

## ОБОБЩЕНИЕ МДМ-МЕТОДА

**Аннотация:** Рассматриваемый в работе МДМ-метод изначально был придуман для решения следующей задачи: нахождение проекции начала координат на выпуклую оболочку конечного набора точек. Такая задача является составной частью ряда алгоритмов недифференцируемой оптимизации, в частности, поиск направления спуска. В работе представлено обобщение МДМ-метода, на случай, когда ищется проекция начала координат на множество, являющаяся суммой по Минковскому нескольких выпуклых оболочек. Особенность алгоритма состоит в том, что не требуется непосредственное вычисление множества, на которое производится проекция. Приводятся две вычислительные схемы и результаты вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** МДМ-метод, проекция точки, квадратичная задача

**1. Постановка задачи.** Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  заданы  $s \geq 2$  политопов вида

$$C_k = \text{conv}\{P_{k1}, P_{k2}, \dots, P_{kd_k}\}, \quad k \in 1:s,$$

где  $P_{kj} \in \mathbb{R}^n, d_k \geq 2$ ,  $\text{conv}$  – выпуклая оболочка точек. Введем выпуклое множество  $C$  равное сумме по Минковскому множеств  $C_k, k \in 1:s$ . Напомним, что под суммой по Минковскому двух множеств  $C_1$  и  $C_2$  понимается множество вида

$$C_1 + C_2 = \{p_1 + p_2 | p_1 \in C_1, p_2 \in C_2\}.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\frac{1}{2} \|v\|^2 \longrightarrow \min_{v \in C}. \quad (1)$$

Далее, для простоты изложения исследуем случай, когда все множества  $C_k$  являются отрезками вида  $\text{conv}\{P_{k1}, P_{k2}\}$ , т.е.  $d_k = 2$ ,  $k \in 1:s$ . Для каждого  $k \in 1:s$  по определению выпуклой оболочки, точка  $v_k$  из множества  $C_k$ , допускает представление

$$v_k = \lambda_{k1} P_{k1} + \lambda_{k2} P_{k2}, \\ \lambda_{k1} + \lambda_{k2} = 1, \quad \lambda_{k1} \geq 0, \lambda_{k2} \geq 0.$$

Введем  $(n \times 2s)$ -матрицу  $P$  вида  $(P_{11}, P_{12}, \dots, P_{k1}, P_{k2}, \dots, P_{s1}, P_{s2})$  и вектор  $\lambda = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{s1}, \lambda_{s2})^T \in \mathbb{R}^{2s}$ . Тогда для элемента  $v \in C$  справедливо представление

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_s = P\lambda.$$

Задачу (1) теперь можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \|v\|^2 \longrightarrow \min \quad (2)$$

$$v = P\lambda, \quad \lambda \in \Lambda,$$

где  $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^{2s} | \lambda_{k1} + \lambda_{k2} = 1, \lambda_{k1} \geq 0, \lambda_{k2} \geq 0, k \in 1:s\}$ .

**2. Основные утверждения.** Пусть  $v = P\lambda, \lambda \in \Lambda$ , допустимый план задачи (2). Обозначим

$$M_k^+(\lambda) = \{j \in 1:2 | \lambda_{kj} > 0\}, \quad k \in 1:s.$$

Введем частные и общую оценки плана:

$$\Delta_k(\lambda) = \max_{j \in M_k^+(\lambda)} \langle P_{kj}, v \rangle - \min\{\langle P_{k1}, v \rangle, \langle P_{k2}, v \rangle\}, \quad k \in 1:s,$$

$$\Delta(\lambda) = \max_{k \in 1:s} \Delta_k(\lambda).$$

Очевидно, что все частные оценки принимают неотрицательные значения, т.е.  $\Delta_k(\lambda) \geq 0, k \in 1:s$ , а следовательно  $\Delta(\lambda) \geq 0$  для всех  $\lambda \in \Lambda$ .

**Лемма.** Пусть  $v^* = P\lambda^*$  оптимальный план задачи (2). Для всех  $\lambda \in \Lambda$  и  $v = P\lambda$ , справедливы неравенства

$$\|v - v^*\|^2 \leq \sum_{k=1}^s \Delta_k(\lambda) \leq s \cdot \Delta(\lambda).$$

**Теорема.** Равенство  $\Delta(\lambda) = 0$  выполняется тогда и только тогда, когда вектор  $v = P\lambda$  является решением задачи (2).

**3. Вычислительные схемы.** Приведем две рабочие схемы (экстремального и циклического проектирования) предлагаемого метода.

#### Рабочая схема № 1 (экстремального проектирования)

Общий шаг. Пусть уже имеется  $\ell$ -е приближение  $v^\ell = P\lambda^\ell$ .

- I. Для каждого  $k \in 1:s$  находим индексы  $j'_k \in M_k^+(\lambda^\ell), j''_k \in 1:2$ , такие, что

$$\max_{j \in M_k^+(\lambda^\ell)} \langle P_{kj}, v^\ell \rangle = \langle P_{kj'_k}, v^\ell \rangle =: \bar{\delta}_k,$$

$$\min_{j \in 1:2} \langle P_{kj}, v^\ell \rangle = \langle P_{kj''_k}, v^\ell \rangle =: \underline{\delta}_k.$$

- II. Вычисляем  $\Delta(\lambda^\ell) = \max_{k \in 1:s} \Delta_k(\lambda^\ell)$ , где  $\Delta_k(\lambda^\ell) = \bar{\delta}_k - \underline{\delta}_k$ .

- III. Если  $\Delta(\lambda^\ell) = 0$ , то процесс закончен и  $v^\ell$  – решение задачи (2).

IV. Пусть при некотором  $\mathbf{k} \in 1:s$  имеем  $\Delta(\lambda^\ell) = \Delta_{\mathbf{k}}(\lambda^\ell) > 0$ .  
Вычисляем

$$t_\ell^* = \min \left\{ v_{\mathbf{k}j'_\mathbf{k}}^\ell, \frac{\Delta(\lambda^\ell)}{\|P_{\mathbf{k}j'_\mathbf{k}} - P_{\mathbf{k}j''_\mathbf{k}}\|^2} \right\}.$$

V. Получаем очередное приближение

$$v^{\ell+1} = v^\ell - t_\ell^* (P_{\mathbf{k}j'_\mathbf{k}} - P_{\mathbf{k}j''_\mathbf{k}}). \quad (3)$$

VI. Коэффициенты вектора  $\lambda^{\ell+1}$  пересчитываются по правилам:

$$\lambda_{ij}^{\ell+1} = \begin{cases} \lambda_{\mathbf{k}j'_\mathbf{k}}^\ell - t_\ell^*, & \text{если } i = \mathbf{k}, j = j'_\mathbf{k}, \\ \lambda_{\mathbf{k}j''_\mathbf{k}}^\ell + t_\ell^*, & \text{если } i = \mathbf{k}, j = j''_\mathbf{k}, \\ \lambda_{ij}^{\ell+1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Замечание 1.** Приведенная схема позволяет применить методы распараллеливания вычислений, а именно, имеется возможность независимого вычисления частных оценок плана  $\Delta_{\mathbf{k}}(\lambda)$ ,  $k \in 1:s$ .

**Замечание 2.** Очередное приближение вектора  $\lambda^{\ell+1}$  отличается от предыдущего  $\lambda^\ell$  всего двумя компонентами, а соответствующий ему вектор  $v^{\ell+1}$  целесообразно вычислять по формуле (3).

### Рабочая схема № 2 (циклического проектирования)

Общий шаг. Пусть уже имеется  $\ell$ -е приближение  $v^\ell = P\lambda^\ell$ .

I. Последовательно для каждого  $k \in 1:s$  производим:

- Находим индексы  $j'_k \in M_k^+(\lambda^\ell)$ ,  $j''_k \in 1:2$ , такие, что

$$\max_{j \in M_k^+(\lambda)} \langle P_{kj}, v^\ell \rangle = \langle P_{kj'_k}, v^\ell \rangle =: \bar{\delta}_k,$$

$$\min_{j \in 1:2} \langle P_{kj}, v^\ell \rangle = \langle P_{kj''_k}, v^\ell \rangle =: \underline{\delta}_k.$$

- Вычисляем  $\Delta_k(\lambda^\ell) = \bar{\delta}_k - \underline{\delta}_k$ .
- Если  $\Delta_k(\lambda^\ell) = 0$ , то переходим к очередному индексу  $k$ .
- Если  $\Delta_k(\lambda^\ell) > 0$ , то переопределяем

$$v^\ell := v^\ell - t^* (P_{kj'_k} - P_{kj''_k}),$$

$$\text{где } t^* = \min \left\{ v_{kj'_k}^\ell, \frac{\Delta_k(\lambda^\ell)}{\|P_{kj'_k} - P_{kj''_k}\|^2} \right\}.$$

- Коэффициента вектора  $\lambda^\ell$  пересчитываем по правилам:

$$\lambda_{kj}^\ell := \begin{cases} \lambda_{\mathbf{k}kj'_k}^\ell - t_\ell^* , & \text{если } j = j'_k , \\ \lambda_{\mathbf{k}j''_k}^\ell + t_\ell^* , & \text{если } j = j''_k , \\ \lambda_{kj}^\ell , & \text{иначе.} \end{cases}$$

II. Вычисляем  $\Delta(\lambda^\ell) = \max_{k \in 1:s} \Delta_k(\lambda^\ell)$ .

III. Если  $\Delta(\lambda^\ell) = 0$ , то процесс закончен и  $v^\ell$  – решение задачи (2).

IV. Если  $\Delta(\lambda^\ell) > 0$ , то полагаем  $v^{\ell+1} = v^\ell$ ,  $\lambda^{\ell+1} = \lambda^\ell$ .

**Замечание 3.** Для рабочей схемы № 2 также справедливо замечание 2.

**Замечание 4.** Окончание вычислений в рабочей схеме № 2 можно оптимизировать. Действительно, достаточно, чтобы  $s$  раз подряд обращалась в ноль частные оценки плана  $\Delta_k$ , т. е. либо  $\Delta_j(\lambda^\ell) = 0$  при всех  $j = 1:s$ , а значит  $v^\ell$  решение задачи (2); либо найдется такой индекс  $j \in 2:s$ , при котором

$$\begin{aligned} \Delta_k(\lambda^\ell) &> 0 \quad \text{при } k = j - 1, \\ \Delta_k(\lambda^\ell) &= 0 \quad \text{при } k = j:s, \\ \Delta_k(\lambda^{\ell+1}) &= 0 \quad \text{при } k = 1:(j - 1), \end{aligned}$$

а тогда  $v^{\ell+1} = v^\ell$  – искомое решение задачи (2).

**Замечание 5.** В рабочей схемы № 2 последовательность вычислений частных оценок  $\Delta_k$  можно произвольно изменять.

**Замечание 6.** Название обеих схем (экстремального и циклического проектирования) взято по аналогии из названий конструкций фейеровских отображений [5].

Отдельно стоит отметить «гибкость» представленных алгоритмов, а именно, что обе рабочие схемы без существенных доработок функционируют при динамическом изменении как количества множеств  $S_k$ , так и количества элементов в их составе, т. е. при изменениях  $s$  и  $d_k$ .

**4. Вычислительные эксперименты.** В связи с тем, что правила останова обеих схем различаются, то для корректного их сравнения поступим следующим образом. Пусть нам известно «эталонное» решение задачи (2), которое было получено, например, методами квадратичного программирования. Тогда, в процессе вычислений, будем замерять затрачиваемое время каждой схемой для сходимости к определенной окрестности решения.

В таблице приведены результаты численного эксперимента при  $n$  равном 10, 100, 500 и  $s$  равном 100, 500, 1000 и 1500. Эксперименты проводились в среде MATLAB, версия R2022b.

Табл. Отношение медианного значения времени решения задачи схемой № 1 к схеме № 2

| $n \backslash s$ | 100 | 500 | 1000 | 1500 |
|------------------|-----|-----|------|------|
| 10               | 4,7 | 8,2 | 10,6 | 11,1 |
| 100              | 5,6 | 8,7 | 9,1  | 10,7 |
| 500              | 1,5 | 1,7 | 1,8  | 1,9  |

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы. Вторая схема (циклического проектирования) более предпочтительна (в разы быстрее сходится) при увеличении количества слагаемых  $s$ , но при фиксированной размерности  $n$ . Однако, указанное превосходство сокращается с увеличением размерности задачи. Также следует не забывать, что для первой схемы (экстремального проектирования) возможно существенное ускорение при использовании технологий распараллеливания (см. замечание 1), которые не применялись в данных вычислениях.

Результаты исследований, представленные в п. 4, получены за счет гранта Российского научного фонда № 23-41-00060, <https://rscf.ru/project/23-41-00060/>, в Институте проблем машиноведения Российской академии наук.

## Список литературы

1. Митчелл Б. Ф., Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Нахождение ближайшей к началу координат точки многогранника // Вестник Ленинградского университета. 1971. Т. 19. С. 38-45.
2. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. МДМ-метод для решения общей квадратичной задачи математической диагностики // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 3. С. 516-529.
3. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. МДМ-метод для решения общей квадратичной задачи математической диагностики // Семинар «O&ML». Избранные доклады. 1 июня 2022 г. (дата обращения: 21.11.2025). <http://oml.cmlaboratory.com/rep22.shtml#0601>
4. Малоземов В. Н. МДМ-методу — 50 лет // Семинар «CNSA&NDO». Избранные доклады. 10 ноября 2021 г. (дата обращения: 21.11.2025). <http://cnsa.cmlaboratory.com/rep21.shtml#1110>

5. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 200 с.



**Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Кубанский государственный университет»**

**Факультет математики и компьютерных наук**

## **ПРОГРАММА**

**ВСЕРОССИЙСКОЙ  
НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
«Математика и современность: проблемы, модели, решения»**

**Адрес проведения конференции:  
г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149,  
Кубанский государственный университет**

**Пленарное заседание:  
2 декабря 2025 года с 15:45 до 18:00,  
аудитория 424А**

**Приветственное слово  
декана факультета МКН Грушевского С. П.**

**Регламент выступлений: до 20 минут**

| <b>Тема доклада</b>                                                                                                                                                                    | <b>Авторы</b>                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| XXI век, квантовые компьютеры                                                                                                                                                          | Рожков Александр Викторович,<br>Гумбатова Севиндж Физули-Кызы                                                                                                             |
| От автоматизации к<br>цифровизации образования:<br>синонимия понятий                                                                                                                   | Бочаров Александр Васильевич,<br>Шелехова Людмила Валерьевна,<br>Бочарова-Лескина Анна<br>Леонидовна                                                                      |
| О двух новых алгоритмах<br>решения системы линейных<br>равенств и неравенств,<br>основанных на ускоренном<br>фейеровском процессе                                                      | Ерохин Владимир Иванович,<br>Тамасян Григорий Шаликович                                                                                                                   |
| Определение упругих свойств<br>полимеров и обратное<br>проектирование структур и<br>метаматериалов из них                                                                              | Голуб Михаил Владимирович,<br>Канищев Кирилл Константинович,<br>Арсенов М.А.,<br>Еремин Артем Александрович<br>Дорошенко Ольга Валерьевна,<br>Ханазарян Артур Дереникович |
| Компьютерные модели на основе<br>полуаналитического<br>интегрального подхода в задачах<br>мониторинга состояния<br>тонкостенных инженерных<br>конструкций бегущими<br>упругими волнами | Глушков Евгений Викторович,<br>Глушкова Наталья Вилениновна,<br>Еремин Артем Александрович                                                                                |
| Математическое моделирование<br>основных энергетических<br>процессов внутри клеток<br>эукариотов                                                                                       | Бунякин Алексей Вадимович                                                                                                                                                 |
|                                                                                                                                                                                        | Рядчиков Игорь Викторович                                                                                                                                                 |



## Секционное заседание

3 декабря 2025 года с 15:45 до 18:00,  
аудитория 302Н

Регламент выступлений: 7-10 минут

| Тема доклада                                                                                                                                                    | Авторы                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| Машинное обучение и большие данные на защите информации в робототехнике                                                                                         | Усатиков Сергей Васильевич                                                               |
| Обобщение МДМ-метода                                                                                                                                            | Тамасян Григорий Шаликович                                                               |
| Численные методы в оценке образования дополнительных зон открытых состояний в гене <i>ATXN2</i>                                                                 | Леонтьева Ольга Александровна,<br>Дроботенко Михаил Иванович,<br>Джимак Степан Сергеевич |
| Оценка влияния изотопного состава среды на физические свойства макромолекул методами математического моделирования                                              | Лясота Оксана Михайловна,<br>Дроботенко Михаил Иванович,<br>Джимак Степан Сергеевич      |
| От диагностики знаний к методическому проектированию: модель комплексных контрольно-измерительных материалов для курса «Теория и методика обучения математике»  | Вербичева Елена Александровна,<br>Торопова Алина Андреевна                               |
| Моделирование возбуждения упругих волн и управления ими с помощью системы замкнутых поверхностных электродов в многослойных пьезоэлектрических преобразователях | Фоменко Сергей Иванович                                                                  |
| Генетический алгоритм оптимизации параметров пьезоэлектрических метапластин для обеспечения запрещённых зон в заданных частотных диапазонах                     | Усов Павел Евгеньевич,<br>Голуб Михаил Владимирович,<br>Фоменко Сергей Иванович          |

К определению качества  
срастания привоя и подвоя  
винограда после стратификации  
с помощью упругих волн

Канищев Кирилл Константинович,  
Голуб Михаил Владимирович,  
Алейникова Галина Юрьевна,  
Ханазарян Артур Дереникович,  
Еремин Артем Александрович,  
Фоменко Сергей Иванович