Заметим, что в изотропной среде данная взаимосвязь отсутствует. Простейший вариант данной взаимосвязи соответствует трансверсально-изотропному тензору $\mathbf{E} \mathbf{n}$, что дает в энергию деформации вклад $2\nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2)$.

Редуцированная псевдосреда Коссера. Эта среда рассматривается лишь в линейном варианте. Как и в полной псевдосреде Коссера, принимается кинематическая гипотеза (Миндлин, Тьерстен) $\boldsymbol{\theta} = \nabla \times \mathbf{u}/2$. Упругая энергия является квадратичной формой $\nabla \mathbf{u}^S$. В отличие от полной псевдосреды Коссера, которая сводится к градиентной теории, в редуцированной псевдосреде Коссера не возникает более высоких производных по пространственным координатам. Закон баланса сил с учетом жесткой связи и баланса моментов напоминает классический с динамическим членом сложного вида и модифицированной внешней нагрузкой:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^S + \rho(\mathbf{K} + \nabla \times \mathbf{L}/2) = \nabla \times (\rho \mathbf{I} \cdot (\nabla \times \ddot{\mathbf{u}}))/4 + \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (17)$$

где $\boldsymbol{\tau}^S = \mathbf{C} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}^S$ — классическая часть тензора напряжений. Антисимметричная часть тензора напряжений определяется из баланса моментов $\boldsymbol{\tau}_\times = \rho \mathbf{I} \cdot (\nabla \times \ddot{\mathbf{u}})/2 - \rho \mathbf{L}$. В дальнейшем будет рассматриваться изотропная редуцированная псевдосреда Коссера и анизотропная с простейшим перекрестным членом в энергии вида $N_c \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$.

В разделе 3.2 рассматривается распространение волн в линейных упругих редуцированных средах Коссера.

Повороты как скрытые движения. В связи с тем, что поворотные движения нередко не измеряются, целесообразно понять, какое влияние они оказывают на динамику трансляций. Выражая вектор малого поворота через перемещения в интегральной форме из уравнения баланса моментов и подставляя его в баланс сил, в изотропном случае получаем уравнение в перемещениях

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \alpha\nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{u}}) + 2\alpha\nabla \times \boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega_0 t} + \nabla \times \frac{1}{2}\rho\tilde{\mathbf{L}} + \rho\mathbf{F} = \rho\ddot{\mathbf{u}}. \quad (18)$$

Здесь $\omega_0^2 = \frac{4\alpha}{\rho I}$ — квадрат парциальной частоты поворотных колебаний, $\boldsymbol{\theta}_0$ — их амплитуда, и $\tilde{\mathbf{w}} = \omega_0 \int_{-\infty}^t \mathbf{w}(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau$ для любого $\mathbf{w}$. Такое уравнение может быть записано в форме

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho\boldsymbol{\kappa} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \quad (19)$$

где вводятся: эффективный тензор напряжений

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau}_c + 2\alpha(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{E} - \nabla \tilde{\mathbf{u}}^S) = \mathbf{T}^\top,$$

$\boldsymbol{\tau}_c = \lambda' \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{E} + 2\mu' \nabla \mathbf{u}^S$ — тензор напряжений в классической изотропной линейной упругой среде с константами Ламе $\lambda' = \lambda - 2\alpha$, $\mu' = \mu + \alpha$, и эффективная массовая плотность внешней силы

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{F} + 2\frac{\alpha}{\rho}\nabla \times \boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega_0 t} + \nabla \times \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{L}}. \quad (20)$$

Таким образом, попытка игнорировать существующие вращения приведет к тому, что изотропная упругая линейная редуцированная среда Коссера будет воспринята как специфическая классическая среда с памятью, подверженная «случайным» вихревым силовым гармоническим воздействиям с частотой ω_0 . В случае анизотропной среды с перекрестным членом между трансляционными деформациями и поворотами такое представление не существует. Симметричный тензор эффективных напряжений $\mathbf{T}$ не будет материально объективным.

Изотропная среда с плотностью шарового тензора инерции $\rho I \mathbf{E}$. Подставляя гармонический анзац в уравнения в перемещениях (10) для натурального состояния $\tau = 0$, $A = 1$, $\lambda_s = \lambda$, $\mu_s = \mu$, $\alpha_s = \alpha$, получим, что в такой среде на частоте ω_0 возможен режим $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega_0 t}$, волна растяжения – сжатия является классической, а дисперсионное соотношение для

волны сдвига – вращения имеет вид (рис. 6)

$$c_{s\alpha}^2 k^2 = \omega^2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_*^2}, \quad \omega_*^2 = \frac{\mu}{\mu + \alpha}, \quad c_{s\alpha}^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}. \quad (21)$$

Аналогичное соотношение имеем для продольной волны в материале «масса

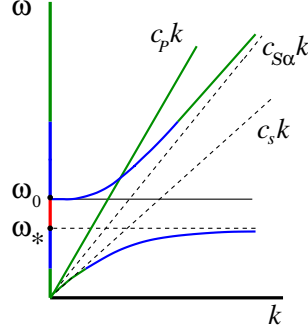


Рис. 6. Дисперсионные кривые изотропной линейной редуцированной упругой среды Коссера. Зеленым показаны области частот с малой дисперсией, синим — с существенной, красным — запрещенная зона, $c_p^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, $c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$.

в массе». Обе среды ведут себя как акустические метаматериалы.

Реакция изотропной среды на сосредоточенные гармонические источники $\rho \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{i\omega t}$, $\rho \mathbf{L} = \mathbf{L}_0 e^{i\omega t}$. Перейдя к потенциалам Сандру, можно вычислить функцию Грина для сосредоточенных гармонических силы и момента в безграничной трехмерной изотропной редуцированной упругой среде Коссера, являющейся вырожденным случаем полной среды. Пусть $f(\omega) = c_s k / \omega$, где k удовлетворяет дисперсионному соотношению 21, $\omega \neq \omega_0, \omega \neq \omega_*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \frac{\mathbf{L}_0 e^{i\omega t}}{8\pi\alpha\mu} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_*^2}\right)^{-1} \cdot \frac{\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \left(1 + i \frac{\omega f(\omega)}{c_s} r\right) e^{-i \frac{\omega f(\omega)}{c_s} r} \\ & - \frac{\mathbf{F}_0 e^{i\omega t}}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{\omega^2}{c_p^2} - \frac{\omega^2 f^2(\omega)}{c_s^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_*^2}\right)^{-1} \cdot \\ & \left\{ - e^{-i \frac{\omega}{c_p} r} \left((\lambda + \mu - \alpha) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \alpha\right) \left(\frac{1}{r} \frac{\omega^2}{c_p^2} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} + \left(1 + i \frac{\omega}{c_p} r\right) \frac{\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}}{r^3}\right) + \right. \\ & e^{-i \frac{\omega f(\omega)}{c_s} r} \left(\frac{1}{r} \mathbf{E} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\omega^2}{c_p^2} - \frac{\omega^2 f^2(\omega)}{c_s^2}\right) + \right. \\ & \left. \left. \left((\lambda + \mu - \alpha) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \alpha\right) \left(\frac{1}{r} \frac{\omega^2 f^2(\omega)}{c_s^2} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} + \left(1 + i \frac{\omega f(\omega)}{c_s} r\right) \frac{\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}}{r^3}\right)\right) \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} = e^{i(\omega t - \frac{\omega f(\omega)}{c_s} r)} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_*^2}\right)^{-1} \left\{ -\frac{\mathbf{F}_0}{8\pi\mu} \cdot \frac{\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \left(1 + i\frac{\omega f(\omega)}{c_s} r\right) \right. \\ \left. - \frac{\mathbf{L}_0}{16\pi\alpha^2\mu} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{r} \mathbf{E} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \left(\frac{\omega^2}{c_{s\alpha}^2} - \frac{\omega^2 f^2(\omega)}{c_s^2}\right) (\mu + \alpha) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \frac{\omega^2 f^2(\omega)}{c_s^2} \alpha + \frac{1}{r^3} \left(1 + i\frac{\omega f(\omega)}{c_s} r\right) (\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}) \alpha \right) \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. В запрещенной зоне $(\omega_*; \omega_0)$, где k, f — чисто мнимые, часть решения (при $\exp(i(\omega t - \omega f(\omega)/c_s))$) локализована вблизи источника.

Случай граничных частот необходимо рассмотреть отдельно. На нижней границе запрещенной зоны $\omega = \omega_*$

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{F}_0 c_s^2}{\mu \omega_*^2} e^{i\omega_*(t-r/c_p)} \left(\frac{1}{r} \frac{\omega_*^2}{c_p^2} \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(1 + i\frac{\omega_*}{c_p}\right) \frac{\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{r^3} \right) - \frac{c_{s\alpha}^2}{2\alpha\omega_*^2} \nabla \times \mathbf{L}_0 \delta(\mathbf{r}) e^{i\omega_* t}, \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\theta} = e^{i\omega_* t} \frac{\mu + \alpha}{4\alpha^2} \left(\mathbf{L}_0 \delta(\mathbf{r}) + \frac{c_{s\alpha}^2}{\omega_*^2} \mathbf{L}_0 \Delta \delta(\mathbf{r}) - \frac{c_{s\alpha}^2}{\omega_*^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{L}_0 \delta(\mathbf{r}) \right). \quad (25)$$

Видим, что если имеется источник — сосредоточенный момент, меняющийся во времени с частотой ω_* , то часть решения сильно локализована вблизи него.

На частоте отсечки $\omega = \omega_0$, если $\mathbf{L}_0 \neq \mathbf{0}$, имеем резонансное решение для $\boldsymbol{\theta}$. Для $\mathbf{u}$ имеем

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{F}_0 e^{i\omega_0 t}}{4\pi\rho\omega_0^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{r^3} - e^{-i\frac{\omega_0}{c_p} r} \left(\frac{1}{r} \frac{\omega_0^2}{c_p^2} \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(1 + i\frac{\omega_0}{c_p} r\right) \frac{\mathbf{E} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{r^3} \right) \right) - \frac{\mathbf{L}_0 e^{i\omega_0 t}}{8\pi\alpha^2} \frac{\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (26)$$

Мы наблюдаем решение, часть которого убывает как $1/r^3$ при удалении от источника, даже при отсутствии моментного воздействия $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$. В последнем случае при $\omega = \omega_0$ имеем $\boldsymbol{\theta} = e^{i\omega_0 t} \mathbf{F}_0 \times \hat{\mathbf{r}} / (8\pi\alpha r^2)$.

Волна Рэлея в безграничном полупространстве обладает следующими особыми свойствами:

1. кроме акустической ветви, существует еще одна, имеющая не только частоту отсечки, но и волновое число отсечки (длина ее волн ограничена сверху, а частота — снизу)
2. скорость волн этой ветви меньше $c_{s\alpha}, c_p$, но может быть больше c_s .
3. существует запрещенная зона непосредственно под запрещенной зоной для трехмерного пространства $(\omega_2; \omega_*)$, где $\omega_2^2 = \omega_*^2 A / (1 + A)$, $A = (1 + \mu/\alpha)(1 - \mu/(\lambda + 2\mu))$.

Волны в редуцированной среде Коссера с трансверсально-изотропным перекрестным членом между объемной и поворотной деформацией. Получив и проанализировав дисперсионные соотношения, получаем следующий результат: большинство волн являются смешанными, во всех случаях, кроме распространения ортогонально оси симметрии, имеется запрещенная зона (рис. 7). Также в силу особого вида перекрестного члена присутствует поперечная волна, аналогичная имеющейся в изотропной среде. В смешанных волнах соотношение компонент существенно зависит от частоты. На низких частотах волны близки к чисто продольным и поперечным. Это — одна из возможных моделей локальной анизотропии, применимая в случаях, когда последняя вызвана существованием слабого однородного внешнего поля в процессе упаковки частиц.

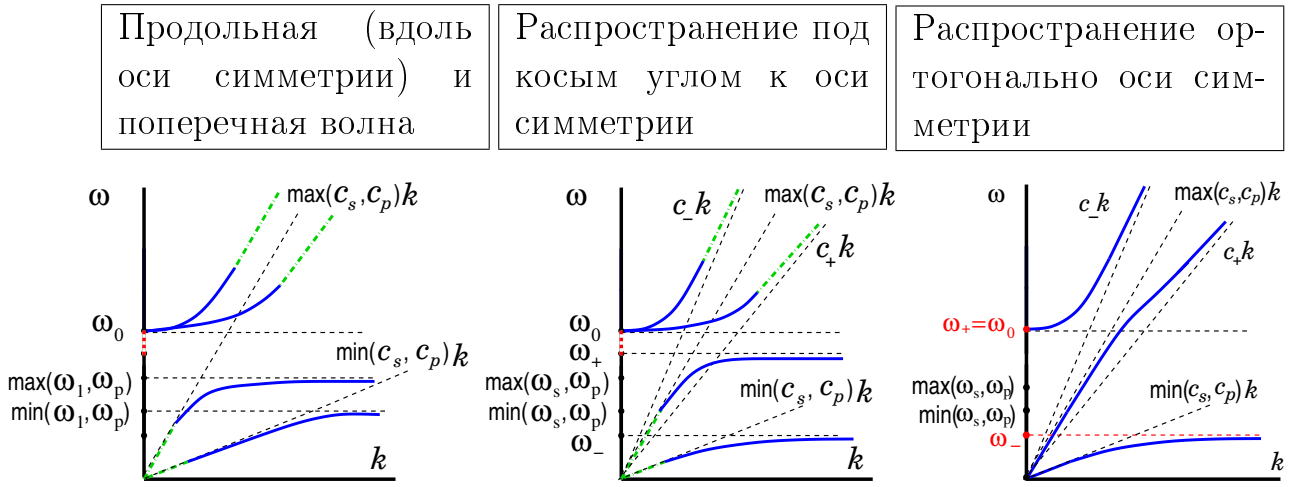


Рис. 7. Распространение волн в редуцированной упругой среде Коссера с простейшей трансверсально-изотропной перевязкой между объемной деформацией и поворотами

Здесь

$$c_p^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)\alpha - n^2}{\alpha\rho}, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\alpha}{\rho I}, \quad \omega_p^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{n^2}{\alpha(\lambda + 2\mu)}\right). \quad (27)$$

В случае трансверсально-изотропного перекрестного члена общего вида распространение волн ортогонально оси симметрии имеет тот же вид с точностью до определения анизотропного модуля упругости. Это может быть важно для приложений.

В линейной однородной упругой редуцированной среде Коссера с изотропными упругими характеристиками и трансверсально-изотропным тензором инерции частиц продольная и поперечные волны также отделяются, продольная волна является классической. Существует две волны сдвига-вращения с ортогональными векторами перемещений, перемещение одной из них ортогонально оси тела-точки, получены их дисперсионные соотношения. Дисперсионное соотношение последней имеет три ветви и две запрещенные зоны, а для другой волны соотношение такое же, как в изотропной среде.

Волны в упругой редуцированной псевдосреде Коссера в изотропном случае ведут себя так же, как и в среде без кинематических связей, где ω_0 устремлено к бесконечности, то есть выше частоты $\omega_{*c} = 2\sqrt{\mu/(\rho I)}$ волны не распространяются: $c_s^2 k^2 = \omega^2 \omega_{*c}^2 / (\omega_{*c}^2 - \omega^2)$. Введение трансверсально-изотропного перекрестного члена, связывающего объемные и сдвиговые деформации, приводит к возникновению второй дисперсионной ветви, волны становятся смешанными, при этом дисперсия одной волны (имеющей горизонтальную асимптоту) существенно больше дисперсии другой.

В **разделе 3.3** рассматриваются малые колебания вблизи нелинейного напряженного состояния в редуцированной среде Коссера.

Нелинейная изотропная среда вблизи состояния всестороннего растяжения – сжатия. Будем искать гармонические решения уравнений (10). При $\lambda' + 2\mu' > 0$, $\mu' > 0$, $\alpha' > 0$ график дисперсионных соотношений имеет такой же вид, как и график дисперсионных соотношений для среды вблизи натурального состояния (рис. 6). При помощи предварительного напряженно-деформированного состояния $\boldsymbol{\tau} = \tau \mathbf{E}$, $\mathbf{R} = A \mathbf{r}$ ($A > 1$, $\tau > 0$ — растяжение, $A < 1$, $\tau < 0$ — сжатие) можно влиять на величину и расположение запрещенной зоны (ω_* ; ω_0), где $\omega_*^2 = \frac{4(\alpha_s - A\tau/2)(\mu_s + A\tau/2)}{I(\alpha_s + \mu_s)}$, $\omega_0^2 = \frac{4(\alpha_s - A\tau/2)}{I}$. В зоне устойчивости материала скорость на низких частотах равна $\sqrt{(\mu_s + A\tau/2)/(A\rho_s)}$, а на высоких — $\sqrt{(\mu_s + \alpha_s)/(A\rho_s)}$. Для физически линейной среды (постоянных $\lambda_s, \mu_s, \alpha_s$) максимальное значение ω_* соответствует сжатию, если $\mu_s < \alpha_s < 3(\lambda_s + \mu_s)$, и растяжению в остальных случаях. Ширина запрещенной зоны для такого материала меньше $2\sqrt{(\mu_s + \alpha_s)/I}$.

Среда становится неустойчивой, когда она не сопротивляется деформациям $\nabla \mathbf{u}^S$ или $\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2$, то есть квадрат скорости сдвига на низких частотах μ'/ρ либо квадрат частоты отсечки $\omega_0^2 = 4\alpha'/(\rho I)$ становятся меньше 0. При $\mu' < 0$ однородная среда становится неустойчивой в каждой точке по отношению к низкочастотным сдвиговым возмущениям, то есть ведет себя как жидкость. Это эквивалентно условию $2\mu_s < -T/A$, записываемому как

$$(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2)^S \cdot \cdot A \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}^2} \right]_s \cdot \cdot (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2)^S < -\text{tr} \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}} \right]_s / 3. \quad (28)$$

Такое поведение может быть присуще и классическим средам с выпуклой энергией (Тупин, Бернштейн). Оно наблюдается в известных опытах Бриджмена. Однако у редуцированной среды Коссера существует и другой механизм потери устойчивости: при $\alpha' < 0$ она не сопротивляется поворотно-

сдвиговым колебаниям. Данное условие записывается как $2\alpha_s < T/A$, или

$$(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2)^A \cdots A \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial A^2} \right]_s \cdots (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2)^A < \text{tr} \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}} \right]_s / 3. \quad (29)$$

Неустойчивость структуры зернистого или сыпучего консолидированного материала при всестороннем растяжении наблюдается в экспериментах (Друянов, Роско).

Безусловно, не все среды демонстрируют подобную неустойчивость. Это зависит от вида нелинейной энергии. Однако в простейшей нелинейной теории с выпуклой энергией — квадратичной формой тензоров деформации данные эффекты имеют место при $\alpha_s < \mu_s + 3\lambda_s/2$.

Малые колебания изотропной среды вблизи трансверсально-изотропного напряженного состояния удалось рассмотреть аналитически лишь для особых направлений распространения волны — вдоль оси симметрии и ортогонально ей. Для этих направлений существуют продольные (недисперсивные) и поперечные (с запрещенными зонами) волны. Здесь также возможна неустойчивость материала при большом растяжении.

В разделе 3.4 рассмотрены линейные упругие среды Коссера под действием неупругих нагрузок или неупругие среды Коссера (вязкоупругие и пластическая). Все рассматриваемые среды изотропны. Влияние диссипации на динамику среды важно оценивать в сейсмологических задачах. Вязкость вводилась по типу Кельвина – Фойгта (как у Эрингена для полной среды Коссера). Данный раздел отличается от разделов 2.6–2.13 рассмотрением комбинированного типа вязкости и / или точными выражениями для дисперсионных соотношений, получением асимптотических приближений в том числе вблизи характеристических частот. Были решены задачи для редуцированной упругой среды Коссера под действием следящего вязкоупругого момента, для редуцированной среды Коссера с классическим (трансляционным) типом вязкости и с ротационной вязкостью, для вязкоупругой псевдосреды Коссера (с конечной вязкостью). Введение диссипации приводит к наличию бегущей волны на всех или почти на всех частотах и падающих участков дисперсионной кривой в части бывшей запрещенной зоны. В случае трансляционной диссипации в редуцированной среде Коссера вся запрещенная зона становится зоной аномального преломления с затуханием. Пусть $\Omega = \omega/\omega_0$, $\Omega_* = \omega_*/\omega_0$, $K = c_{s\alpha}k/\omega_0$, b — безразмерный диссипативный параметр. В качестве примера приведем асимптотическое приближение для $\Re K$, $\Im K$ внутри бывшей запрещенной зоны для упругой среды Коссера под действием следящего диссипативного момента, чьи дисперсионные соотношения совпадают с дисперсионными соотношениями для волн поляризации в неполярных ди-

электриках (Островский, Потапов):

$$\Re K = \frac{b(1 - \Omega_*^2)}{2} \frac{\Omega^2}{(\Omega^2 - \Omega_*^2)^{3/2}(1 - \Omega^2)^{1/2}}, \quad \Omega_* < \Omega < 1. \quad (30)$$

Видим, что в нижней части зоны имеет место аномальное преломление. Вычислены границы падающего участка, нижняя граница находится непосредственно под запрещенной зоной (расстояние до нее пропорционально малой диссипации b), а верхняя — внутри нее. Приближение для мнимой части:

$$\Im K = -\frac{\Omega(1 - \Omega^2)^{1/2}}{(\Omega^2 - \Omega_*^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{b^2(1 - \Omega_*^2)\Omega^2}{2(\Omega^2 - \Omega_*^2)^2(1 - \Omega^2)} \right) + o(b^2), \quad \Omega_* < \Omega < 1. \quad (31)$$

Итак, внутри запрещенной зоны упругого материала малая диссипация улучшает прохождение волны. Аналогичные эффекты имеют место для всех рассмотренных задач с диссипацией.

В **разделе 3.5** обсуждается эксперимент по прохождению ультразвуковой волны в когезивном порошке. Результаты интерпретируются в рамках теории редуцированной среды Коссера с анизотропной перевязкой между различными видами деформации и в рамках модели “масса в массе”. Существует весьма мало количественно воспроизводимых экспериментов, измеряющих характеристики сыпучих сред, поскольку эти среды легко перестраиваются под действием обычных нагрузок. Соискателем была предложена идея установки для воспроизводимого измерения скорости распространения волн в когезивных порошках, реализованная совместно с коллегами из университета Севильи (рис. 8). Эксперимент состоит из двух этапов: инициализация (приведение порошка в воспроизводимое состояние) и измерение скорости прохождения волны. Установка представляет собой прямоугольный контейнер с дном из особого керамического материала, который пропускает поток газа, но непроницаем для частиц порошка. В стены параллелепипеда вделаны излучатель и приемное устройство ультразвуковых волн. На образец подается синусоидальный импульс малой амплитуды, полученный на другом конце сигнал преобразуется и записывается. В эксперименте были воспроизведены результаты, полученные испанскими и французскими коллегами на другой установке (Ботельо, Турна, Кастельянос), демонстрирующие дисперсию, не укладывающуюся в рамки классических теорий. Она может быть интерпретирована в терминах редуцированной упругой среды Коссера, см. разделы 3.1.9, 3.2.4 (рис. 9) или в терминах модели “масса в массе”, учитывающей арочную структуру порошка.

В **разделе 3.6** подведены итоги главы.

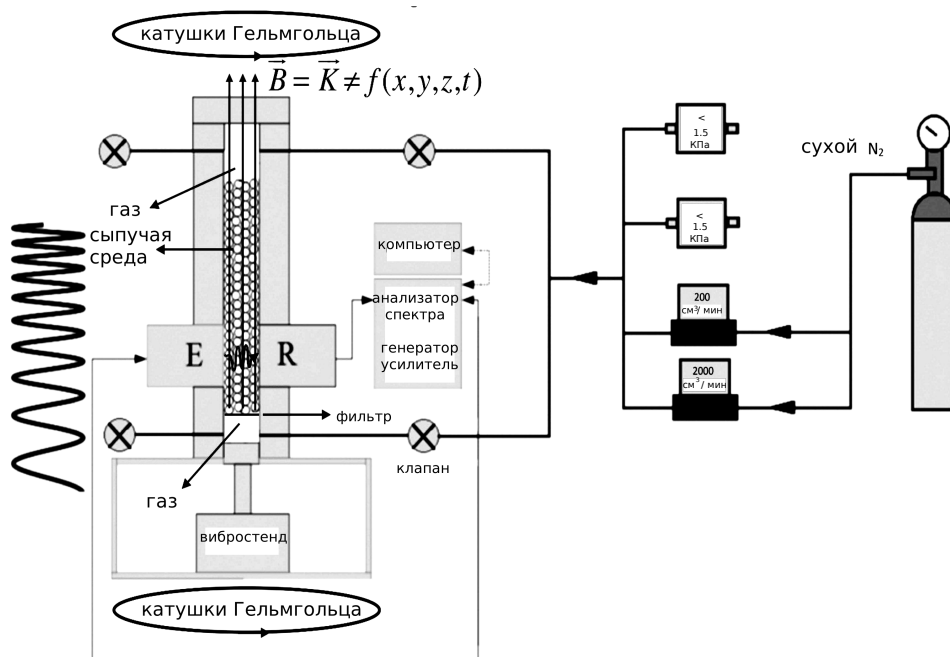


Рис. 8. Аппарат для воспроизводимого измерения скорости ультразвуковых волн в когезивных порошках.

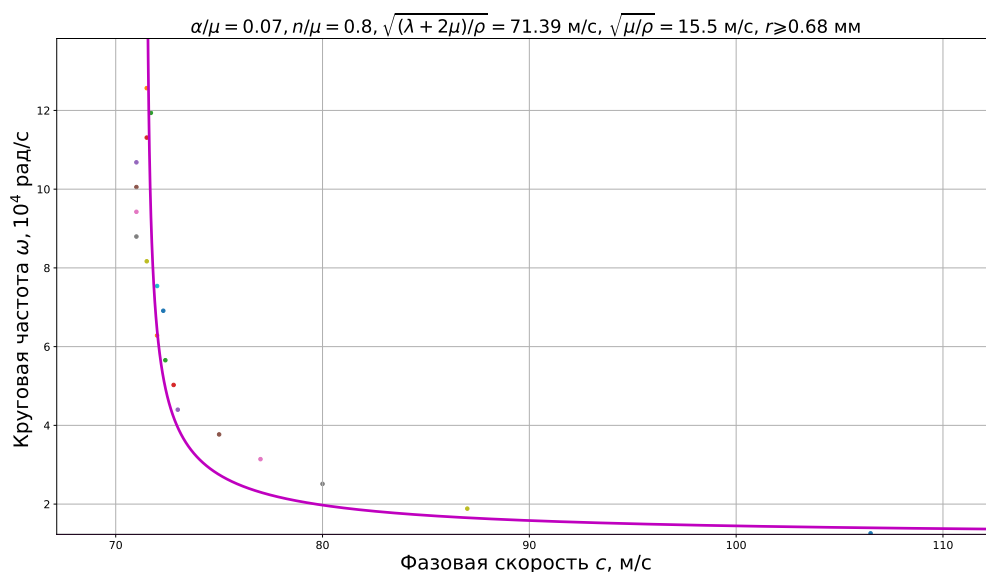


Рис. 9. Дисперсионная кривая упругой редуцированной среды Коссера с анизотропным осесимметричным перевязочным членом в упругой энергии и экспериментальные данные для порошка магнетита диаметром 65 мкм.

1. Построены новые модели континуумов с поворотными степенями свободы, описывающие среды с неупорядоченной структурой поворотов (блоковые, зернистые, консолидированные сыпучие, с включениями), которые при определенных условиях демонстрируют свойства акустических метаматериалов, в том числе:

- а) Нелинейная редуцированная среда Коссера
- б) Редуцированная линейная среда Коссера с анизотропией различного типа, в том числе локальной, отвечающей за взаимосвязь различных типов деформации для коротких волн
- в) Редуцированная среда Коссера со стесненным вращением
- г) Вязкоупругие линейные среды Коссера

2. Исследованы особенности динамики и устойчивости данных сред:

- а) Найден новый механизм неустойчивости нелинейной изотропной среды (при всестороннем растяжении).
- б) Показано, что все данные изотропные линейные упругие среды, а также изотропная линейная редуцированная упругая среда Коссера являются акустическими метаматериалами по отношению к волне сдвига. Их динамика аналогична динамике некоторой классической среды с зависимостью от истории деформаций.
- в) Введение локальной анизотропии дает приводит к аналогичному эффекту для продольной и смешанной волн.
- г) Получена функция Грина для гармонических силы и момента в упругой изотропной редуцированной среде Коссера, ее характер свидетельствует о локализации части решения в определенной зоне частот и резонансах на ее границах. Подобные явления фиксируются сейсмологами.
- д) Показано, что волна Рэлея в изотропной редуцированной среде Коссера имеет две ветви и запрещенную зону, находящуюся под запрещенной зоной для волны сдвига в трехмерной среде, оптическая ветвь обладает и частотой отсечки, и волновым числом отсечки. Фазовая скорость верхней ветви может быть больше скорости сдвига на низких частотах, хотя всегда меньше скорости волн растяжения – сжатия.
- е) Показано, что с ростом малой диссипации прохождение волн в запрещенных зонах различных редуцированных сред Коссера улучшается, появляется падающий участок дисперсионных кривых, для трансляционного трения он занимает всю запрещенную зону.
- ж) Предложена идея установки для воспроизводимого измерения скорости волн в когезивном порошке. Результаты эксперимента не описываются классической теорией, но описываются редуцированной моделью Коссера с локальной анизотропией или моделью «масса в массе».

Данные выводы позволяют сформулировать положения 4–6 из списка выносимых на защиту (стр. 7–8).

В **главе 4** предложена теория простейших редуцированных упругих среды Кельвина и гиростатической среды и исследовано распространение гармонических волн. Показано, что такие среды демонстрируют свойства акустических метаматериалов.

Среда Кельвина — среда Коссера особого типа, осесимметричные частицы которой быстро вращаются вокруг своих осей, не вызывая напряжений. Ее уравнения аналогичны уравнениям упругих непроводящих ферромагнетиков в состоянии, близком к состоянию магнитного насыщения, полученных Моженем (Грекова, Жилин). Предложено понятие редуцированной среды Кельвина — такой, в которой градиент поворота не вызывает напряжений (рис. 10). В магнитоупругих средах это соответствует отсутствию обменного

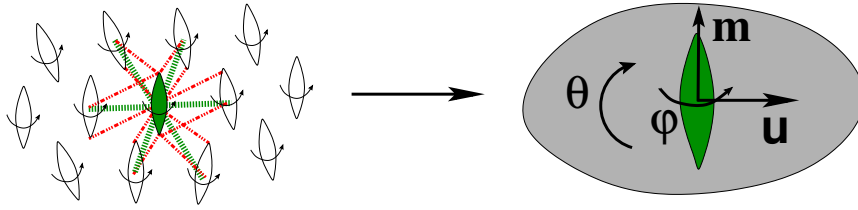


Рис. 10. Редуцированная среда Кельвина

взаимодействия, противодействующего градиенту намагниченности. Тензор моментных напряжений равен нулю, тензор силовых напряжений асимметричен. Уравнения данной среды отличны от уравнений редуцированной среды Коссера, так как энергия деформации не должна зависеть от собственного вращения частиц, и также поскольку гироскопическая сила превалирует в динамическом члене баланса моментов.

Нелинейные уравнения редуцированной среды Коссера получены исходя из баланса энергии в форме Жилина. В линейном случае будем рассматривать простейшую среду — такую, в которой анизотропия обусловлена лишь существованием направления свободного собственного вращения с начальным единичным вектором $\mathbf{m}$. Линейные уравнения для малых углов нутации таковы ($\mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{m}\mathbf{m}$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{a}$, M — кинетический момент собственного вращения, $b\boldsymbol{\theta}$ — внешний следящий момент):

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{E} + 2\mu (\nabla \mathbf{u})^S + 2\alpha (\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{E}. \quad (32)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\tau}_\times - b\tilde{\boldsymbol{\theta}} = M\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}. \quad (33)$$

Предлагается также модель простейшей линейной по углам нутации гиростатической среды, состоящей из частиц — сферических оболочек, содержащих внутри роторы, свободно вращающиеся вокруг своих осей с большой скоростью (рис. 11). Оси роторов в натуральном состоянии сонаправлены. Ани-

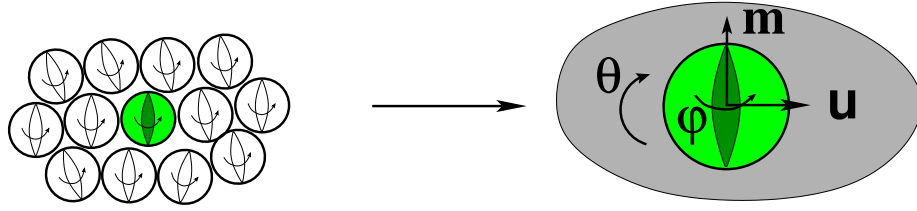


Рис. 11. Редуцированная гиросtatическая среда

зотропия среды также обусловлена лишь наличием этого направления. Для редуцированной среды градиент их осей не вызывает напряжений в среде. Ее уравнения аналогичны уравнениям среды Кельвина с тем отличием, что проекция вектора поворота «контейнеров» на начальную ось роторов жестко задается макроповоротом окружающей среды вокруг данной оси, а в среде Кельвина такой поворот тел-точек не вызывает напряжений. Уравнения динамики среды Кельвина в перемещениях записываются в виде

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \alpha\nabla \times \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\theta}) = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \quad (34)$$

$$4\alpha(\nabla \times \mathbf{u}/2 - \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{a} - b\dot{\boldsymbol{\theta}} = M\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}. \quad (35)$$

В данной среде существует продольная (классическая) волна и поперечные волны, которые, вообще говоря, имеют круговую или эллиптическую частотно-зависимую поляризацию. Их дисперсионные соотношения имеют сложный вид. Лишь поперечные волны, распространяющиеся ортогонально $\mathbf{m}$, являются плоскими: одна — классической, другая — дисперсивной, обладающей запрещенной зоной (рис. 12). При нулевых нагрузках волна, чей вектор перемещения вращается противоположно или под тупым углом к скорости собственного вращения тел-точек, обладает запрещенной зоной, а волна, поляризованная в обратном направлении — нет. Внешний следящий момент, уменьшающий отклонение тела-точки относительно начальной оси, уменьшает запрещенную зону. Действующий противоположно («размагничивающий» момент) увеличивает ее, может привести к неустойчивости или изменению типа акустического метаматериала (рис. 13). Волновое поведение существенно зависит от внешнего момента и направления распространения волн. Это предоставляет широкие возможности для управления свойствами метаматериала. В заключении главы подведены ее итоги:

- Предложены модели простейшей редуцированной среды Кельвина, имеющей аналогию с магнитоупругими материалами, и простейшей гиросtatической среды. Показано, что они являются акустическими метаматериалами по отношению к поперечным волнам. Рабочую зону и ее тип можно менять при помощи внешнего следящего момента. Поперечные волны в таких средах, вообще говоря, обладают круговой или

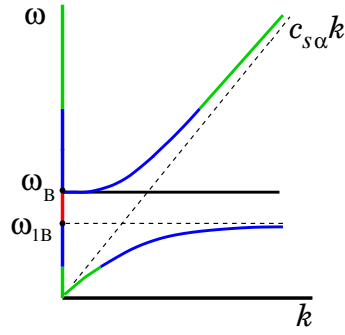


Рис. 12. Дисперсионные кривые для редуцированной среды Кельвина, волны сдвига – вращения. Волна сдвига – вращения распространяется ортогонально осям тел-точек, $\mathbf{u}$ коллинеарно им, $4\alpha + b > 0$. Нижняя ветвь исчезает (появляется неустойчивость) при $4\alpha + b(1 + \alpha/\mu) < 0$.

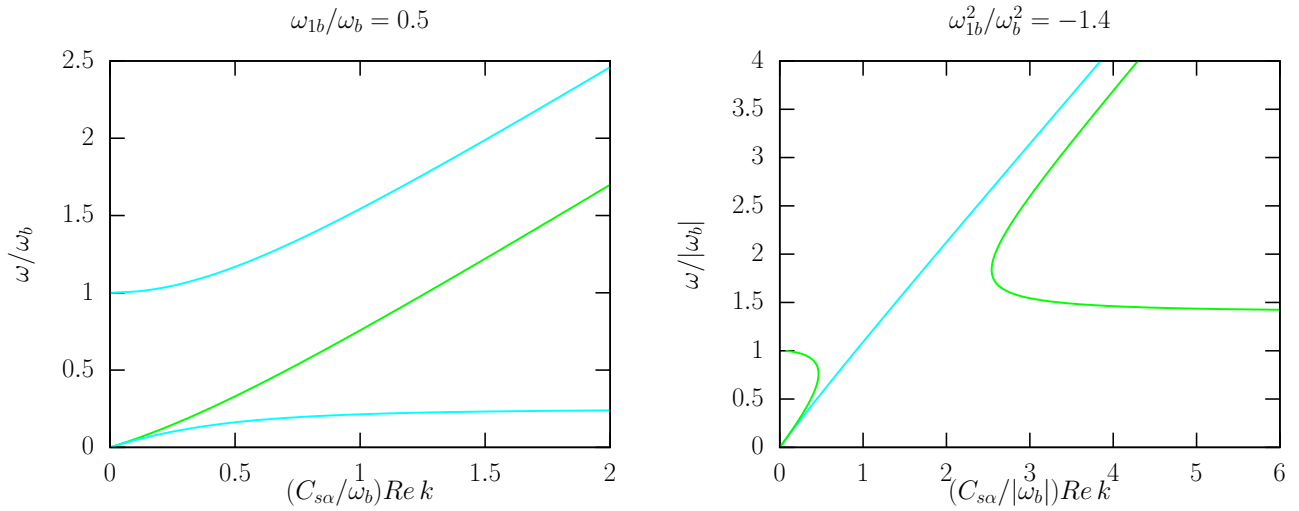


Рис. 13. Дисперсионные кривые редуцированной среды Кельвина. Волна сдвига – вращения с круговой поляризацией распространяется параллельно осям тел-точек, слева $b > -4\alpha/(1 + \alpha/\mu)$, справа $b < -4\alpha$.

частотно-зависимой эллиптической поляризацией.

Сформулирован результат 7 из списка выносимых на защиту (стр. 8).

В **заключении** перечислены основные результаты диссертации. Поставленная цель диссертационной работы достигнута, все задачи выполнены.

Выводы

1. Введено понятие и развита теория упругих редуцированных сред типа «несущий континуум + распределенный динамический гаситель», упругая энергия которых не зависит от градиента обобщенной координаты гасителя. Показано, что линейные упругие редуцированные среды при определенных требованиях к их упругой и кинетической энергии являются акустическими метаматериалами вне зависимости от природы своих степеней свободы, то есть их дисперсионные кривые обладают запрещенными зонами или падающими участками (зонами аномального преломления).

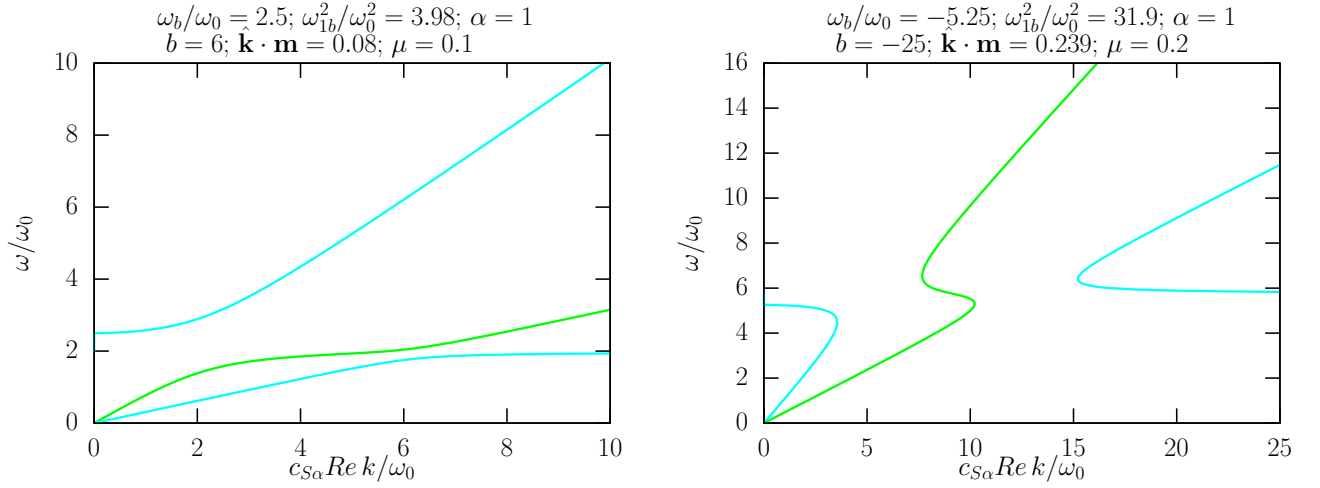


Рис. 14. Дисперсионные кривые редуцированной среды Кельвина. Волна сдвига – вращения с эллиптической частотно-зависимой поляризацией, Слева: $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{m}} = 0.008$, $b > 0$. Справа: $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{m}} = 0.239$, $b < -4\alpha$.

2. Показано, как, управляя взаимосвязью субконтинуумов в редуцированной упругой среде или внешним следящим воздействием, можно изменять рабочие зоны метаматериала и их тип. Наиболее эффективно управлять свойствами поперечной волны в изотропном материале позволяет взаимосвязь «деформация несущего континуума – координата динамического гасителя», а в гиротропном — она же в сочетании со взаимосвязью обеих векторных обобщенных координат. Изменяя парциальные частоты субконтинуумов или данную взаимосвязь, помимо запрещенных зон, можно получить зону аномального преломления.
3. Добавление линейной диссипации к упругим связям редуцированной среды обеспечивает существование бегущей затухающей волны почти на всех частотах. С ростом параметра малой диссипации логарифмический декремент волны в запрещенной зоне упругого материала уменьшается, при этом он немонотонно зависит от частоты. Для большинства видов диссипации затухание волны по координате уменьшается в части данных зон, и некоторые их участки превращаются в зоны аномального преломления — рабочие зоны дважды отрицательного акустического метаматериала.
4. Предложены различные модели редуцированных сред Коссера: нелинейная, анизотропная, в том числе с локальной анизотропией, со стесненным вращением, с учетом диссипации. Показано, что при линейных колебаниях они являются акустическими метаматериалами, рабочими зонами которых можно управлять при помощи нелинейного напряженно-деформированного состояния, малой диссипации и внешнего следящего момента.

5. Для сосредоточенных гармонических нагрузок в неограниченной изотропной упругой линейной редуцированной среде Коссера получена функция Грина, вид которой свидетельствует о возможности резонансов и локализации вблизи источника части решения при условии, что частота нагрузки находится в запрещенной зоне.
6. Найден новый механизм неустойчивости нелинейных изотропных упругих сред Коссера с выпуклой энергией деформации, удовлетворяющей некоторому условию, при большом всестороннем растяжении, отсутствующий у классических сред. Неустойчивость вызывают малые поворотные колебания.
7. Предложены модели редуцированных простейших гиостатической среды и среды Кельвина, имеющей аналогию с магнитоупругими материалами. Показано, что по отношению к поперечным волнам обе среды являются акустическими метаматериалами, рабочую зону и тип которых можно менять при помощи внешнего следящего момента. Большинство поперечных волн обладает эллиптической частотно-зависимой или круговой поляризацией.

Основные публикации автора по теме диссертации (Scopus)

1. Drepin M.A., Grekova E.F. Non-linear simplest reduced Kelvin's medium in the vicinity of the spherical stress state: waves and instabilities // *Sixty Shades of Generalized Continua: Dedicated to the 60th Birthday of Prof. Victor A. Eremeyev.* — Springer, 2023. — P. 117–140.
2. Grekova E.F. Viscoelastic reduced enhanced isotropic continua as acoustic metamaterials // *Philosophical Transactions of the Royal Society A.* — 2022. — Vol. 380, no. 2237. — P. 20210371.
3. Generalized macroscale model for Cosserat elasticity using Generalized Multiscale Finite Element Method / D. Ammosov, Ya. Efendiev, E. Grekova, M. Vasilyeva // *Journal of Computational Physics.* — 2022. — Vol. 461. — P. 111011.
4. Piatysheva A.P., Grekova E.F. Reduced linear viscoelastic isotropic Cosserat medium with rotational viscosity: an acoustic metamaterial // *Continuum Mechanics and Thermodynamics.* — 2021. — Vol. 33, no. 4. — P. 1765–1780.
5. Grekova E.F., Porubov A.V., dell'Isola F. Reduced linear constrained elastic and viscoelastic homogeneous Cosserat media as acoustic metamaterials // *Symmetry.* — 2020. — Vol. 12. — P. 521.
6. Grekova E.F., Piatysheva A.P. Reduced linear viscoelastic isotropic Cosserat medium with translational viscosity: a double negative acoustic

- metamaterial // Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures. — Springer, Cham, 2020. — P. 153–167.
7. Porubov A.V., Grekova E.F. On nonlinear modeling of an acoustic metamaterial // Mechanics Research Communications. — 2020. — Vol. 103. — P. 103464.
 8. Grekova E.F. Nonlinear isotropic elastic reduced and full Cosserat media: waves and instabilities // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2019. — Vol. 31, no. 6. — P. 1805–1824.
 9. Grekova E.F. Reduced enhanced elastic continua as acoustic metamaterials // Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. — Springer, 2019. — P. 253–268.
 10. Grekova E.F., Abreu R. Isotropic linear viscoelastic reduced Cosserat medium: an acoustic metamaterial and a first step to model geomedium // New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. — Springer, 2019. — P. 165–185.
 11. Grekova E.F. Waves in elastic reduced Cosserat medium with anisotropy in the term coupling rotational and translational strains or in the dynamic term // Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures. — Springer, 2018. — P. 143–156.
 12. Grekova E.F. Harmonic waves in the simplest reduced Kelvin's and gyrostatic media under an external body follower torque // 2018 Days on Diffraction (DD) / IEEE. — 2018. — P. 142–148.
 13. Grekova E.F. Simplest linear homogeneous reduced gyrocontinuum as an acoustic metamaterial // Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials 1. — Springer, 2018. — P. 375–386.
 14. Effect of the microstructure on the propagation velocity of ultrasound in magnetic powders / F.R. Botello, M.A.S. Quintanilla, A. Castellanos et al. // Ultrasonics. — 2018. — Vol. 82. — P. 153–160.
 15. Grekova E.F. Waves in the reduced elastic Cosserat medium with transversal anisotropy of the coupling between linear rotational and translational deformations: Linearization near natural and axisymmetric prestressed state. Special directions // Days on Diffraction (DD), 2017 / IEEE. — 2017. — P. 147–153.
 16. Grekova E.F. Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2016. — Vol. 21, no. 1. — P. 73–93.
 17. Грекова Е.Ф. Об одном классе единой отрицательных акустических метаматериалов // Доклады академии наук. — 2015. — Т. 462, № 3. — С. 295–295.

18. Grekova E.F. On one class of theoretically constructed isotropic single negative continuous acoustic metamaterials // Days on Diffraction (DD), 2014 / IEEE. — 2014. — P. 101–106.
19. Grekova E.F. Nonlinear isotropic elastic reduced Cosserat continuum as a possible model for geomedium and geomaterials. Spherical prestressed state in the semilinear material // Journal of Seismology. — 2012. — Vol. 16, no. 4. — P. 695–707.
20. Грекова Е.Ф. Линейная редуцированная среда Коссера с шаровым тензором инерции, вращения в которой не наблюдаются в эксперименте // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2012. — № 5. — С. 58–64.
21. Grekova E.F. Small perturbations of the spherical prestressed state in a nonlinear isotropic elastic reduced Cosserat medium: waves and instabilities // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2011 / IEEE. — 2011. — P. 78–82.
22. Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2009. — Vol. 99, no. 2B. — P. 1423–1428.
23. Кулеш М.А., Грекова Е.Ф., Шардаков И.Н. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // Акустический журнал. — 2009. — Т. 55, № 2. — С. 216–225.
24. Kulesh M.A., Grekova E.F. Rayleigh-type waves for the isotropic elastic reduced Cosserat half-space application in rocks and soils // Saint Petersburg 2006 International Conference and Exhibition. — 2006.
25. Harris D., Grekova E.F. A hyperbolic well-posed model for the flow of granular materials // Journal of Engineering Mathematics. — 2005. — Vol. 1, no. 52. — P. 107–135.
26. Grekova E.F., Herman G.C. Soils and rocks in terms of anisotropic reduced Cosserat continuum: peculiarities of wave propagation // Powders and Grains 2005, Two Volume Set: Proceedings of the International Conference on Powders & Grains 2005, Stuttgart, Germany, 18-22 July 2005 / Taylor & Francis. — 2005. — P. 425.
27. Grekova E.F., Herman G.C. Wave propagation in rocks modeled as reduced Cosserat continuum with weak anisotropy // 67th EAGE Conference & Exhibition / EAGE Publications BV. — 2005. — P. cp–1.
28. Grekova E.F., Maugin G.A. Modelling of complex elastic crystals by means of multi-spin micromorphic media // International Journal of Engineering Science. — 2005. — Vol. 43, no. 5-6. — P. 494–519.