

На правах рукописи

Савиковский Артем Викторович

**МУЛЬТИКРИТЕРИАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РОСТА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРЕЩИН
В АНИЗОТРОПНЫХ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛАХ**

Специальность 1.1.8 - Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург,
2026

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Научный руководитель: **Семенов Артем Семенович**,
доктор физико-математических наук, профессор
Высшей школы механики и процессов управления
ФГАОУ ВО Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого

Официальные
оппоненты: **Устинов Константин Борисович**,
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБУН Институт проблем механики им.
А.Ю. Ишлинского Российской академии наук
(ИПМех РАН)

Степанова Лариса Валентиновна,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет им. Королева»

Ведущая организация: Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт конструкционных материалов «Прометей» имени И.В. Горынина Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

Защита состоится «___»_____2026 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 002.075.01 при ФГБУН Институте проблем машиноведения Российской академии наук по адресу: 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., д. 61.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ ФГБУН Института проблем машиноведения Российской академии наук и на сайте института по адресу <http://www.ipme.ru>.

Автореферат разослан «___»_____2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.097.01,
доктор технических наук

Е.Б. Седакова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. В целях повышения прочности и долговечности рабочих и направляющих лопаток современных авиационных газотурбинных установок (ГТУ) находят широкое применение монокристаллические жаропрочные сплавы на никелевой основе. Впервые в отечественном гражданском авиадвигателестроении монокристаллические лопатки начали использоваться в авиадвигателе ПД-14 для самолета МС-21. Для обеспечения безопасной эксплуатации и уточненной оценки долговечности рабочих и направляющих лопаток ГТУ в условиях возникновения трещин актуальным является определение условий разрушения и прогнозирование кинетики распространения трещин с учетом анизотропии механических свойств монокристаллических сплавов.

Работа посвящена разработке методов механики разрушения для моделирования роста и взаимодействия краевых усталостных трещин в анизотропных материалах, а также методики расчета трещиностойкости монокристаллических лопаток ГТУ с учетом кубической симметрии материала.

Методы линейной и нелинейной механики разрушения для смешанной моды разрушения с учетом специфики как изотропных, так и анизотропных материалов рассматривались в пионерских работах А.А. Griffith, Г.П. Черепанова, J.R. Rice, G.R. Irwin, G.C. Sih, а также в работах М.Л. Качанова, Н.Ф. Морозова, Ю.В. Петрова, Ю.Г. Матвиенко, Е.М. Морозова, Г.П. Никишкова, В.Н. Шлянникова, К.Б. Устинова, Л.В. Степановой, А.В. Радченко, А.В. Ильина, Б.З. Марголина, С.В. Петина, М.Я. Леонова, В.А. Левина, А.М. Покровского, А.Б. Фрейдина, Н.А. Казаринова, А.С. Семенова, J. Hutchinson, G.R. Irwin, M. Kuna, A. Ricoeur, S. Nemat-Nasser, L. Banks-Skills и др. В настоящее время широкое распространение для вычисления параметров разрушения анизотропных материалов получили: методы экстраполяции перемещений и напряжений, интеграла взаимодействия, виртуального закрытия трещины, эквивалентного объемного интегрирования и методы молекулярной динамики. Однако существующие методы не учитывают специфику кубической сингонии, которая актуальна для жаропрочных монокристаллических сплавов на никелевой основе. Упрощения, связанные с ограничением случаем кубической симметрии по сравнению с ортотропным материалом, позволяют получить простые аналитические выражения для параметров разрушения, актуальные для использования в инженерной практике.

Контурный J -интеграл и его расширения в виде J_k -интегралов для смешанной моды разрушения, предложенные Г.П. Черепановым, J.R. Rice, L.D. Eshelby и В. Budiansky находят широкое применение в качестве универсального инвариантного параметра разрушения в линейных и нелинейных задачах. Установление связей между J_k -интегралами и коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) для смешанной моды разрушения посвящены работы Р.О. Judt, A. Ricoeur, Н. Ma, Y.H. Chen, M. Feldman, J.H. Chang, D.J. Wu и др. В простейшей интерпретации контурный интеграл J_2 не является инвариантным, что требует его

модификации путем учета интегралов по берегам трещины, а при их учете возникает проблема вычисления слагаемого около вершины трещины, где накапливаются значительные численные ошибки, которая не получила окончательного решения.

Решение задачи взаимодействия множественных краевых трещин актуальна для описания начального этапа формирования единой усталостной макротрещины в лопатке. Этому вопросу посвящены работы, ограниченные преимущественно случаем изотропного материала: М.Л. Качанова, А.О. Чернявского, I.S. Jones, X. Yan, P.C. Gope, I.V. Singh, R. Luciano, S. Schmauder, A. Shashkin, A. Carpinteri, H.A. Richard и др. В работах М.Л. Качанова был разработан общий подход для анализа взаимодействия трещин и определения эффективных свойств для анизотропных материалов, однако его анализ ограничен случаем внутренних трещин. Отдельные примеры решения задачи внутренних трещин для анизотропных материалов представлены в работах авторов U. Ozkan, L. Banks-Sills, однако систематического анализа влияния анизотропии материала на параметры разрушения при удалении краевой трещины от свободной границы и на взаимодействия множественных краевых трещин проведено не было.

Исследованию кинетики роста усталостной трещины в монокристаллических сплавах посвящены работы J. Telesman, Л.Б. Гецова, В.Н. Шлянникова, S.D. Antolovich, A. Saxena, С.В. Петина, А.С. Семенова, P. Aswath, C. Mercer, G. Cailletaud, S. Forest, K.S. Chan и др. В экспериментах с монокристаллическими сплавами на никелевой основе в зависимости от температуры и режима нагружения рост трещины усталости может происходить как в кристаллографической моде (вдоль плоскостей $\langle 111 \rangle$ кристалла с ГЦК решеткой), так и в некристаллографической моде (направление роста определяется максимальными окружными напряжениями в окрестности вершины трещины). Учет этого явления в расчетной практике не производился.

Целью работы является разработка и обоснование методов прогнозирования долговечности анизотропных тел из монокристаллических сплавов на основе моделирования процессов роста и взаимодействия трещин при монотонном и циклическом нагружении.

Основными задачами работы являются:

1. Разработка методов расчетного определения КИН и J_k -интегралов при смешанной моде разрушения для случая кубической симметрии, соответствующей монокристаллическим сплавам на никелевой основе.
2. Исследование влияния класса сингонии и угла наклона трещины на параметры разрушения для внутренней и краевой трещин.
3. Исследование влияния класса сингонии, ориентации осей анизотропии, пластических свойств и типа граничных условий на взаимодействие краевых трещин между собой.
4. Разработка и валидация единого критерия для определения направления роста усталостной трещины для кристаллографической и некристаллографической мод в монокристаллических материалах.

5. Анализ влияния ориентации осей анизотропии материала на трещиностойкость монокристаллической рабочей лопатки газовой турбины.

Методы исследования. В работе используются фундаментальные законы механики деформируемого твердого тела. При разработке численных методов вычисления параметров разрушения применялись методы решения краевых задач анизотропной линейной теории упругости, а также методы теории функций комплексного переменного. Для получения численных решений краевых задач о влиянии анизотропии на одиночную краевую трещину, взаимодействие краевых трещин между собой и на трещиностойкость рабочей лопатки газовой турбины применялся метод конечных элементов.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в формулировке и обосновании новых методов расчетного определения КИН и J_k -интегралов при смешанной моде разрушения для случая кубической симметрии, соответствующей монокристаллическим сплавам на никелевой основе. Результаты решенных краевых задач показали, что анизотропия материала и мода разрушения оказывают существенное влияние на процесс роста и взаимодействия трещин. Расчеты параметров разрушения трещин в изотропном приближении не обеспечивают консервативную оценку, поэтому отсутствие учета анизотропии может приводить к качественно неверным результатам.

Разработанный единый критерий определения направления роста усталостной трещины для кристаллографической и некристаллографической мод в монокристаллических материалах позволяет более точно прогнозировать кинетику и траектории роста трещин.

Разработанные программные модули вычисления КИН и J_k -интегралов для анизотропных материалов и полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы на практике для оценки долговечности рабочих и направляющих лопаток ГТУ и оптимизации геометрии каналов охлаждения.

Научная новизна.

1. В диссертационной работе предложена формулировка метода экстраполяции перемещений при вычислении КИН для материала с кубической симметрией и ортотропного материала, явно учитывающая зависимость от упругих модулей, перемещения берегов трещины и отклонения трещины от осей анизотропии материала.
2. Предложен численный метод вычисления контурного J_2 -интеграла на основе линейной экстраполяции с внешних контуров на внутренние с использованием особенностей сингулярного аналитического решения для полей напряжений в вершине трещины, позволяющий значительно повысить точность вычислений интеграла J_2 .
3. Получены формулы вычисления КИН через значения интегралов J_1 и J_2 для случая кубической симметрии материала и для ортотропного материала при смешанной моде нагружения и произвольной ориентации трещины относительно осей анизотропии материала.

4. Показана неконсервативность оценок КИН для краевой трещины с использованием изотропной модели материала для ортотропных материалов и материалов с кубической симметрией.
5. Установлено, что при взаимодействии множественных трещин эффект экранирования (shielding effect) при I моде нагружения (нормальный отрыв) и усиления (amplification effect) при II моде нагружения (продольный сдвиг) чувствительны к анизотропии материала.
6. Предложен и верифицирован критерий выбора направления роста трещины для кристаллографической и некристаллографической мод разрушения.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод экстраполяции перемещений при вычислении КИН K_I и K_{II} для материалов с кубической симметрией и его численная реализация.
2. Метод вычисления контурного J_2 -интеграла на основе линейной экстраполяции с внешних контуров на внутренние с использованием особенностей сингулярного аналитического решения для полей напряжений в вершине трещины.
3. Метод вычисления КИН K_I и K_{II} на основе интегралов J_1 и J_2 для случая кубической симметрии материала и его численная реализация.
4. Результаты моделирования роста одиночной краевой трещины в пластине из ортотропного материала и материала с кубической симметрией при различных условиях нагружения, позволяющие установить неконсервативность оценок КИН с использованием изотропной модели материала.
5. Результаты моделирования взаимодействия множественных краевых трещин в пластине из ортотропного материала и материала с кубической симметрией, позволяющие установить чувствительность эффектов экранирования и усиления к анизотропии.
6. Единый критерий выбора направления усталостного роста трещины для кристаллографической и некристаллографической мод разрушения и результаты его верификации, а также результаты определения долговечности компактных образцов.
7. Результаты моделирования влияния аксиального отклонения от [001] и азимутального отклонения кристаллографической ориентации от [100] для монокристаллической рабочей лопатки ГТУ на распределение КИН вдоль фронта трещины в корневом сечении пера лопатки, а также влияние анизотропии на эффект затенения в рабочей лопатке газовой турбины со множественными краевыми трещинами.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью постановки задач и выбора метода исследования, строгостью применяемого математического аппарата, а также качественным и количественным соответствием экспериментальным данным и известным аналитическим и численным решениям краевых задач.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих российских и международных конференциях:

1. 50-я и 52-я международная школа-конференция «Advanced Problems in Mechanics» (Санкт-Петербург, 2022, 2025);
2. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023);
3. XXIV Зимняя школа по механике сплошных сред (г. Пермь, 2025).
4. 66-я научно-техническая сессия РАН по проблемам газовых турбин и парогазовых установок (г. Пермь, 2019).
5. Научные конференции с международным участием Неделя науки Физмех (2022, 2023), Санкт-Петербург, Россия.

Работа отмечена дипломом конкурса грантов для студентов вузов, расположенных на территории Санкт-Петербурга, аспирантов вузов, отраслевых и академических институтов, расположенных на территории Санкт-Петербурга в 2022 году. Результаты исследований по тематике диссертации были отмечены как лучший доклад на XXIV Зимней школе по механике сплошных сред в г. Пермь, 2025г.

Работа выполнена при поддержке грантов Российского научного фонда (проект № 25-19-00921), Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-08-01252).

Публикации по теме диссертации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 11 работах, в том числе в 3 работах в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, и в 7 работах, входящих в международные базы данных Scopus и Web of Science.

Личный вклад автора. Все результаты, которые выносятся на защиту, получены соискателем лично. Автором лично проведены аналитические выкладки и верифицированы выражения для вычисления КИН через перемещения берегов трещины в методе экстраполяции перемещений и через J_k -интегралы в методе эквивалентного объемного интегрирования для ортотропных материалов и материалов с кубической симметрией свойств, проанализировано влияние анизотропии материала, моды нагружения и поворота осей анизотропии материала на взаимодействие множественных трещин, предложен и верифицирован на экспериментальных данных критерий направления роста трещины в монокристаллических никелевых сплавах в кристаллографической и некристаллографической модах, проведен анализ влияния анизотропии никелевых сплавов на трещиностойкость рабочей лопатки газовой турбины. Экспериментальные результаты исследований предоставлены Л.Б. Гецовым, В.Н. Шлянниковым и А.С. Семеновым.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 199 страниц, содержит 111 рисунков и 29 таблиц. Список литературы содержит 159 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель и основные задачи исследования, указаны научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы и основные положения, выносимые на защиту, представлена информация о структуре диссертации и об апробации работы.

В первой главе рассмотрены теоретические основы и численные методы (как стандартные, так и разработанные), применяющиеся в механике разрушения анизотропных материалов.

На основе теории функции комплексного переменного (ТФКП) и формализма Лехницкого представлен вывод асимптотических выражений для перемещений и напряжений в окрестности вершины трещины в случае анизотропного материала.

Представлен обзор основных параметров разрушения, применяемых при анализе трещиностойкости анизотропных материалов, а также численных методов для их вычисления: метода экстраполяции перемещений, метода экстраполяции напряжений и метода эквивалентного объемного интегрирования.

Для монокристаллического материала с *кубической симметрией*, характеризуемого тремя независимыми упругими константами $E_{[100]}$, $\nu_{[100][010]}$, $G_{[100][010]}$, на основе ТФКП и формализма Лехницкого получены выражения связи КИН и компонент вектора перемещений берегов трещины в окрестности вершины трещины для случая плоского напряженного состояния (ПНС):

$$\begin{aligned} K_I &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \frac{E_{[100]}}{\sqrt{2 + \left(\frac{E_{[100]}}{G_{[100][010]}} - 2\nu_{[100][010]} \right)}} u_y, \\ K_{II} &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \frac{E_{[100]}}{\sqrt{2 + \left(\frac{E_{[100]}}{G_{[100][010]}} - 2\nu_{[100][010]} \right)}} u_x, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_x , u_y – компоненты перемещений берегов трещины в системе координат трещины, K_I , K_{II} – коэффициенты интенсивности напряжений, соответствующие модам нормального отрыва и продольного сдвига, $E_{[100]} = E_{[010]} = E_{[001]}$ – модуль Юнга материала с кубической симметрией в кристаллографическом направлении $[100]$ (вдоль ребра кристаллической решетки), $G_{[100][010]}$ – модуль сдвига, $\nu_{[100][010]}$ – коэффициент Пуассона. Показано, что в случае кубической симметрии формулы не зависят от угла наклона трещины относительно осей анизотропии материала.

Для *ортотропного* монокристаллического материала аналогичные (1) выражения связи КИН и компонент вектора перемещений берегов трещины для ПНС имеют вид:

$$\begin{aligned}
K_I &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \left[\frac{\sqrt{E_{[100]}E_{[010]}}}{2B} \left(1 - \sqrt{\frac{E_{[100]}}{E_{[010]}}} \right) \sin 2\varphi \cdot u_x + \frac{\sqrt{E_{[100]}E_{[010]}}}{B} \left(\sqrt{\frac{E_{[100]}}{E_{[010]}}} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right) u_y \right], \\
K_{II} &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \left[\frac{\sqrt{E_{[100]}E_{[010]}}}{B} \left(\sqrt{\frac{E_{[100]}}{E_{[010]}}} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right) u_x + \frac{\sqrt{E_{[100]}E_{[010]}}}{2B} \left(1 - \sqrt{\frac{E_{[100]}}{E_{[010]}}} \right) \sin 2\varphi \cdot u_y \right],
\end{aligned} \quad (2)$$

где φ – угол наклона трещины по отношению к оси ортотропии материала $[100]$, $E_{[100]}$ и $E_{[010]}$ – модули Юнга в плоскости упругой симметрии ортотропного материала, $B = \sqrt{2 \sqrt{\frac{E_{[100]}}{E_{[010]}}} + \left(\frac{E_{[100]}}{G_{[100][010]}} - 2\nu_{[100][010]} \right)}$ – вспомогательная константа, равная двум для изотропного материала.

Численная реализация метода экстраполяции перемещений на основе уравнений (1) и (2) выполнена в конечно-элементном (КЭ) программном комплексе PANTOCRATOR. Результаты верификации разработанных методов, алгоритмов и программной реализации для задачи об одноосном растяжении ортотропной плоскости с внутренней наклонной трещиной при ПНС, имеющей аналитическое решение показано на Рис. 1, где σ_0 – растягивающее напряжение, L – полудлина трещины. Следует отметить, что аналитическое решение не чувствительно к виду анизотропии и к упругим характеристикам материала.

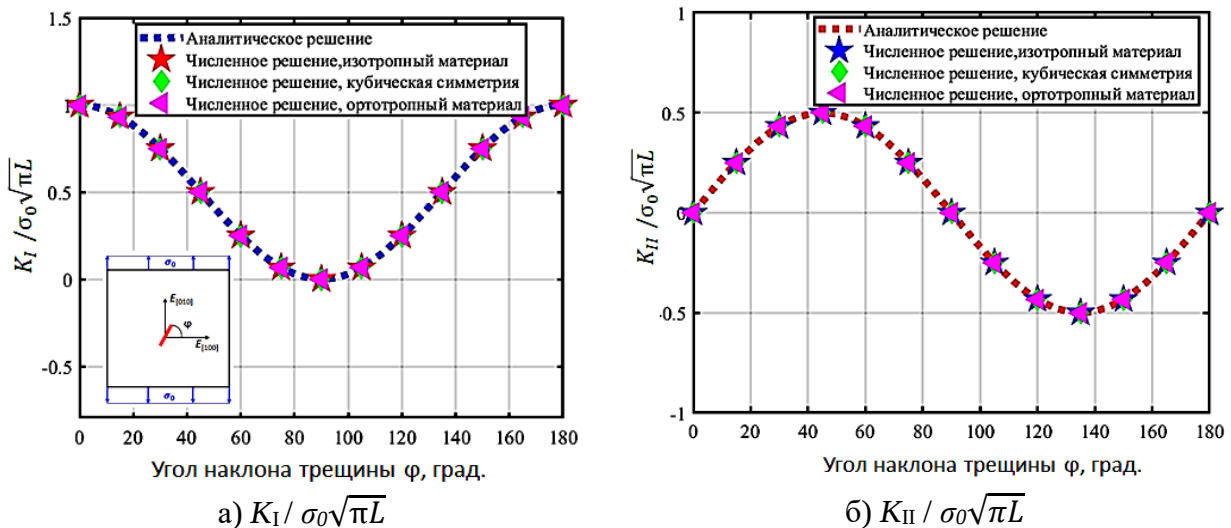


Рис. 1. Результаты сравнения численного решения с аналитическим в задаче об одноосном растяжении плоскости с наклонной трещиной при различных углах наклона трещины φ

Предложенные методы расчета КИН также были сравнены с известными из литературы численными решениями задачи о растяжении ортотропной полосы с 2 и 3 наклонными параллельными трещинами. Отличие не превышало 1,9% при вариации в широком диапазоне свойств материала и углов наклона трещин.

Во второй главе на основе разработанных численных методов определения КИН для материалов с кубической симметрией и ортотропного материала исследуется влияние класса сингонии, ориентации осей анизотропии и типа

граничных условий на параметры разрушения одиночной и нескольких параллельных краевых трещин.

При проведении расчетов рассматривались следующие классы симметрии: изотропный материал, материал с кубической симметрией и ортотропный материал. В качестве меры отклонения упругих модулей анизотропных материалов от изотропии для плоских задач введены следующие параметры:

$$\rho = \frac{E_{[100]}}{2G_{[100][010]}} - \nu_{[100][010]}, \quad k = \frac{E_{[100]}}{E_{[010]}}, \quad (3)$$

где $E_{[100]}$ – модуль Юнга материала в кристаллографическом направлении $[100]$, $E_{[010]}$ – модуль Юнга материала в направлении $[010]$, $G_{[100][010]}$ – модуль сдвига, $\nu_{[100][010]}$ – коэффициент Пуассона. В расчетах варьируются граничные условия – они соответствуют или моде I (нормальный отрыв) или моде II (продольный сдвиг).

Результаты расчетов КИН для одиночной краевой трещины при различных отношениях длины трещины к ширине пластины L/W при одноосном растяжении и сдвиге показаны на Рис. 2а и б. При $\rho < 1$ наблюдаются большие значения K_I для анизотропного материала в сравнении с изотропным. При $\rho > 1$ наблюдаются большие значения K_I при $L/W > 0,1$ и K_{II} во всем диапазоне длин трещин для анизотропного материала в сравнении с изотропным. Полученные результаты указывают на неконсервативность оценок КИН для краевой трещины в анизотропном материале при использовании изотропной модели материала.

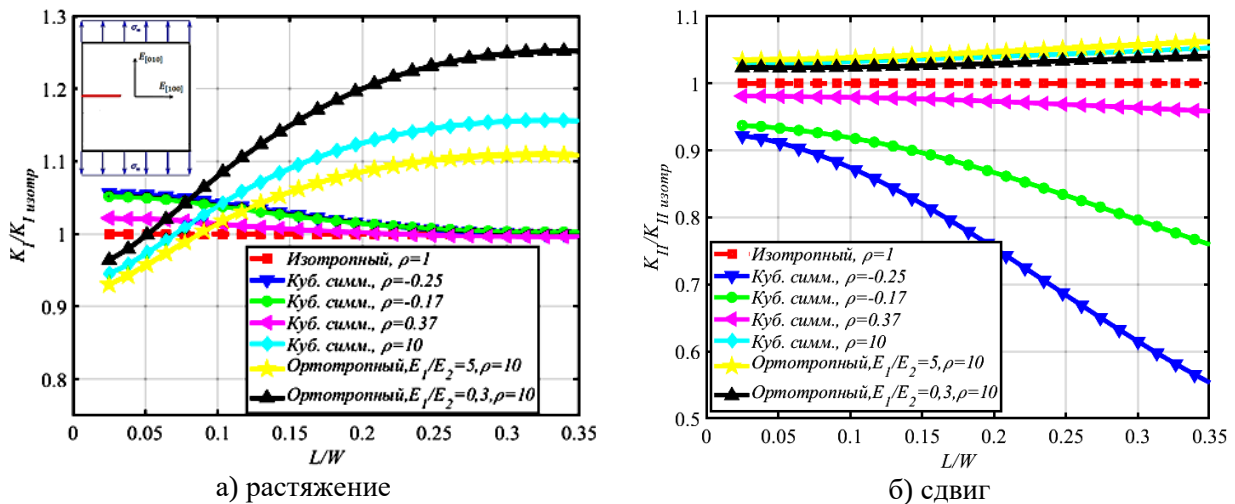


Рис. 2. Влияние параметров анизотропии и условий нагружения для одиночной краевой трещины

Результаты исследования взаимного влияния крайних трещин на центральную при рассмотрении трех параллельных краевых трещины при различных отношениях расстояния между трещинами к ширине пластины d/W и вариантах параметров анизотропии при одноосном растяжении и сдвиге показаны на Рис. 3а и б (представлены КИН для центральной трещины).

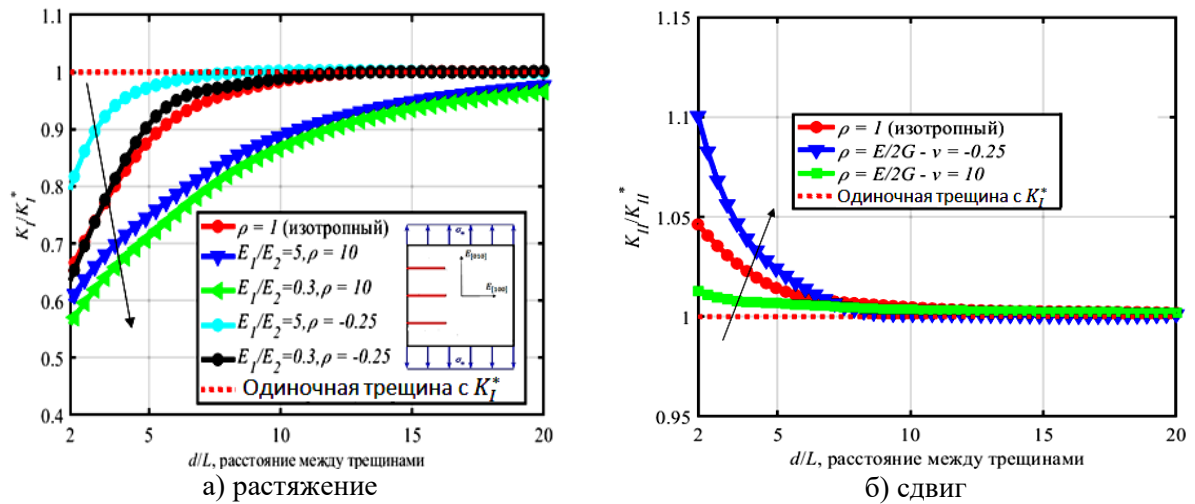


Рис. 3. Влияние параметров анизотропии материала на КИН центральной из трех трещин равной длины при а) растяжении для ортотропного материала; б) сдвиге для кубической симметрии

В случае растяжения наблюдается эффект экранирования (затенения) K_I внутренней трещины крайними; в случае сдвига происходит усиление K_{II} внутренней трещины крайними, которое гораздо слабее эффекта экранирования (Рис. 3). При увеличении отношений $E_{[010]}/E_{[100]}$ и $E_{[010]}/G_{[100][010]}$, то есть увеличении жесткости материала в направлении перпендикулярном трещинам, эффекты экранирования и усиления трещин усиливаются. Рис. 4 демонстрирует эффект экранирования при растяжении полуплоскости с тремя параллельными краевыми трещинами равной длины в зависимости от анизотропии материала. Рассматривались варианты с кубической симметрией при $\rho = -0,25$ (Рис. 4а) и $\rho = -10$ (Рис. 4б) и ортотропный материал с $k = 5$, $\rho = -0,25$ (Рис. 4в) для случая растяжения полуплоскости с тремя краевыми трещинами равной длины.

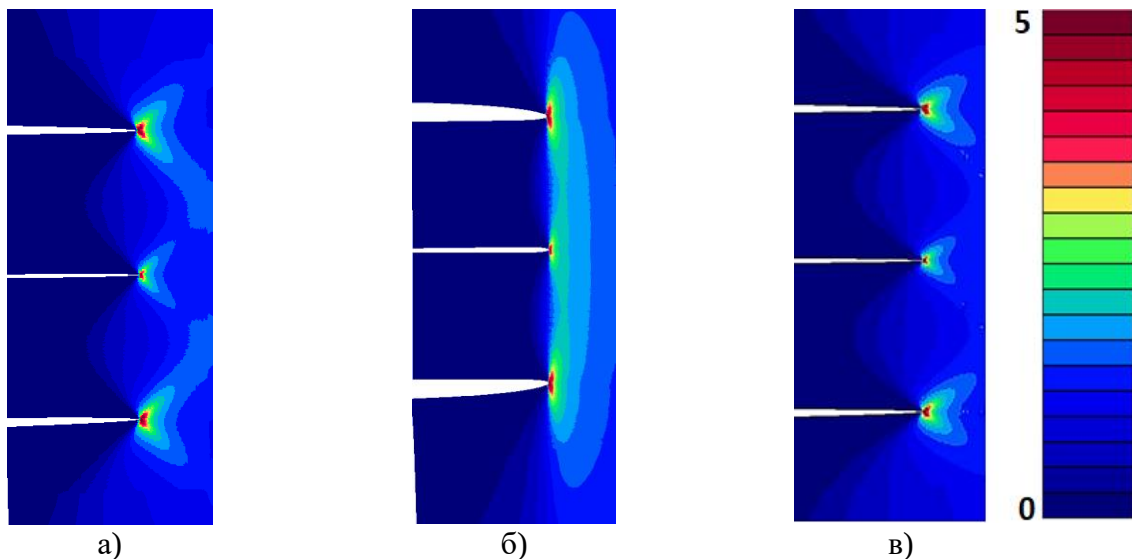


Рис. 4. Влияние анизотропии материала на эффект экранирования при растяжении полуплоскости с тремя краевыми трещинами. Распределение полей относительных вертикальных напряжений σ_{yy}/σ_0 при а) кубической симметрии с $k = 1$, $\rho = -0,25$, б) кубической симметрии с $k = 1$, $\rho = 10$, в) ортотропного материала с $k = 5$, $\rho = -0,25$

Расстояние между трещинами d/L влияет на эффект экранирования трещины, который нивелируется на расстоянии 10-20 длин трещины в зависимости от параметров анизотропии.

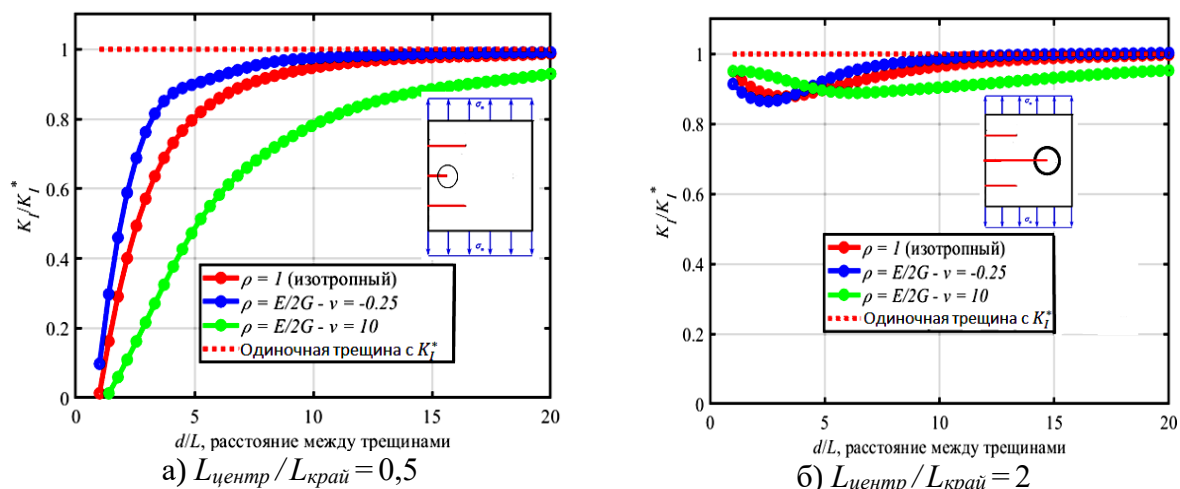


Рис. 5. Влияние длины центральной из 3х краевых трещин на КИН при растяжении:
а) меньшая центральная трещина; б) большая центральная трещина

Также установлено, что длина центральной трещины по отношению к крайним трещинам оказывает значительное влияние на величину эффекта экранирования: от 95 % в случае два раза *меньшей* центральной трещины ($L_{\text{центр}}/L_{\text{край}}=0,5$) до 10 % для в два раза *большей* центральной трещины ($L_{\text{центр}}/L_{\text{край}}=2$) (Рис. 5). Данный эффект объясняет образование одной магистральной трещины из нескольких микротрещин прогрессирующим ростом наибольшей вследствие экранирования остальных трещин-соседей.

Показано, что в случае кубической сингонии материала ориентация осей анизотропии материала по отношению к трещине слабо влияет на параметры разрушения (в пределах 10-15 %), но приводит к появлению смешанной моды разрушения при растяжении или сдвиге, что существенно влияет на направление распространения краевых трещин (Рис. 6). K_I^* и K_{II}^* обозначают КИН для одиночной трещины в полуплоскости.

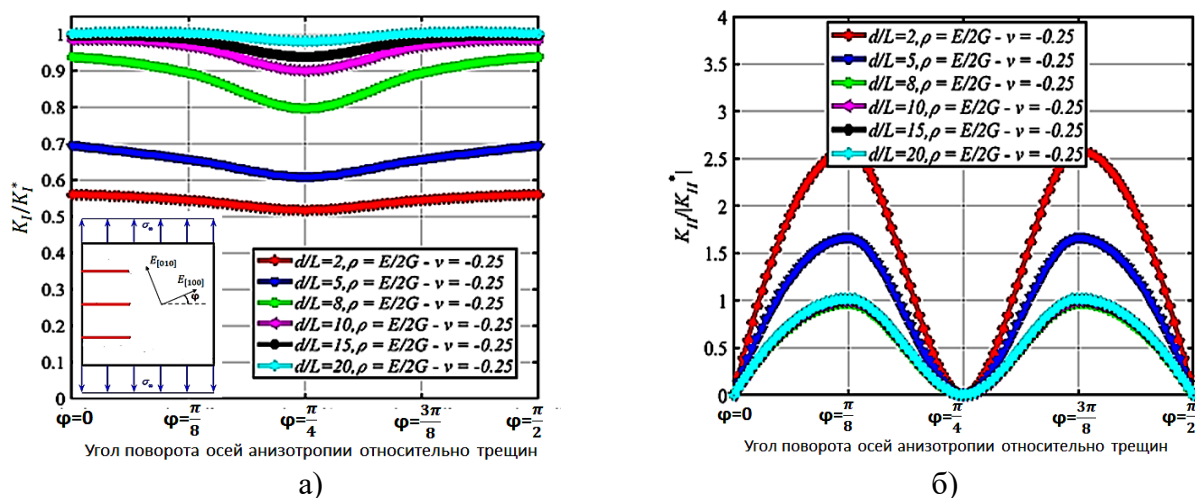


Рис. 6. Влияние поворота осей анизотропии (случай 3 трещин равной длины) на КИН при растяжении в случае кубической симметрии $\rho = -0,25$: а) K_I / K_I^* ; б) K_{II} / K_{II}^*

Эффект чувствительности смешанности мод разрушения к углу отклонения осей анизотропии от направления трещины исследован также аналитически для одной и для трех трещин для случая материала с кубической симметрией.

Рассматривался учет пластичности на эффект затенения для 3 краевых трещин равной длины при различных отношениях растягивающего напряжения σ_0 к пределу текучести σ_T : $\sigma_0/\sigma_T=0.18$, $\sigma_0/\sigma_T=0.36$, $\sigma_0/\sigma_T=1$. В расчетах использовалась модель материала с билинейным упрочнением. Результаты показали, что учет пластичности не выявил заметного влияния (см. Рис. 7). Отличие от расчетов с использованием модели линейно-упругого материала также оказалось не значительным. В качестве параметра разрушения для сравнения результатов использовался контурный J_1 -интеграл.

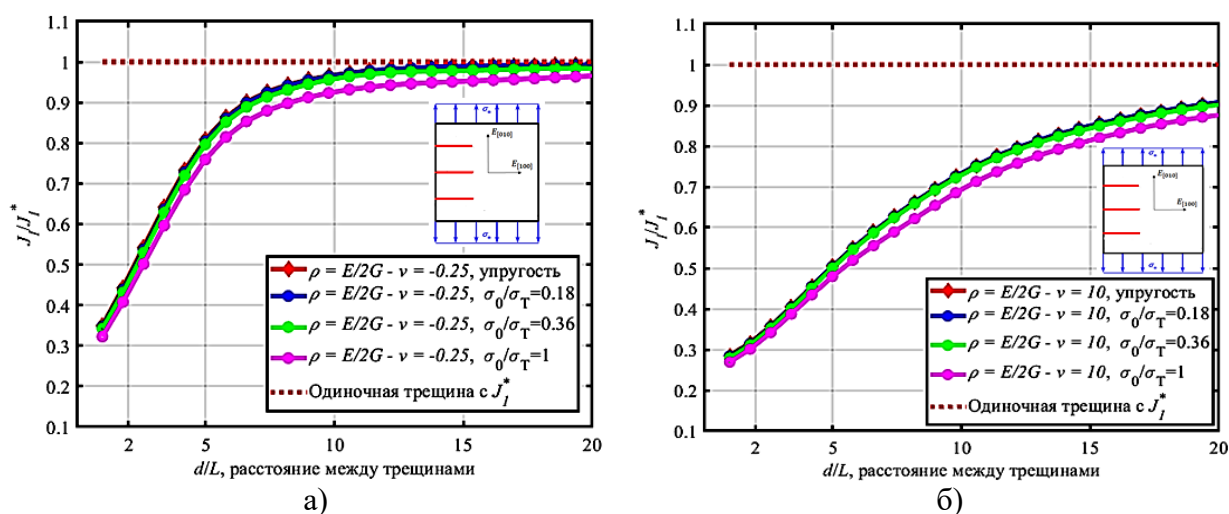


Рис. 7. Влияние пластичности на эффект затенения краевой трещины в случае кубической симметрии: а) J_1 / J_1^* , $\rho = -0,25$; б) J_1 / J_1^* , $\rho = 10$

Третья глава посвящена численным методам вычисления контурных J_k -интегралов при смешанной моде нагружения, пригодных как для линейно-упругих материалов, так и для упругопластических материалов, а также рассматривается вычисление КИН через контурные J_k -интегралы для материалов с кубической симметрией и ортотропных материалов.

Предлагаемый метод вычисления J_k -интегралов основан на методе эквивалентного объемного интегрирования (ЭОИ), разработанном Г.П. Никишковым и S.N. Atluri и определяемом в двумерном случае уравнениями

$$J_k = - \int_A \left(W \frac{\partial s}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) dA - \int_{\Gamma_{c12}} \left(W n_k - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) s d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \left(W n_k - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Gamma, \quad (4)$$

где W – плотность механической энергии деформации, u_i и σ_{ij} – компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в системе координат трещины x_k , $s = s(x_1, x_2)$ – функция равная 1 на ближайшем контуре Γ_1 и 0 на дальнем контуре Γ_2 , Γ_c – берега трещины, Γ_{c12} – часть берегов трещины между контурами интегрирования Γ_1 и Γ_2 . При вычислении контурного J_2 -интеграла возникает

проблема существенного снижения точности вследствие ошибок при интегрировании по берегу трещины вблизи вершины трещины. Для улучшения точности был рассмотрен ряд модификаций: метод линейной экстраполяции с внешних контуров на внутренние с использованием особенностей сингулярного аналитического решения для полей напряжений в вершине трещины, зануление значения интеграла по берегу трещины в J_2 в КЭ около вершины трещины, использование численного значения J_2 – интеграла на основе КЭ решения с различными весовыми коэффициентами и без модификаций.

Результаты сравнительного анализа предложенных модификаций (всего было рассмотрено 7 вариантов) вычисления J_2 – интеграла для задачи об одноосном растяжении изотропной плоскости с одиночной внутренней наклонной трещиной показали, что наиболее точным является способ линейной экстраполяции J_2 – интеграла с внешних контуров на контур охватывающий первый элемент. Метод, основанный на занулении интеграла по берегу трещины в первом КЭ около вершины трещины, обладает значительной погрешностью 15-20%, но является приемлемым для грубых инженерных оценок. Наибольшей погрешностью обладает способ вычисления J_2 – интеграла на основе результатов КЭ расчета без модификаций.

Соотношения между КИН и контурными J_k – интегралами в общем случае анизотропных материалов и смешанной моды разрушения для плоских задач имеют вид:

$$\begin{cases} J_1 = -\frac{S'_{11}}{2} \left(K_I^2 \operatorname{Im} \left(\left(\mu'_1 + \mu'_2 \right) \bar{\mu}'_1 \bar{\mu}'_2 \right) + 2K_I K_{II} \operatorname{Im} \left(\bar{\mu}'_1 \bar{\mu}'_2 \right) - K_{II}^2 \operatorname{Im} \left(\mu'_1 + \mu'_2 \right) \right) \\ J_2 = \frac{S'_{11}}{4} \left(K_I^2 \operatorname{Im} \left(\mu'^2_1 \mu'^2_2 \right) + 4K_I K_{II} \operatorname{Im} \left(\mu'_1 + \mu'_2 \right) \operatorname{Re} \left(\mu'_1 \mu'_2 \right) + K_{II}^2 \operatorname{Im} \left(\mu'^2_1 + \mu'^2_2 \right) \right) \end{cases} \quad (5)$$

где S'_{11} – константа матрицы податливости для анизотропного материала в системе координат трещины, μ'_1 и μ'_2 – комплексные параметры анизотропного материала, корни характеристического уравнения 4 степени в системе координат трещины. На основе выведенных выражений для μ'_1 и μ'_2 в главе 1 и соотношений (5), разработан метод вычисления КИН K_I и K_{II} при смешанной моде разрушения на основе контурных интегралов J_1 и J_2 для случая кубической симметрии материала в виде:

$$\begin{aligned} K_I &= \pm \sqrt{E_{[100]} \sqrt{\frac{2}{1+\rho}}} \frac{D\sqrt{J_1 - CJ_2} \pm C\sqrt{J_1 + DJ_2}}{C + D}, \\ K_{II} &= \pm \sqrt{E_{[100]} \sqrt{\frac{2}{1+\rho}}} \frac{\sqrt{J_1 - CJ_2} \mp \sqrt{J_1 + DJ_2}}{C + D}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $C, D = \frac{\sqrt{\left(\frac{1-\rho}{2} \sin 2\varphi \cos 2\varphi\right)^2 + \left(1 - \frac{1-\rho}{2} \sin^2 2\varphi\right)^2} \pm \frac{1-\rho}{2} \sin 2\varphi \cos 2\varphi}{1 - \frac{1-\rho}{2} \sin^2 2\varphi}$ - константы, завися-

щие от угла наклона трещины по отношению к осям анизотропии материала φ , а также параметра анизотропии ρ и $E_{[100]}$ - модуля Юнга в кристаллографическом направлении $[100]$.

На основе соотношений (5) аналогичным способом был также разработан метод вычисления КИН при смешанной моде разрушения на основе контурных интегралов J_1 и J_2 для случая ортотропного материала.

Результаты верификации соотношений (6) на краевой задаче об одноосном растяжении плоскости с одиночной внутренней наклонной трещиной для случая кубической симметрии материала показали их работоспособность и высокую точность расчетов. На рис. 8 представлено сравнение численных результатов с аналитическими при использовании модификаций метода эквивалентного объемного интегрирования, где σ_0 – растягивающее напряжение, L – полудлина трещины. Так же, как и для кубической симметрии и изотропного материала, худшим вариантом является вариант без модификаций (вариант G), лучшим вариантом является вариант с линейной экстраполяцией (вариант C) с внешних контуров на внутренние.

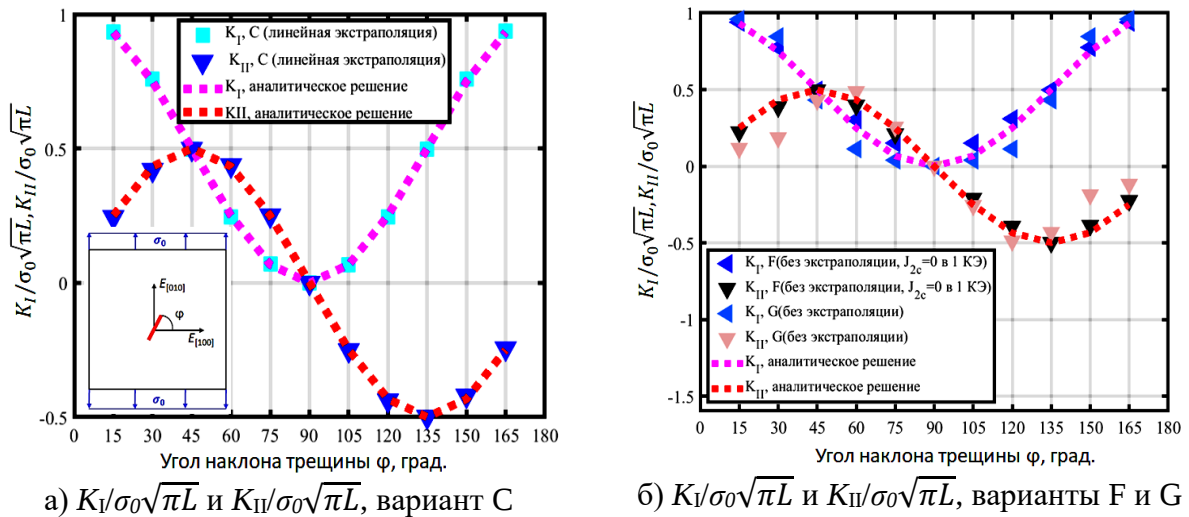


Рис. 8. Сравнение различных методов вычисления J_2 с аналитическими решениями для КИН

В четвертой главе рассматривается моделирование роста усталостных трещин в компактных образцах из монокристаллических сплавов на никелевой основе для кристаллографической и некристаллографической моды разрушения и проводится верификация разработанного критерия выбора направления роста трещины на экспериментальных данных.

При усталостном росте трещин в монокристаллических никелевых сплавах в зависимости от температуры и частоты нагружения наблюдается 2 варианта

разрушения образцов – по некристаллографической моде, когда направление трещины определяется максимальными окружными напряжениями около вершины трещины и по кристаллографической моде – вдоль плоскостей $\langle 111 \rangle$ ГЦК-монокристалла с максимальным фактором Шмида. В качестве критерия выбора направления роста трещины в данной работе предлагается критерий максимальных относительных окружных напряжений с учетом анизотропии прочности материала:

$$\Delta\varphi = \arg \max_{\varphi} \frac{\sigma_{\varphi\varphi}(\varphi)}{\sigma_c(\varphi)}, \quad (7)$$

где $\sigma_{\varphi\varphi}$ – окружные напряжения в полярной системе координат с центром в вершине трещины, $\sigma_c(\varphi)$ – предел прочности материала, зависящий от ориентации осей анизотропии. Зависимость предела прочности от направления выбрана соответствующей квадратичному критерию Хилла для ортотропных материалов. Таким образом, на основе (7), разработан единый критерий выбора направления усталостного роста трещины для кристаллографической и некристаллографической мод разрушения в виде:

$$\Delta\varphi = \arg \max_{\varphi} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^3 (\mu_i \sin \varphi + \cos \varphi) N_{ij}^{-1} K_j \right)}{\left(\sqrt{\frac{\cos^4(\varphi - \alpha)}{\sigma_{t[100]}^2} + \frac{\sin^4(\varphi - \alpha)}{\sigma_{t[010]}^2} + \left(\frac{k(T)}{\sigma_{t[110]}^2} - \frac{2}{\sigma_{t[100]}^2} \right) \sin^2(\varphi - \alpha) \cos^2(\varphi - \alpha)} \right)^{-1}}, \quad (8)$$

где $\sigma_{t[100]} = \sigma_{t[010]}$ – пределы прочности на растяжение в направлениях $[100]$ и $[010]$ монокристаллических никелевых сплавов, $\sigma_{t[110]}$ – предел прочности в направлении $[110]$, угол α учитывает отклонение кристаллографических осей от направления трещины, K_j – КИН, N_{ij}^{-1} – элементы матрицы, учитывающей анизотропию материала. Результаты идентификации k для монокристаллического сплава ВЖМ4 показали: $k = 4$ для некристаллографической моды, $k = 1/4$ для кристаллографической моды разрушения. Так как переключение между модами определяется прежде всего температурой, то можно предложить аппроксимацию коэффициента $k(T)$, имеющую экспоненциальную зависимость от температуры.

Верификация предложенного критерия (8) осуществлялась на основе экспериментальных данных по траекториям роста усталостных трещин в СТ-образцах из монокристаллических никелевых сплавов ЖС32 и ВЖМ4. Моделирование процесса роста трещин проводилось с помощью метода конечных элементов в программном комплексе PANTOCRATOR.

Результаты сравнения расчетов траекторий роста трещины с экспериментом для 2-х никелевых сплавов в случае некристаллографической моды представлены на Рис. 9.

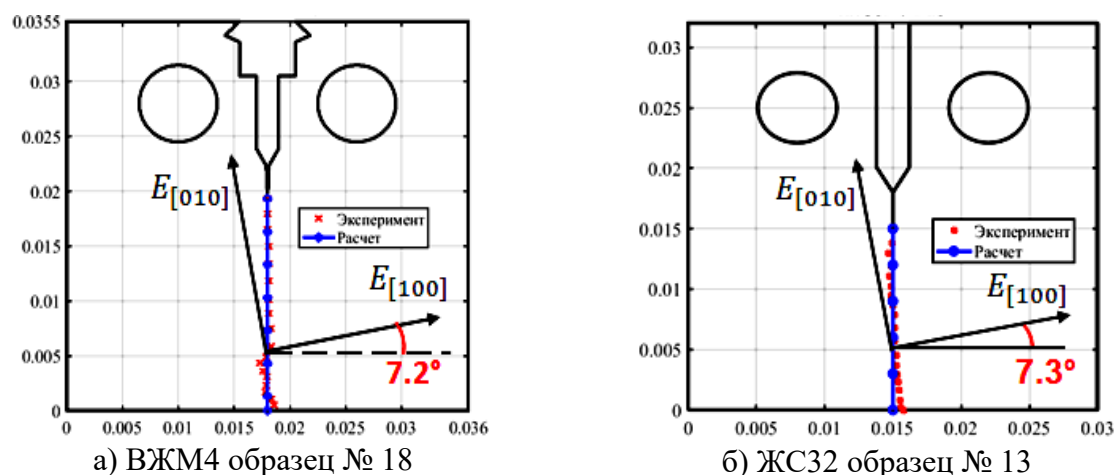


Рис. 9. Сравнение результатов расчета с экспериментом для некристаллографической моды

Результаты сравнения с экспериментом для случая кристаллографической моды разрушения показаны на Рис. 10. Следует отметить высокую точность пошагового прогноза траектории роста трещины на основе критерия (8).

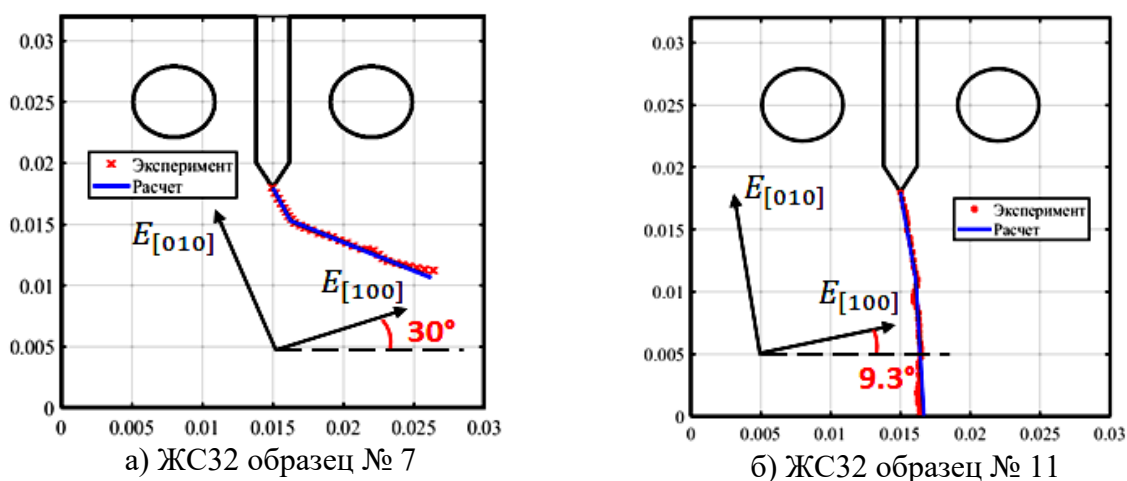
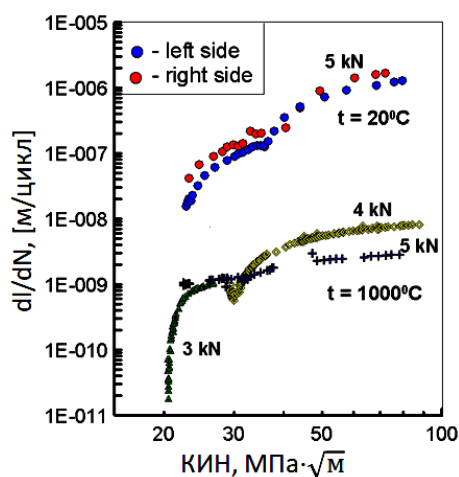


Рис. 10. Сравнение результатов расчета с экспериментом для кристаллографической моды

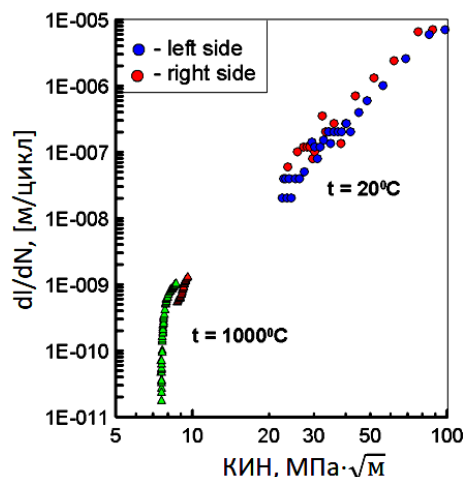
Для определения долговечности компактных образцов использовался закон Пэриса усталостного роста трещины:

$$\frac{dl}{dN} = C (\Delta K)^m, \quad (9)$$

где l – длина трещины, N – число циклов, ΔK – размах КИН в цикле, C и m – константы материала. Идентификация констант закона Пэриса (9) для монокристаллических сплавов на никелевой основе ВЖМ4 и ЖС32 осуществлялась на основе экспериментальных данных кинетических диаграмм усталостного разрушения (КДУР) (см. рис. 11, предоставлены Гецовым Л.Б. и Шлянниковым В.Н.).



а) ВЖМ4 (20°, 1000°)



б) ЖС32 (20°, 1000°)

Рис. 11. КДУР для никелевых сплавов а) ВЖМ4 и б) ЖС32

Результаты расчетов долговечности компактных образцов для некристаллографической моды разрушения показали, что число циклов до разрушения при $T = 1000^\circ\text{C}$ у образца ВЖМ4 № 18 – 33 230 циклов, ЖС32 № 13 – 46 938 циклов, что хорошо совпадает с экспериментальными данными.

В пятой главе в качестве актуального для инженерной практики примера рассматривается влияние кристаллографической ориентации монокристаллической рабочей лопатки ГТУ из сплава ЖС32 на параметры разрушения для потенциально возможной горизонтальной полуэллиптической трещины глубиной 1 мм в корневом сечении пера лопатки. Анализировалось влияние *аксиального* отклонения кристаллографической ориентации лопатки от направления [001], характеризуемого углом θ , а также *азимутального* отклонения лопатки от направления [001] в плоскости трещины, характеризуемого углом ψ на распределение КИН вдоль фронта трещины. В качестве нагрузок выступали центробежная сила от вращения 6000 об/мин и, в качестве примера, линейное распределение температуры по высоте пера лопатки. Примеры распределения K_I по фронту трещины в зависимости от углов ψ и θ показаны на Рис. 12, где K_{IC} – критическое значение КИН монокристаллического никелевого сплава. Показано, что угол аксиального отклонения θ влияет на значения КИН значительно сильнее, чем угол азимутального отклонения ψ .

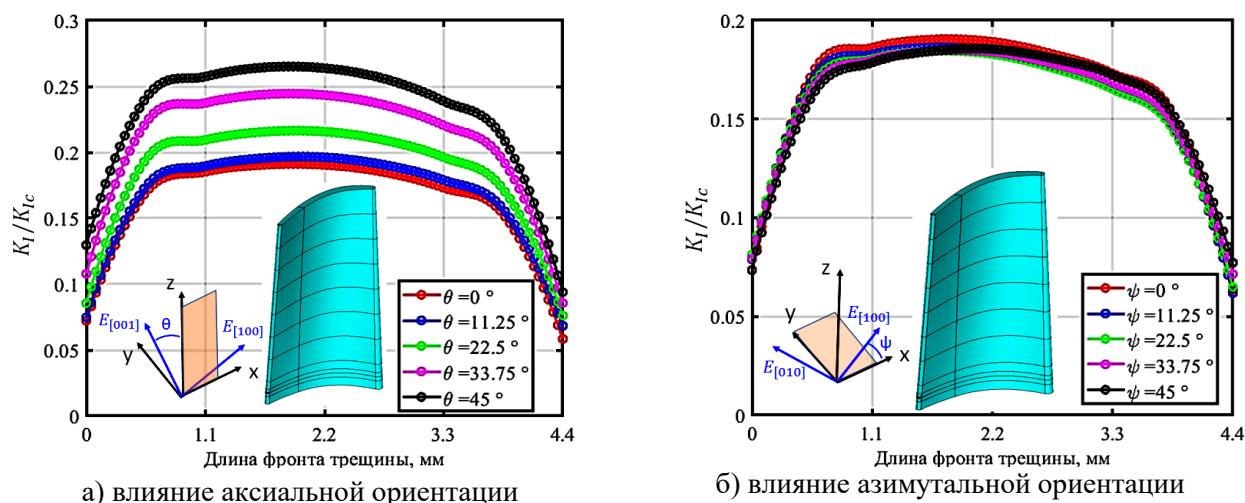


Рис. 12. Зависимости распределения КИН вдоль фронта трещины:
а) K_I / K_{Ic} от угла θ аксиального отклонения лопатки от ориентации [001],
б) K_I / K_{Ic} от угла ψ азимутального отклонения лопатки от ориентации [100]

Сравнение эффектов затенения для 3-мерной рабочей лопатки газовой турбины и 2-мерной полуплоскости показано на Рис. 13. Были рассмотрены три полуэллиптических краевых трещины глубиной 1 мм в пере лопатки газовой турбины. Анализировалось влияние расстояния между трещинами на затенение максимального КИН моды нормального отрыва средней краевой трещины.

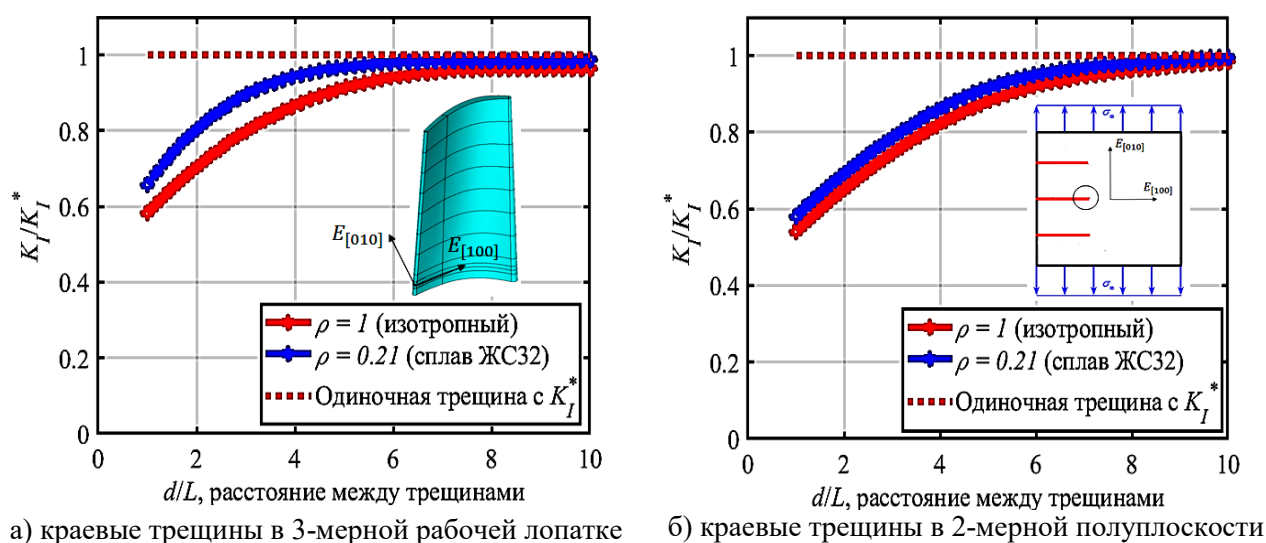


Рис. 13. Зависимости затенения K_I/K_I^* в зависимости от расстояния d/L между трещинами:
а) в 3-мерной рабочей лопатке газовой турбины, б) в 2-мерной полуплоскости

Результаты сравнения, представленного на рис. 13, показали, что эффект затенения в случае полуплоскости выражен сильнее, чем для случая рабочей лопатки газовой турбины, а влияние анизотропии выражено сильнее в случае рабочей лопатки газовой турбины.

В заключении сформулированы основные результаты работы, выводы и рекомендации.

Основные результаты

1. Разработан численный метод экстраполяции перемещений для вычисления КИН K_I и K_{II} при смешанной моде разрушения в случае анизотропных материалов, а именно материалов с кубической симметрией и ортотропного материала. Выполнена программная реализация метода в КЭ программном комплексе PANTOCRATOR. Произведена верификация метода на аналитических и численных решениях, известных из литературы.
2. Разработан подход для вычисления контурного J_2 -интеграла на основе линейной экстраполяции с внешних контуров на внутренние с использованием особенностей сингулярного аналитического решения для полей напряжений в вершине трещины и реализован в КЭ программном комплексе PANTOCRATOR.
3. Разработан метод вычисления КИН K_I и K_{II} при смешанной моде разрушения на основе контурных интегралов J_1 и J_2 для случая кубической симметрии материала и ортотропного материала. Выполнена программная имплементация метода в КЭ программном комплексе PANTOCRATOR. Произведена верификация метода на основе сравнения с известным из литературы аналитическим решением.
4. Для случая роста одиночной краевой трещины в пластине из ортотропного материала и материала с кубической симметрией при различных условиях нагружения установлена существенная неконсервативность оценок КИН с использованием изотропной модели материала.
5. Получены и проанализированы результаты численного моделирования взаимодействия множественных краевых трещин в пластине из ортотропного материала и материала с кубической симметрией, позволяющие установить чувствительность эффектов экранирования и усиления к анизотропии, условиям нагружения и относительным длинам трещин и расстояний между ними. Для случая краевой трещины и кубической сингонии показано, что с увеличением размера зоны пластичности эффект затенения уменьшается, степень затенения незначительно зависит от анизотропии материала.
6. Разработан единый критерий определения направления усталостного роста трещины для кристаллографической и некристаллографической мод разрушения. Проведена верификация критерия на основе сравнения с экспериментальными данными.
7. Получены оценки долговечности компактных образцов из монокристаллических сплавов на никелевой основе ВЖМ4 и ЖС32 для некристаллографической моды разрушения.
8. Получено численное решение задачи о влиянии аксиального и азимутального отклонений кристаллографической ориентации для монокристаллической рабочей лопатки ГТУ на распределение КИН вдоль фронта трещины в корневом сечении пера лопатки.

Основные публикации по материалам диссертации

В изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. Савиковский А.В., Семенов А.С. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений в ортотропных материалах при смешанной моде разрушения в плоском напряженном состоянии // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2022. – Т. 15. – № 2. – С. 102-123.
2. Савиковский А.В., Семенов А.С. Расчет параметров разрушения для трещин в материалах с кубической симметрией при плоском деформированном состоянии // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2023. – Т. 16. – № 3. – С. 131-149.
3. Фролов М.М., Савиковский А.В., Семенов А.С. Энергетический критерий разрушения на основе диссипативного неравенства // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2024. – Т. 17. – № 4. – С. 147-160.

В изданиях, входящих в базы цитирования Scopus / Web of Science:

4. Savikovskii A.V., Semenov A.S. Extrapolation methods for calculating the contour J_2 -integral at the mixed mode of fracture // Z Angew Math Mech. – 2026. – Vol. 106. – P. 1-24.
5. Savikovskii A.V., Semenov A.S., Kachanov M.L. Influence of material anisotropy on the mechanics of surface damage // International Journal of Engineering Science. – 2024. – Vol. 198. – 104025.
6. Savikovskii A.V., Semenov A.S. Influence of material anisotropy on the interaction between cracks under tension and shear // Materials Physics and Mechanics. – 2023. – Vol. 51(5). – P. 24-37.
7. Savikovskii A.V., Gordeev A.N., Michailov A.A., Antonova O.V., Semenov A.S. (2023). Numerical aspects of the J-integral estimation for thermomechanical loading. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. – 2023. – P. 157-175.
8. Savikovskii A.V., Semenov A.S., Kachanov M.L. Influence of material anisotropy on the interaction of a crack with free boundary // Mechanics of Solids. – 2022. – Vol. 57. – No. 8. – P. 2030-2037.
9. Savikovskii A.V., Semenov A.S., Getsov L.B. Crystallographic orientation, delay time and mechanical constants influence on thermal fatigue strength of single - crystal nickel superalloys // Materials Physics and Mechanics. – 2020. – Vol. 44. – № 1. – P. 125-136.
10. Savikovskii A.V., Semenov A.S., Getsov L.B. Coupled thermo-electro-mechanical modeling of thermal fatigue of single-crystal corset samples // Materials Physics and Mechanics. – 2019. – Vol. 42. – № 3. – P. 296-310.

В изданиях, входящих в базу РИНЦ:

11. Савиковский А.В. и др. Расчет коэффициентов интенсивности напряжений для материала с кубической симметрией на основе интегралов J_1 и J_2 в условиях смешанной моды нагружения // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – 2023. – С. 681-684.