

На правах рукописи

Короленко Владимир Алексеевич

**Исследование масштабных эффектов в задачах с концентрацией
напряжений на основе моделей градиентной теории упругости**

Специальность 1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2024

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: **Соляев Юрий Олегович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт прикладной механики Российской академии наук» (ИПРИМ РАН) и, по совместительству, профессор кафедры 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» Аэрокосмического института федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

Официальные оппоненты: **Никабадзе Михаил Ушангиевич**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры механики композитов Механико-математического факультета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (МГУ им. М.В. Ломоносова) и, по совместительству, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института механики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Нестеров Сергей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Южного математического института – филиала Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук» (ЮМИ ВНЦ РАН)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем машиноведения Российской Академии наук» (ИПМаш РАН)

Защита диссертации состоится 05 июня 2024 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=179334

Автореферат разослан «___» _____ 2024 г

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.327.07

Сердюк Д. О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Исследование несущей способности тел с концентраторами напряжений является одной из наиболее актуальных проблем современной механики деформируемого твердого тела. Градиентные теории упругости позволяют учитывать масштабные эффекты, возникающие в окрестности малоразмерных концентраторов, и позволяют регуляризовать классические сингулярные решения линейной теории упругости. Повышенный порядок уравнений и наличие дополнительных материальных констант усложняет решение и требует учета дополнительных граничных условий в градиентной теории упругости. Для практического применения градиентных теорий требуется разработка достоверных методов идентификации дополнительных материальных констант, которые можно реализовать на основе анализа масштабных эффектов, возникающих в испытаниях образцов с концентраторами напряжений. Применение аналитических решений является удобным подходом для быстрого анализа и обработки результатов экспериментальных данных, а также необходимым этапом при тестировании более универсальных численных методов.

Цели и задачи

Целью диссертации является развитие аналитических методов построения решений в рамках градиентной теории упругости (ГТУ) для уточненной оценки концентрации напряжений вблизи отверстий, включений и зон приложения сосредоточенных нагрузок, а также разработка методов идентификации масштабных параметров ГТУ на основе испытания образцов, содержащих отверстия различного диаметра.

Задачи диссертации:

1. Развитие аналитических подходов к построению решений задач ГТУ, в том числе, метода представления решения в форме Папковича-Нейбера.
2. Построение аналитических и численных решений в рамках упрощенной ГТУ для плоских задач с концентраторами напряжений: задачи Кирша и задачи о трещине. Применение полученного решения для идентификации дополнительных масштабных параметров ГТУ на основе испытания образцов с малоразмерными отверстиями с использованием метода корреляции цифровых изображений (КЦИ).
3. Построение трехмерных решений ГТУ для задачи о сферическом включении и задачи о сфере, нагруженной нагрузкой, распределенной вдоль линии экватора.

4. Анализ возможности получения регулярных решений и анализ размерных эффектов в упрощенных моделях ГТУ для задач с концентраторами напряжений и с сосредоточенными нагрузками.

Научная новизна

Все включенные в диссертацию результаты являются новыми. Предложены новые аналитические методы построения решений в упрощённой теории Айфантиса. Построены новые масштабозависимые решения для задачи Кирша и задачи о сферическом включении. Проведен анализ возможности получения регулярных решений и анализ размерных эффектов в упрощенной модели ГТУ для задач с концентраторами напряжений и с сосредоточенными нагрузками. Впервые построено решение ГТУ для случая действия сосредоточенной нагрузки в ограниченной области на примере задачи о сфере, нагруженной нагрузкой, распределенной вдоль экватора. Впервые показано, что общее решение в форме Папковича-Нейбера позволяет восстановить известные асимптотические решения ГТУ для трещин. Проведено исследование особенностей концентрации напряжений и деформаций вблизи малоразмерных концентраторов на основе аналитических и численных моделей градиентной теории упругости и выполнена их валидация на основе экспериментальных данных, получаемых с использованием метода корреляции цифровых изображений в испытаниях образцов с малоразмерными отверстиями.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы определяется построенными аналитическими решениями, которые могут быть использованы, как для тестирования прикладных моделей (численных решателей), так и для упрощенной и быстрой обработки экспериментальных данных. Практическая значимость работы определяется возможностью описывать масштабные эффекты, возникающие при уменьшении характерного размера концентратора и возможностью получения регулярных решений для задач с сосредоточенными нагрузками. Практическая значимость также определяется развитием методов идентификации масштабных параметров градиентных теорий на основе обработки результатов испытаний образцов с концентраторами напряжений, полученных с использованием метода корреляции цифровых изображений.

Достоверность результатов проведенных исследований

Достоверность результатов проведенных исследований обеспечивается использованием и применением известных математических подходов к построению решений в рамках градиентной теории упругости, в том числе, метода представления решения в форме Папковича-Нейбера. Для верификации результатов было выполнено сравнение полученных решений задач с концентрацией напряжений в бесконечных и ограниченных плоских и

трехмерных областях с известными решениями задач упругости и градиентной теории упругости. Для задачи о концентрации напряжений проведена валидация решения на основе экспериментальных данных, получаемых с использованием метода корреляции цифровых изображений.

Положения, выносимые на защиту

1. Решения градиентной теории упругости позволяют описывать масштабные эффекты в зависимости концентрации напряжений от размера дефектов (концентраторов, включений, отверстий), присутствующих в материале. Причиной возникновения масштабных эффектов в ГТУ является присутствие материальных констант разной размерности в определяющих соотношениях теории.
2. Общее решение в форме Папковича-Нейбера, обобщенное на случай уравнений равновесия ГТУ, позволяет получать аналитические и численно-аналитические (в рядах) решения для задач с концентрацией напряжений в бесконечных и ограниченных плоских и трехмерных областях, и оценивать масштабные эффекты, связанные с влиянием размеров концентраторов.
3. Общее решение в форме Папковича-Нейбера, обобщенное на случай уравнений равновесия ГТУ, содержит как частный случай, известное асимптотическое решение ГТУ для полу-бесконечной трещины, прогнозирующее регулярное поле напряжений в ее вершине.
4. Построенное численно-аналитическое решение для задачи о сфере, нагруженной по экватору, демонстрирует возможность получения регулярных решений ГТУ для сосредоточенных нагрузок в ограниченных областях, которые ранее рассматривались только для бесконечных областей (в задаче Фламана, Буссинеска и др.).
5. Показано, что прогнозируемые ГТУ масштабные эффекты сводятся к снижению прогнозируемого уровня концентрации напряжений при уменьшении размера концентратора. Если концентратор оказывается существенно меньше масштабного параметра, присутствующего в определяющих соотношениях ГТУ, то его присутствие не оказывает влияние на разрушающую нагрузку, что качественно подтверждается известными экспериментальными данными.
6. На основе решения задачи Кирша проведена обработка экспериментальных данных по испытанию образцов оргстекла с малоразмерными отверстиями. Показано, что для отверстий диаметром менее 500 мкм, решения ГТУ лучше согласуются с экспериментальными данными, по сравнению с классическим решением задачи Кирша.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах, международных и региональных конференциях:

1. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019).
2. XLV Международная молодёжная научная конференции «Гагаринские чтения» (Москва, 2019).
3. XLVII International summer school conference advanced problems in mechanics (Санкт-Петербург, 2019).
4. XLIX Международная молодёжная научная конференции «Гагаринские чтения» (Москва, 2023).
5. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023).

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. Основные положения диссертации получены лично автором, либо при непосредственном его участии, что подтверждено публикациями. Предложены новые аналитические построения решений в упрощённой теории Айфантиса. Построены новые масштабозависимые решения для задачи Кирша и задачи о сферическом включении. Проведен анализ возможности получения регулярных решений и анализ размерных эффектов в упрощенной модели ГТУ для задач с концентраторами напряжений или с сосредоточенными нагрузками. Проведено исследование особенностей концентрации напряжений и деформаций вблизи малоразмерных концентраторов на основе аналитических и численных моделей градиентной теории упругости и их валидация на основе экспериментальных данных, получаемых с использованием метода корреляции цифровых изображений в испытаниях образцов с малоразмерными отверстиями.

Публикации автора по теме диссертации.

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в шести научных печатных работах, пять из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web Of Science и Scopus. Одна работа опубликована в издании, рекомендуемом Перечнем ВАК РФ.

Объем и структура диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, и списка литературы. Работа содержит 115 страниц, из них 8 занимает список использованных источников. Список используемой литературы включает 86 наименований.

Во введении формулируются цели и задачи исследования, научная новизна, актуальность, теоретическая и практическая значимость полученных

результатов, приводятся данные о структуре и объеме диссертационной работы и о публикациях по теме диссертации.

В **первой главе** приведены определяющие отношения и постановка краевой задачи градиентной теории упругости.

В градиентной теории упругости предполагается, что плотность энергии деформаций среды зависит не только от самих деформаций, но и от их градиентов:

$$w(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} A_{ijklmn} \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ – тензор деформаций, u_i – перемещения точек среды, C_{ijkl} – тензор модулей упругости, $\varepsilon_{ij,k}$ – тензор градиентов деформаций, A_{ijklmn} – тензор градиентных модулей упругости (дополнительных материальных констант ГТУ).

Для тела, занимающего объем Ω с гладкой границей $\partial\Omega$, с заданными только статическими граничными условиями, эта постановка краевой задачи градиентной теории упругости в отсутствии объемных сил имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0, \quad x_i \in \Omega \\ \sigma_{ij} n_j - \mu_{ijk,l} (\delta_{jl} - n_j n_l) n_k - H \mu_{ijk} n_j n_k &= \bar{t}_i \quad \text{или} \quad u_i = \bar{u}_i, \quad x_i \in \partial\Omega \\ \mu_{ijk} n_j n_k &= \bar{m}_i \quad \text{или} \quad u_{i,l} n_l = \bar{g}_i, \quad x_i \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \mu_{ijk,k}$ – тензор полных напряжений, входящий в уравнения равновесия ГТУ, $\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ – классический тензор напряжений, $\mu_{ijk} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n}$ – тензор градиентных (моментных) напряжений, $\bar{t}_i, \bar{m}_i$ – заданные поверхностные нагрузки (классические и моментные напряжения на поверхности, причем последние во всех рассматриваемых задачах считаются нулевыми), $H = -\frac{1}{2} n_{i,l} (\delta_{il} - n_i n_l)$ – средняя кривизна поверхности $\partial\Omega$, n_i – вектор внешней единичной нормали к поверхности тела, δ_{il} – символ Кронекера.

В первой главе перечислены модели ГТУ с упрощенными определяющими отношениями, рассматриваемые в диссертации: упрощенная теория Айфантиса, моментная теория упругости (couple stress theory), дилатационная теория упругости и полностью симметричная теория Гусева-Лурье. Формулировки этих теорий отличаются предположениями о структуре тензора A_{ijklmn} . Например, в случае теории Айфантиса предполагается, что $A_{ijklmn} = l^2 C_{ijlm} \delta_{kn}$ (l – масштабный параметр, единственная дополнительная материальная константа модели), что приводит к простой связи классических и градиентных напряжений: $\mu_{ijk} = l^2 \tau_{ij,k}$.

В первой главе также приведено описание использованного метода численного моделирования и дано представление решения уравнений равновесия в форме Папковича-Нейбера для ГТУ через потенциалы, которые

удовлетворяют уравнениям Лапласа и модифицированным уравнениям Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_g, \\ \mathbf{u}_c &= \mathbf{\Phi} - \kappa \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Phi} + \varphi), \\ \mathbf{u}_g &= \mathbf{\Psi} + \nabla \psi \end{aligned} \quad (3)$$

где $\kappa = \frac{1}{4(1-\nu)}$, ν – коэффициент Пуассона; $\mathbf{r}$ – радиус вектор, и должно выполняться:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{\Phi} &= 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0, \\ (1 - l_2^2 \nabla^2) \mathbf{\Psi} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{\Psi} = 0, \quad (1 - l_1^2 \nabla^2) \psi = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

где l_1 и l_2 – это масштабные параметры, которые выражаются через отношение классических и градиентных модулей упругости (компонент A_{ijklmn}). Например, в теории Айфантиса $l_1 = l_2 = l$, в моментной теории упругости $l_1 = 0$, а в дилатационной теории $l_2 = 0$.

Во **второй главе** исследуются плоские задачи с концентраторами напряжений. Для задач в полярной системе координат запись решения ГТУ в форме Папковича-Нейбера (3) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_r &= (1 - \kappa) \Phi_r - kr \frac{\partial \Phi_r}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \\ u_\theta &= \Phi_\theta - \kappa \frac{\partial \Phi_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \quad (5)$$

Представления для классического векторного потенциала $\mathbf{\Phi}$, удовлетворяющего уравнению Лапласа, и для скалярных потенциалов ψ и χ , подчиняющихся модифицированным уравнениям Гельмгольца в полярной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^{k+1} + b_n r^{k-1}) \cos k\theta, \\ \Phi_\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^{k+1} - b_n r^{k-1}) \sin k\theta, \\ \psi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n I_k(\bar{r}) + \hat{c}_n K_k(\bar{r})) \cos k\theta, \\ \chi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (d_n I_k(\bar{r}) + \hat{d}_n K_k(\bar{r})) \cos k\theta \end{aligned} \quad (6)$$

где представление дано для случая симметричного нагружения (относительно $\theta = 0$) а для случая антисимметричной нагрузки соответствующее представлено дано в тексте диссертации; параметр $k = n + \xi$ ($0 \leq \xi \leq 1$) – это, в общем случае, дробный порядок членов общего решения;

$a_n, b_n, c_n, d_n, \hat{c}_n, \hat{d}_n$ – неизвестные константы, которые могут быть найдены через граничные условия. При этом, константы $\hat{c}_n$ и $\hat{d}_n$ стоят перед членами затухающими на бесконечности $r \rightarrow \infty$, а c_n и d_n – перед членами, принимающими конечные значения в начале координат $r = 0$; I_k и K_k – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; $\bar{r} = r/l$ – нормированная радиальная координата.

Во второй главе диссертации представлено решение задачи плоской деформации для бесконечного пространства, содержащего круглое отверстие и нагруженного постоянными напряжениями на бесконечности (задачи Кирша), в рамках упрощённых вариантов ГТУ. Рассматриваемая постановка задачи может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} r \geq R: & \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ r = R: & t_r = 0, t_\theta = 0, m_r = 0, m_\theta = 0, \\ r \rightarrow \infty: & t_r = \frac{\bar{t}}{2}(1 + \xi) + \frac{\bar{t}}{2}(1 - \xi)\cos 2\theta, t_\theta = -\frac{\bar{t}}{2}(1 - \xi)\sin 2\theta, m_r = 0, m_\theta = 0 \end{cases} \quad (7)$$

где $\bar{t}$ – это заданная нагрузка на бесконечности, причем одноосное растяжение реализуется при $\xi = 0$, двухосное растяжение – при $\xi = 1$, и чистый сдвиг (под углом 45 градусов) – при $\xi = -1$.

Компоненты векторного потенциала Φ в (5), для задачи Кирша соответствуют классическому решению теории упругости и определяются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_r &= c_{21}r^{-1} + c_{41}r + (c_{51}r^{-1} + c_{71}r + c_{23}r^{-3})\cos 2\theta, \\ \Phi_\theta &= -(c_{51}r^{-1} + c_{71}r - c_{23}r^{-3})\sin 2\theta \end{aligned} \quad (8)$$

где $c_{21}, c_{41}, c_{51}, c_{71}, c_{23}$ – это константы, которые должны быть найдены из граничных условий задачи.

Градиентная часть поля перемещений определяется с использованием двух скалярных потенциалов ψ и χ , периодичность которых выбирается в соответствии с классическими потенциалами (8) на основе общего представления (6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi &= b_{10}K_0\left(\frac{r}{l_1}\right) + b_{12}K_2\left(\frac{r}{l_1}\right)\cos 2\theta \\ \chi &= d_{12}K_2\left(\frac{r}{l_2}\right)\cos 2\theta \end{aligned} \quad (9)$$

где b_{10}, b_{12}, d_{12} – это дополнительные константы решения, которые должны определяться с учетом наличия расширенного набора граничных условий в ГТУ.

В итоге, в задаче будет присутствовать восемь независимых граничных условий для определения восьми констант: $c_{21}, c_{41}, c_{51}, c_{71}, c_{23}, b_{10}, b_{12}, d_{12}$, присутствующих в (8), (9). Решение для перемещений находится подстановкой потенциалов (8), (9) в общее решение Папковича-Нейбера (5). Запись граничных условий относительно вектора напряжений на границе отверстия может быть представлена через компоненты классических и градиентных напряжений в следующем виде (задается условие свободной поверхности):

$$r = R:$$

$$t_r = -\tau_{rr} + \frac{\partial \mu_{rrr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\mu_{rrr} - 3\mu_{r\theta\theta} - \mu_{\theta\theta r} + \frac{\partial \mu_{rr\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu_{r\theta r}}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (10)$$

$$t_\theta = -\tau_{r\theta} + \frac{\partial \mu_{r\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\mu_{rr\theta} + 2\mu_{r\theta r} - 2\mu_{\theta\theta\theta} + \frac{\partial \mu_{r\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu_{\theta\theta r}}{\partial \theta} \right) = 0$$

Граничные условия для моментных напряжений имеют более простую структуру:

$$r = R:$$

$$m_r = \mu_{rrr} = 0, \quad (11)$$

$$m_\theta = \mu_{\theta rr} = 0$$

Граничные условия на бесконечности, с учетом затухания градиентных эффектов, могут быть записаны только относительно классических напряжений в следующем виде:

$$r \rightarrow \infty:$$

$$\tau_{rr} = \frac{\bar{t}}{2}(1 + \xi) + \frac{\bar{t}}{2}(1 - \xi)\cos 2\theta, \quad (12)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\bar{t}}{2}(1 - \xi)\sin 2\theta$$

Подстановка общего решения (5), (8) и (9) в (10)-(12) позволяет получить восемь уравнений (с учетом необходимости приравнивания нулю групп коэффициентов при тригонометрических функциях разной четности) для определения неизвестных констант, выражения для которых находятся с использованием системы символьной алгебры. На основе анализа полученного решения показано, что в ГТУ так же, как и в классическом решении для задачи Кирша, нормальные напряжения $\tau_{\theta\theta}$ принимают максимальные значения на границе отверстия в точке $\theta = \pi/2$. Максимальная концентрация этих напряжений в классическом решении при одноосном растяжении составляет 3, при двухосном 2, а при чистом сдвиге 4. В решении ГТУ прогнозируется снижение уровня концентрации напряжений по сравнению с классическим решением. Зависимость максимального уровня концентрации этих напряжений от нормированной величины радиуса отверстия, рассчитанная в ГТУ, представлена на рис. 1.

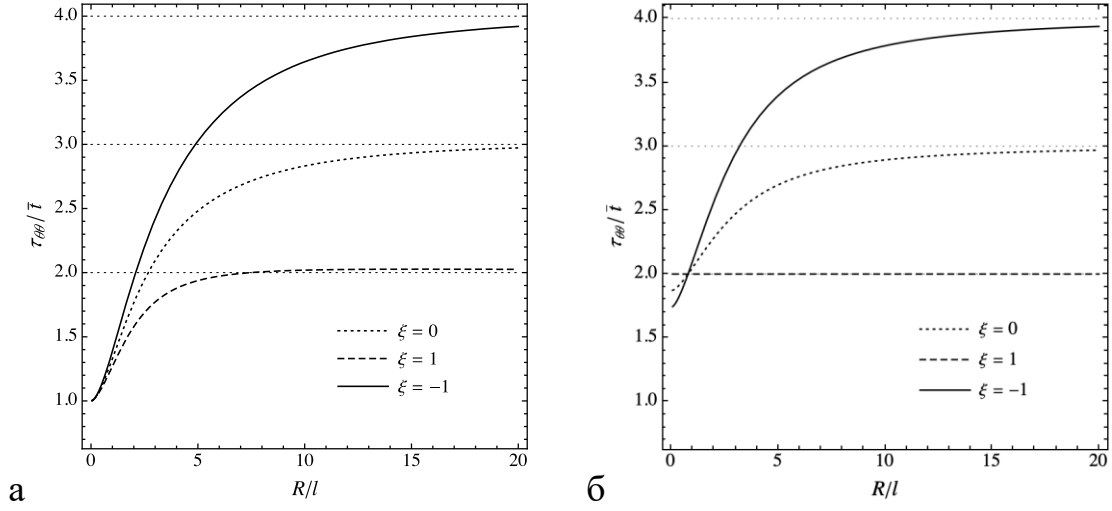


Рис. 1. Зависимость максимальной концентрации напряжений $\tau_{\theta\theta}$ от радиуса отверстия R , деленного на масштабный параметр материала l , в упрощенной ГТУ (а) и в моментной теории упругости (б).

Во второй главе диссертации также приведено решение задачи о трещине в рамках упрощённой ГТУ в форме Айфантиса. Показано, что для полубесконечных трещин общее представление решения в плоской задаче ГТУ (5), (6) может быть записано в следующем виде:

$$u_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(u_r^{(n)} \right) \cos k\theta, \quad u_\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(u_\theta^{(n)} \right) \sin k\theta \quad (13)$$

где представление дано для случая симметричной нагрузки (мода I), и функции радиальной координаты, входящие в (13), определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} u_r^{(n)} &= a_n \beta_n r^{k+1} + b_n r^{k-1} + c_n I_{k+1}(\bar{r}) + d_n I_{k-1}(\bar{r}), \\ u_\theta^{(n)} &= a_n r^{k+1} - b_n r^{k-1} + c_n I_{k+1}(\bar{r}) - d_n I_{k-1}(\bar{r}), \\ &\left(k = n + \xi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \xi = \frac{1}{2} \text{ или } \xi = 0 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

где a_n , b_n , c_n , d_n – это константы общего решения, и введен коэффициент $\beta_n = (1 - \kappa(k + 2))/(1 + \kappa k)$.

Решение ГТУ (13), (14) обобщает классические представления для полей перемещений в областях с трещинами. Используя разложение в ряд для модифицированных функций Бесселя, определение n -го члена решения в форме Папковича-Нейбера (14) можно записать в следующем виде:

$$u_{r,\theta}^{(n)} = a_n \beta_n r^{k+1} + b_n r^{k-1} + c_n \sum_{s=0}^{\infty} g_{(n+1),s} r^{k+1+2s} + d_n \sum_{s=0}^{\infty} g_{(n-1),s} r^{k-1+2s}, \quad (15)$$

$$u_{\theta}^{(n)} = a_n r^{k+1} - b_n r^{k-1} + c_n \sum_{s=0}^{\infty} g_{(n+1),s} r^{k+1+2s} - d_n \sum_{s=0}^{\infty} g_{(n-1),s} r^{k-1+2s}$$

где введены обозначения для коэффициентов рядов для функций Бесселя:

$$g_{n,s} = \left((2l)^{n+\xi+2s} s! \Gamma(n + \xi + s + 1) \right)^{-1} \quad (16)$$

Из соотношения (16) видно, что классическая и градиентная части решения в форме Папковича-Нейбера (14) имеют члены с одинаковым асимптотическим поведением вблизи $r = 0$. Поэтому в рамках ГТУ всегда есть возможность исключить из решения классические (сингулярные) составляющие. В частности, в диссертации показано, что члены порядка $r^{1/2}$ (классическая асимптотика поля перемещений в вершине трещины) могут быть исключены из решения ГТУ соответствующим выбором стоящих при них коэффициентов, а для членов порядка $r^{3/2}$ можно восстановить известное асимптотическое решение ГТУ для полубесконечной трещины, полученное в работах (*Gourgiotis, Georgiadis, J. Mech. Phys. Solids, 2009*, и *Aravas, Giannakopoulos, Int. J. Solids Structures, 2009*). В этом случае необходимо использовать:

$$a_0 = (9 - 8\nu) \left(A_1 + \frac{1}{3} g_{-1,1} d_0 \right), \quad c_0 = (4\nu - 3) d_0, \quad b_2 = A_2 - g_{1,0} d_2, \quad (17)$$

$$c_{-2} = 12(A_1 - A_2) l^{3/2} \sqrt{2\pi} \frac{3 - 4\nu}{41 - 32\nu}$$

где остальные коэффициенты для членов более низкого порядка принимаются равными нулю, A_1, A_2 – это неизвестные амплитуды асимптотического решения (см. *Gourgiotis, Georgiadis, J. Mech. Phys. Solids, 2009*). В результате использования (17) в (15), члены общего решения для поля перемещений порядка $r^{3/2}$ принимают вид:

$$u_r = r^{3/2} \left(3(A_1 - A_2) \frac{11 - 16\nu}{41 - 32\nu} \cos \frac{3\theta}{2} + A_1 (3 - 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} + A_2 \cos \frac{5\theta}{2} \right), \quad (18)$$

$$u_{\theta} = r^{3/2} \left(-3(A_1 - A_2) \frac{13 - 16\nu}{41 - 32\nu} \sin \frac{3\theta}{2} + A_1 (9 - 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} - A_2 \sin \frac{5\theta}{2} \right)$$

Записанное решение соответствует трещине нормального отрыва. Построение антисимметричного решения для моды II представлено в диссертации. Таким образом, показано, что общее решение в форме (3) позволяет получать известные решения для трещин в ГТУ. Более того, использование остальных членов ряда (18) позволяет получить асимптотическое решение для

членов более высокого порядка, то есть построить обобщение классического ряда Вильямса для задач о трещинах в ГТУ.

В третьей главе рассмотрены пространственные задачи с концентраторами напряжений, в частности задача о сферическом включении в бесконечном пространстве в условиях заданного на бесконечности всестороннего сжатия или чистого сдвига, и задача о сфере, нагруженной силой, распределенной вдоль экватора. Решения строятся в сферической системе координат $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + \theta\mathbf{e}_\theta + \phi\mathbf{e}_\phi$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$). Для задачи о сферическом включении общее решение строится на основе представления Папковича-Нейбера (3), в котором классическая часть поля перемещений $\mathbf{u}_c$ задается на основе известного классического решения (см., например, работы Р. Кристенсена), а градиентная часть решения для перемещений задается в следующем виде (с учетом (3)):

$$\mathbf{u}_g = \nabla\psi + \nabla \times (r\bar{\chi}\mathbf{e}_r) + \nabla \times \nabla \times (r\chi\mathbf{e}_r) \quad (19)$$

где скалярные потенциалы $\bar{\chi}$, χ и ψ , удовлетворяющие модифицированным уравнениям Гельмгольца в сферической системе координат, имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\chi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(a_{n,m} i_n(\bar{r}) + b_{n,m} k_n(\bar{r}) \right) Y_{n,m}(\theta, \phi), \\ \chi &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(c_{n,m} i_n(\bar{r}) + d_{n,m} k_n(\bar{r}) \right) Y_{n,m}(\theta, \phi), \\ \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(e_{n,m} i_n(\bar{r}) + f_{n,m} k_n(\bar{r}) \right) Y_{n,m}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (20)$$

где $a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m}, d_{n,m}, e_{n,m}, f_{n,m}$ – неизвестные константы, которые могут быть найдены из граничных условий, i_n и k_n – модифицированные сферические функции Бесселя первого и второго рода, $Y_{n,m}(\theta, \phi)$ – сферические гармоники.

Выбранное представление общего решения используется для задания поля перемещений внутри включения и во внешней области (в матрице). Показано, что для решения задачи о всестороннем сжатии необходимо использовать первые члены ряда (20) $n = 0, m = 0$. Для задачи о чистом сдвиге, соответственно, необходимо рассматривать члены порядка $n = 2, m = 2$. Далее, неизвестные константы находятся из требований ограниченности решения в нуле и на бесконечности, и из требования выполнения условий непрерывности на контакте включения и матрицы. Детальная формулировка представлена в диссертации. Эти решения строилось в системе символьных вычислений Wolfram Mathematica. Примеры вычислений были выполнены для случая заданного отношения модуля упругости материала включения к модулю

упругости матрицы $\frac{E^{(вкл)}}{E^{(матр)}} = 100$. Коэффициент Пуассона материала включения предполагался равным $\nu^{(вкл)} = 0.3$, матрицы $\nu^{(матр)} = 0.35$. На рис. 2 показаны вычисленные значения максимальных концентраций радиальных напряжений τ_{rr} в зависимости от значения длины масштабного параметра $\frac{r_0}{l}$ для задач гидростатического давления (а) и распределение радиальных напряжений τ_{rr} вдоль радиальной координаты, нормированной на радиус включения r/r_0 для различных соотношений радиуса включений и масштабного параметра материала (б). На рис. 3 показаны максимальные концентрации напряжений сдвига $\tau_{r\theta}$ в зависимости от значения длины масштабного параметра r_0/l для задачи чистого сдвига (а) и характерное распределение напряжений сдвига $\tau_{r\theta}$ для случая соотношения радиуса включений и масштабного параметра материала $r_0/l = 10$ (б). На рис. 2 а и рис. 3 а принято, что τ_{rr0} и $\tau_{r\theta0}$ – значения радиальных и касательных напряжений возникающих на бесконечности, соответственно. На рисунке 3 б видно, что в решении ГТУ внутри включения реализуется неоднородное поле напряжений, связанное с влиянием градиентных эффектов (аналогичный эффект виден и на рис. 2 б для задачи всестороннего сжатия).

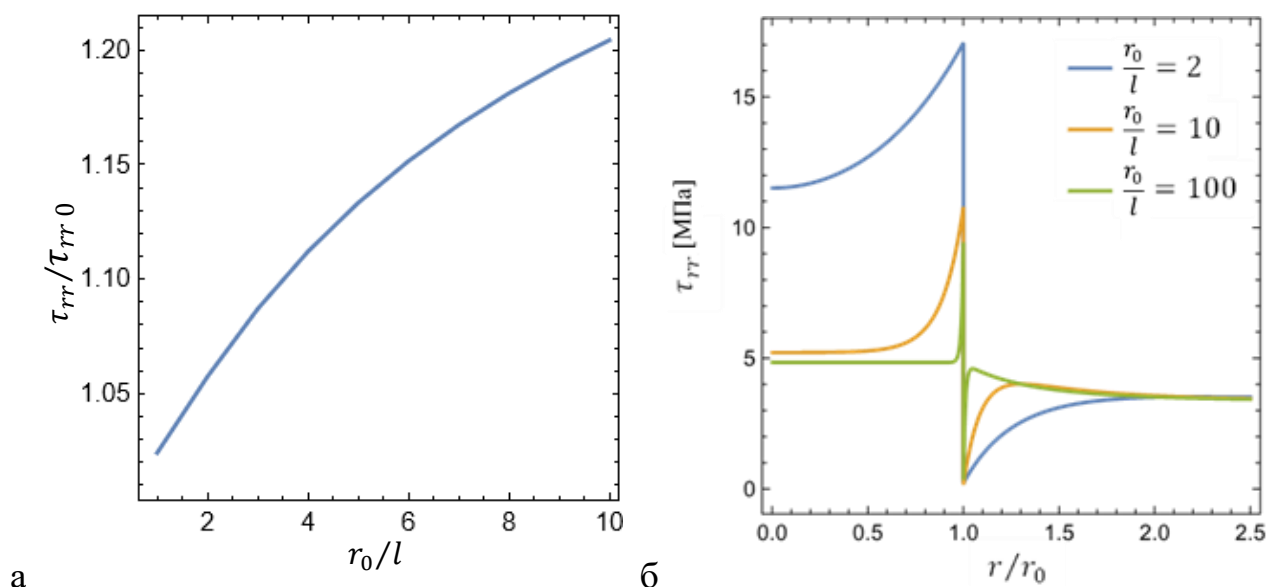
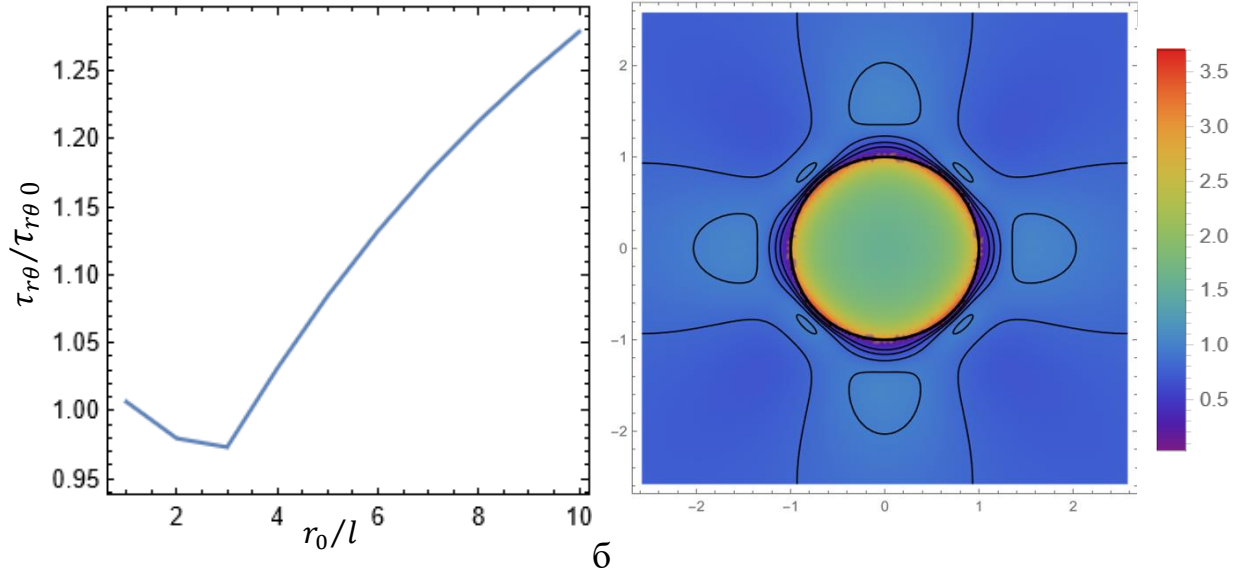


Рис. 2. Максимальные концентрации радиальных напряжений τ_{rr} в зависимости от значения длины масштабного параметра r_0/l для задачи гидростатического давления (а) и распределение радиальных напряжений τ_{rr} вдоль радиальной координаты, нормированной на радиус включения r/r_0 для различных соотношений радиуса включений и масштабного параметра материала (б).



а

б

Рис. 3. Максимальные концентрации касательных напряжений $\tau_{r\theta}$ в зависимости от значения длины масштабного параметра r_0/l для задачи чистого сдвига (а) и неоднородное поле напряжений $\tau_{r\theta}$ [Мпа] внутри включения в задаче чистого сдвига для случая соотношения радиуса включений и масштабного параметра материала $r_0/l = 10$ (б).

Далее в диссертации представлено решение для задачи о сфере под действием экваториальной нагрузки. Это решение является осесимметричным, и для него общее представление для перемещений (5) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} u_r &= 4(1-\nu)\Phi_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\Phi_r + \varphi + \psi) - \frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}, \\ u_\theta &= 4(1-\nu)\Phi_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\Phi_r + \varphi + \psi) + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\theta} \end{aligned} \quad (21)$$

где потенциалы $\Phi(r, \theta)$ и $\varphi(r, \theta)$ для внутренних областей можно определить следующим образом (на основе известного классического представления, данного в работах А.И. Лурье):

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(n+1)r^{n+1}P_n(\cos\theta), & \Phi_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{n+1} \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta}, \\ \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n P_n(\cos\theta) \end{aligned} \quad (22)$$

здесь A_n и B_n – неизвестные константы, которые могут быть найдены через граничные условия, $P_n(\dots)$ – многочлены Лежандра.

Потенциалы для градиентной части осесимметричного решения (21) $\psi(r, \theta)$ и $\chi(r, \theta)$, которые подчиняются модифицированным уравнениям Гельмгольца, могут быть выражены следующим образом в ограниченных областях:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n i_n(\bar{r}) P_n(\cos \theta), \quad \chi = \sum_{n=0}^{\infty} D_n i_n(\bar{r}) P_n(\cos \theta) \quad (23)$$

Нагрузка на экваторе сферы задается через дельта-функцию Дирака. Граничные условия на поверхности сферы ($r = r_0$) формулируются относительно вектора напряжений (как и в классической задаче) с дополнительным условием ГТУ относительно вектора моментных напряжений, которые полагаются равными нулю:

$$r = r_0: \quad t_r = -\frac{q}{r_0} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad t_\theta = 0, \quad m_r = 0, \quad m_\theta = 0 \quad (24)$$

где $\delta(\dots)$ дельта-функция Дирака, q – сжимающая нагрузка на единицу длины [Н/м], распределенная по экватору сферы ($\theta = \frac{\pi}{2}$) (см рис. 4 (а)). Величина сжимающей нагрузки q нормируется относительно радиуса сферы r_0 из соображений размерности (см. А.И. Лурье «Пространственные задачи теории упругости»).

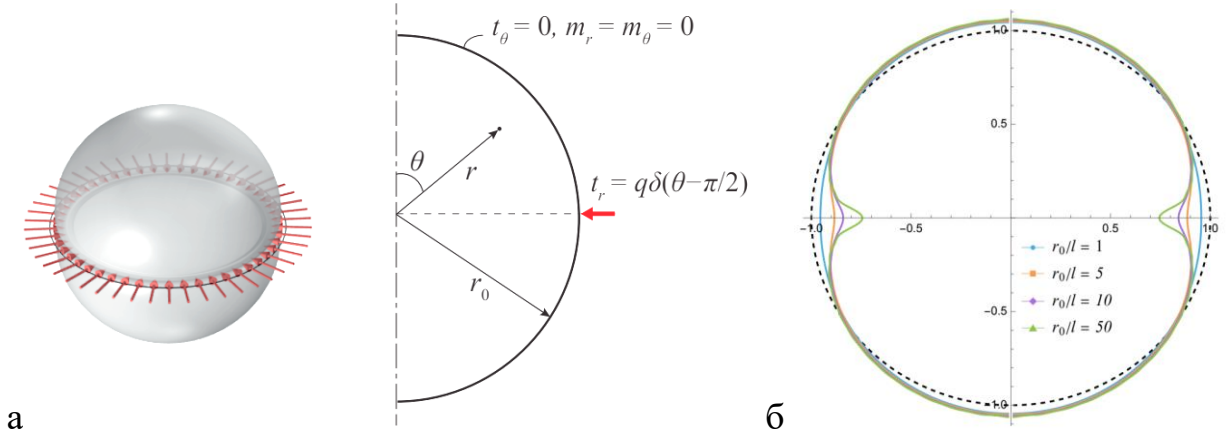


Рис. 4. К постановке задачи о сфере, нагруженной по экватору распределенной силой (а), Деформированное состояние сферы под действием экваториальной нагрузки в рамках ГТУ для различных значений масштабного параметра ($r_0 = 1$ м). Деформации увеличены в 100 раз (б).

Компоненты классического и моментного векторов напряжений в (24) на поверхности сферы ($r = r_0$, $n = e_r$), в осесимметричных задачах ГТУ в сферических координатах, принимают вид:

$$\begin{aligned} t_r &= \tau_{rr} - \frac{\partial \mu_{rrr}}{\partial r} - \frac{\partial \mu_{rr\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \mu_{r\theta r}}{\partial \theta} - 4\mu_{rrr} + 3\mu_{r\theta\theta} \\ &\quad + \mu_{\theta\theta r} + \mu_{\phi\phi r} + 3\mu_{r\phi\phi} - (\mu_{rr\theta} + \mu_{r\theta r}) \cot \theta, \\ t_\theta &= \tau_{r\theta} - \frac{\partial \mu_{r\theta r}}{\partial r} - \frac{\partial \mu_{r\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \mu_{\theta\theta r}}{\partial \theta} - 5\mu_{r\theta r} - \mu_{rr\theta} + 2\mu_{\theta\theta\theta} \\ &\quad + 2\mu_{\theta\phi\phi} + (\mu_{\phi\phi r} + \mu_{r\phi\phi} - \mu_{r\theta\theta} - \mu_{\theta\theta r}) \cot \theta, \\ m_r &= \mu_{r\theta\theta}, \quad m_\theta = \mu_{\theta\theta\theta} \end{aligned} \quad (25)$$

В примерах численных расчетов были использованы следующие значения параметров: $E = 1$ ГПа, $\nu = 0,25$, $r_0 = 1$ м, $q = 0,001Er_0$. В качестве примера рассмотрена упрощенная ГТУ с одним масштабным параметром $l_1 = l_2 = l$. Расчеты строились численно-аналитическим методом. Выбиралось конечное число членов ряда N в представлении для поля перемещений (21)-(23). Полученное решение подставлялось в граничные условия (25), с учетом физических соотношений ГТУ в форме Айфантиса. Из получаемой системы уравнений для каждой n -ой гармоники в рядах для перемещений ($P_n(\cos \theta)$) находились неизвестные коэффициенты. Анализ сходимости решения при увеличении числа членов ряда проводился для радиальных перемещений и деформаций на экваторе на поверхности сферы $\theta = \frac{\pi}{2}, r = r_0$ (по линии нагружения). Примечательно, что в рамках классической теории упругости эти величины имеют бесконечные значения и решение соответствующего ряда всегда расходится в соответствии с логарифмической особенностью для поля перемещений и гиперболической особенностью для поля напряжений. В анализе сходимости решения в рамках ГТУ были использованы значения масштабного параметра $l = r_0$ (сильный градиентный эффект), $l = \frac{r_0}{100}$ (слабый градиентный эффект), $l = 0$ (решение в рамках классической теории упругости). К полученным решениям в рядах для перемещений и деформаций были применены признаки сходимости по Коши, Даламберу, Раабе и Куммера. Было установлено, что признаки сходимости по Даламберу, Раабе и Коши не позволяют сделать определенный вывод о сходимости решений для рассматриваемой задачи. Однако, признак сходимости по Куммеру позволяет достоверно показать, что полученное решение ГТУ в рядах сходится и может быть использовано для оценки конечных перемещений и деформаций, реализующихся под сосредоточенной нагрузкой.

Значения найденных первых 50 ненулевых членов и суммированный ряд для радиальных перемещений $u_r(r_0, \pi/2, 0)$ представлены на рис. 5. Все члены ряда решения $u_r^{(n)}$ отрицательны при заданной линейной сжимающей нагрузке. На рис. 5(б) хорошо видно, что градиентное решение для перемещений при $l = r_0$ сходится даже при использовании небольшого числа членов ряда (<10), однако, разница между скоростью сходимости градиентного решения при $l = \frac{r_0}{100}$ и классическим решением (которое заведомо расходится) сложно различима. Именно поэтому к построенному численно-аналитическому решению применялись признаки сходимости, указанные выше.

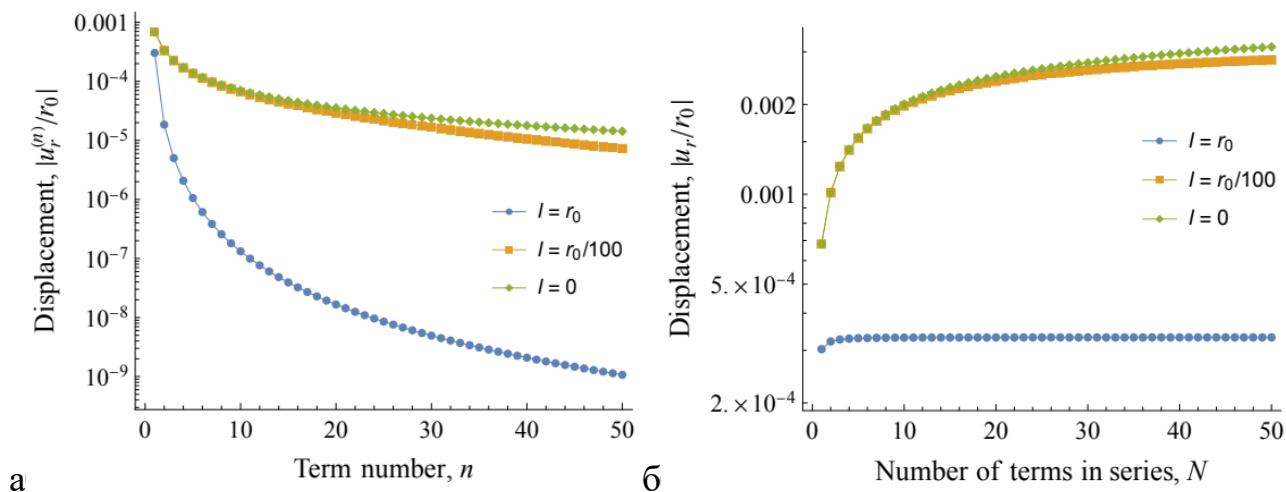


Рис. 5 Результаты решений для радиального перемещения на экваторе сферы. Численные значения n -ых членов ряда (а) и зависимость просуммированного решения от числа членов ряда N (б).

Деформированное состояние сферы, найденное на основе решения ряда с $N = 50$ в рамках ГТУ представлено на рис. 4 (б) для различных значений длины масштабного параметра. Видно, что изменение значений масштабного параметра существенно влияет только на деформации на экваторе сферы, где действует нагрузка. Деформированное состояние является гладким и не содержит несплошных и негладких участков. На экваторе сферы реализуются конечные смещения и, как показано в диссертации, не возникает излома поверхности (не образуется ребро под сосредоточенной нагрузкой), что соответствует гладкому изменению и конечным значениям поля деформаций.

В **четвертой главе** приведено описание экспериментальной части и моделирование экспериментальных данных.

Дано описание метода корреляции цифровых изображений, которой представляет собой оптический метод, используемый для измерения изменений поля координат на поверхности образца. Определение изменений поля деформаций основано на получении кросс-корреляций между изображениями объекта в исходном и деформированном состояниях. Для определения поля деформаций использована программа Digital Image Correlation Engine.

Описано изготовление образцов с отверстиями. Образцы вырезаны из листа полиметилметакрилата (ПММА) толщиной 1 мм и представляют собой ленту шириной 25 мм и длиной 260 мм. В центре образцов просверлены отверстия различного диаметра: 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5 и 2.5 мм (см. рис. 6). С помощью аэрографа с диаметром сопла 0.2 мм черной краской на водной основе на образцы нанесен паттерн, обеспечивающий необходимый контраст для хорошей корреляции изображений.

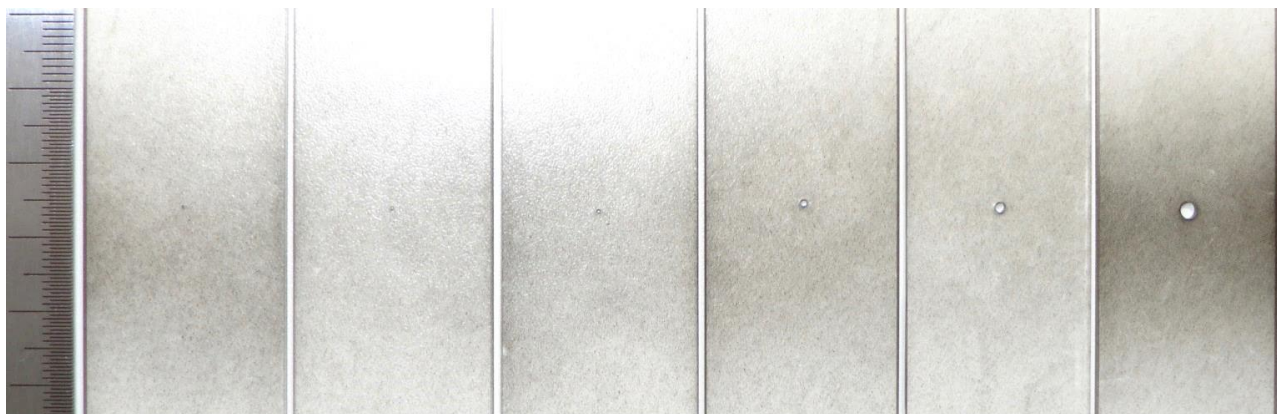


Рис. 6 Фото серии образцов с отверстиями разного диаметра: 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5 и 2.5 мм, после нанесения паттерна.

Испытания проводились на универсальной испытательной машине Instron 5969 с программным обеспечением Bluehill 3. Образцы зажимались в пневматические захваты и нагружались вертикально, со скоростью 1 мм/мин. Расстояние между захватами 160 мм. Испытания проводились до образования ярко выраженной зоны пластичности. Фотографирование зоны возле отверстия производилось до растяжения и в процессе растяжения, с интервалом перемещения траверсы 0.1 мм. При испытании использовался фотоаппарат Nikon D5500 с макрообъективом Nikon NIKKOR 85mm f/3.5G ED VR.

Для определения поля деформаций использована программа Digital Image Correlation Engine. Для расчета используются фотографии образцов в недеформированном и деформированном состоянии, при номинальных деформациях, при которых ПММА не достигает предела пропорциональности, т.е. находится в упругой зоне. По результатам испытаний на одноосное растяжение образцов без отверстий определено, что ПММА достигает предела пропорциональности при номинальных деформациях 1.37%. Согласно классической теории упругости, коэффициент концентрации напряжений возле отверстия равен трем, тогда пластические деформации возле отверстия в ПММА наступают при достижении номинальных деформаций 0.46%. В DICe на выбранных фотографиях выделяется активная область, для точек корреляции которого необходимо определить поле деформаций.

Предварительно были определены упругие свойства листов ПММА. Для этого были проведены испытания на одноосное растяжение образцов без отверстий с использованием видеоэкстензометра. Образцы были изготовлены из того же листа материала, что и образцы с отверстиями. Полученное значение модуля упругости составляет 3.3 ГПа. Коэффициент Пуассона составляет 0.43.

Пример сопоставления численного решения, полученного с использованием стандартного МКЭ для поля продольных нормальных деформаций, с экспериментальными данными, полученными методом корреляции цифровых изображений, показан на рис. 7. Из проведенного

сопоставления было установлено, что поле деформаций имеет несколько отличный характер распределение и меньшие максимумы в эксперименте, по сравнению с классическим решением. Однако, непосредственное использование поля деформаций для сопоставления решений (в том числе решений теории упругости) с экспериментом является затруднительным, вследствие вносимых дополнительных погрешностей при численном вычислении деформаций по измеренному в эксперименте полю смещений точек поверхности образца. Поэтому было предложено проведение сопоставление по перемещениям, которые реализуются на контуре отверстий (то есть, фактически, по первичным экспериментальным данным).

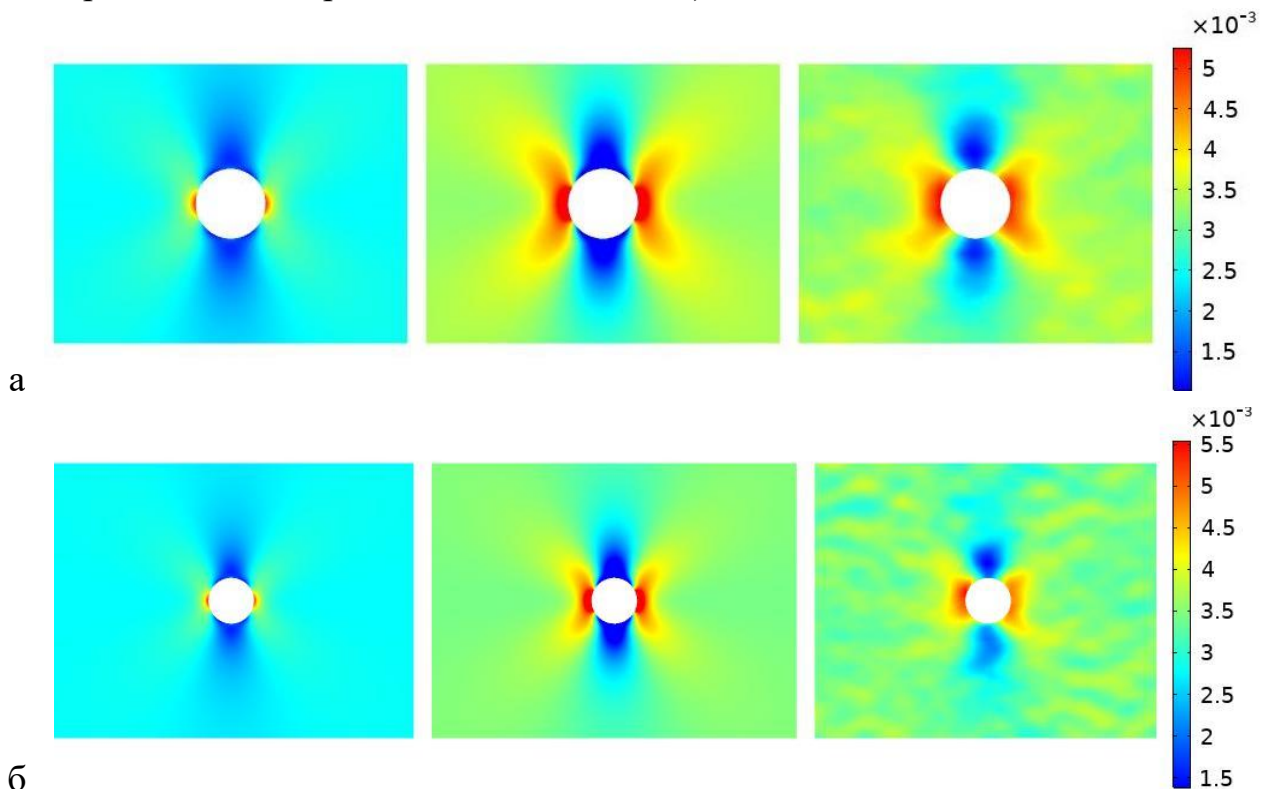


Рис. 7 Нормальные деформации в направлении нагрузки (вертикальное направление), полученные для образца с диаметром отверстия 1.5 мм (а) и 1.0 мм (б). Слева - результаты численного расчета, в центре - результаты численного расчета в диапазоне значений результатов эксперимента, справа - результаты эксперимента. Цветовая шкала относится к центральному и правому рисункам.

Перемещения на контуре отверстия, полученные с помощью метода корреляции цифровых изображений, были наложены на результаты численных решений в рамках классической и градиентной теории упругости. По наложенным графикам перемещений были вычислены относительные средние значения ошибок $\Delta u = \frac{1}{R} \frac{u - u_{DICE}}{u_{DICE}}$, где u и u_{DICE} – продольные перемещения на контуре отверстия, полученные из численного решения и из эксперимента, соответственно. Относительные средние значения ошибок Δv для классической и градиентной теории упругости показаны на рис. 8. В решении задачи

градиентной теории упругости использовалась модель Айфантиса, в которой присутствует неизвестная материальная константа – масштабный параметр. Было показано, что выбором этого параметра можно снизить ошибку теоретического расчета по отношению к эксперименту (см. рис. 8). Подобранные значения масштабного параметра для образцов ПММА составило 0.133 мм. На основе аналогичного подхода в недавней работе (Yuheng, Chunyu, Biao, *Int. J. Eng. Sci.*, 2024) была проведена идентификация масштабного параметра упрощенного варианта ГТУ для образцов оргстекла с отверстиями, где его порядок составил 1.1 мм. Значения масштабного параметра могут различаться для разных марок оргстекла и более высокое значение масштабного параметра означает более ярко выраженный масштабный эффект уже для диаметра отверстия порядка 1 мм, что в проведенных экспериментах не наблюдалось.

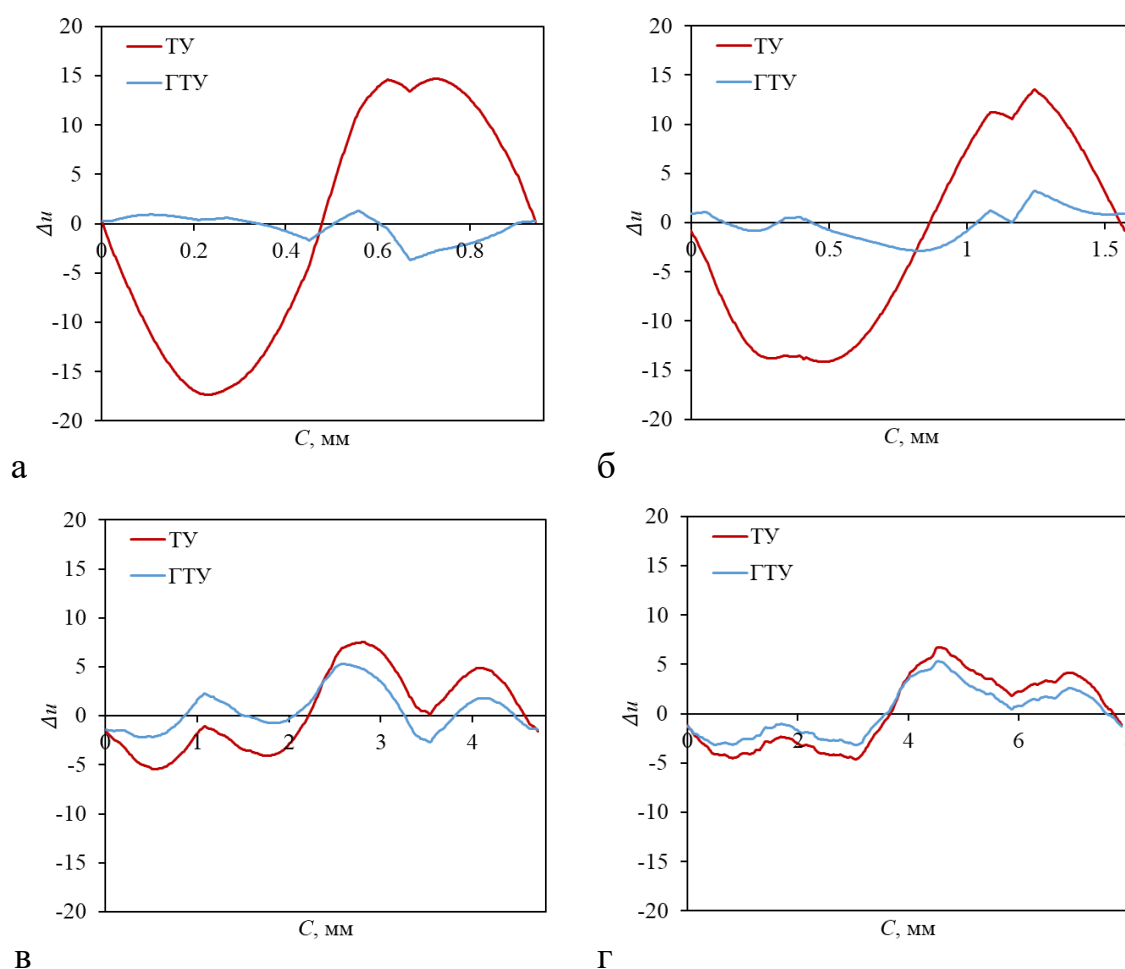


Рис. 8 Относительные значения ошибок Δu по образующей отверстия для классической и градиентной теории упругости, полученные для образца с диаметром отверстия 0.3 мм (а), 0.5 мм (б) 1.5 мм (в) и 2.5 мм (г). Здесь C – расстояние вдоль контура отверстия.

В заключении содержатся основные выводы по результатам работы.

Основные результаты диссертационной работы

1. Показано, что решения градиентной теории упругости позволяют учесть влияние масштабных эффектов на уровень концентрации напряжений вблизи различных типов концентраторов (включений, отверстий, и т.п.), при которых для малоразмерных концентраторов происходит снижение уровня концентрации.
2. Показано, что рассмотренный упрощенный вариант общего решения в форме Папковича-Нейбера (3) для уравнений равновесия ГТУ, позволяет получать аналитические и численно-аналитические (в рядах) решения для задач с концентрацией напряжений в бесконечных и ограниченных плоских и трехмерных областях, и оценивать масштабные эффекты, связанные с влиянием размеров концентраторов.
3. Показано, что общее решение в форме Папковича-Нейбера (3) для уравнений равновесия ГТУ, содержит как частный случай, известное асимптотическое решение ГТУ для полу-бесконечной трещины.
4. Впервые в рамках ГТУ построено решение в ограниченной области о деформациях упругой среды под действием сосредоточенной нагрузки (задача о деформациях сферы, нагруженной силой, распределенной вдоль экватора). На основе анализа сходимости полученного решения в рядах, показана возможность регуляризации рассматриваемого класса задач в ГТУ.
5. На основе решения задачи Кирша проведена обработка экспериментальных данных по испытанию образцов оргстекла с малоразмерными отверстиями. Установлено, что для отверстий диаметром менее 0.5 мм, решения ГТУ лучше согласуются с экспериментальными данными, по сравнению с классическим решением задачи Кирша. Идентифицированное значение масштабного параметра для оргстекла составило 0.133 мм.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из перечня ВАК РФ:

1. Короленко В., Соляев Ю. О. Оценка уровня концентрации напряжений вблизи микро-размерных отверстий на основе упрощенных моделей градиентной теории упругости //Труды МАИ. – 2021. – №. 121. – С. 4.

Статьи в журналах, индексируемых Scopus:

2. Solyaev Y., Lurie S., Korolenko V. Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity //European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2019. – Т. 78. – С. 103853.
3. Korolenko V., Yulong Li, Dobryanskiy V., Solyaev Y. Experimental studies and modelling of fracture toughness of the epoxy samples with eccentric cracks //Journal of Applied Engineering Science – 2020. – Т. 18. – №. 4.
4. Dell’Isola F. et al. Deformation of an elastic second gradient spherical body under equatorial line density of dead forces //European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2023. – С. 105153.
5. Solyaev Y. O., Korolenko V. A. Application of Papkovitch–Neuber General Solution for Crack Problems in Strain Gradient Elasticity //Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Т. 44. – №. 6. – С. 2469-2479.
6. Korolenko V. A., Babaytsev A. V. Experimental assessments on the strain concentration around small-sized holes in PMMA //Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2024. – Т. 15. – №. 1. – С. 55-64.

Прочие публикации по теме диссертации:

7. Соляев Ю. О., Короленко В. А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел в рамках градиентной теории упругости //XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – 2019. – С. 1127-1129.
8. Короленко В. А. Решение задачи об изгибе балки с трещиной в рамках градиентной теории упругости //Сборник тезисов работ международной молодёжной научной конференции XLV Гагаринские чтения 2019. – М.: Издательство «Перо», 2019. – с. 96-96.
9. Короленко В. А. Исследование особенностей концентрации деформаций вблизи малоразмерных отверстий с использованием метода корреляции цифровых изображений //Сборник тезисов работ международной молодёжной научной конференции XLIX Гагаринские чтения 2023. – М.: Издательство «Перо», 2023. – с. 669-670.
10. Соляев Ю. О., Короленко В. А. Исследование особенностей концентрации деформаций вблизи малоразмерных отверстий //XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике – Санкт-Петербург, 2023.