

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем машиноведения Российской академии наук
(ИПМаш РАН)

На правах рукописи



Семенов Данила Михайлович

Управляемая синхронизация в сетях нейронов Хиндмарша-Роуза

2.3.1 Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Фрадков А. Л.

Санкт-Петербург
2023

Оглавление

Введение	4
1 Предварительные сведения	8
1.1 Устойчивость нелинейных систем	8
1.2 Устойчивость систем с задержками	10
1.3 Определение и некоторые виды синхронизации	11
1.4 Вспомогательные сведения из теории графов	13
1.5 Метод скоростного градиента	16
1.6 Нейрональная математическая модель Хиндмарша-Роуза . .	18
2 Предельная ограниченность сети нейронов Хиндмарша-Роуза	20
2.1 Постановка задачи	20
2.2 Основной результат	20
3 Управляемая синхронизация двух связанных нейронов Хиндмарша-Роуза при наличии возмущений	25
3.1 Постановка задачи	25
3.2 Основной результат	26
3.3 Численное моделирование	29
4 Адаптивное управление синхронизацией сети нейронов Хиндмарша-Роуза	31
4.1 Постановка задачи	31
4.2 Основной результат	32
4.3 Численное моделирование	34
5 Синхронизация сети нейронов Хиндмарша-Роуза при помощи адаптивной настройки силы связи	36
5.1 Постановка задачи	36
5.2 Основной результат	37
5.3 Численное моделирование	39

6	Управляемая синхронизация в регулярной сети моделей Хинд-марша-Роуза с запаздывающими связями	40
6.1	Постановка задачи	40
6.2	Основной результат	42
6.3	Численное моделирование	47
	Заключение	49
	Список литературы	50

Введение

Возможность управления синхронизацией в динамических сетях, состоящих из сложных систем, породила новую междисциплинарную область исследований. В последние десятилетия эта область быстро развивается. С одной стороны, этот факт указывает на то, что явление синхронизации можно изучать с общих математических позиций [3, 13, 26, 52, 55, 56, 81, 82]. С другой стороны, это означает, что разработанный математический аппарат для изучения синхронизации может быть применен в других научных областях, например в таких, как физика, инженерия, компьютерные науки, биология и медицина [28, 36, 43, 48, 49, 79, 80].

В природе существует множество биологических систем, способных синхронизироваться и демонстрировать коллективное поведение. В качестве примеров таких систем можно выделить биологические колебания (циркадные ритмы), скоординированную активность сердечных клеток (так называемый водитель ритма); птиц, собирающихся в стаю; рой светлячков, синхронно вспыхивающих в ночное время суток [20, 35, 46, 54, 55, 72]. Также важным примером таких систем являются популяции нейронов в мозге человека или животного [58, 59]. Очевидно, что в популяциях нейронов синхронизация играет важную роль в формировании мозговых волн активности [64, 78]. Кроме того, было обнаружено, что некоторые заболевания нервной системы (например: эссенциальный тремор, эпилепсия, болезни Паркинсона и Альцгеймера, а также различные когнитивные расстройства) напрямую связаны с аномальной синхронизацией некоторых нейронных популяций [23, 33, 37, 61, 64, 75, 78]. Однако изучение синхронизации нейронов в мозге *in vivo* является сложной проблемой, вызывающей множество технических, этических и других вопросов. Эта проблема может быть частично преодолена путем построения соответствующей математической модели популяций нейронов или всего мозга. Таким образом, мы можем использовать построенную модель для изучения того, как контролировать синхронизацию в этих популяциях.

Одним из подходов к построению математических моделей популяции биологических нейронов является представление популяции в виде динамической сети, узлами которой являются нелинейные модели единичных

нейронов [18, 22, 24, 42, 47]. Наиболее популярной единичной моделью является модель Ходжкина-Хаксли [41], представляющая собой динамическую систему и описывающая динамику распространения спайков¹ вдоль мембраны клетки. На настоящий момент существуют модели, близкие к модели Ходжкина-Хаксли. К таким моделям относятся: модель «integrate-and-fire», модель Моррис-Лекара, система ФитцХью-Нагумо, система Хиндмарша-Роуза и другие [17, 21, 29, 30, 50, 57, 62]. Все эти модели также способны демонстрировать различные режимы активности нейрона, в том числе и режимы спайковой активности. [36, 43].

В сетях биологических нейронов немаловажную роль играют адаптивность и задержка распространения потенциала действия между нейронами. Например, адаптивность позволяет описать такое свойство нейронных сетей, как нейропластичность [19, 25], а задержки распространения сигнала от одного нейрона к другому напрямую влияют на наличие или отсутствие синхронизации между нейронами [45]. Однако, в большинстве работ адаптивность и наличие задержек распространения потенциала действия не учитываются ввиду сложности математических методов для анализа таких сетей. В настоящей работе предпринята попытка решения приведенных выше проблем методами адаптивной теории управления [1, 6, 7, 44]. В качестве исследуемой модели нейронной популяции выбрана спайковая нейронная сеть Хиндмарша-Роуза.

Целью диссертационной работы является исследование и управление синхронизацией в сетях нейронов Хиндмарша-Роуза. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи.

1. Построение модели сети нейронов Хиндмарша-Роуза.
2. Синтез алгоритмов управления, обеспечивающих и гарантирующих достижение синхронизации в сети.
3. Использование адаптивных алгоритмов управления, таких как метод скоростного градиента, для настройки параметров в сети, обеспечивающих синхронизацию.

¹Спайк (англ. *spike*) — одна из фаз потенциала действия биологического нейрона, включающая себя процессы деполяризации и реполяризации мембранного потенциала клетки.

4. Проведение компьютерного моделирования исследуемой сети как при синхронизации, так и при её отсутствии.

В первой главе диссертационной работы приводятся вспомогательные сведения, необходимые для формулировки и доказательства основных результатов.

Во второй главе доказана предельная ограниченность сети нейронов Хиндмарша-Роуза и получена оценка на предельное множество, к которому стремятся траектории сети. Доказательство основано на применении метода функций Ляпунова.

Третья глава посвящена управлению синхронизацией двух связанных нейронов Хиндмарша-Роуза при наличии равномерно ограниченных возмущений, действующих на уравнения динамики. В теоретической части главы получены условия, при которых имеет место ε -синхронизация между нейронами. Работоспособность предложенного алгоритма управления обоснована методом функций Ляпунова и подтверждается численным моделированием.

Четвертая глава посвящена управлению синхронизацией в сети нейронов Хиндмарша-Роуза при помощи адаптивного закона управления, синтезированного на основе метода скоростного градиента [13, 14, 31]. Сходимость синтезированного алгоритма управления подтверждается численным моделированием, описанным в последнем разделе главы.

Пятая глава также посвящена адаптивному управлению синхронизацией в сети нейронов Хиндмарша-Роуза. На этот раз в качестве настраиваемого параметра рассматривается сила связи между нейронами в сети. Настройка силы связи также происходит по методу скоростного градиента. Сходимость синтезированного алгоритма управления, как и в прошлой главе, подтверждается численным моделированием, описанным в последнем разделе главы.

Шестая глава посвящена управлению синхронизацией в сети нейронов Хиндмарша-Роуза с запаздывающими связями. В данной главе предложен алгоритм управления сетью, обеспечивающий синхронизацию нейронов при любых постоянных задержках в связях. Анализ основан на методе функционалов Ляпунова-Красовского для постоянных или медленно меняющихся задержек. Теоретические результаты первой части главы согласо-

ются с численным моделированием, результаты которого представлены в последнем разделе главы.

В заключении перечислены основные результаты работы.

По теме диссертации опубликовано ряд работ, в том числе 4 в изданиях из перечня научных журналов, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией для публикации основных научных результатов диссертаций, входящих в базы цитирования Web of Science и Scopus [9, 65, 67–69]. Основные результаты представлены на 6 всероссийских и международных конференциях.

1 Предварительные сведения

1.1 Устойчивость нелинейных систем

Рассмотрим систему однородных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1.1)$$

где $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна и локально липшицева по аргументу x . Далее будем предполагать, что все рассматриваемые решения $x(t, t_0, x_0)$ с начальными данными $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ определены на интервале $[t_0, +\infty)$.

Определение 1.1. Будем говорить, что решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1.1) устойчиво по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для всех x'_0 , удовлетворяющих неравенству $|x_0 - x'_0| \leq \delta_\varepsilon$, выполняется соотношение

$$|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x'_0)| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

Определение 1.2. Если решение $x(t, t_0, x_0)$ устойчиво по Ляпунову и $\exists \delta = \delta(t_0) > 0$ такое, что для всех x'_0 , удовлетворяющих неравенству $|x_0 - x'_0| \leq \delta$ выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x'_0)| = 0,$$

то говорят, что решение $x(t, t_0, x_0)$ асимптотически устойчиво.

Приведем одно замечание, которое является важным для случая, когда система (1.1) нестационарна.

Замечание 1.1. Если в определениях 1.1 и 1.2 величины δ_ε и δ не зависят от t_0 , то говорят, что решение $x(t, t_0, x_0)$ равномерно устойчиво по Ляпунову и равномерно асимптотически устойчиво.

Наиболее распространенным средством анализа устойчивости нелинейных систем является прямой (второй) метод Ляпунова. Метод основан на использовании скалярных функций, обладающих на решениях динамической системы некоторыми специальными свойствами и получивших название функций Ляпунова.

Далее будем предполагать, что рассматриваемое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1.1) является нулевым, а функциями Ляпунова будем называть непрерывно дифференцируемые скалярные функции $V(x)$ и $V(t, x)$, которые в некоторой окрестности точки $x = 0$ являются положительно определенными. Ознакомиться с определением положительной определенности для функций $V(x)$ и $V(t, x)$ можно в работе [7].

Перейдем к формулировкам теорем прямого метода Ляпунова, предлагающих достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости нелинейных систем.

Теорема 1.1 (об устойчивости). *Нулевое решение системы (1.1) устойчиво по Ляпунову, если в некоторой окрестности точки $x = 0$ существует функция Ляпунова $V(t, x)$ такая, что $\forall t \geq t_0, t_0 \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство*

$$\dot{V}(t, x) \leq 0.$$

Теорема 1.2 (об асимптотической устойчивости). *Нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво, если в некоторой окрестности точки $x = 0$ существует функция Ляпунова $V(t, x)$ такая, что $\forall t \geq t_0, t_0 \in \mathbb{R}_+$ выполняются следующие условия:*

- 1) $V(t, x) \leq W_0(x)$,
- 2) $\dot{V}(t, x) < -W(x)$,

где $W_0(x)$ и $W(x)$ — положительно определенные функции.

Приведем ниже два важных замечания, которые связаны с теоремой 1.2.

Замечание 1.2. *Если система (1.1) стационарна и в качестве функции Ляпунова рассматривается функция $V(x)$, то условие 1 теоремы 1.2 выполняется по определению.*

Замечание 1.3. *Если система (1.1) имеет единственное положение равновесия, то свойства устойчивости приобретают глобальный характер, т.е. могут быть распространены на все пространство состояний в целом. Асимптотическую устойчивость в целом можно установить, воспользовавшись теоремами «Барбашина-Красовского-Ла-Салля».*

Доказательства теорем 1.1 и 1.2 приведены в [6, 7]. Формулировки и доказательства теорем «Барбашина-Красовского-Ла-Салля» можно найти в [2, 44].

1.2 Устойчивость систем с задержками

Рассмотрим следующую систему с задержкой

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x_t), \quad t \geq t_0, \\ x_t(\theta) &= x(t + \theta), \quad \theta \in [-h, 0],\end{aligned}\tag{1.2}$$

где $f: \mathbb{R} \times C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть непрерывная по обоим аргументам и локально липшицева по второму аргументу функция; $h > 0$ обозначает временную задержку в системе. Для того, чтобы гарантировать наличие тривиального решения $x(t) \equiv 0$ в (1.2), мы потребуем, чтобы $f(t, 0) = 0$. Если это не так, то всегда можно выполнить соответствующую замену переменной, переместив решение в начало координат [6].

Определение 1.3. *Тривиальное решение (1.2) является*

- *равномерно (по t_0) устойчивым, если $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ и $\forall \varepsilon > 0$, существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\|x_{t_0}\|_C < \delta(\varepsilon)$ выполняется $|x(t)| < \varepsilon$ $\forall t \geq t_0$;*
- *равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и существует $\delta_a > 0$ такое, что $\forall \eta > 0$ существует $T(\delta_a, \eta)$ такое, что при $\|x_{t_0}\|_C < \delta_a$ выполняется $|x(t)| < \eta$;*
- *глобально равномерно асимптотически устойчивым, если δ_a может быть произвольно большим, конечным значением.*

Далее систему (1.2) будем называть равномерно асимптотически устойчивой, если ее решение равномерно асимптотически устойчиво.

Заметим, что определение устойчивости не отличается от известных определений устойчивости, если задержка в системе отсутствует.

Метод функционалов Ляпунова-Красовского

Одним из методов анализа устойчивости систем (1.2) является метод функционалов Ляпунова-Красовского [4, 5, 16, 32, 34, 38]. Построение функ-

ционалов Ляпунова-Красовского является обобщением прямого метода Ляпунова для систем, у которых состояние является функцией.

Пусть $V: \mathbb{R} \times C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ есть непрерывный функционал и пусть $x_\tau(t, \phi)$ будет решением (1.2) при $\tau \geq t$ с начальным условием $x_t = \phi$. Определим правую часть производной $\dot{V}(t, \phi)$ вдоль (1.2) следующим образом:

$$\dot{V}(t, \phi) = \overline{\lim}_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta t} [V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(t, \phi)) - V(t, x_t)]. \quad (1.3)$$

Очевидно, что неположительность $\dot{V}(t, x_t)$ означает, что x_t не растет с увеличением t , а это, в свою очередь, означает устойчивость системы (1.2).

Теорема 1.3 (теорема Ляпунова-Красовского). *Пусть $f: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ отображает $\mathbb{R} \times$ (ограниченные множества в C) в ограниченные множества в $\mathbb{R}^n$, $u, v, w: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ непрерывные неубывающие функции, причем $u(s)$ и $v(s)$ положительны для $s > 0$ и $u(0) = v(0) = 0$. Тривиальное решение (1.2) равномерно устойчиво, если существует непрерывный функционал $V: \mathbb{R} \times C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^+$, который является положительно определенным, т.е.*

$$u(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_C), \quad (1.4)$$

и такой что, его производная вдоль (1.2) вдоль (1.2) неположительна в том смысле, что

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(|\phi(0)|). \quad (1.5)$$

Если $w(s) > 0$ для $s > 0$, то тривиальное решение является равномерно асимптотически устойчивым. Кроме того, если $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$, то система является глобально равномерно асимптотически устойчивой.

Доказательство теоремы можно найти в [38].

1.3 Определение и некоторые виды синхронизации

В данном разделе приводится общее определение синхронизации, а также рассматриваются некоторые ее виды, такие как координатная синхронизация и обобщенная (частичная) координатная синхронизация.

Под синхронизацией принято понимать согласованное во времени функционирование двух или нескольких процессов или объектов [8, 13]. В част-

ности, это может быть согласованное изменение некоторых количественных характеристик двух или нескольких систем, или сближение переменных состояния рассматриваемых систем.

В некоторых случаях синхронизация может проявляться в силу естественных свойств взаимодействующих систем. Тогда говорят о самосинхронизации. В других случаях для согласованного поведения объектов необходимо вводить в систему дополнительные связи и воздействия. Такая синхронизация называется принудительной или управляемой синхронизацией.

Для рассмотрения различных вопросов синхронизации с единых позиций приведем общее определение синхронизации процессов и объектов различной природы.

Определение 1.4. Будем говорить, что имеет место синхронизация процессов (объектов) $x_i(t) \in X$, $i = 1, 2, \dots, N$, относительно характеристики C_t и функций сравнения F_i , если существуют числа $\tau_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$ такие, что $\forall t \geq 0$ выполняются соотношения

$$F_1(C_{t+\tau_1}[x_1]) = F_2(C_{t+\tau_2}[x_2]) = \dots = F_N(C_{t+\tau_N}[x_N]). \quad (1.6)$$

В определении 1.4 под X понимается некоторое функциональное пространство. Характеристика C_t называется показателем синхронизации или индексом синхронизации и определяется как $C_t: X \rightarrow C$, где C есть множество возможных значений C_t . Важно, что характеристика C_t предполагается одинаковой для всех процессов или объектов. Значение характеристики C_t может быть скаляром, вектором, матрицей, а также функцией. Для сравнения значений характеристики различных процессов вводится набор, не зависящих от времени, вектор-функций $F_i: C \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, N$, называемых функциями сравнения.

Определение 1.5. Приближенной синхронизацией (ε -синхронизацией) называется случай, когда соотношения (1.6) выполняются лишь приближенно, с точностью до ε :

$$\|F_i(C_{t+\tau_i}[x_i]) - F_j(C_{t+\tau_j}[x_j])\| \leq \varepsilon \quad \forall i, j, \quad t \geq t^*.$$

Определение 1.6. Асимптотической синхронизацией называется слу-

чай, когда погрешность выполнения соотношений (1.6) со временем исчезает:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|F_i(C_{t+\tau_i}[x_i]) - F_j(C_{t+\tau_j}[x_j])\| = 0 \quad \forall i, j.$$

В определениях 1.5 и 1.6 под $\|\cdot\|$ следует понимать евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Общее определение синхронизации 1.4 охватывает большое число видов синхронного поведения процессов или объектов. Однако в настоящей работе далее будут рассмотрены только два: координатная синхронизация и обобщенная (частичная) координатная синхронизация. Рассмотрим данные виды синхронизации более подробно.

Определение 1.7. *Координатной синхронизацией процессов или объектов $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, называется вид синхронизации, при котором координаты векторов состояний рассматриваемых процессов (объектов) совпадают.*

Очевидно, что координатная синхронизация укладывается в общее определение 1.4, если ввести показатель синхронизации $C_t(x_i) = x_i(t)$, а функции сравнения взять тождественными: $F_i(x) = x$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Определение 1.8. *Обобщенной (частичной) координатной синхронизацией называют координатную синхронизацию, при которой совпадает лишь часть фазовых координат $y_i = h(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$.*

Обобщенная координатная синхронизация также укладывается в определение 1.4, если взять $C_t(x_i) = x_i(t)$ и $F_i(x) = h(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

1.4 Вспомогательные сведения из теории графов

Графом (ориентированным) называется упорядоченная пара $G = (N, E)$ из двух конечных множеств $N = \{1, 2, \dots, n\}$ (множество узлов или вершин графа) и $E \subset N \times N$ (множество дуг графа). Узел i соединен с узлом j в графе G , если $(i, j) \in E$. Граф называется простым, если отсутствуют петли и между узлами может быть максимум одна дуга. Пара (N, E') , где $E' \subset E$, называется частичным графом графа (N, E) .

Дуга (i, j) графа G представляется в виде стрелки с началом в i и концом в j . Говорят, что дуга (i, j) — исходящая по отношению к узлу i и

входящая по отношению к узлу j ; узел i называется родительским, а узел j — дочерним.

Полустепенью захода вершины i называется количество входящих в нее дуг, а полустепенью исхода вершины i — количество выходящих дуг.

Множеством соседей узла i называется множество $N^i = \{j : (j, i) \in E\}$, т. е. множество узлов с дугами, входящими в i . Число соседей $|N^i|$ узла i равно его полустепени захода.

Если $(i, j) \in E \Rightarrow (j, i) \in E \forall i, j$, то граф называется двунаправленным (неориентированным), иначе граф называется ориентированным (или орграфом). Для неориентированных графов дуги обычно называют ребрами. Если полустепень захода совпадает с полустепенью исхода $\forall i \in N$, то граф называется сбалансированным.

Направленный путь из узла i_1 в узел i_s состоит из последовательности узлов $i_1, \dots, i_s$, $s \geq 2$ таких, что $(i_k, i_{k+1}) \in E$, $k \in \{1, 2, \dots, s-1\}$.

Говорят, что узел i связан с узлом j , если есть направленный путь из i в j . Расстояние от i до j — это длина кратчайшего пути из i в j . Граф называется сильно связным, если i и j связаны для всех различных узлов $i, j \in N$. Для двунаправленных графов, если есть направленный путь из i в j , тогда есть направленный путь из j в i . Такой граф называется связным.

Сопоставим каждому ребру $(i, j) \in E$ вес α_{ij} . Предположим, что все веса положительны. Граф может быть представлен матрицей смежности (связности) $A(G) = [\alpha_{ij}]$ с весами $\alpha_{ij} > 0$, если $(i, j) \in E$, и $\alpha_{ij} = 0$ в противном случае. Также отметим, что $\alpha_{ii} = 0$, т. е. в графе отсутствуют петли.

Определим взвешенную полустепень захода вершины i как сумму i -го столбца матрицы $A(G)$: $d_{in}^i(G) = \sum_{j=1}^N \alpha_{ji}$ и взвешенную полустепень исхода вершины i как сумму i -ой строки матрицы (G) : $d_{out}^i(G) = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}$.

Если $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \forall i, j \in N$, т. е. веса ребер (i, j) и (j, i) совпадают, то граф является неориентированным (двунаправленным). При этом матрица его смежности симметрична.

Граф называется сбалансированным по весам, если взвешенная полустепень захода совпадает с взвешенной полустепенью исхода для всех узлов i . Если все ненулевые веса ребер равны 1, это то же самое, что и определение сбалансированного графа. Неориентированный граф является сба-

лансированным, так как $A(G) = A(G)^T$ и сумма i -ой строки равна сумме по i -му столбцу. В дальнейшем, говоря о полустепени захода или исхода, а также о сбалансированности графа, будем подразумевать взвешенные полустепени захода или исхода и сбалансированность по весам.

Для графа G определим диагональную матрицу степеней вершин графа $D(G) = \text{diag} \{d_{out}^i(G)\}$ из полустепеней исхода. Тогда матрицей Лапласа (лапласианом) графа будем называть матрицу вида $L(G) = D(G) - A(G)$, т. е.

$$L(G) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \alpha_{1j} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1N} \\ -\alpha_{21} & \sum_{j=1}^N \alpha_{2j} & \dots & -\alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{N1} & -\alpha_{N2} & \dots & \sum_{j=1}^N \alpha_{Nj} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что суммы по строкам элементов матрицы Лапласа равны нулю. Следовательно, любой вектор, составленный из одинаковых констант, является правым собственным вектором, соответствующим нулевому собственному значению $L(G)$.

Обозначим через $\mathbf{1}_N$ вектор-столбец размерности N , состоящий из единиц. Известно, что матрица $L(G)$ обладает следующими свойствами [8]:

- 1) матрица $L(G)$ имеет нулевое собственное число, которому соответствует правый собственный вектор $\mathbf{1}_N$: $L(G)\mathbf{1}_N = 0$;
- 2) кратность нулевого собственного числа $L(G)$ неориентированного графа равна количеству компонент связности;
- 3) нулевое собственное число лапласовской матрицы $L(G)$ имеет единичную кратность, если соответствующий орграф сильно связан;
- 4) все собственные числа лапласовской матрицы имеют неотрицательные вещественные части;
- 5) для сбалансированного графа вектор $\mathbf{1}_N$ является левым собственным вектором, соответствующим нулевому собственному числу: $\mathbf{1}_N^T L(G) = 0$.

Второе собственное число $\lambda_2(L)$ матрицы $L(G)$ называют числом Фидлера (Fiedler) или алгебраической связностью графа G [27]. Алгебраиче-

ская связность графа λ_2 обладает одним важным свойством: она положительна в том и только в том случае, когда соответствующий ей неориентированный граф G связан [15, 27, 51, 63].

1.5 Метод скоростного градиента

Кратко опишем метод скоростного градиента, который мы в дальнейшем будем использовать для решения задач адаптивной синхронизации. Метод скоростного градиента впервые был предложен в конце 70-х годов прошлого века для решения задач адаптивного управления [13, 14, 31]. Метод опирается на использование функций Ляпунова и требует определения цели управления как минимизации некоторой скалярной целевой функции (функционала) до заданной величины.

Рассмотрим следующую динамическую систему:

$$\dot{x} = f(t, x, \theta), \quad (1.7)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; $\theta \in \mathbb{R}^m$ — вектор настраиваемых параметров; $f(t, x, \theta)$ — вектор-функция, которая является кусочно-непрерывной по t и непрерывно дифференцируемой по x и θ . Цель управления может быть сформулирована одним из двух следующих способов:

$$Q_t \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow \infty \quad (Q_t \leq \Delta, \forall t > T), \quad (1.8)$$

где $Q_t \geq 0$ — целевой функционал; Δ, T — некоторые постоянные, значения которых зависят от конкретной задачи.

Далее будем рассматривать только случай, когда Q_t является локальным функционалом, т. е. $Q_t = Q(t, x(t))$, где $Q(t, x(t))$ — скалярная функция $n + 1$ переменных.

Для построения алгоритма управления найдем скалярную функцию $\dot{Q}_t = \omega(t, x, \theta)$, которая представляет собой скорость изменения Q_t в силу системы (1.7):

$$\omega(t, x, \theta) = \frac{\partial Q(t, x)}{\partial t} + [\nabla_x Q(t, x)]^T f(t, x, \theta). \quad (1.9)$$

Затем вычислим градиент $\omega(t, x, \theta)$ по входным переменным θ :

$$\nabla_{\theta}\omega(t, x, \theta) = \left[\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right]^T = \left[\frac{\partial f}{\partial \theta} \right]^T \nabla_x Q(t, x). \quad (1.10)$$

Наконец, определим алгоритм изменения θ в дифференциальной форме:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla_{\theta}\omega(t, x, \theta), \quad (1.11)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ — симметричная положительно определенная матрица, например, $\Gamma = \text{diag} \{ \gamma_1, \dots, \gamma_m \}$, $\gamma_i > 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4. *Пусть выполнены следующие предположения.*

П1. Функции f и $\nabla_{\theta}\omega$ непрерывны по x, θ , кусочно непрерывны по t и локально равномерно ограничены по t , т.е. $\forall \beta > 0$ существует $C(\beta) > 0$ такое, что неравенство

$$|f(t, x, \theta)| + |\nabla_{\theta}\omega(t, x, \theta)| \leq C(\beta)$$

имеет место при $|x| \leq \beta, |\theta| \leq \beta$.

П2. Функция $Q(t, x)$ неотрицательна, равномерно непрерывна в любом множестве вида $\{(t, x) : t \geq 0, |x| \leq \beta\}$ и радиально неограничена:

$$\inf_{t \geq 0} Q(t, x) \rightarrow \infty \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

П3. Функция $\omega(t, x, \theta)$ выпукла по θ , т.е. неравенство

$$\omega(t, x, \theta^*) - \omega(t, x, \theta) \geq (\theta^* - \theta) \nabla_{\theta}\omega(t, x, \theta)$$

выполнено для всех $\theta \in \mathbb{R}^m, \theta^ \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$.*

П4. Существуют постоянный вектор $\theta^ \in \mathbb{R}^m$ и $\mathcal{K}$ -функция $\rho(Q)$ такая, что неравенство*

$$\omega(t, x, \theta^*) \leq -\rho(Q(t, x))$$

выполнено для всех $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$.

Тогда все решения $(x(t), \theta(t))$ системы (1.7), (1.11) ограничены и цель

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, x(t)) = 0$$

достигается для всех $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Данная теорема дает достаточные условия сходимости алгоритма скоростного градиента. Доказательство теоремы приведено в работе [31].

Основную идею алгоритма (1.11) можно объяснить следующим образом. Для того, чтобы достигнуть цели управления (1.8), нужно изменять θ в направлении убывания Q_t . Однако это проблематично, поскольку Q_t не зависит явно от θ . Вместо этого, мы можем попробовать уменьшать $\dot{Q}_t$, стремясь к выполнению неравенства $\dot{Q}_t < 0$, которое, в свою очередь, приводит к уменьшению Q_t . Теперь функция $\dot{Q}_t = \omega(t, x, \theta)$ явно зависит от θ , что и позволяет записать алгоритм (1.11).

1.6 Нейрональная математическая модель

Хиндмарша-Роуза

Модель Хиндмарша-Роуза представляет собой математическую модель единичного биологического нейрона и описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений 3-го порядка:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= q(t) - ap^3(t) + bp^2(t) - n(t) + I_{ext}, \\ \dot{q}(t) &= c - dp^2(t) - q(t), \\ \dot{n}(t) &= r[s(p(t) - p_R) - n(t)]. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь переменная $p(t)$ описывает динамику мембранного потенциала нейрона, а переменные $q(t)$ и $n(t)$ описывают работу натрий-калиевого насоса. Поскольку скорость изменения переменной $n(t)$ определяется параметром r таким, что $0 < r < 1$, то $n(t)$ описывает динамику медленного ионного тока, а $q(t)$ – быстрого ионного тока [39, 40, 70]. Внешнее воздействие на нейрон задается параметром I_{ext} . Все параметры системы, за исключением параметров I_{ext} и p_R , являются положительными (параметр p_R отрицателен, а параметр I_{ext} может принимать отрицательное, нулевое и положительное значение).

Изначально система Хиндмарша–Роуза описывалась нелинейной системой дифференциальных уравнений 2-го порядка и являлась упрощенным вариантом модели Ходжкина–Хаксли [39]. Однако дальнейшие эксперименты, проводимые над нервными клетками пресноводной улитки *Lymnaea stagnalis*, позволили обнаружить новые режимы функционирования нейронов, которые не учитывались в модели [40]. Потому авторы модели, Джеймс Хиндмарш и Мальком Роуз, приняли решение о включении в модель третьего уравнения. Это уравнение позволило учесть большинство режимов поведения биологического нейрона. В частности, модель (1.12) способна демонстрировать пачечную активность и посттормозную отдачу, а также адаптироваться к воздействию внешними стимулами [40, 70].

Модель (1.12) можно упростить, сократив число параметров в её записи. Для этого воспользуемся заменой $(p, q, n) \rightarrow (p, q + c, n - sp_R)$. Получим следующее:

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= q(t) - ap^3(t) + bp^2(t) - n(t) + I, \\ \dot{q}(t) &= -dp^2(t) - q(t), \\ \dot{n}(t) &= r(sp(t) - n(t)),\end{aligned}\tag{1.13}$$

где $I = I_{ext} + c + sp_R$.

В дальнейшем будет показано, что решения системы (1.12) (а значит и решения системы (1.13)) являются глобально предельно ограниченными по переменной t . С определением глобальной предельной ограниченности можно ознакомиться в работах [44, 53].

2 Предельная ограниченность сети нейронов Хиндмарша-Роуза

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую сеть нейронов Хиндмарша-Роуза

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j), \\ f_i(x_i) &= \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $x_i = \text{col}\{p_i, q_i, n_i\}$; σ есть сила связи между нейронами; $A = [\alpha_{ij}]_{N \times N}$ матрица смежности графа G ; $i, j \in \mathcal{I} := \{1, \dots, N\}$. Предполагается, что G неориентированный граф, т. е. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $i, j \in \mathcal{I}$.

Требуется найти предельное множество Ω , которое бы содержало в себе траектории сети (2.1), начиная с некоторого момента времени $T > 0$.

2.2 Основной результат

Рассмотрим скалярную функцию

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N V_0(x_i), \quad (2.2)$$

где $V_0(x_i) = (p_i^2 + k_q q_i^2 + k_n n_i^2) / 2$, $i \in \mathcal{I}$ радиально неограниченные и положительно определенные функции; $\mathbf{x} = \text{col}\{x_1, \dots, x_N\}$. Заметим, что сеть (2.1) является глобально предельно ограниченной на множестве Ω если $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. Тут $\dot{V}(\mathbf{x})$ производная (2.2) вдоль траекторий сети (2.1), $\bar{\Omega}$ дополнение до Ω . Таким образом, если сеть (2.1) равномерно предельно ограничена на Ω , тогда Ω является предельным множеством сети.

Найдем предельное множество Ω . Вначале вычислим производную $V(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \left\{ p_i q_i - a p_i^4 + b p_i^3 + I p_i + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (p_i p_j - p_i^2) \right. \\ \left. - k_q d p_i^2 q_i - k_q q_i^2 + (1 - k_n r s) p_i n_i - k_n r n_i^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Далее рассмотрим $\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} (p_i p_j - p_i^2)$ в (2.3). Это можно переписать как

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} (p_i p_j - p_i^2) = -p^T L(G) p,$$

где $p = \text{col}\{p_1, \dots, p_N\}$, $L(G)$ матрица Лапласа графа G . В силу свойств матрицы Лапласа, мы получаем

$$-p^T L(G) p \leq 0. \quad (2.4)$$

Согласно (2.3) и (2.4), получаем следующую оценку сверху:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ p_i q_i - a p_i^4 + b p_i^3 + I p_i - k_q q_i^2 \right. \\ \left. - k_q d p_i^2 q_i - (1 - k_n r s) p_i n_i - k_n r n_i^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Выполним некоторые преобразования над слагаемыми в (2.5):

$$-\sum_{i=1}^N \left\{ a p_i^4 + k_q d p_i^2 q_i \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{a}{2} p_i^4 - \frac{a}{2} \left(p_i^2 + \frac{k_q d}{a} q_i \right)^2 + \frac{d^2 k_q^2}{2a} q_i^2 \right\}$$

и

$$\sum_{i=1}^N \left\{ -k_q q_i^2 + p_i q_i \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{k_q}{2} q_i^2 - \frac{k_q}{2} \left(q_i - \frac{1}{k_q} p_i \right)^2 + \frac{1}{2k_q} p_i^2 \right\}.$$

Основываясь на приведенных выше преобразованиях, получим

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{a}{2}p_i^4 + bp_i^3 + \frac{1}{2k_q}p_i^2 + |Ip_i| - \frac{k_q}{2} \left(1 - \frac{k_q d^2}{a}\right) q_i^2 - (1 - k_n r s)p_i n_i - k_n r n_i^2 \right\}. \quad (2.6)$$

Далее, мы применим неравенство $|\alpha\beta| \leq \frac{\nu}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\nu}\beta^2$ ($\nu > 0$) к слагаемому $\sum_{i=1}^N |Ip_i|$ в правой части (2.6). Получим верхнюю оценку

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{a}{2}p_i^4 + bp_i^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_q} + \nu_{pI} \right) p_i^2 - \frac{k_q}{2} \left(1 - \frac{k_q d^2}{a}\right) q_i^2 - (1 - k_n r s)p_i n_i - k_n r n_i^2 + \frac{1}{2\nu_{pI}} I^2 \right\}. \quad (2.7)$$

Заметим, что k_q , k_n , ν_{pI} произвольные положительные постоянные и мы можем им присвоить следующие значения:

$$k_q = \frac{a}{2d^2}, \quad k_n = \frac{1}{rs}, \quad \nu_{pI} = \frac{1}{k_q}.$$

Таким образом, неравенство (2.7) примет следующий вид:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{a}{2}p_i^4 + bp_i^3 + \frac{2d^2}{a}p_i^2 - \frac{a}{8d^2}q_i^2 - \frac{1}{s}n_i^2 + \frac{a}{4d^2}I^2 \right\}. \quad (2.8)$$

Мажорируем $\sum_{i=1}^N bp_i^3$ в (2.8). Легко видеть, что

$$\sum_{i=1}^N bp_i^3 \leq \sum_{i=1}^N b|p_i|p_i^2.$$

Далее найдем β_p такое, что

$$b|p_i| \leq ap_i^2/4 + \beta_p, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Ясно, что $b|p_i|$ и $ap_i^2/4 + \beta_p$, $i \in \mathcal{I}$ являются четными функциями. Следо-

вательно, рассмотрим следующие неравенства:

$$bp_i \leq ap_i^2/4 + \beta_p, \quad p_i \in [0, +\infty), \quad i \in \mathcal{I}.$$

Данные неравенства выполняются, если соответствующие им квадратные уравнения

$$ap_i^2/4 - bp_i + \beta_p = 0, \quad i \in \mathcal{I}$$

имеют один корень (или вовсе не имеют корней). Очевидно это выполнено $\forall \beta_p \geq b^2/a$. Таким образом имеет место следующая мажоранта:

$$\sum_{i=1}^N bp_i^3 \leq \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{a}{4} p_i^4 + \frac{b^2}{a} p_i^2 \right\}. \quad (2.9)$$

Теперь мы используем неравенство (2.9) и добавим произвольную неотрицательную постоянную $\tilde{\beta}$ в правую часть (2.8). Получим следующую верхнюю оценку:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\tilde{a}p_i^4 + \tilde{b}p_i^2 - \tilde{c}q_i^2 - \tilde{d}n_i^2 + \Delta \right\}, \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{a}{4}, \quad \tilde{b} = \frac{1}{a} (b^2 + 2d^2), \\ \tilde{c} &= \frac{a}{8d^2}, \quad \tilde{d} = \frac{1}{s}, \quad \Delta = \frac{a}{4d^2} I^2 + \tilde{\beta} \end{aligned}$$

есть положительные постоянные.

Теперь определим $\tilde{\beta}$ в (2.10). Для этого рассмотрим неравенства

$$\tilde{b}p_i^2 \leq \tilde{a}p_i^4/2 + \Delta, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Выполним замену переменных $\tilde{p}_i = p_i^2$, $i \in \mathcal{I}$ в предыдущих неравенствах. Тогда мы имеем

$$\tilde{b}\tilde{p}_i \leq \tilde{a}\tilde{p}_i^2/2 + \Delta, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Данные неравенства выполняются, если соответствующие им квадратные уравнения

$$\tilde{a}\tilde{p}_i^2/2 - \tilde{b}\tilde{p}_i + \Delta = 0, \quad i \in \mathcal{I}$$

имеют один корень (или вовсе не имеют корней). Очевидно это выполнено $\forall \Delta \geq \tilde{b}^2/2\tilde{a}$. Из вышесказанного следует, что

$$\sum_{i=1}^N \tilde{b}p_i^2 \leq \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\tilde{a}}{2}p_i^4 + \Delta \right\}, \quad (2.11)$$

где $\Delta = \frac{a}{4d^2}I^2 + \tilde{\beta}$ и

$$\tilde{\beta} = \begin{cases} 0, & \text{if } \frac{a}{2d^2}I^2 \geq \frac{\tilde{b}^2}{\tilde{a}}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{b}^2}{\tilde{a}} - \frac{a}{2d^2}I^2 \right), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Наконец, согласно (2.10) и (2.11), мы получим

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{\tilde{a}}{2}p_i^4 - \tilde{c}q_i^2 - \tilde{d}n_i^2 + \Delta \right\}. \quad (2.12)$$

Далее определим $\bar{\Omega}$ следующим образом:

$$\bar{\Omega} = \left\{ |p_i| > \sqrt[4]{\frac{2\Delta}{\tilde{a}}}, |q_i| > \sqrt{\frac{\Delta}{\tilde{c}}}, |n_i| > \sqrt{\frac{\Delta}{\tilde{d}}}, i \in \mathcal{I} \right\}.$$

Легко видеть, что $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ выполнено $\forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. Следовательно, Ω является предельным множеством для траекторий (2.1). Полученные результаты могут быть сформулированы в виде следующей теоремы

Теорема 2.1. *Все решения сети (2.1) являются глобально равномерно предельно ограниченными на множестве*

$$\Omega = \left\{ |p_i| \leq \sqrt[4]{\frac{2\Delta}{\tilde{a}}}, |q_i| \leq \sqrt{\frac{\Delta}{\tilde{c}}}, |n_i| \leq \sqrt{\frac{\Delta}{\tilde{d}}}, i \in \mathcal{I} \right\}.$$

Существует ряд исследований, которые устанавливают наличие предельной ограниченности в сети нейронов Хиндмарша-Роуза [73, 74, 76]. Однако в перечисленных работах предельное множество Ω не было определено. Данный результат был опубликован в работе [68].

3 Управляемая синхронизация двух связанных нейронов Хиндмарша-Роуза при наличии возмущений

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую сеть:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1) + \sigma\varphi(x_1, x_2) + \xi_1 + Bu, \\ \dot{x}_2 &= f(x_2) + \sigma\varphi(x_2, x_1) + \xi_2, \\ f(x_i) &= \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $x_i = \text{col}\{p_i, q_i, n_i\}$; $\xi_i = \text{col}\{\xi_{pi}, \xi_{qi}, \xi_{ni}\}$, $B = \text{col}\{1, 0, 0\}$; σ есть сила связи между нейронами; u — искомое управление; $\varphi(\cdot)$ обозначает функцию связи в сети. Здесь ξ_i , $i = 1, 2$ есть вектор равномерно ограниченных возмущений, т.е.

$$|\xi_{pi}(t)| \leq \frac{\Delta_p}{2}, \quad |\xi_{qi}(t)| \leq \frac{\Delta_q}{2}, \quad |\xi_{ni}(t)| \leq \frac{\Delta_n}{2}, \quad i = 1, 2, \quad \forall t \geq 0.$$

Теперь введем некоторые обозначения, которые будут использованы далее:

$$\begin{aligned} e(t) &= x_1(t) - x_2(t), \quad \eta(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t) \\ \psi^{(1)}(t) &= p_1^3(t) - p_2^3(t), \quad \psi^{(2)}(t) = p_1^2(t) - p_2^2(t), \end{aligned}$$

где $e(t) = \text{col}\{e_p(t), e_q(t), e_n(t)\}$ вектор отклонений между координатами нейронов.

Последовательно вычтем второе уравнение из первого в (3.1) и получим

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \hat{f}(e, \psi) + 2\sigma\varphi(x_1, x_2) + \eta + Bu, \\ \hat{f}(e, \psi) &= \begin{bmatrix} e_q - a\psi^{(1)} + b\psi^{(2)} - e_n \\ -d\psi^{(2)} - e_q \\ r(se_p - e_n) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\psi = \text{col}\{\psi^{(1)}, \psi^{(2)}\}$; $\eta = \text{col}\{\eta_p, \eta_q, \eta_n\}$ — вектор-функция возмущений,

таких, что

$$|\eta_p(t)| \leq \Delta_p, |\eta_q(t)| \leq \Delta_q, |\eta_n(t)| \leq \Delta_n, \quad \forall t \geq 0.$$

Основываясь на приведенных выше обозначениях, формулируется задача управляемой координатной ε -синхронизации моделей (3.1) как достижение следующей цели управления:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |e_p(t)| \leq \varepsilon_p, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |e_q(t)| \leq \varepsilon_q, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |e_n(t)| \leq \varepsilon_n, \quad (3.3)$$

где $\varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_n$ есть уровни точности синхронизации.

Таким образом, чтобы гарантировать синхронизацию нейронов (3.1), необходимо обеспечить устойчивость системы (3.2). Этого можно достигнуть посредством управления $u(t)$, закон которого будет выведен из решения задачи.

3.2 Основной результат

Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V(e(t)) = \frac{1}{2} \left(e_p^2 + e_q^2 + \frac{1}{rs} e_n^2 \right). \quad (3.4)$$

Найдем производную $\dot{V}(e(t))$ в силу уравнений (3.2). Получим следующее:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) = & e_q e_p - a\psi^{(1)} e_p + b\psi^{(2)} e_p - 2\sigma e_p^2 + \eta_p e_p + e_p u \\ & - d\psi^{(2)} e_q - e_q^2 + \eta_q e_q - \frac{1}{s} e_n^2 + \frac{1}{rs} \eta_n e_n. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее проведем оценку сверху полученной производной. Во-первых рассмотрим слагаемое, содержащее $\psi^{(1)} e_p = (p_1 - p_2)(p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2)$ и покажем, что оно отрицательно определено. Для этого найдем $\beta > 0$, для которой имеет место неравенство

$$p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2 \geq \beta (p_1 - p_2)^2. \quad (3.6)$$

Перепишем данное неравенство в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \beta & 1/2 + \beta \\ 1/2 + \beta & 1 - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Очевидно, что неравенство (3.6) выполнено тогда и только тогда, когда соответствующая матрица является положительно полуопределенной. Используя критерий Сильвестра мы получаем, что для выполнения неравенства величина β должна принадлежать интервалу $(0, 1/4]$. Из последнего получаем следующую оценку сверху на производную (3.5):

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq & e_q e_p + b\psi^{(2)} e_p - 2\sigma e_p^2 + |\eta_p e_p| + e_p u \\ & - d\psi^{(2)} e_q - e_q^2 + |\eta_q e_q| - \frac{1}{s} e_n^2 + \frac{1}{rs} |\eta_n e_n|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь рассмотрим вспомогательное неравенство $|\alpha\beta| \leq \frac{\nu}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\nu}\beta^2$ и применим его к правой части (3.7). Откуда получим

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq & - \left(2\sigma - \frac{\nu_p}{2}\right) e_p^2 + e_p e_q - \left(1 - \frac{\nu_q}{2}\right) e_q^2 - \frac{1}{s} \left(1 - \frac{\nu_n}{2r}\right) e_n^2 \\ & + b\psi^{(2)} e_p - d\psi^{(2)} e_q + e_p u + \frac{1}{2\nu_p} \eta_p^2 + \frac{1}{2\nu_q} \eta_q^2 + \frac{1}{2rs\nu_n} \eta_n^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Постоянные ν_p , ν_q , ν_n положим равными $1/2$, $1/2$, $r/2$ соответственно. Тогда, выполнив некоторые преобразования над (3.8), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq & - \left(2\sigma - \frac{1}{2}\right) e_p^2 + e_p e_q - \frac{1}{2} e_q^2 - \frac{1}{2s} e_n^2 - \frac{1}{4} \left(e_p^2 + e_q^2 + \frac{1}{s} e_n^2\right) \\ & + b\psi^{(2)} e_p - d\psi^{(2)} e_q + e_p u + \eta_p^2 + \eta_q^2 + \frac{1}{r^2 s} \eta_n^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Далее синтезируем закон управления, чтобы избавиться от нелинейных слагаемых в правой части (3.9). Алгоритм управления выберем следующий:

$$u(t) = -(\gamma + b\psi^{(2)}) + d\psi^{(2)} e_q. \quad (3.10)$$

Подставим синтезированный закон управления в (3.9):

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq & - \left(\gamma + 2\sigma - \frac{1}{2} \right) e_p^2 + e_p e_q - \frac{1}{2} e_q^2 - \frac{1}{2s} e_n^2 - \frac{1}{4} \left(e_p^2 + e_q^2 + \frac{1}{s} e_n^2 \right) \\ & + \eta_p^2 + \eta_q^2 + \frac{1}{r^2 s} \eta_n^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Легко видеть, что верна следующая оценка сверху для (3.11):

$$\dot{V}(e(t)) \leq e^T(t) W e(t) - \frac{r}{4} V(e(t)) + h, \quad (3.12)$$

где

$$W = \begin{bmatrix} -(\gamma + 2\sigma - 1/2) & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2s \end{bmatrix}, \quad h = \left(\Delta_p^2 + \Delta_q^2 + \frac{1}{r^2 s} \Delta_n^2 \right).$$

Теперь найдем такое σ , при которых квадратичная форма $e^T(t) W e(t)$ в неравенстве (3.12) является отрицательно определенной. Используя критерий Сильвестра, получим следующее условие:

$$\gamma + 2\sigma - 1 > 0. \quad (3.13)$$

Если условие (3.13) выполнено, тогда квадратичная форма в неравенстве (3.12) является отрицательно определенной. Поэтому правую часть (3.12) можно вновь оценить сверху следующим выражением:

$$\dot{V}(e(t)) \leq -\frac{r}{4} V(e(t)) + h. \quad (3.14)$$

Наконец, применяя известные теоремы сравнения дифференциальных неравенств [12] к неравенству (3.14) и устремляя t к бесконечности, получаем верхний предел

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} V(e(t)) = \frac{2h}{r}.$$

Следовательно, траектории (3.2) стремятся внутрь эллипсоида

$$e(t)^T H^{-1} e(t) = 1, \quad (3.15)$$

где

$$H = \begin{bmatrix} 4h/r & 0 & 0 \\ 0 & 4h/r & 0 \\ 0 & 0 & 4sh \end{bmatrix}.$$

Стремление траекторий (3.2) внутрь эллипсоида свидетельствует о достижении цели управления (3.3), а значит и ε -синхронизации между связанными системами (3.1). Следует отметить, что точность такой синхронизации прямо пропорциональна величинам Δ_p , Δ_q и Δ_n . Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Предположим, что условие (3.13) выполнено. Тогда закон управления в форме (3.10) гарантирует достижение цели управления (3.3) $\forall x_i(0)$, $i = 1, 2$ в системе (3.1).*

Таким образом, теорема 3.1 является достаточным условием для достижения ε -синхронизации связанных систем (3.1). Данный результат был опубликован в работах [9, 10].

3.3 Численное моделирование

Проведем компьютерное моделирование с целью подтверждения результатов, полученных в предыдущем разделе. Предполагается, что в динамической сети (3.1) присутствуют возмущения, описываемые равномерно ограниченными функциями от времени. Для моделирования таких возмущений были выбраны следующие функции:

$$\begin{aligned} \xi_{p,1} &= 0.01\varepsilon \sin(100t), & \xi_{p,2} &= -0.01\varepsilon \sin(100t), \\ \xi_{q,1} &= 0.01\varepsilon \sin(t), & \xi_{q,2} &= -0.01\varepsilon \sin(t), \\ \xi_{n,1} &= 0.02\varepsilon^2 \sin(0.01t), & \xi_{n,2} &= -0.02\varepsilon^2 \sin(0.01t). \end{aligned}$$

Результаты моделирования представлены на рисунке 3.1. Вначале рассмотрим временной интервал от 400 до 800 миллисекунд. Этот интервал соответствует периоду, когда закон управления не активирован. Из рисунка 3.1(а, б, в) видно, что между временными рядами имеется некоторый сдвиг. Кроме того, ошибки синхронизации, представленные на рисунке 3.1(г, д, е) имеют достаточно большие значения, что означает отсутствие синхронизации.

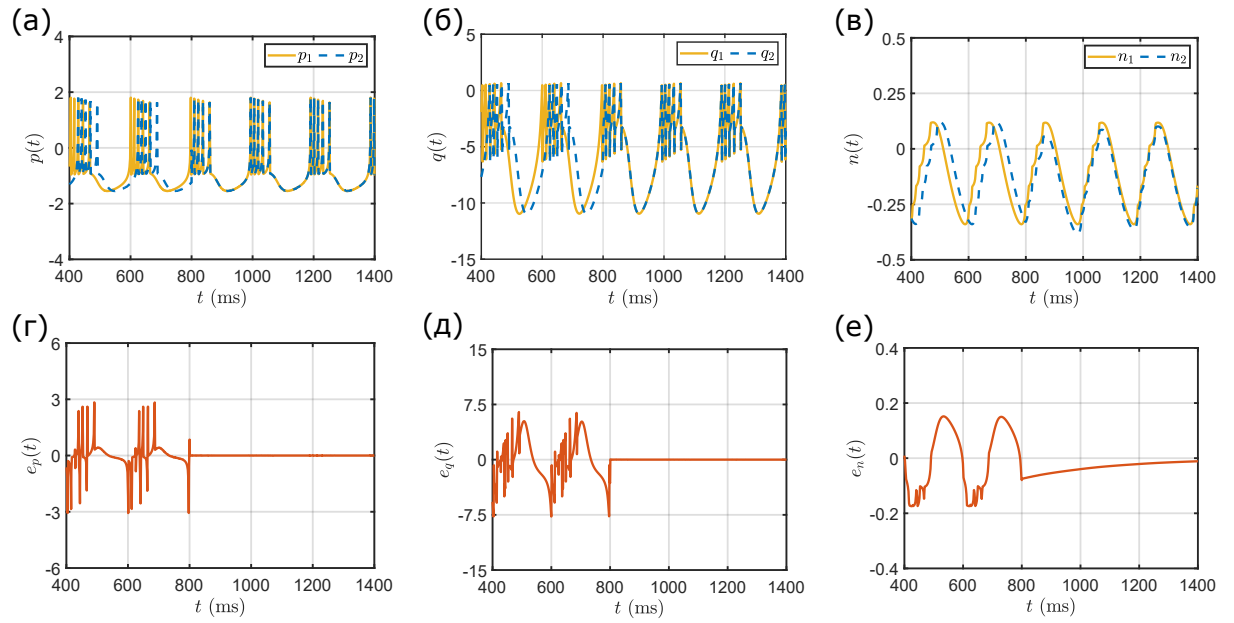


Рис. 3.1: Численное моделирование двух связанных нейронов Хиндмарша-Роуза. (а), (б), (в): динамика переменных p_i , q_i , n_i , $i = 1, 2$, соответственно; (г), (д), (е): ошибки синхронизации соответствующих переменных. Параметры моделей: $\gamma = 1$; $a = 1$; $b = 3$; $c = 1$; $d = 5$; $r = 0.01$; $s = 4$; $I = -2.25$; $\sigma = 0.01$. Начальные условия: $p_i(0)$, $q_i(0)$ и $n_i(0)$, $i = 1, 2$ равномерно распределены на интервалах $[-2, 2]$, $[-10, -1]$ и $[-0.25, 0.25]$, соответственно.

Теперь рассмотрим интервал от 800 до 1400 миллисекунд. Этому периоду времени соответствует активированный закон управления. Легко видеть, что ошибки синхронизации на этом интервале резко убывают, т.е. нейроны переходят в синхронный режим функционирования. Это означает, что результаты численного моделирования согласуются с теоретическими выкладками.

4 Адаптивное управление синхронизацией сети нейронов Хиндмарша-Роуза

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую сеть нейронов Хиндмарша-Роуза:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j) + Bu_i, \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\} \quad (4.1) \\ f(x_i) &= \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $x_i = \text{col}\{p_i, q_i, n_i\}$; $B = \text{col}\{1, 0, 0\}$; $\sigma > 0$ обозначает силу связи между нейронами; $\alpha_{ij}, \forall i, j \in \mathcal{I}$ элементы матрицы смежности $A(G)$ графа связей G ; $\varphi(\cdot)$ обозначает функцию связи в сети. Здесь и далее будем считать, что G есть неориентированный граф.

Построим уравнение средней динамики для сети (4.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= f_s(x_s, \psi(p)), \quad f_s(x_s, \psi(p)) = \begin{bmatrix} q_s - a\psi_s^{(1)}(p) + b\psi_s^{(2)}(p) - n_s + I \\ -d\psi_s^{(2)}(p) - q_s \\ r(sp_s - n_s) \end{bmatrix}, \quad (4.2) \\ p_s &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i, \quad q_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i, \quad n_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i, \\ \psi_s^{(1)}(p) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^3, \quad \psi_s^{(2)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^2, \end{aligned}$$

где $x_s = \text{col}\{p_s, q_s, n_s\}$, $p = \text{col}\{p_1, \dots, p_N\}$, $\psi_s(p) = \text{col}\{\psi_s^{(1)}(p), \psi_s^{(2)}(p)\}$.

Далее введем ошибки синхронизации

$$e_{pi} = p_i - p_s, \quad e_{qi} = q_i - q_s, \quad e_{ni} = n_i - n_s.$$

Последовательно вычитая уравнения средней динамики (4.2) из уравнений сети (4.1), мы получаем сеть ошибок синхронизации, которая может быть

представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= f(e_i, \psi_i(p)) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j) + B u_i, \\ f(x_i) &= \begin{bmatrix} e_{qi} - a\psi_i^{(1)}(p) + b\psi_i^{(2)}(p) - e_{ni} \\ -d\psi_i^{(2)}(p) - e_{qi} \\ r(se_{pi} - e_{ni}) \end{bmatrix}, \\ \psi_i^{(1)}(p) &= p_i^3 - \psi_s^{(1)}(p), \quad \psi_i^{(2)}(p) = p_i^2 - \psi_s^{(2)}(p), \quad \forall i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $e_i = \text{col} \{e_{pi}, e_{qi}, e_{ni}\}$, $\psi_i(p) = \text{col} \{\psi_i^{(1)}(p), \psi_i^{(2)}(p)\}$.

Таким образом, задача адаптивной синхронизации для сети (4.1) может быть переформулирована в задачу адаптивной стабилизации сети (4.3) начала координат. Для решения задачи адаптивной стабилизации зададимся следующей целью управления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{pi} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{qi} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ni} = 0, \quad i \in \mathcal{I}. \quad (4.4)$$

Очевидно, что определенная цель управления соответствует как адаптивной синхронизации сети (4.1) (при условии наличия свойства предельной ограниченности данной сети), так адаптивной стабилизации сети (4.3). Таким образом, нам необходимо синтезировать такой адаптивный закон управления, который бы обеспечивал достижение цели (4.4). Здесь мы используем алгоритм управления, который имеет вид

$$u_i(t) = - \left[\gamma_0 + \theta_1(t) \psi_i^{(2)}(t) \right] e_{pi}(t) + \theta_2(t) \psi_i^{(2)}(t) e_{qi}(t), \quad i \in \mathcal{I}. \quad (4.5)$$

где γ_0 есть коэффициент усиления в законе управления $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ — настраиваемые параметры. В качестве алгоритма настройки коэффициентов $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ будем использовать метод скоростного градиента.

4.2 Основной результат

Введем следующую целевую функцию для решения поставленной выше задачи:

$$Q(e) = \sum_{i=1}^N Q_0(e_i), \quad (4.6)$$

где $Q_0(e_i) = \frac{1}{2} \left(e_{pi}^2 + e_{qi}^2 + \frac{1}{rs} e_{ni}^2 \right)$, $i \in \mathcal{I}$ есть радиально неограниченные и положительно определенные функции; $e = \text{col} \{e_1, \dots, e_N\}$. Ее производная вдоль (4.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{Q}(e) = \omega(t, e, \theta) = \sum_{i=1}^N \left\{ e_{qi} e_{ni} - a\psi_i^{(1)}(p) e_{pi} + b\psi_i^{(2)}(p) e_{pi} + \right. \\ \left. + \sigma e_{pi} \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (p_j - p_i) + u_i e_{pi} - d\psi_i^{(2)}(p) e_{qi} - e_{qi}^2 - \frac{1}{s} e_{ni}^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\theta = \text{col} \{\theta_1, \theta_2\}$. Далее подставим управление (4.5) в (4.7). Откуда получим

$$\begin{aligned} \dot{Q}(e) = \omega(t, e, \theta) = \sum_{i=1}^N \left\{ -\gamma_0 e_p^2 + e_{qi} e_{ni} - a\psi_i^{(1)}(p) e_{pi} + (b - \theta_1) \psi_i^{(2)}(p) e_{pi} + \right. \\ \left. + \sigma e_{pi} \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (p_j - p_i) + u_i e_{pi} - (d - \theta_2) \psi_i^{(2)}(p) e_{qi} - e_{qi}^2 - \frac{1}{s} e_{ni}^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Теперь найдем скоростной градиент (4.8) по θ . Получим

$$\nabla_{\theta} \omega(t, e, \theta) = \begin{bmatrix} -\psi_i^{(2)}(p) e_{pi} \\ \psi_i^{(2)}(p) e_{qi} \end{bmatrix}$$

Наконец, получим адаптивный алгоритм настройки коэффициентов в законе управления (4.5):

$$\dot{\theta} = -\gamma \nabla_{\theta} \omega(t, e, \theta), \quad (4.9)$$

где $\gamma > 0$ есть коэффициент усиления алгоритма. Предполагая выполнимость теорем о сходимости скоростного градиента [7], сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.1. Пусть граф связей G является неориентированным. Тогда сеть (4.3) стабилизируема в начале координат с помощью алгоритма (4.5), (4.9), т.е. полученный алгоритм обеспечивает достижение цели управления (4.4) для любых $e_1(0), \dots, e_N(0)$ и $\theta(0)$.

Учитывая предельную ограниченность сети (4.1), получаем, что при

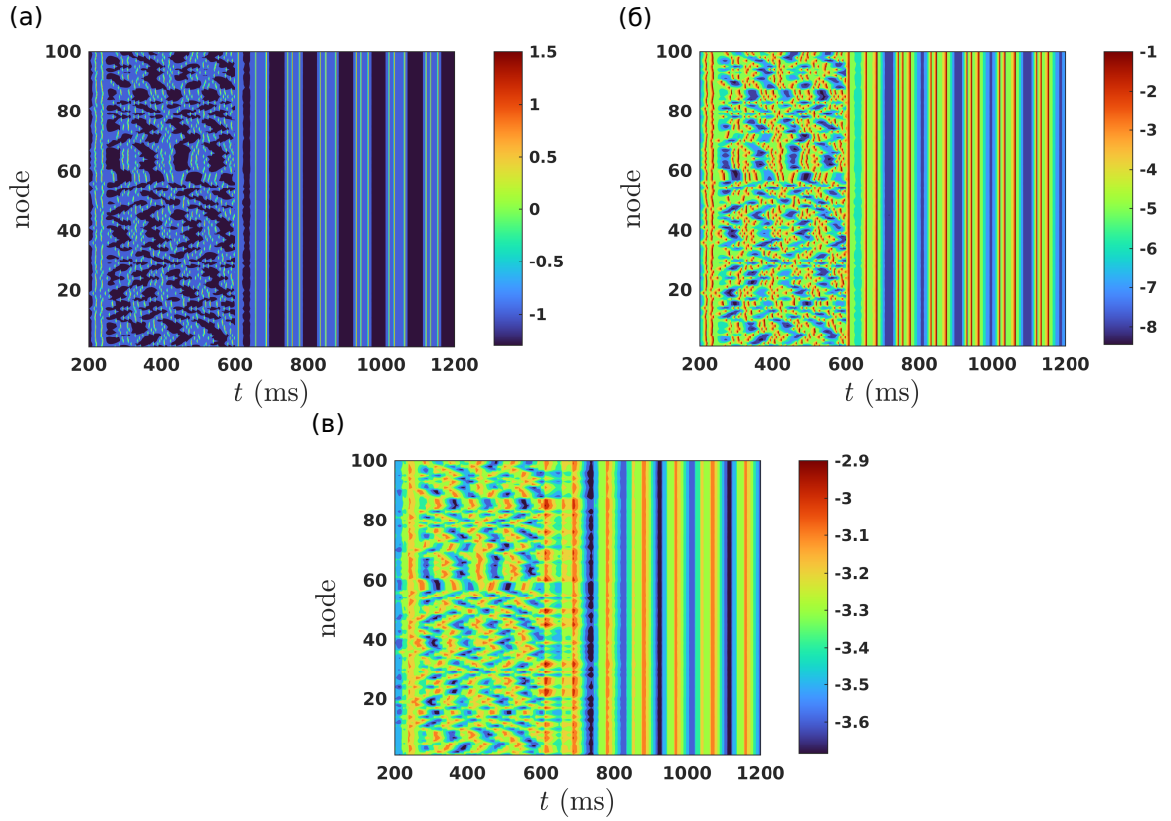


Рис. 4.1: Компьютерное моделирование сети Хиндмарша-Роуза (100 узлов). (а), (б), (в): динамика переменных p_i , q_i и n_i , $i \in \mathcal{I}$, соответственно. Параметры сети: $N = 100$; $\gamma_0 = 1$; $\gamma = 0.01$; $a = 1$; $b = 3$; $c = 1$; $d = 5$; $r = 0.01$; $s = 4$; $I = -2.25$. Начальные условия: $\sigma = 0.001$; $p_i(0)$, $q_i(0)$ и $n_i(0)$, $i \in \mathcal{I}$ равномерно распределены на интервалах $[-2, 2]$, $[-10, -1]$ и $[-0.25, 0.25]$, соответственно.

выполнении теоремы 4.1 мы обеспечили синхронизацию между нейронами в сети (4.1). Данный результат был опубликован в работах [65–67].

4.3 Численное моделирование

Для подтверждения теоретических результатов, полученных в предыдущем разделе, было проведено компьютерное моделирование сети из 100 нейронов Хиндмарша-Роуза. Значения параметров и начальных условий приведены в описании к рисункам. Матрица смежности графа связей G выбрана симметрической и разреженной матрицей с плотностью 0.2, т.е. предполагается, что она содержит около $0.2n^2$ ненулевых элементов. Эти ненулевые элементы равны единице, поскольку граф неориентированный и не имеет весов. Алгебраическая связность $\lambda_2(L)$ графа G приблизительно равна 9.08, что говорит о связности графа.

Результаты моделирования представлены на рисунке 4.1. Вначале рассмотрим временной интервал от 200 до 600 миллисекунд. Этот интервал соответствует периоду, когда адаптивный алгоритм (4.5) не активирован. Из рисунка 4.1 видно, что имеются некоторые сдвиги между временными рядами узлов сети на данном временном интервале, что свидетельствует об отсутствии синхронизации в моделируемой сети.

Теперь рассмотрим интервал от 600 до 1200 миллисекунд. Этот интервал соответствует включенному алгоритму управления (4.5). Работа алгоритма управления приводит к исчезновению временных сдвигов между временными рядами узлов сети, т.е. сеть переходит в синхронный режим функционирования. Таким образом мы можем заключить, что результаты численного моделирования полностью согласуются с полученными теоретическими результатами.

5 Синхронизация сети нейронов Хиндмарша-Роуза при помощи адаптивной настройки силы связи

5.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую сеть нейронов Хиндмарша-Роуза:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j), \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\} \quad (5.1)$$

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $x_i = \text{col}\{p_i, q_i, n_i\}$; $\sigma > 0$ обозначает силу связи между нейронами; $\alpha_{i,j}$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$ элементы матрицы смежности $A(G)$ графа связей G ; $\varphi(\cdot)$ обозначает функцию связи в сети. Здесь и далее будем предполагать, что G есть связный и неориентированный граф.

Построим уравнение средней динамики для сети (5.1):

$$\dot{x}_s = f_s(x_s, \psi(p)), \quad f_s(x_s, \psi(p)) = \begin{bmatrix} q_s - a\psi_s^{(1)}(p) + b\psi_s^{(2)}(p) - n_s + I \\ -d\psi_s^{(2)}(p) - q_s \\ r(sp_s - n_s) \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

$$p_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i, \quad q_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i, \quad n_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i,$$

$$\psi_s^{(1)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^3, \quad \psi_s^{(2)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^2,$$

где $x_s = \text{col}\{p_s, q_s, n_s\}$, $p = \text{col}\{p_1, \dots, p_N\}$, $\psi_s(p) = \text{col}\{\psi_s^{(1)}(p), \psi_s^{(2)}(p)\}$.

Далее введем ошибки синхронизации

$$e_{pi} = p_i - p_s, \quad e_{qi} = q_i - q_s, \quad e_{ni} = n_i - n_s.$$

Последовательно вычитая уравнения средней динамики (5.2) из уравнений сети (5.1), мы получаем сеть ошибок синхронизации, которая может быть

представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= f(e_i, \psi_i(p)) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j), \\ f(x_i) &= \begin{bmatrix} e_{qi} - a\psi_i^{(1)}(p) + b\psi_i^{(2)}(p) - e_{ni} \\ -d\psi_i^{(2)}(p) - e_{qi} \\ r(se_{pi} - e_{ni}) \end{bmatrix}, \\ \psi_i^{(1)}(p) &= p_i^3 - \psi_s^{(1)}(p), \quad \psi_i^{(2)}(p) = p_i^2 - \psi_s^{(2)}(p), \quad \forall i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $e_i = \text{col} \{e_{pi}, e_{qi}, e_{ni}\}$, $\psi_i(p) = \text{col} \{\psi_i^{(1)}(p), \psi_i^{(2)}(p)\}$.

Таким образом, задача адаптивной синхронизации для сети (5.1) может быть переформулирована в задачу адаптивной стабилизации сети (5.3) в начале координат. Для решения задачи адаптивной стабилизации зададимся следующей целью управления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{pi} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{qi} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ni} = 0, \quad i \in \mathcal{I}. \quad (5.4)$$

Очевидно, что определенная цель управления соответствует как адаптивной синхронизации сети (5.1) (при условии наличия свойства предельной ограниченности данной сети), так адаптивной стабилизации сети (5.3). Таким образом, нам необходимо найти такой адаптивный закон управления, который бы обеспечивал достижение цели (5.4). В данной работе мы используем алгоритм скоростного градиента для поиска такого управления, а в качестве настраиваемого параметра рассматривается параметр σ – сила связи в сети.

5.2 Основной результат

Введем следующую целевую функцию для решения поставленной выше задачи:

$$Q(e) = \sum_{i=1}^N Q_0(e_i), \quad (5.5)$$

где $Q_0(e_i) = \frac{1}{2} \left(e_{pi}^2 + e_{qi}^2 + \frac{1}{r_s} e_{ni}^2 \right)$, $i \in \mathcal{I}$ есть радиально неограниченные и положительно определенные функции; $e = \text{col} \{e_1, \dots, e_N\}$. Ее производная

ВДОЛЬ (5.3) ИМЕЕТ ВИД

$$\begin{aligned} \dot{Q}(e) = \omega(t, e, \sigma) = \sum_{i=1}^N \left\{ e_{qi}e_{ni} - a\psi_i^{(1)}(p)e_{pi} + b\psi_i^{(2)}(p)e_{pi} + \right. \\ \left. + \sigma e_{pi} \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(p_j - p_i) - d\psi_i^{(2)}(p)e_{qi} - e_{qi}^2 - \frac{1}{s}e_{ni}^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Рассмотрим четвертое слагаемое в правой части (5.6). Оно может быть переписано в следующем виде:

$$\sigma \sum_{i=1}^N e_{pi} \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(p_j - p_i) = -\sigma \left(\sum_{i=1}^N d^i(G)p_i^2 - \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}p_ip_j \right) = -\sigma p^T L(G)p.$$

Тогда (5.6) можно переписать как

$$\begin{aligned} \dot{Q}(e) = \omega(t, e, \sigma) = \sum_{i=1}^N \left\{ e_{qi}e_{ni} - a\psi_i^{(1)}(p)e_{pi} + b\psi_i^{(2)}(p)e_{pi} + \right. \\ \left. - d\psi_i^{(2)}(p)e_{qi} - e_{qi}^2 - \frac{1}{s}e_{ni}^2 \right\} - \sigma p^T L(G)p. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Далее найдем скоростной градиент (5.7) по параметру σ . Получим

$$\nabla_{\sigma}\omega(t, e, \sigma) = -p^T L(G)p.$$

Наконец, получим адаптивный алгоритм настройки силы связи:

$$\dot{\sigma} = -\gamma \nabla_{\sigma}\omega(t, e, \sigma), \quad (5.8)$$

где $\gamma > 0$ есть коэффициент усиления алгоритма. Предполагая выполнимость теорем о сходимости скоростного градиента [7], сформулируем следующую теорему.

Теорема 5.1. Пусть граф связей G является неориентированным и связным. Тогда сеть (5.3) стабилизируема в начале координат с помощью алгоритма (5.8), т.е. полученный алгоритм (5.8) обеспечивает достижение цели управления (5.4) для любых $e_1(0), \dots, e_N(0)$ и $\sigma(0)$.

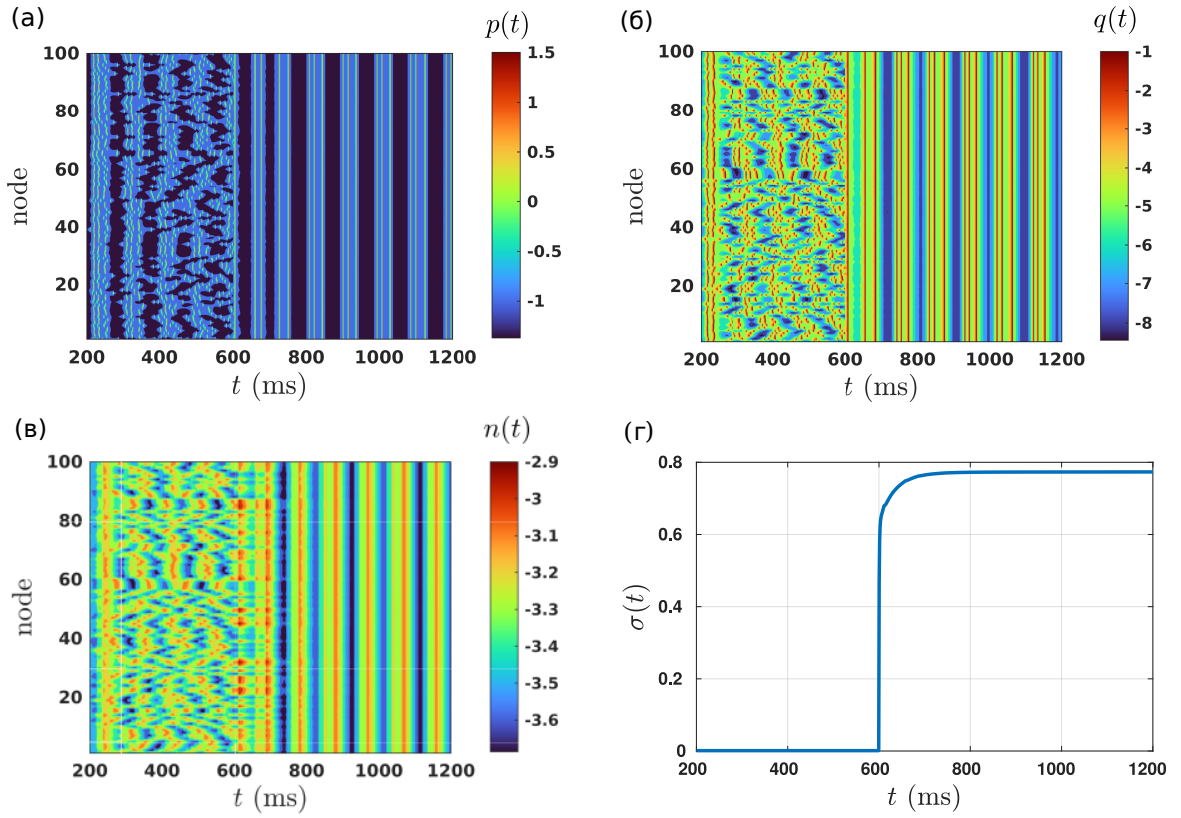


Рис. 5.1: Компьютерное моделирование сети Хиндмарша-Роуза (100 узлов). (а), (б), (в): динамика переменных p_i , q_i и n_i , $i \in \mathcal{I}$, соответственно; (г) динамика силы связи σ . Параметры сети: $N = 100$; $\gamma = 0.01$; $a = 1$; $b = 3$; $c = 1$; $d = 5$; $r = 0.01$; $s = 4$; $I = -2.25$. Начальные условия: $\sigma(0) = 0.001$; $p_i(0)$, $q_i(0)$ и $n_i(0)$, $i \in \mathcal{I}$ равномерно распределены на интервалах $[-2, 2]$, $[-10, -1]$ и $[-0.25, 0.25]$, соответственно.

Учитывая предельную ограниченность сети (5.1), получаем, что при выполнении теоремы 5.1 мы обеспечили синхронизацию между нейронами в сети (5.1). Данный результат был опубликован в работах [11, 67].

5.3 Численное моделирование

Для подтверждения теоретических результатов, полученных в предыдущем разделе, было проведено компьютерное моделирование сети из 100 нейронов Хиндмарша-Роуза. Значения параметров и начальных условий приведены в описании к рисункам. Матрица смежности графа связей G выбрана симметрической и разреженной матрицей с плотностью 0.2, т.е. предполагается, что она содержит около $0.2n^2$ ненулевых элементов. Эти ненулевые элементы равны единице, поскольку граф неориентированный и не имеет весов. Алгебраическая связность $\lambda_2(L)$ графа G приблизительно

равна 9.08, что говорит о связности графа.

Результаты моделирования представлены на рисунке 5.1. Вначале рассмотрим временной интервал от 200 до 600 миллисекунд. Этот интервал соответствует периоду, когда адаптивный алгоритм (5.8) не активирован, т.е. сила связи σ постоянна и равна 0.001 на данном периоде — см. рис. 5.1(г). Из рисунка 5.1(а, б, в) видно, что имеются некоторые сдвиги между временными рядами узлов сети на данном временном интервале, что свидетельствует об отсутствии синхронизации в моделируемой сети.

Теперь рассмотрим интервал от 600 до 1200 миллисекунд. Этот интервал соответствует настройке силы связи σ при помощи предложенного адаптивного алгоритма. На рисунке 5.1(г) показано, что сила связи резко возрастает и достигает значения около 0.8. Увеличение значения σ приводит к исчезновению временных сдвигов между временными рядами узлов сети — см. рис. 5.1(а,б,в), т.е. сеть переходит в синхронный режим функционирования. Таким образом мы можем заключить, что результаты компьютерного моделирования полностью согласуются с полученными теоретическими результатами.

6 Управляемая синхронизация в регулярной сети моделей Хиндмарша-Роуза с запаздывающими связями

6.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую сеть:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j(t-h)) + Bu_i, \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\} \quad (6.1)$$

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $x_i = \text{col}\{p_i, q_i, n_i\}$; $B = \text{col}\{1, 0, 0\}$; $h > 0$ обозначает постоянную задержку в связях; u_i есть искомое управление i -го нейрона; $\alpha_{i,j}$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$

элементы матрицы смежности $A(G)$ графа связей G ; $\varphi(\cdot)$ обозначает функцию связи в сети. Здесь и далее будем считать, что выполнены следующие предположения относительно рассматриваемой сети:

- G есть связный и неориентированный граф;
- G является регулярным графом, т.е. $d_i(G) = d_j(G)$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$;
- решения (6.1) являются предельно ограниченными.

Построим уравнение средней динамики для сети (6.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= f_s(x_s, \psi(p)) + d(G)\varphi(x_s, x_s(t-h)), \\ f_s(x_s, \psi(p)) &= \begin{bmatrix} q_s - a\psi_s^{(1)}(p) + b\psi_s^{(2)}(p) - n_s + I \\ -d\psi_s^{(2)}(p) - q_s \\ r(sp_s - n_s) \end{bmatrix}, \\ p_s &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i, \quad q_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i, \quad n_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i, \\ \psi_s^{(1)}(p) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^3, \quad \psi_s^{(2)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^2, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где $x_s = \text{col}\{p_s, q_s, n_s\}$, $p = \text{col}\{p_1, \dots, p_N\}$, $\psi_s(p) = \text{col}\{\psi_s^{(1)}(p), \psi_s^{(2)}(p)\}$; $d(G)$ есть степень вершин G .

Далее введем ошибки синхронизации

$$e_{pi} = p_i - p_s, \quad e_{qi} = q_i - q_s, \quad e_{ni} = n_i - n_s.$$

Тогда сеть ошибок синхронизации может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= f(e_i, \psi_i(p)) + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(e_i, e_j(t-h)) + Bu_i, \\ f(x_i) &= \begin{bmatrix} e_{qi} - a\psi_i^{(1)}(p) + b\psi_i^{(2)}(p) - e_{ni} \\ -d\psi_i^{(2)}(p) - e_{qi} \\ r(se_{pi} - e_{ni}) \end{bmatrix}, \\ \psi_i^{(1)}(p) &= p_i^3 - \psi_s^{(1)}(p), \quad \psi_i^{(2)}(p) = p_i^2 - \psi_s^{(2)}(p), \quad \forall i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где $e_i = \text{col} \{e_{pi}, e_{qi}, e_{ni}\}$, $\psi_i(p) = \text{col} \{\psi_i^{(1)}(p), \psi_i^{(2)}(p)\}$.

Таким образом, задача синхронизации для сети (6.1) может быть переформулирована в задачу стабилизации сети (6.3) начала координат.

6.2 Основной результат

Для стабилизации (6.3) рассмотрим следующий функционал Ляпунова-Красовского:

$$V(t, z) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} e_i^T P e_i + \theta_0 \int_{t-h}^t e_{pi}^2 ds \right), \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1/rs \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

где $z = \text{col} \{e_1, \dots, e_N\}$; μ есть положительная постоянная, которая будет определена далее. Теперь найдем производную функционала Ляпунова-Красовского в силу уравнений (6.3) и оценим сверху полученную производную:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, z) &= \sum_{i=1}^N \left[e_{pi} e_{qi} - a e_{pi} \psi_i^{(1)}(p) + b e_{pi} \psi_i^{(2)}(p) - d(G) e_{pi}^2 + \right. \\ &\quad \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} e_{pi} e_{pj}(t-h) + (u_i - u_s) e_{pi} - \mu d e_{qi} \psi_i^{(2)}(p) - \mu e_{qi}^2 \\ &\quad \left. - \frac{1}{s} e_{ni}^2 + \theta_0 (e_{pi}^2(t) - e_{pi}^2(t-h)) \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left[|e_{pi} e_{qi}| - a e_{pi} (p_i^3 - p_s^3) + b |e_{pi}| |p_i^2 - \kappa p_s^2| - d(G) e_{pi}^2 \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} |e_{pi} e_{pj}(t-h)| + (u_i - u_s) e_{pi} + \mu d |e_{qi}| |p_i^2 - \kappa p_s^2| \\ &\quad \left. - \mu e_{qi}^2 - \frac{1}{s} e_{ni}^2 + \theta_0 (e_{pi}^2(t) - e_{pi}^2(t-h)) \right], \quad (6.5) \end{aligned}$$

где γ_0 некоторый постоянный параметр, определяемый ниже. Поскольку

$$\sum_{i=1}^N e_{pi} = \sum_{i=1}^N e_{qi} = \sum_{i=1}^N e_{ni} = 0,$$

то приведенные выше оценки верны.

Далее рассмотрим уравнение

$$p_i^3 - p_s^3 = (p_i - p_s)(p_i^2 + p_i p_s + p_s^2),$$

где $p_i^2 + p_i p_s + p_s^2$ положительно определенная функция. Найдем $\beta > 0$, для которой имеет место неравенство

$$p_i^2 + p_i p_s + p_s^2 \geq \beta(p_i - p_s)^2. \quad (6.6)$$

Перепишем данное неравенство в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} p_i & p_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \beta & 1/2 + \beta \\ 1/2 + \beta & 1 - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_s \end{bmatrix} \geq 0.$$

Очевидно, что неравенство (6.6) выполнено тогда и только тогда, когда соответствующая матрица является положительно полуопределенной. Используя критерий Сильвестра мы получаем, что для выполнения неравенства величина β должна принадлежать интервалу $(0, 1/4]$.

Мы также рассмотрим уравнение $p_i^2 - \kappa p_s^2$. Найдем $\gamma > 0$, для которого выполнено

$$p_i^2 - \kappa p_s^2 < \gamma(p_i - p_s)^2, \quad \forall p_i \neq p_s. \quad (6.7)$$

Это неравенство можно представить также в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} p_i & p_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma - 1 & -\gamma \\ -\gamma & \gamma + \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_s \end{bmatrix} > 0, \quad \forall p_i \neq p_s.$$

Неравенство (6.7) выполняется тогда и только тогда, когда соответствующая матрица положительно определена. Используя критерий Сильвестра мы получаем, что $\gamma > 1$ и $\kappa > \gamma/(\gamma - 1)$.

Учитывая (6.5), (6.6), (6.7) и выбирая $\beta = 1/4$, получаем следующую

оценку сверху:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, z) \leq \sum_{i=1}^N & \left[|e_{pi}e_{qi}| - \frac{a}{4}e_{pi}^4 + \gamma b|e_{pi}|e_{pi}^2 - d(G)e_{pi}^2 + \right. \\ & \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}|e_{pi}e_{pj}(t-h)| + (u_i - u_s)e_{pi} + \gamma \mu d e_{pi}^2 |e_{qi}| - \mu e_{qi}^2 \\ & \left. - \frac{1}{s}e_{ni}^2 + \theta_0(e_{pi}^2(t) - e_{pi}^2(t-h)) \right]. \quad (6.8) \end{aligned}$$

После чего, применим $2|uv| \leq \nu u^2 + v^2/\nu$ ($\nu > 0$) к перекрестным слагаемым в (6.8):

$$\begin{aligned} |e_{pi}e_{qi}| & \leq \frac{\nu_1}{2}e_{qi}^2 + \frac{1}{2\nu_1}e_{pi}^2, \\ |e_{pi}|e_{pi}^2 & \leq \frac{\nu_2}{2}e_{pi}^4 + \frac{1}{2\nu_2}e_{pi}^2, \\ e_{pi}^2|e_{qi}| & \leq \frac{\nu_3}{2}e_{qi}^2 + \frac{1}{2\nu_3}e_{pi}^4, \\ |e_{pi}e_{pj}(t-h)| & \leq \frac{\nu_4}{2}e_{pj}^2(t-h) + \frac{1}{2\nu_4}e_{pi}^2, \quad \forall i, j \in \mathcal{I}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Напомним, что топология сети представлена неориентированным графом, т.е. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$. Кроме того, когда применяются неравенства (6.9) к правой части (6.8), то соответствующая оценка $\dot{V}(t, z)$ не содержит перекрестных слагаемых. Основываясь на этом, мы получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, z) \leq \sum_{i=1}^N & \left[\left(-\frac{a}{4} + \frac{\gamma b \nu_2}{2} + \frac{\gamma \mu d}{2\nu_3} \right) e_{pi}^4 \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{\gamma b}{\nu_2} \right) e_{pi}^2 + \left(-\mu + \frac{\nu_1}{2} + \frac{\gamma \mu d \nu_3}{2} \right) e_{qi}^2 \\ & - \frac{1}{s}e_{ni}^2 + \left(\theta_0 + \frac{d(G)\nu_4}{2} - d(G) \right) e_{pi}^2 \\ & \left. + \left(\frac{d(G)}{2\nu_4} - \theta_0 \right) e_{pi}^2 + (u_i - u_s)e_{pi} \right]. \quad (6.10) \end{aligned}$$

Если выбрать $\nu_4 = 1$ и $\theta_0 = d(G)/2$, то (6.10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, z) \leq \sum_{i=1}^N \left[\left(-\frac{a}{4} + \frac{\gamma b \nu_2}{2} + \frac{\gamma \mu d}{2 \nu_3} \right) e_{pi}^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{\gamma b}{\nu_2} \right) e_{pi}^2 \right. \\ \left. + \left(-\mu + \frac{\nu_1}{2} + \frac{\gamma \mu d \nu_3}{2} \right) e_{qi}^2 - \frac{1}{s} e_{ni}^2 + (u_i - u_s) e_{pi} \right]. \quad (6.11) \end{aligned}$$

Далее мы используем результат, полученный в [60]. Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} -\mu + \frac{\nu_1}{2} + \frac{\gamma d \mu \nu_3}{2} &< 0, \\ -\frac{a}{4} + \frac{\gamma b \nu_2}{2} + \frac{\gamma d \mu}{2 \nu_3} &< 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{\gamma b}{\nu_2} \right) &\rightarrow \min, \end{aligned}$$

которая может быть переписана как

$$\begin{aligned} \nu_1 &< \mu(2 - \gamma d \nu_3), \\ \nu_2 &< \frac{a \nu_3 - 2 \gamma d \mu}{2 \gamma b \nu_3}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{\gamma b}{\nu_2} \right) &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Пусть $\nu_2 = \gamma b \nu_1$, тогда ν_1 должен принимать максимальное значения для достижения минимума целевой функции. Таким образом, получаем

$$\frac{a \nu_3 - 2 d \gamma \mu}{2 b^2 \gamma^2 \nu_3} = \mu(2 - d \gamma \nu_3).$$

Выражая μ из предыдущей формулы и подставляя полученное в правую или левую часть, получим

$$\frac{-a d \gamma \nu_3^2 + 2 a \nu_3}{-2 d b^2 \gamma^3 \nu_3^2 + 4 b^2 \gamma^2 \nu_3 + 2 d \gamma} \rightarrow \max. \quad (6.12)$$

Теперь найдем оптимальное значение $\nu_3 > 0$, которое является локальным

минимумом целевой функции (6.12):

$$\nu_3 = \frac{1}{d\gamma}.$$

Откуда получаем, что μ и ν_1 также могут быть найдены из

$$\mu = \frac{a}{2\gamma^2(b^2 + d^2)}, \quad \nu_1 < \frac{a}{2\gamma^2(b^2 + d^2)}. \quad (6.13)$$

Учитывая, что $\gamma > 1$ и учитывая (6.13), мы получим следующую оценку сверху:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, z) \leq \sum_{i=1}^N \left[-\frac{(\gamma-1)ab^2}{4\gamma(b^2 + d^2)} e_{pi}^4 + \frac{2\gamma^3(b^2 + d^2)}{a} e_{pi}^2 \right. \\ \left. - \frac{a(\gamma-1)}{4\gamma^3(b^2 + d^2)} e_{qi}^2 - \frac{1}{s} e_{ni}^2 + (u_i - \bar{u}) e_{pi} \right]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Наконец, введем управления для компенсации положительного коэффициента при e_{pi}^2 в (6.14). Управление будет иметь следующий вид:

$$u_i = -\frac{2\gamma^4(b^2 + d^2)}{a} e_{pi}, \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (6.15)$$

Очевидно, что $u_s = 0$. Подставляя (6.15) в (6.14), мы получим

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, z) \leq \sum_{i=1}^N \left[-\frac{(\gamma-1)ab^2}{4\gamma(b^2 + d^2)} e_{pi}^4 - \frac{a(\gamma-1)}{4\gamma^3(b^2 + d^2)} e_{qi}^2 \right. \\ \left. - \frac{2\gamma^3(\gamma-1)(b^2 + d^2)}{a} e_{pi}^2 - \frac{1}{s} e_{ni}^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Теперь мы можем заключить, что правая часть (6.16) строго отрицательно определена, что приводит к асимптотической устойчивости (6.3) в начале координат. Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 6.1. Пусть регулярный граф G ориентированный и связный, тогда управление (6.15) обеспечивает асимптотическую устойчивость (6.3) начала координат.

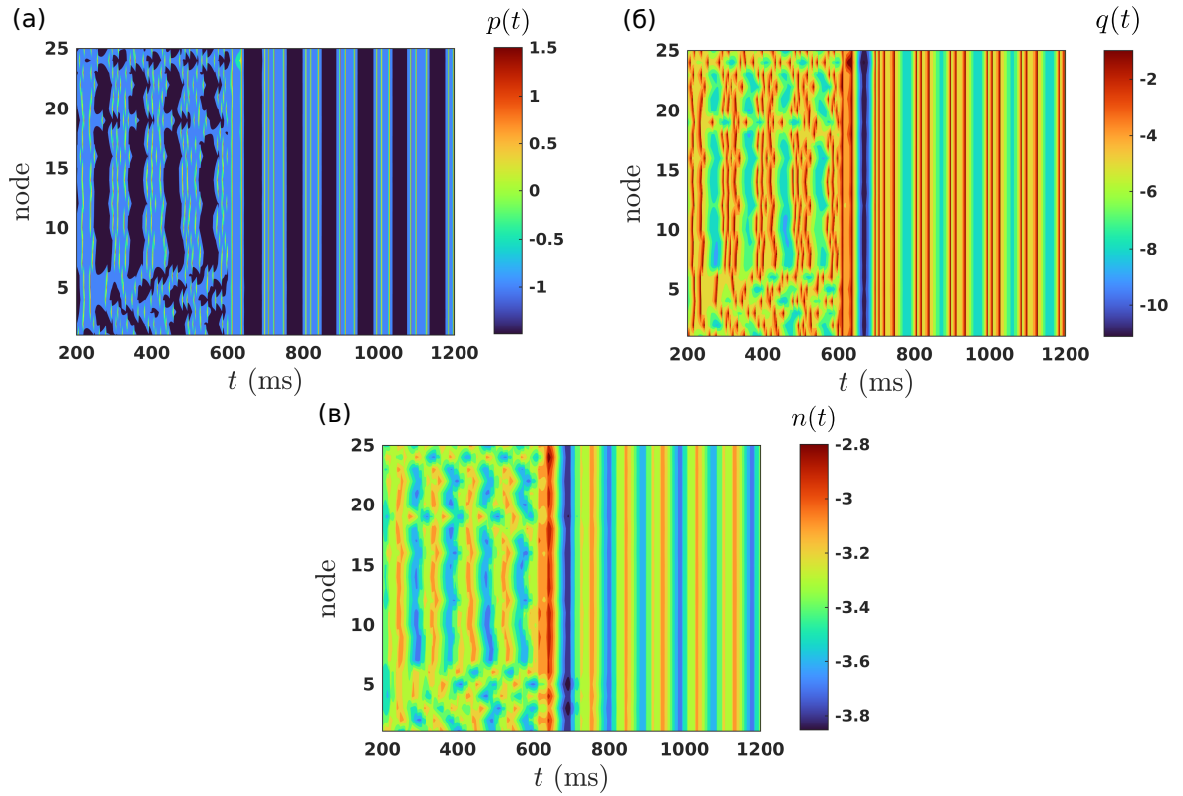


Рис. 6.1: Компьютерное моделирование сети Хиндмарша-Роуза с запаздывающими связями (25 узлов). (а), (б), (в): динамика переменных p_i , q_i и n_i , $i \in \mathcal{I}$, соответственно. Параметры сети: $N = 25$; $\gamma = 1.01$; $a = 1$; $b = 3$; $c = 1$; $d = 5$; $r = 0.01$; $s = 4$; $I = -2.25$; $h = 10$. Начальные условия: $p_i(0)$, $q_i(0)$ и $n_i(0)$, $i \in \mathcal{I}$ равномерно распределены на интервалах $[-2, 2]$, $[-10, -1]$ и $[-0.25, 0.25]$, соответственно.

Если совместно с сформулированной теоремой выполняется предположение об предельной ограниченности траекторий сети (6.1), то управление (6.15) также обеспечивает синхронизацию нейронов в сети (6.1). Данный результат опубликован в работе [69]

6.3 Численное моделирование

Для подтверждения теоретических результатов, полученных в предыдущем разделе, было проведено компьютерное моделирование сети из 25 нейронов Хиндмарша-Роуза. Матрица смежности графа связей G выбрана симметрической и разреженной матрицей с плотностью 0.2, т.е. предполагается, что она содержит около $0.2n^2$ ненулевых элементов. Эти ненулевые элементы равны единице, поскольку граф неориентированный и не имеет весов. Алгебраическая связность $\lambda_2(L)$ графа G приблизительно равна 9.08, что говорит о связности графа.

Результаты моделирования представлены на рисунке 6.1. Вначале рассмотрим временной интервал от 200 до 600 миллисекунд. Этот интервал соответствует периоду, когда закон управления не активирован. Из рисунка 5.1(а, б, в) видно, что имеются некоторые сдвиги между временными рядами узлов сети на данном временном интервале, что свидетельствует об отсутствии синхронизации в моделируемой сети.

Теперь рассмотрим интервал от 600 до 1200 миллисекунд. Этот интервал соответствует работе предлагаемого алгоритма управления, что приводит к исчезновению временных сдвигов между временными рядами узлов сети – см. рис. 5.1(а,б,в), т.е. сеть переходит в синхронный режим функционирования. Таким образом мы можем заключить, что результаты компьютерного моделирования полностью согласуются с полученными теоретическими результатами.

Заключение

В заключении перечислим основные результаты работы.

1. Доказана предельная ограниченность траекторий сети нейронов Хиндмарша-Роуза и получена оценка предельного множества (Теорема 2.1).
2. Синтезирован алгоритм управления и установлено условие синхронизации двух связанных нейронов Хиндмарша-Роуза при наличии возмущений, входящих в правые части уравнений (Теорема 3.1).
3. Синтезирован адаптивный алгоритм управления на основе метода скоростного градиента, обеспечивающий синхронизацию в сети между нейронами Хиндмарша-Роуза без предварительной информации о параметрах модели (Теорема 4.1).
4. На основе метода скоростного градиента получен адаптивный алгоритм настройки силы связи, позволяющий перевести сеть в синхронный режим функционирования (Теорема 5.1).
5. Синтезирован алгоритм управления, позволяющий синхронизировать нейроны в сети даже при наличии запаздывающих связей, т.е. связей, в которых присутствуют временные задержки (Теорема 6.1).

Список литературы

1. Андриевский Б. Р., Бобцов А. А., Фрадков А. Л. Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2018. 336 с.
2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. – М: Наука, 1967. 224 с.
3. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. – М.: Наука, 1981. 352 с.
4. Красовский, Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1959. 211 с.
5. Красовский, Н. Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, № 8. – С. 39–51.
6. Леонов Г. А. Теория управления. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. 233 с.
7. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000. 549 с.
8. Проблемы сетевого управления / Н. О. Амелина [и др.] / под ред. д. т. н., проф. А. Л. Фрадкова. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. 392 с.
9. Семенов Д. М. Управление синхронизацией двух связанных неидентичных систем Хиндмарш-Роуз. // Управление большими системами. – 2018. – № 75. – С. 30–49.
10. Семенов Д. М. Управляемая синхронизация двух связанных нейронных моделей Хиндмарш-Роуз при наличии возмущений // XVIII научная школа «Нелинейные волны–2018»: тезисы докладов молодых ученых. Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 2018. С. 168–170.

11. Семенов Д. М. Адаптивная синхронизация гетерогенной сети Хиндмарша-Роуз // XIX научная школа «Нелинейные волны–2020»: тезисы докладов молодых ученых. Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 2020. С. 226–227.
12. Тихонов А. Н., Васильева А. Б. Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. 232 с.
13. Фрадков А. Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. – СПб.: Наука, 2003. 208 с.
14. Фрадков А. Л. Схема скоростного градиента в задачах адаптации и управления // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 9. – С. 90–101.
15. Чеботарев П. Ю., Агаев Р. П. Согласование характеристик в много-агентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 3. – С. 136–151.
16. Эльсгольц, Л. Э., В. Норкин. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. 296 с.
17. Abbott L. F. Lapique’s introduction of the integrate-and-fire model neuron (1907) // Brain Research Bulletin. – 1999. – Vol. 50, Issue 5/6. – P. 303–304.
18. Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J. et al. Synchronization in complex networks // Physics Reports. – 2008. – Vol. 469, Issue 3. – P. 93–153.
19. Berner R., Yanchuk S. Synchronization in Networks With Heterogeneous Adaptation Rules and Applications to Distance-Dependent Synaptic Plasticity // Frontiers in Applied Mathematics and Statistics. – 2021. – Vol. 7. – P. 714978.
20. Buck J., Buck E. Mechanism of Rhythmic Synchronous Flashing of Fireflies: Fireflies of Southeast Asia may use anticipatory time measuring in synchronizing their flashing // Science. – 1968. – Vol. 159, Issue 3821. – P. 1319–1327
21. Castanedo-Guerra I. T., Steur E., Nijmeijer H. Synchronization of coupled Hindmarsh-Rose neurons: effects of an exogenous parameter // IFAC PapersOnLine. – 2016. – Vol. 49, Issue 14. – P. 84–89.

22. Chavez M., Hwang D. U., Amann A. et al. Synchronization is enhanced in weighted complex networks // Physical Review Letters. – 2005. – Vol. 94. – 218701.
23. Chkhenkeli S. A. Direct Deep-Brain Stimulation: First Steps Towards the Feedback Control of Seizures // Epilepsy as a Dynamic Disease / ed. by J. Milton, P. Jung. 2003. P. 249–261
24. Choe C. U., Dahms T., Hövel P., Schöll E. Controlling synchrony by delay coupling in networks: from inphase to splay and cluster states // Physical Review E. – 2010. – Vol. 81. – 025205(R).
25. Correia M. J. Neuronal plasticity: adaptation and readaptation to the environment of space // Brain research reviews. – 1998. – Vol. 28. – Issue 1-2. – P. 61–65.
26. Dhamala, M., Jirsa V. K., Ding M. Enhancement of neural synchrony by time delay // Physical Review Letters. – 2004. – Vol. 92. – 074104.
27. Fiedler M. Algebraic connectivity of graphs // Czechoslovak Mathematical Journal. – 1973. – Vol. 23. – P. 298–305.
28. Filatrella G., Pedersen N. F., Lobb C. J., Barbara P. Synchronization of underdamped Josephson-junction arrays // The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems. – 2003. – Vol. 34, Issue 1. – P. 3–8.
29. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophysical Journal. – 1961. – Vol. 1, Issue 6. – P. 445–466.
30. FitzHugh R. Mathematical models of excitation and propagation in nerve // Biological engineering / ed. by H. P. Schwan. – New York: McGraw-Hill Book Co., 1969. – P. 1–85.
31. Fradkov A. L., Pogromsky A. Yu. Speed gradient control of chaotic continuous-time systems // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. – 1996. – Vol. 43, Issue 11. – P. 907–913.

32. Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems // European Journal of Control. – 2014. – Vol. 20. – P. 271–283.
33. Fries. P. A mechanism for cognitive dynamics: neuronal communication through neuronal coherence // Trends in cognitive sciences. – 2005. – Vol. 9, Issue 10. – P. 474–480.
34. Fridman E. Introduction to time-delay systems: analysis and control. – Basel: Birkhäuser, 2014. 362 p.
35. Fukuda H., Nakamichi N., Hisatsune M. et al. Synchronization of plant circadian oscillators with a phase delay effect of the vein network // Physical Review Letters. – 2007. – Vol. 99. – 098102.
36. Gerstner W., Kistler W. M. Spiking Neuron Models: Single neurons, Populations, Plasticity. – Cambridge University Press, 2002.
37. Golomb D., Hansel D., Mato G. Mechanisms of synchrony of neural activity in large networks // Neuro-informatics and neural modeling, Handbook of biological physics / ed. by F. Moss, S. Gielen. – Amsterdam: Elsevier, 2001. – Vol. 4 – P. 887–968.
38. Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of Time-Delay Systems. – Birkhäuser Boston, MA, 2003.
39. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of the nerve impulse using two first-order differential equations // Nature. – 1982. – Vol. 296, Issue 5853. – P. 162–164.
40. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A Model of Neuronal Bursting Using Three Coupled First Order Differential Equations // Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences. – 1984. – Vol. 221, Issue 1222. – P. 87–102.
41. Hodgkin A. L., Huxley A. F. A Quantitative Description Of Membrane Current And Its Application To Conduction And Excitation In Nerve // The Journal of Physiology. – 1952. – Vol. 117, Issue 4. – P. 500–544.

42. Huang L., Wang Z., Wang Y., Zuo Y. Synchronization analysis of delayed complex networks via adaptive time-varying coupling strengths // *Physics Letters A*. – 2009. – Vol. 373. – P. 3952–3958.
43. Izhikevich E. M. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. – MIT press, 2007.
44. Khalil H. K. *Nonlinear Systems*. Third Edition. – Prentice Hall, 2002.
45. Kulminskiy D.D., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Hramov A.E. Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators // *Nonlinear Dynamics*. – 2019. – Vol. 98, Issue 1. – P. 735–748.
46. Kuramoto Y. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. – New York: Dover Publications, 2003. – 176 p.
47. Lehnert J., Hövel P., Selivanov A. A. et al. Controlling cluster synchronization by adapting the topology // *Physical Review E*. – 2014. – Vol. 90. – 042914.
48. Medvedeva T.M., Sysoeva M.V., Lüttjohann A. et al. Dynamical modeling of absence seizures by a complex network of neuronal oscillators // *Opera Medica et Physiologica*. – 2019. – Vol. 5, Issue S1. – P.2103-2116.
49. Miyano T., Tsutsui T. Data synchronization in a network of coupled phase oscillators // *Physical Review Letters*. – 2007. – Vol. 98. – 024102.
50. Morris C., Lecar H. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber // *Biophysical Journal*. – 1981. – Vol. 35, Issue 1. – P. 193–213.
51. Olfati-Saber R., Murray R. M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2004. – Vol. 49, Issue 9. – P. 1520–1533.
52. Osipov G. V., Kurths J., Zhou C. *Synchronization in oscillatory networks* – Berlin: Springer Verlag, 2007. – 370 p.

53. Panteley E., Loria A. Synchronization and Dynamic Consensus of Heterogeneous Networked Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2017. – Vol. 62, Issue 8. – P. 3758–3773.
54. Park S., Won M. J., Lee E. C. et al. Evaluation of 3D cognitive fatigue using heart–brain synchronization // International Journal of Psychophysiology. – 2015. – Vol. 97, Issue 2. – P. 120–130.
55. Peskin C. S. Mathematical aspects of heart physiology. – Courant Inst. Math, New York University, 1975.
56. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept In Nonlinear Sciences. – Cambridge University Press, 2003.
57. Plotnikov S. A., Fradkov A. L. On synchronization in heterogeneous FitzHugh-Nagumo networks // Chaos, Solitons & Fractals. – 2019. – Vol. 121. – P. 85–91.
58. Plotnikov S. A., Lehnert J., Fradkov A. L., and Schöll E. Synchronization in heterogeneous FitzHugh-Nagumo networks with hierarchical architecture // Physical Review E. – 2016. – Vol. 94, Issue 1. – 012203.
59. Plotnikov S. Controlled synchronization in two FitzHugh-Nagumo systems with slowly-varying delays // Cybernetics and Physics. – 2015. – Vol. 4, Issue 1. – P. 21–25.
60. Plotnikov S. Synchronization conditions in networks of Hindmarsh-Rose systems // Cybernetics and Physics. – 2021. Vol. 10, Issue 4. – P. 254–259.
61. Poeck K, Hacke W. Neurologie – 11th edition. – Heidelberg: Springer, 2001. 761 p.
62. Rabinovich M. I., Varona P., Selverston A. I., Abarbanel H. D. I. Dynamical principles in neuroscience // Reviews of Modern Physics. – 2006. – Vol. 78, Issue 4. – P. 1213–1265.
63. Ren. W., Beard R. W. Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control. – London : Springer London, 2008.

64. Rosenblum, M., Tass, P., Kurths, J., Volkmann, J., Schnitzler, A., and Freund, H.J. Detection of phase locking from noisy data: application to magnetoencephalography // *Chaos In Brain?*. – 2000. – P. 34–51.
65. Semenov D. M., Fradkov A. L. Adaptive synchronization of two coupled non-identical Hindmarsh-Rose systems by the Speed Gradient method // *IFAC PapersOnLine*. – 2018. – Vol. 51, Issue 33. – P. 12–14.
66. Semenov D. M., Fradkov A. L. Adaptive synchronization for the heterogeneous network of Hindmarsh-Rose neurons // *2020 European Control Conference (ECC)*. IEEE, 2020. P. 306–308.
67. Semenov D. M., Fradkov A. L. Adaptive control of synchronization for the heterogeneous Hindmarsh-Rose network // *IFAC-PapersOnLine*. – 2020. – Vol. 51, Issue 5. – P. 146–151.
68. Semenov D. M., Fradkov A. L. Adaptive synchronization in the complex heterogeneous networks of Hindmarsh–Rose neurons // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 2022. – Vol. 150. – 111170.
69. Semenov D. M., Plotnikov S. A., Fradkov A. L. Controlled synchronization in regular delay-coupled networks of Hindmarsh-Rose neurons // *2022 6th Scientific School Dynamics of Complex Networks and their Applications (DCNA)*. IEEE, 2022. P. 236–239.
70. Shilnikov A., Kolomiets M. Methods of the Qualitative Theory for the Hindmarsh-Rose Model: a Case Study - a Tutorial // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. – 2008. – Vol. 18, Issue 8. – P. 2141–2168.
71. Smetanin N., Volkova K., Zabodaev S., Lebedev M., Ossadtchi A. NFBLab — A Versatile Software for Neurofeedback and Brain-Computer Interface Research // *Frontiers in neuroinformatics*. – 2018. Vol. 12. – 100.
72. Smith H. M. Synchronous flashing of fireflies // *Science*. – 1935. – Vol. 82. – P. 151–152.
73. Steur E., Tyukin I., Nijmeijer H. Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2009. – Vol. 238, Issue 21. – P. 2119–2128.

74. Steur E., Michiels W., Huijberts H., Nijmeijer H. Networks of diffusively time-delay coupled systems: Conditions for synchronization and its relation to the network topology // *Physica D.* – 2014. Vol. 277. – P. 22–39.
75. Tass P. A. Phase resetting in medicine and biology: stochastic modelling and data analysis. – Berlin: Springer, 1999. – 329 p.
76. Oud W.T., Tyukin I. Sufficient conditions for synchronization in an ensemble of Hindmarsh and Rose neurons: passivity-based approach // 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems. 2004. P. 441–446
77. Strogatz S. H., Stewart I. Coupled oscillators and biological synchronization // *Scientific American.* – 1993. – Vol. 269, Issue 6. – P. 102–109.
78. Uhlhaas P. J., Pipa G., Lima B., Melloni, L., Neuenschwander, S., Nikolić, D., Singer, W. Neural synchrony in cortical networks: History, concept and current status // *Frontiers in Integrative Neuroscience.* 2009. Vol. 3. 17.
79. Vlasov V., Pikovsky A. Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables // *Physical Review E.* – 2013. – Vol. 88. – 022908.
80. Wiesenfeld K., Swift J. W. Averaged equations for Josephson junction series arrays // *Physical Review E.* – 1995. – Vol. 51, Issue 2. – P. 1020–1025.
81. Winfree A. T. Varieties of spiral wave behavior in excitable media // *Chaos.* – 1991. – Vol. 1. – P. 303–334.
82. Winfree A. T. The geometry of biological time. – 2nd edition. – Berlin: Springer, 2001. 803 p.