

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем машиноведения Российской академии наук

На правах рукописи



Кучмин Андрей Юрьевич

**Идентификация и синтез систем управления
динамическими объектами с ограничениями**

Специальность: 05.11.16 - Информационно - измерительные
и управляющие системы (в машиностроении)

Диссертация на соискание ученой степени
доктора технических наук

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

Введение	6
Глава 1. Задачи идентификации и синтеза систем управления динамическими объектами с ограничениями	27
1.1. Проблемы синтеза и идентификации систем управления динамическими объектами с ограничениями на примере ИЭМС	27
1.2. Анализ методов идентификации систем управления динамическими объектами	42
1.3. Постановка задач математического программирования при идентификации ИЭМС	53
1.4. Идентификация внешних воздействий, действующих на ИЭМС	64
1.5. Примеры решения задач идентификации	68
1.5.1. Идентификация линейного электропривода исполнительного механизма контррефлектора радиотелескопа миллиметрового диапазона	68
1.5.2. Идентификация параметров профиля скорости свободной поверхности мишени при высокоскоростном ударе в ИИС испытательного стенда с газовой пушкой	85
1.5.3. Идентификация и анализ данных модельных расчётов наноразмерных систем	98
Выводы	107
Глава 2. Метод нелинейного программирования с произвольными ограничениями для решения задач управления и идентификации ИЭМС	109
2.1. Уменьшение числа переменных путём анализа линейных ограничений типа равенство	113
2.2. Построение области кандидатов в решения методом анализа линейных ограничений типа неравенство	115
2.3. Анализ полиномиальных ограничений	119
2.4. Анализ ограничений с разрывами	126
2.5. Анализ произвольных ограничений	128

2.6. Анализ целевой функции	130
2.7. Алгоритм оптимизации	132
2.8. Пример использования ММО и его модификаций для решения задачи синтеза траектории движения модуля ИЭМС при наличии ограничений	134
2.8.1 Синтез траектории движения с использованием градиентных методов оптимизации	137
2.8.2 Синтез траектории с использованием метода многомерных оболочек	139
2.8.3 Синтез траектории с использованием метода, основанного на построении границ области допустимых решений	141
2.8.4 Результаты численного расчёта оптимальной траектории с использованием метода, основанного на построении границ области допустимых решений	143
Выводы	150
Глава 3. Модели динамики базового блока ИЭМС	152
3.1. Линеаризованные уравнения динамики подвижной платформы с n актуаторами	158
3.2. Линеаризованные выражения векторов сил и моментов платформы с n актуаторами	174
3.3. Линеаризованные уравнения динамики платформы с учётом электроприводов	183
3.4. Математическая модель модуля ИЭМС с изменяемой геометрией адаптивной платформы и основания	184
3.5. Построение матриц эквивалентных жёсткостей для платформы Стюарта (гексапод)	188
3.6. Расчёт программной траектории базового блока ИЭМС	192
3.7. Идентификация параметров динамических систем на базе модулей ИЭМС	195
3.8. Пример идентификации параметров базового модуля ИЭМС	198

3.9. Идентификации параметров системы управления гексаподом	206
Выводы	210
Глава 4. Методы повышения качества управления зеркальными системами радиотелескопов миллиметрового диапазона посредством применения ИЭМС	212
4.1. Анализ существующих зеркальных систем радиотелескопов, методов и средств управления ими	212
4.2. Принципы построения адаптивных зеркальных систем на основе модулей ИЭМС	220
4.3. Электродинамическая модель зеркальной системы радиотелескопа миллиметрового диапазона	237
4.4. Расчёт аппроксимирующего параболоида главного зеркала	248
4.5. Применение прямого метода Ляпунова для управления элементами зеркальной системы с исполнительными механизмами ИЭМС в режимах слежения и сканирования	251
4.6. Моделирование системы позиционирования главного зеркала на примере привода азимута	260
Выводы	262
Глава 5. Идентификация характеристик материалов в информационно-измерительной системе испытательного стенда с разрезными стержнями Гопкинсона-Кольского	264
5.1. Анализ результатов динамических испытаний на установке Гопкинсона	265
5.2. Фильтрация и анализ триады импульсов	272
5.3. Фильтрация и анализ триады импульсов с учетом фазового сдвига	275
5.4. Результаты расчета характеристик материалов с учетом фильтрации	277
5.5. Анализ триады импульсов путём аппроксимации последовательностями радиально-базисных функций	286
5.6. Алгоритм разложения сигналов в ряды базисных функций	289
5.7. Анализ данных с помощью осреднённой модели образца	290

5.8. Результаты разложения сигналов в ряды базисных функций	293
Выводы	300
Заключение	302
Список литературы	304

Введение

Актуальность темы исследований. Работа посвящена решению проблем идентификации и синтеза систем управления (СУ) динамическими объектами (ДО), действующими в условиях ограничений. Объектами мониторинга и управления в подобных системах являются сложные физико-технические системы и процессы, тесно интегрированные с СУ, описание которых возможно только с кибернетических принципов. В работе рассматривается класс бурно развивающихся киберфизических систем – интеллектуальные электромеханические системы (ИЭМС). Исследуются следующие виды ИЭМС: ИЭМС с исполнительными механизмами параллельной структуры и информационно-измерительные системы испытательных стендов материалов на динамическую прочность.

Особенностью ИЭМС является применение «нежестких» моделей, у которых структура, параметры и вектор состояния не задаются на стадии проектирования, а находятся в реальном масштабе времени при их функционировании. Следующие основные факторы, препятствуют эффективному применению классических подходов идентификации, такие как нестационарность и нелинейность динамических объектов, интуитивный подход в выборе априорных моделей, низкая информационная насыщенность измерительной информации, короткие выборки измерительных данных, наличие нестационарных помех, запаздывание в каналах передачи данных и устройствах цифровой обработки. Важным является сохранение физической адекватности модели протекающим в динамическом объекте процессам, и реализуемости законов управления.

Вопросы идентификации динамических систем рассматривались в работах Р. Изермана, В.А. Бесекерского, Д. Гропа, Л. Льюнга, Л. Заде, Р. Калмана, Д. Табака, Б. Куо, М. Мюнхгофа, Г. Мзика, И. Буталиса, Д.Зэодоридиса, Н.Н. Карабутова, Т. Коттаса, М.А. Кристодоулоу, О.А. Степанова, А.А. Бобцова и др.

При идентификации и синтезе систем управления требуется численно решать задачи многомерной оптимизации при большом количестве переменных и ограничений различного вида. Это не позволяет использовать такой подход для СУ ДО типа ИЭМС из-за ограниченного быстродействия микропроцессорных средств управления и отсутствия быстрых методов решения, использующих не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности, которые позволили бы оценить время нахождения решения. Адаптация уже существующих оптимизационных процедур для синтеза СУ ДО является одним из основных классических подходов, альтернативный подход – это поиск субоптимальных решений и сведение исходной задачи к поиску целевого множества, описываемого системами неравенств. Альтернативный подход развивался В.А. Якубовичем и его последователями и получил название метода рекуррентных целевых неравенств (РЦН). В этой связи актуальность исследований в направлении развития методов как классического, так и альтернативного подходов синтеза ИЭМС несомненна.

Идеи решения многомерных оптимизационных задач, изложены в работах У.И. Зангвилла, Э. Голдрайтта, Н.Н. Моисеева, Э. Хансена, Дж. У. Уолстера, Т. Моцкина, Д.Б. Юдина, Л.С. Понтрягина, Л.Г. Хачияна, В.А. Якубовича, А.П. Карпенко и др.

Чрезвычайный интерес в последнее время проявляется к исследованиям в области ИЭМС, которые состоят из базовых модулей с параллельной кинематической схемой. В настоящее время ИЭМС широко используются в параллельных роботах или так называемых параллельных кинематических машинах, представляющих очень хорошие возможности с точки зрения точности, жесткости и способности манипулировать большими нагрузками. Самоорганизация ИЭМС эффективна при реализации сложных распределённых систем управления. Актуальной проблемой является построение моделей динамики ИЭМС и разработка методов синтеза их систем управления.

Изучению структуры, кинематики и динамики устройств параллельной структуры посвящены работы В.А. Глазунова, В.М. Герасуна, Ф.М. Диментберга, А.Н. Евграфова, С.Л. Зенкевича, В.Л. Жавнера, А.Ш. Колискора, М.З. Коловского, А.И. Корендясева, А.Ф. Крайнева, В.И. Пындака, Л.А. Рыбака, Б.Л. Саламандры, А.В. Сергеева, Л.И. Тывеса, С.В. Хейло, Е.И. Юревича, А.С. Ющенко, А.Е. Городецкого, С.Ю. Мисюрина и др.

Перспективно использовать такие модули в области робототехники и управлении элементами зеркальных систем (ЗС) больших полноповоротных радиотелескопов (РТ) наземного и космического применения. Мировой опыт показывает, что внедрение ИЭМС - это ядро всех разработок, поскольку является эффективным средством достижения главных задач управления для телескопа – повышение его чувствительности, углового разрешения и точности наведения. Всё это зависит от возможности управления в реальном режиме времени коррекцией формы поверхности и элементов зеркальной системы, высокоточного наведения ЗС РТ на космические объекты с учетом внутренних и внешних факторов, обработки огромного массива информации, визуализации процессов.

Вопросы создания и управления крупными радиотелескопами отражены в работах учёных и конструкторов: М.Ю. Архипова, Л.Д. Бахраха, И.С. Виноградова, Д.И. Воскресенского, М.А. Гурбанязова, П.Д. Калачева, А.Н. Козлова, Г.Г. Соколовского, П.В. Белянского, В.С. Поляка, В.Б. Тарасова, А.Е. Городецкого, В.В. Дубаренко, С.С. Щесняка и др.

Кроме того, в настоящее время ИЭМС стали широко использоваться в испытательных и исследовательских стендах. Однако вопрос влияния сторонних факторов на анализ экспериментальных данных, например, по динамической прочности материалов является мало изученным. Основные подходы к выбору структуры модели эксперимента по-прежнему основываются на интуиции исследователя, что объясняется сложностью и разнообразием условий экспериментов, плохой изученностью процессов,

протекающих в образце материала. Изучению данных вопросов посвящены труды Р. Дэвиса, А. Надаи, Дж. Даффи, Дж. Тейлора, Г. Кольского, Дж. Кэмпбелла, У. Линдхольма, Дж. Белла, А. Кобаяси Н.Ф. Морозова, Ю.В. Петрова, Д.А. Индейцева, А.М. Брагова, Ю.И. Мещерякова, А.К. Абрамяна, Ю.В. Судьенкова, С.А. Новикова, Г.В. Степанова, А.П. Большакова и др. При этом основной проблемой является сохранение адекватности физики процессов в материале при удалении влияния сторонних факторов, что часто не соблюдается и приводит к появлению эффектов, обусловленных влиянием стендового оборудования, сторонних факторов и информационных систем.

Всё это отражает актуальность рассмотренных в диссертации задач.

Объект исследования

Высокоточные информационно-измерительные и управляющие системы и современные технологии их идентификации и синтеза.

Цель работы

Разработка методов идентификации и синтеза систем управления динамическими объектами, функционирующими в условиях ограничений, с использованием интеллектуальных электромеханических систем.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

1. Провести анализ существующих типовых задач в областях синтеза, моделирования и идентификации сложных СУ динамическими объектами с ограничениями с целью разработки подхода в их описании как задач математического программирования (МП).

2. Разработать новые методы и быстрые алгоритмы решения полученных задач МП с помощью сведения исходной задачи многомерной условной оптимизации больших размерностей для случая, когда число

ограничений многократно превосходит число варьируемых параметров, к эквивалентному при заданной точности конечному множеству систем неравенств, описывающих целевое множество.

3. Разработать методы моделирования, управления и идентификации ИЭМС.

4. Разработать новые методы синтеза сложных распределённых СУ на основе модели базового блока ИЭМС как динамического объекта с параллельной кинематической схемой на примере управления элементами зеркальных систем больших полноповоротных радиотелескопов.

5. Разработать информационно-измерительную систему (ИИС) анализа экспериментальных данных по динамической прочности материалов с учетом влияния измерительной системы и сохранения адекватности физики процессов в материале при удалении влияния сторонних факторов.

Методы исследования

В работе использовались методы теории оптимального управления, автоматического управления, методы математического моделирования и идентификации сложных физико-технических систем, а также методы прикладной и теоретической механики. Все расчётные исследования выполнены в системе MATLAB и её приложении Simulink, а также с использованием пакета разработанных программ на языке C++. В работе анализируются данные экспериментов по идентификации параметров гексапода фирмы PI H-810 и данные испытаний на ударную прочность на стенде Гопкинсона и стенде с газовой пушкой.

Научная новизна

Выполненная работа является комплексным исследованием по развитию современных технологий синтеза и анализа высокоточных систем управления динамическими объектами с ограничениями.

1. Предложены модификации статистических идентификаторов на основе метода наименьших квадратов для систем управления квазистационарными и нестационарными динамическими объектами с применением матричного оператора сдвига во временной области, что позволяет в математической, а не в алгоритмической форме описывать разностные фильтры с различной скважностью отсчетов, а также проводить выбор параметров серии отсчетов для обеспечения оптимальной информационной насыщенности данных. Для случая низкого отношения сигнал/шум дано описание процесса идентификации как решения системы неравенств на основе множественно-функционального подхода, позволяющего при использовании интервальной невязки между выходом идентификатора и реальным динамическим объектом проводить редукцию модели.

2. Предложен метод идентификации с использованием множественно-функционального подхода для нелинейной нестационарной системы управления, основанный на анализе типов асимптотических решений при учете физических закономерностей и соответствующих ограничений на параметры и фазовые координаты, при сохранении физической адекватности модели протекающим в объекте процессам и реализуемости законов управления.

3. Впервые показано, что для динамических объектов синтез и идентификация СУ, сформулированные как задачи математического программирования, могут быть сведены к эквивалентному при заданной точности множеству задач оптимизации при линейных ограничениях, путём аппроксимации произвольных ограничений кусочно-полиномиальными функциями или рациональными дробями. Показано, что данный подход эффективен при расчёте оптимальных траекторий движения базовых модулей ИЭМС, так как он сводится к интервальным задачам от одной переменной, а именно времени переходного процесса. Подобные алгоритмы

позволяют с применением простых минимаксных процедур найти решение задачи.

4. Разработаны новые методы синтеза и идентификации сложных распределённых СУ на основе модели базового блока ИЭМС как динамического объекта с параллельной кинематической схемой для управления элементами зеркальных систем больших полноповоротных радиотелескопов.

5. Разработаны методы анализа экспериментальных данных по динамической прочности материалов с учетом влияния информационно-измерительной системы и сохранении адекватности физики процессов в материале при удалении влияния сторонних факторов.

Практическая значимость

1. Проведенные исследования стали основой для создания системы управления большим радиотелескопом миллиметрового диапазона.

2. Проведенные исследования стали основой для создания универсального контроллера базового модуля ИЭМС.

3. В ходе работы был разработан пакет программ для фильтрации и анализа экспериментальных данных по динамической прочности материалов для различных типов стендов, в том числе, установки с разрезным стержнем Гопкинсона-Кольского и стенда с газовой пушкой.

Степень достоверности и апробации результатов определяется строгостью используемого в работе математического аппарата, обоснованным применением современного пакета для численного анализа MATLAB\Simulink и сравнительным анализом результатов, полученных в диссертационной работе, с имеющимися экспериментальными данными.

Положения, выносимые на защиту

1. Метод синтеза статистических идентификаторов на основе метода наименьших квадратов для СУ квазистационарными и нестационарными динамическими объектами с применением матричного оператора сдвига во временной области, что позволяет в аналитической, а не в алгоритмической форме описывать разностные фильтры с различной скважностью отсчетов, а также проводить выбор параметров серии отсчётов для обеспечения оптимальной информационной насыщенности данных. Отличительной особенностью данного метода является то, что для случая низкого отношения сигнал/шум синтез идентификатора выполняется как решение системы неравенств на основе множественно-функционального подхода, позволяющего при использовании интервальной невязки между выходом идентификатора и реальным динамическим объектом проводить редукцию модели.

2. Метод идентификации с использованием множественно-функционального подхода для нелинейной нестационарной системы, основанный на анализе типов асимптотических решений при учете физических закономерностей и соответствующих ограничений на параметры и фазовые координаты при сохранении физической адекватности модели протекающим в объекте процессам и реализуемости законов управления.

3. Метод сведения задач синтеза и идентификации СУ динамическими объектами, сформулированных как задачи математического программирования, к эквивалентному при заданной точности множеству задач оптимизации при линейных ограничениях, путём аппроксимации произвольных ограничений кусочно-полиномиальными функциями или рациональными дробями. Показано, что данный метод эффективен при расчёте оптимальных траекторий движения базовых модулей ИЭМС, так как он сводится к интервальным задачам от одной переменной, а именно времени переходного процесса.

4. Методы синтеза и идентификации сложных распределённых СУ, на основе модели базового блока ИЭМС как динамического объекта с параллельной кинематической схемой для управления элементами зеркальных систем больших полноповоротных радиотелескопов.

5. Методы анализа экспериментальных данных по динамической прочности материалов, полученных на установке с разрезным стержнем Гопкинсона-Кольского и стенде на основе газовой пушки, с учетом влияния ИИС и сохранении адекватности физики процессов в материале при удалении влияния сторонних факторов.

Структура и объём работы.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, из 185 источников. Объём диссертации составляет 323 страницы, она содержит 40 рисунков и 22 таблицы.

В первой главе рассмотрены актуальные вопросы в области киберфизических систем, на примере ИЭМС. Описаны основные проблемы в синтезе и идентификации ИЭМС, функционирующих в условиях всевозможных ограничений. Предлагается четырёхуровневая система управления ИЭМС. Рассмотрены общие проблемы идентификации подобных систем. Дается критический анализ различных методов идентификации. Определены следующие основные факторы, препятствующие эффективному применению классических подходов, такие как нестационарность и нелинейность ДО, интуитивный подход в выборе априорных моделей, низкая информационная насыщенность измерительной информации, наличие нестационарных помех, запаздывание в каналах передачи данных и устройствах цифровой обработки. Важным является сохранение физической адекватности модели протекающим в ДО процессам, и реализуемости законов управления. Описаны методы синтеза статистических идентификаторов на основе метода наименьших квадратов для квазистационарных и нестационарных динамических объектов с

применением матричного оператора сдвига во временной области. Синтез идентификаторов формулируется как задача МП. Приводится метод идентификации с использованием множественно-функционального подхода для нелинейной нестационарной системы, основанных на решении задачи МП. Рассматриваются методы вейвлет-фильтрации и статистический анализ данных. Даются примеры идентификации различных систем.

Во второй главе рассматриваются вопросы разработки нового метода оптимизации «Метод многомерных оболочек (ММО)» для решения современных задач в областях моделирования и идентификации нелинейных и нестационарных систем, а также при анализе и фильтрации данных экспериментов.

Развивая идеи, изложенные в работах У.И. Зангвилла, Э. Голдрайта, Н.Н.Моисеева, Э.Хансена, Дж. У. Уолстера, Т. Моцкина, Д.Б. Юдина, Л.С. Понтрягина, Л.Г. Хачияна можно сделать вывод, что более эффективно использовать анализ ограничений и целевой функции в отдельности, а не переходить к безусловной оптимизации.

Основой ММО является построение области допустимых решений, путём анализа ограничений произвольного вида и их аппроксимации кусочно-полиномиальными ограничениями или рациональными дробями, что позволяет свести исходную задачу к набору взаимосвязанных подзадач математического программирования, ограничения которых формируют выпуклые многомерные оболочки, что существенно сужает область поиска.

Предложенный ММО при нахождении оптимальных значений не использует операцию дифференцирования, что позволяет использовать его при анализе стохастических и интервальных данных.

Показано применение ММО для синтеза программных движений модулей ИЭМС.

В третьей главе рассматриваются задачи построения моделей распределённых динамических систем управления на основе модулей ИЭМС. В современной робототехнике получили распространение модули ИЭМС,

которые позволяют строить модульные робототехнические системы параллельной структуры. Одним из вопросов исследования подобных ИЭМС является создание их моделей как объектов управления. Подобную задачу можно разделить на следующие этапы: расчёт оптимальной траектории движения базового блока ИЭМС с учётом всех ограничений, линеаризация модели динамики относительно найденной траектории разложением в ряд Тейлора в стационарной точке.

Задачей группового регулятора базового блока ИЭМС является выработка законов выдвижения штоков каждого актуатора с учетом быстродействия приводов актуаторов и инерции n-пода.

Для рассчитанной оптимальной программной траектории в работе была получена линеаризованная модель ББ ИЭМС:

$$\mathbf{A}_3 \ddot{\mathbf{x}} + [\mathbf{A}_2 + \mathbf{D}_2 + \boldsymbol{\mu}_2] \dot{\mathbf{x}} + [\mathbf{A}_1 + \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_1 + \mathbf{\Pi}_1 + \boldsymbol{\mu}_1] \mathbf{x} = \mathbf{\Pi}_3 \mathbf{z} + [\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3] \mathbf{w} - \mathbf{B}_3 \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{B}_2 \dot{\mathbf{y}} + [\mathbf{G}_1 - \mathbf{B}_1 + \mathbf{\Pi}_2] \mathbf{y} + [\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0 + \mathbf{G}_0 + \mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_0 + \boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{\Pi}_0],$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – соответствующие отклонения от опорной траектории верхнего и нижнего оснований: а $\mathbf{z}$ – отклонения нагрузок от значений в стационарной точке, равные $\mathbf{z} = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_{fix}$, $\mathbf{w}$ – отклонения управляющих воздействий от соответствующих значений в стационарной точке, равные $\mathbf{w} = \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{fix}$, а матрицы параметров модели: $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B}_i$ – инерциальные слагаемые, $\mathbf{C}_i$ – жесткостные параметры, $\mathbf{D}_i$ – параметры демпфирования, $\mathbf{G}_i$ – гравитационные составляющие, $\mathbf{\Pi}_i$ – составляющие внешней нагрузки, $\mathbf{H}_i$ – составляющие управления, $\boldsymbol{\mu}_i$ – параметры трения.

Описана методика моделирования матриц эквивалентных жёсткостей n-пода.

Описаны методы идентификации предлагаемых моделей, даются примеры решения подобных задач.

Четвёртая глава посвящена задачам управления зеркальными системами полноповоротных радиотелескопов с адаптивной поверхностью главного зеркала (ГЗ) на основе ИЭМС. Модули ИЭМС получили широкое

распространение в системах управления антенными установками в качестве элементов опорно-поворотных устройств зеркальных систем.

За всю историю радиоастрономии были разработаны разнообразные конструкции радиотелескопов, но практика показала, что наиболее удобным в работе оказались зеркальные антенны с полноповоротными рефлекторами. Дальнейшее улучшение качества ЗС крупных РТ связано именно с разработкой более совершенных систем активной коррекции профилей зеркал и их взаимного положения, так как создать металлоконструкцию, обладающую требуемой жесткостью невозможно. Активная коррекция предполагает наличие сложной системы управления (СУ) ЗС, использующей современные средства измерения с точностью 0.1 длины волны. Такая СУ способна прогнозировать деформации ЗС и вырабатывать кооперативное управление приводами элементов ЗС для компенсации этих деформаций. Существуют действующие антенны с адаптивными рефлекторами, щиты которых перемещаются с помощью адаптивных платформ Гью-Стюарта, например, как это реализовано в 500 метровом радиотелескопе FAST. Также подобные системы используются для позиционирования зеркал Нейсмита и контррефлекторов (GTM, РТ-13 и др.). Помимо этого, существуют реализации опорно-поворотных устройств на платформе Гью-Стюарта, например, массив анизотропии реликтового излучения им. Ли Юаньчжэ, радиоинтерферометр из 13 элементов (с возможностью расширения до 19) на поворотной 6-метровой платформе, проект ММА, космический радиотелескоп «Миллиметр» и др.

Рассматриваются вопросы управления адаптивной поверхностью главного зеркала радиотелескопа, состоящего из адаптивных щитов, исполнительными механизмами которых являются модули ИЭМС. Описан алгоритм нахождения аппроксимирующего параболоида главного зеркала с учётом особенностей исполнительных механизмов модулей ИЭМС, таких как ограничение на перемещения штоков актуаторов и линии их действия.

Предлагается алгоритм определения удлинений актуаторов, как задающих воздействий в систему управления адаптивной поверхностью.

Рассмотрен метод релейного управления ИЭМС с использованием функции Ляпунова с ограничениями в виде штрафных функций экспоненциального вида от фазовых координат, как функционала качества. Данный метод был применен для управления различными элементами ЗС 70-метрового РТ.

В главе пять исследовалась ИИС испытательного стенда с разрезными стержнями Гопкинсона-Кольского, предназначенного для проведения динамических испытаний образцов различных материалов на прочность.

Предлагается повысить эффективность ИИС стенда на основе разрезных стержней Гопкинсона-Кольского применением разработанных модулей обработки измерительной информации с использованием методов идентификации на основе множественно-функционального подхода.

Разработка методов и их верификация осуществлялись на основе экспериментальных данных по динамической прочности известняка, битума и фибробетона, габбро-диабазы полученные на установке Гопкинсона. В ходе анализа ИИС установки Гопкинсона и полученных на ней данных было выяснено, что основной проблемой при построении характеристик динамической прочности строительных материалов явились: наличие разных масштабов и значений амплитуд данных для каждого из экспериментов, осцилляционные составляющие в фиксируемых сигналах, а также погрешности, внесённые системой единого времени установки (СЕВ) – несогласованные фазовые сдвиги между нагружающим, отражённым и прошедшими сигналами с датчиков.

На основе экспериментальных данных обнаружен новый эффект, возникающий при динамическом разрушении некоторых строительных материалов - импульс, рассчитанный по прошедшему сигналу, измеренному в опорном стержне Гопкинсона — Кольского, практически не изменяется в зависимости от скорости ударника. Для обнаружения этого эффекта был

использован новый метод цифровой обработки сигналов в экспериментах по разрушению на основе фильтрации и анализа экспериментальных данных как взаимосвязанной триады нагружающего, отраженного и прошедшего импульсов.

Анализ сигналов показал, что осцилляционные составляющие, характеризующие второй и последующие всплески на прошедшем импульсе, присутствуют также и в нагружающем импульсе, и в данном случае эти составляющие могут быть отнесены к шумам самой экспериментальной установки и, как следствие, их влияние на расчёт динамических характеристик должно учитываться отдельно. Для определения такой характеристики динамической прочности, такой как инкубационное время разрушения необходимо знать положение максимума и момент времени ему отвечающий. В необработанном сигнале таких составляющих может быть несколько, а после фильтрации остается только один, который и используется для расчёта характеристик динамической прочности. Следует отметить, что положение максимума в исходном и фильтрованном сигналах могут отличаться.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы были представлены на:

1. 2-й Всероссийской научной конференции «Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB», 25-26 мая 2004, Москва, Институт Проблем Управления Российской Академии Наук (ИПУ РАН);
2. V Международной конференции по теории и технике антенн, Киев, Национальный Технический Университет Украины "Киевский Политехнический Институт, 2005 г;
3. X Международной конференции им. Острякова, СПб., «Электроприбор» 2006 г.;

4. Ежегодных научных сессиях ГУАП, посвященной Всемирному дню космонавтики, СПб, ГУАП;
5. Ежегодных научных сессиях СПб ПУ;
6. Рабочих совещаниях, посвященных ходу реализации программы РАН, проводившихся в Институте проблем машиноведения РАН, АО “КБ специального машиностроения”, СПб ПУ и Астрокосмическом Центре ФИАН (С.-Петербург, 2002-2014 гг.);
7. Десятой Всероссийской мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2017);
8. XXX конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова, 2016;
9. XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики 2015;
10. XXIX конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н.Острякова 2014;
11. International Conference on Physics and Control, PhysCon 2005
12. XXVII International Conference «Mathematical and Computer Simulation in Mechanics of Solids and Structures» MCM 2017 Fundamentals of static and dynamic fracture;
13. Intern. Symposium on Shock Waves (ISSW30). July 19-24, Tel-Aviv, Israel, (2015);
14. Международной мультиконференции "сетевое партнерство в науке, промышленности и образовании" 2016;
15. Fourth European Conference on Structural Control St.Petersburg, 2008;
16. Ukrainian Conference on Space Research, 2012.
17. XXI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2019).
18. XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.
19. XII мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2019).

20. Международной конференции «Математические методы в технике и технологиях» - ММТТ. 2019.

21. Конференции «Управление в аэрокосмических системах» (УАС-2018). 11-я Российская мультikonференция по проблемам управления. 2018.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 43 печатные работы. Основные результаты и защищаемые положения диссертации отражены в публикациях [8, 14, 15, 19-24, 49, 50, 83, 99, 103, 112-117, 119-122, 125-131, 144-147, 153, 162, 165, 167, 170, 171, 173, 177]

По теме диссертации опубликовано:

- 14 статей в журналах из списка ВАК РФ
- 10 статей в Scopus
- главы в 2 совместных монографиях
- 4 патента РФ
- результаты апробированы на 8 международных конференциях и 8 Российских конференциях.

Личный вклад автора.

- [19, 49, 99, 103, 116, 117, 119, 130, 165] - публикации без соавторов;
- [8, 112, 128, 146, 147, 167, 170] – автору принадлежит постановка задачи и реализация метода решения, концептуальная постановка и обсуждение результатов проходило вместе с соавторами;
- [14, 15, 113-115, 120-122, 125, 129, 131, 144, 145, 162, 173, 177] – вклад делится между членами авторского коллектива в равной пропорции;
- [20-24, 50, 83, 153] – автору принадлежит постановка задачи идентификации и метод её решения;
- [171] – автору принадлежит 70% вклада;

[126] – автору принадлежит 70% вклада в первой части монографии, в остальной части вклад делится между членами авторского коллектива в равной пропорции;

[127] - разделы 2.3.3., 3 и 4.5 написаны лично автором и являются частью его докторской диссертации, авторство по другим разделам делится между членами авторского коллектива в равной пропорции.

Основные публикации:

Scopus

1. Кучмин А.Ю. Проблемы идентификации нестационарных динамических объектов // Информационно-управляющие системы. 2018. № 2. С. 18–25.
2. Индейцев Д.А., Мещеряков Ю.И., Кучмин А.Ю., Вавилов Д.С. Многомасштабная модель распространения стационарных упругопластических волн. Доклады Академии наук. 2014. Т. 458. № 2. С. 165.
3. Indeitsev D.A., Meshcheryakov Y.I., Kuchmin A.Y., Vavilov D.S. Multi-scale model of steady-wave shock in medium with relaxation. Acta Mechanica. 2015. Т. 226. № 3. pp. 917-930.
4. Kuchmin A.Yu., V.V. Dubarenko Linearized Model of the Mechanism with Parallel Structure. Smart Electromechanical Systems: The Central Nervous System. Gorodetskiy A.E., Kurbanov V.G. (Eds.) Springer International Publishing AG, DOI 10.1007/978-3-319-53327-8_13, 2017. pp. 169-200.
5. Kuchmin A.Yu. Dubarenko V.V. Definition of a Rigidity of a Hexapod. Smart Electromechanical Systems. Gorodetskiy A.E. (Ed.) Springer International Publishing Switzerland, 2016. pp. 159-163.
6. Кучмин А.Ю., Абрамян А.К., Петров Ю.В., Смирнов И.В., Брагов А.М. Структурно-временные и импульсные характеристики динамического разрушения некоторых строительных материалов. Доклады Академии наук. 2017. Т. 472. № 1. С. 36-39.

7. Kuchmin, Andrey Yu. Group Interaction of SEMS Modules at Control of an Adaptive Surface of the Main Dish, Smart Electromechanical Systems. Group Interaction. Editors: Gorodetskiy, Andrey E., Tarasova, Irina L. (Eds.) Springer Nature Switzerland AG, DOI https://doi.org/10.1007/978-3-319-99759-9_15, 2018. — 183-192 pp.

8. Kuchmin, Andrey Yu. Identification of Dynamics of Modules SEMS, Smart Electromechanical Systems. Group Interaction. Editors: Gorodetskiy, Andrey E., Tarasova, Irina L. (Eds.) Springer Nature Switzerland AG, DOI https://doi.org/10.1007/978-3-319-99759-9_16, 2018. — 193-202 pp.

9. Kuchmin A.Yu. Test Model of a Warehouse Loader Robot for Situational Control Analysis System. Smart Electromechanical Systems. Situational Control. Editors: Gorodetskiy, Andrey E., Tarasova, Irina L. (Eds.) Springer Nature Switzerland AG, DOI https://doi.org/10.1007/978-3-030-32710-1_19, 2019. - 245-258 pp.

10. Kuchmin A.Yu. Synthesis of Optimal Program Control for Synchronizing the Movements of a Group of SEMS Modules Smart Electromechanical Systems. Behavioral Decision Making. Editors: Gorodetskiy, Andrey E., Tarasova, Irina L. (Eds.) Springer Nature Switzerland AG, 2021, pp. 81-94.

Список ВАК РФ

1. Кучмин А.Ю. Моделирование эквивалентной жесткости адаптивных платформ с исполнительными механизмами параллельной структуры // Информационно-управляющие системы. 2014. № 3(70). С. 30–39.

2. Абрамян А.К., Миранцев Л.В., Кучмин А.Ю. Моделирование течения куэтта простой жидкости в плоском канале наноразмерной высоты. Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 3-21.

3. Кучмин А.Ю. Об одном методе нелинейного программирования с произвольными ограничениями. Информационно-управляющие системы. 2016. Т. 81. № 2. С. 2-10.

4. Кучмин А.Ю. Анализ полиномиальных ограничений методом дерева решений // Информационно-управляющие системы. 2017. № 6(91). С. 9–14.
5. Артеменко Ю. Н., Агапов В. А., Дубаренко В. В., Кучмин А. Ю. Групповое управление актуаторами контррефлектора радиотелескопа // Информационно-управляющие системы. 2012. № 4. С. 2–9.
6. Городецкий А. Е., Курбанов В. Г., Тарасова И. Л., Кучмин А. Ю. Электроприводы системы логического управления положением контррефлектора космического радиотелескопа // Антенны. 2011. №4. С. 52-55.
7. Городецкий А. Е., Курбанов В. Г., Тарасова И. Л., Кучмин А. Ю. Структура системы логического управления положением контррефлектора космического радиотелескопа // Антенны. 2011. № 4. С. 56-59.
8. Артеменко Ю. Н., Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Кучмин А. Ю., Тарасова И. Л. Проблемы создания систем адаптации космических радиотелескопов // Информационно-управляющие системы. 2010. № 3. С. 2-8.
9. Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Метод повышения качества наведения большого радиотелескопа миллиметрового диапазона с адаптивной зеркальной системой / Информационно-управляющие системы - 2007. -№5 с. 14-19.
10. Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Дорошенко М.С., Кучмин А.Ю. Проблемы обработки и передачи информации в локальной вычислительной сети системы управления радиотелескопа. Информационно-управляющие системы. 2009. № 4. С. 2-8.
11. Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дорошенко М.С., Коновалов А.С., Кучмин А.Ю., Тарасова И.Л. Особенности выбора электроприводов зеркальной системы космических радиотелескопов. Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 1. С. 26-31.
12. Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Агапов В.А. Анализ динамики систем автоматического управления

актуаторами контррефлектора космического радиотелескопа. Информационно-управляющие системы. 2011. № 6. С. 2-6.

13. Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю. Гироскопический гид системы наведения радиотелескопа. Гироскопия и навигация. 2006. № 4 (55). С. 99.

14. Кучмин А.Ю., Абрамян А.К. Применение математического программирования для анализа экспериментальных данных. Информационно-управляющие системы. 2014. № 6 (73). С. 20-28.

Патенты:

1. Система автоматического наведения радиотелескопа / Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Артеменко Ю. Н., Парщиков А. А. Гиммельман В. Г., Кучинский Г. С., Мозгов А. П., Кучмин А. Ю., патент на изобретение (заявка №2006125897) ФИПС от 03 июля 2007.

2. Агапов В.А., Городецкий А.Е., Кучмин А.Ю., Селиванова Е.Н. Медицинский микроробот. Патент на изобретение RUS 2469752 20.05.2011

3. Артеменко Ю.Н., Бадю Е.И., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Тарасова И.Л. Антенна радиотелескопа. Патент на изобретение RUS 2421765 09.02.2010.

4. Способ адаптации отражающих поверхностей антенны. Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Тарасова И.Л., Галушкин А.И., Агапов В.А. Патент на изобретение RU 2518398 С1, 10.06.2014. Заявка № 2012149627/07 от 20.11.2012

Монографии:

1. Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Артеменко Ю.Н. Радиотелескопы; Ин-т проблем машиноведения Рос. акад. наук (ИПМаш РАН). — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2014. — 546 с.

2. В.В. Дубаренко, А.Ю. Кучмин, Ю.Н. Артёменко, В.Ф. Шишлаков. Радиотелескопы миллиметрового диапазона с регулируемыми

поверхностями зеркал: монография - СПб.: ГУАП, 2019. - 239 с. ISBN 978-5-8088-1378-6, DOI 10.17513/np.368

Место выполнения работы

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН).

Глава 1. Задачи идентификации и синтеза систем управления динамическими объектами с ограничениями

1.1. Проблемы синтеза и идентификации систем управления динамическими объектами с ограничениями на примере ИЭМС

Информационно-измерительные и управляющие системы (ИИУС) в современном мире широко распространены, и капиталовложения в эту научно-техническую отрасль увеличиваются с каждым годом. Основной интерес представляют разработки в области систем реального времени сбора информации и управления сложными физико-техническими системами, которые в подавляющих случаях являются динамическими объектами, действующими в условиях всевозможных ограничений. В подобных системах мы видим смыкание информационных процессов, протекающих в ИИУС, и поведения объектов физического мира, которые являются объектами управления или мониторинга. Совместное описание информационных потоков и физических процессов в сложных системах возможно только с кибернетических принципов [1-3].

В 2006 году Хелен Джилл предложила новый термин – «киберфизические системы» [4]. Киберфизические системы интегрируют способности к вычислениям, передаче и хранению информации с мониторингом и управлением объектами физического мира. Основными задачами в области теории и практики киберфизических систем являются обеспечение эффективности, надежности и безопасности функционирования в реальном времени.

Киберфизические системы относятся к новой научной области – кибернетической физики, которая, как это определил автор этого направления зав. лаб. ИПМаш РАН (СПб, Россия) А. Фрадков в своей книге [2], направлена на исследования физических систем кибернетическими методами. Хотя отдельные публикации в физических журналах, использующие идеи теории управления, появились достаточно давно,

самостоятельный раздел науки на стыке физики и теории управления начал формироваться лишь в 1990-х годах в связи с бурным ростом таких направлений как управление хаосом и управление квантовыми системами.

В качестве одного бурно развивающегося направления киберфизических систем стоит отметить интеллектуальные электромеханические системы [5,6].

Основными объектами исследования в диссертации являются интеллектуальные электромеханические системы. Рассматриваются следующие виды ИЭМС: ИЭМС с исполнительными механизмами параллельной структуры и информационно-измерительные системы испытательных стендов материалов на динамическую прочность.

ИЭМС начали широко использовать в 2000 годах в параллельных роботах или так называемых параллельных кинематических машинах (ПКМ) [5-7], представляющих очень хорошие возможности с точки зрения точности, жесткости и способности манипулировать большими нагрузками. Базовым компонентом ИЭМС является базовый блок, представляющий собой адаптивную платформу, перемещаемую электромеханическими домкратами (актуаторами). В настоящее время ИЭМС широко используются не только в интеллектуальных роботах, но также в астрономии, станкостроении, медицине и других областях.

В последнее время возник интерес к использованию электромеханических систем параллельной структуры, например n -подов, в высокоточном приборостроении, робототехнике, адаптивных антеннах и т.д. Преимущества, области применения и описание данных механизмов отражены в публикациях [5-15].

Преимуществами таких систем являются:

- малая металлоёмкость,
- высокая робастность,
- способность к самоорганизации и адаптация к изменению внешних нагрузок,

- обеспечение движений с большим числом степеней свободы,
- высокая несущая способность,
- простота юстировки,
- простота изготовления (ограниченное число типоразмеров).

В качестве недостатков следует отметить:

- сложные алгоритмы управления,
- наличие особых положений (заклинивания и потеря устойчивости).

На базе ИЭМС строятся большие распределённые системы. Термин "большие" подчёркивает не столько физические размеры систем, сколько разнообразие компонентов, в них входящих, функций, выполняемых каждым компонентом, связей между компонентами и внешних условий, влияющих на работу всех частей системы [16,17]. В то же время большая система представляет собой не просто собрание отдельных частей, а некоторую целостность, определяемую наличием у всей системы единого целевого назначения.

Можно выделить три основные задачи при управлении сложными системами на основе ИЭМС:

- идентификация структуры, параметров, состояния и внешних воздействий, обуславливающих поведение сложной системы;
- прогнозирование поведения системы и создание моделей, позволяющих упреждать её эволюции;
- сокращение цикла управления, чтобы за время синтеза управления дрейф параметров системы не был существенным, и систему можно было считать квазистационарной.

Используя иерархический подход, структура модуля подобных ИЭМС может быть представлена в виде следующих взаимосвязанных блоков: информационно-измерительная система (ИИС), система управления (СУ), исполнительный механизм (ИМ).

Одним из вариантов структуры системы управления представлен на рисунке 1.1 [18], где БЦ – это база целей СУ, БД – база данных, БЗ – база знаний.

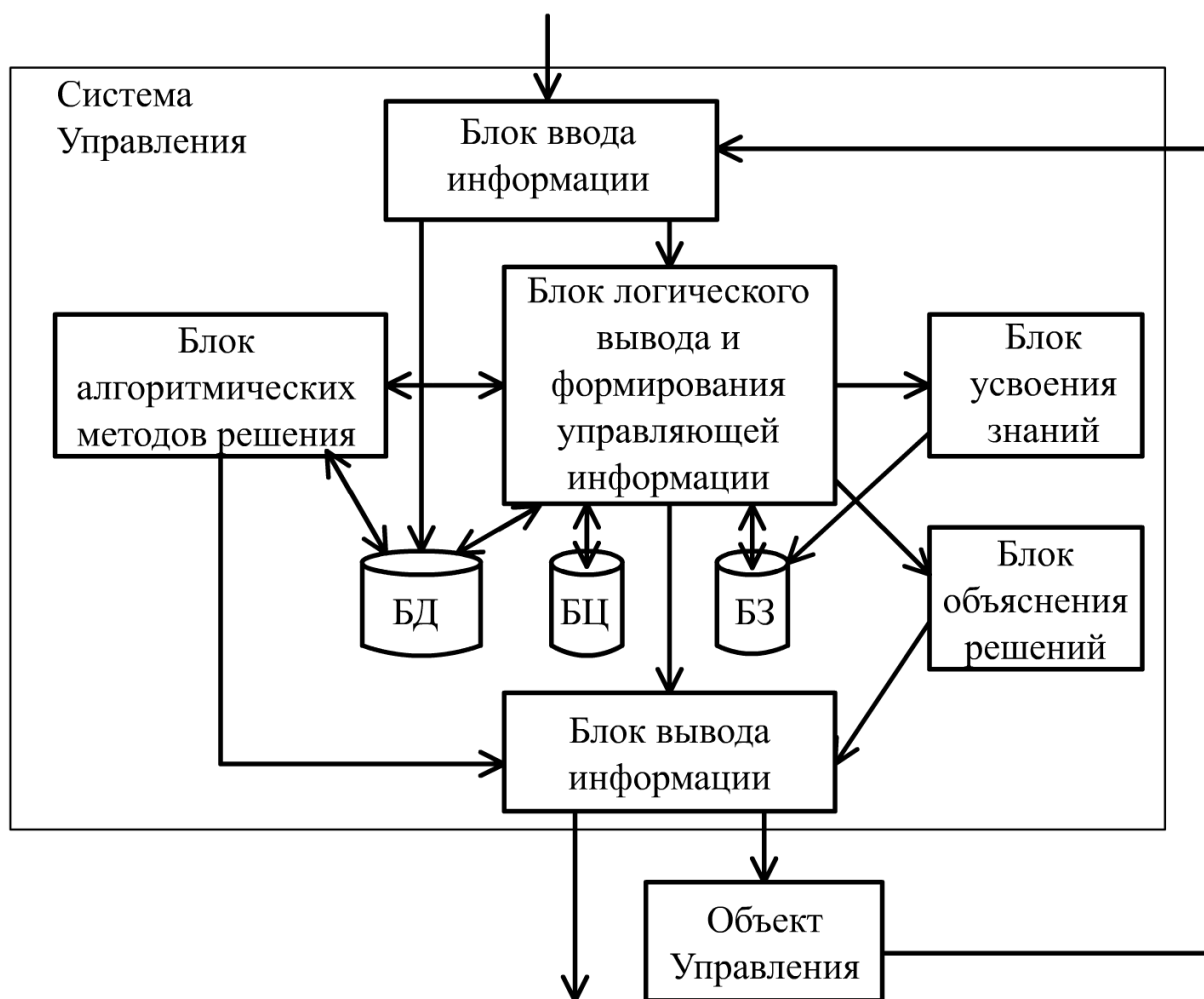


Рис. 1.1. Структура системы управления модуля ИЭМС

Системой управления решаются следующие задачи:

- Сбор и обработка измерительной информации;
- Формирование систем ограничений, описывающих безопасное функционирование элементов СУ и объекта управления.
- Формирование системы целей и критериев функционирования;
- Идентификация параметров, состояния объекта управления и внешних воздействий;

- Расчёт оптимального программного движения на основании текущего положения модуля ИЭМС, ограничений, целей и критериев функционирования;
- Расчёт оптимальных управляющих воздействий для исполнительных механизмов объекта управления.

В зависимости от назначения модулей ИЭМС будет меняться и тип ИМ. Широкое распространение получили ПКМ в виде п-пода (частный случай, это платформа Гью-Стьюарта, или гексапод), представляющего собой адаптивную платформу, перемещаемую линейными движителями. Чаще всего такая ПКМ состоит из двух жестких платформ, соединенных электроактуаторами посредством шарниров. Такое соединение позволяет обеспечивать перемещения по шести степеням свободы. Альтернативный тип ПКМ имеет не жесткие, а составные платформы, которые могут менять свой размер посредством электроактуаторов.

Структура измерительной системы модуля ИЭМС может иметь разные конфигурации в зависимости от типа ПКМ. Для однозначного определения состояния ПКМ необходимо использовать лазерную измерительную систему опорных баз на нижней и верхней платформах. Вторым вариантом предусматривает наличие датчиков линейных удлинений электроактуаторов и датчиков углового положения в шарнирах.

Одной из плохо формализуемых задач в области управления распределёнными системами с параллельной кинематической схемой в рамках классического оптимизационного подхода является синхронизация модулей ИЭМС и их составных частей при групповом движении в условиях ограничений на фазовые координаты с целью обеспечения безопасности движений и отсутствия конфликтов или особых положений.

Ключевой задачей является синтез программных траекторий движений сложных систем, состоящих из взаимодействующих динамических модулей ИЭМС с параллельной кинематической схемой. Необходимо создать с одной стороны простой в реализации, а с другой эффективный алгоритм синтеза

оптимальной траектории движения при наличии сложных нелинейных ограничений.

Поэтому автор видит решение данной задачи в разработке узкоспециализированных методов и алгоритмов оптимальной синхронизации движений модулей ИЭМС и их элементов, основанных на идее организации управления по «слабому звену» исходя из положений теории ограничений [19].

Перевод сложной многозвенной системы с большим числом степеней свободы из начального состояния в желаемое может быть организован различными траекториями, с использованием различных групп приводов. Требуется найти оптимальную стратегию перевода согласно заданных критериев и ограничений, подробно описанных в следующем разделе. Как будет описано далее, подобная задача в общей постановке трудно решаемая даже для простых систем.

Практический опыт синтеза подобных систем показывает, что при планировании движений самыми жёсткими ограничениями являются характеристики и фазовые координаты критических подсистем, которые и определяют динамику системы и разрешённые области движений. Такое управление получило название: управление по «слабому звену», по самым жёстким ограничениям, которые поглощают все остальные. Таким образом, для определённого вида целевых критериев управления оптимальное решение задачи управления будет находиться на границе области допустимых решений, образованных ограничениями «слабых звеньев».

Расчёт законов оптимального управления группы модулей ИЭМС представляет собой сложную многокритериальную задачу оптимизации большой размерности при большом количестве нелинейных и интервальных ограничений, описывающих кинематические и динамические соотношения в подобных системах, а также условия физической реализуемости движений в подобных системах с учётом особых положений, таких как потеря устойчивости конструкции и заклинивания. По этой причине «лобовое»

решение такой задачи применением классических методов на практике невозможно. Структура задачи зависит от топологии модулей ИЭМС и способа их взаимодействия.

Типовыми критериями оптимальности в подобных системах являются:

- Критерий максимального быстродействия, заключающийся в минимизации времени перехода системы из начального положения в желаемое конечное J_T .

- Критерий минимальных перемещений, заключающийся в минимизации перемещений отдельных модулей ИЭМС при достижении заданных временных и точностных характеристик движения системы в целом J_L . Данный критерий имеет большое практическое значение и приводит в конечном итоге к созданию компактных систем с минимальными длинами ходов исполнительных механизмов отдельных модулей ИЭМС.

- Критерий максимальной точности J_e , заключающийся в минимизации ошибок наведения и позиционирования модулей ИЭМС.

- Критерий минимальной мощности движений J_P , который в данном случае используется как более удобный аналог критерия минимума потребляемой энергии (максимизация энергетического ресурса).

- Критерий плавности перемещений J_S , особенно важный, например, при создании медицинских роботов-манипуляторов, где необходимо непрерывное слежение за заданной траекторией без резких перестроений модулей.

Возможны и другие специфические критерии при создании систем из большого числа модулей ИЭМС, обусловленные условиями эксплуатации подобной техники и решаемых ею задач. В качестве примера можно привести адаптивные зеркала космических телескопов, для которых важен коэффициент затенения и тепловыделение линейных приводов, что существенным образом влияет на качество работы таких телескопов.

Ограничениями в подобных системах являются:

1. Интервальные ограничения на фазовые координаты системы G_x и управляющие воздействия G_u .

2. Интервальные ограничения на моменты и силы исполнительных механизмов G_f , а также на перемещения G_l и скорости перемещений G_v исполнительных механизмов.

3. Ограничения G_s , определяющие конфигурацию пространства, в котором перемещаются такие многомодульные системы, а также запретные области, в которые они не могут заходить.

4. Ограничения, связанные с кинематикой G_K и динамикой G_D подобных систем.

5. Ограничения, обусловленные взаимодействием с внешней средой G_L . Такие ограничения обычно носят нестационарный вид, часто являются случайными и плохо формализуемыми.

Таким образом, в общем случае задача синтеза оптимального управления подобными системами может быть сформулирована как нелинейная многомерная многокритериальная задача условной оптимизации с большим числом плохо формализованных ограничений, зачастую носящих интервальный характер. Классический подход в решении таких задач – это применение методов нелинейного программирования.

В общей постановке такие задачи даже для простых систем (трипод, гексапод) не имеют эффективных методов решения, многие вопросы управления решаются за счёт технических средств, таких как: обработка пар трения, устройств выбора люфтов, установкой концевых выключателей, фрикционных и т.д. Все эти мероприятия позволяют достичь требуемых характеристик в течение небольшого времени эксплуатации подобных систем, не снимая вопроса выхода систем в режимы, где реализуются особые положения, которые приводят к авариям.

В общей постановке задача оптимального управления системой, составленной из модулей ИЭМС, имеет вид.

Критерии могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned}
J_T = \min_{\mathbf{u}} T_K, \quad J_L = \min_{\mathbf{u}} \sum_i \int_0^{T_K} \dot{l}_i^2 dt, \quad J_e = \min_{\mathbf{u}} \int_0^{T_K} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_g)^T \mathbf{M} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_g) dt, \\
J_P = \min_{\mathbf{u}} \sum_i \int_0^{T_K} (v_i f_i)^2 dt, \quad J_S(t) = \min_{\mathbf{u}} \left[(\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{s.m.}(t))^T \mathbf{M} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{s.m.}(t)) \right],
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор управляющих воздействий, i – номер исполнительного механизма, T_K – время переходного процесса, l – перемещение исполнительного механизма, v – скорость перемещения исполнительного механизма, f – сила, развиваемая исполнительным механизмом, $\mathbf{y}$ – выходные координаты системы, например, координаты инструмента, перемещаемого системой; $\mathbf{y}_g$ – желаемые выходные координаты системы (цель управления), $\mathbf{M}$ – диагональная матрица, нормирующих коэффициентов, $\mathbf{y}_{s.m.}$ – модель траектории движения с учётом переходного процесса, удовлетворяющая условиям плавности.

Ограничения могут быть описаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
G_x : x_{j,\min} \leq x_j \leq x_{j,\max}, \quad G_u : u_{j,\min} \leq u_j \leq u_{j,\max}, \quad G_l : l_{i,\min} \leq l_i \leq l_{i,\max}, \\
G_v : v_{i,\min} \leq v_i \leq v_{i,\max}, \quad G_f : f_{i,\min} \leq f_i \leq f_{i,\max}, \quad G_S : x_j \in H_j, \\
G_K : \Lambda_1(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} + \Lambda_2(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}_1 = \mathbf{0}, \quad G_D : \dot{\mathbf{x}} = \Lambda_3(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \Lambda_4(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \Lambda_5(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varsigma}_2, \\
G_L : \dot{\boldsymbol{\xi}} = \Lambda_6(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varsigma}_3,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где j – номер компонента вектора, индексы $\min$ и $\max$ обозначают минимальные и максимальные значения соответствующих переменных, $\mathbf{x}$ – вектор состояния, H – области фазового пространства, в которых разрешено движение механизма, $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5$ – матрицы в моделях кинематики и динамики механизма, $\boldsymbol{\varsigma}_1, \boldsymbol{\varsigma}_2, \boldsymbol{\varsigma}_3$ – вектора, определяющие нежёсткое выполнение соответствующих ограничений для реального механизма из-за неточности моделей, обычно носят интервальный или случайный характер; $\boldsymbol{\xi}$ – вектор внешнего воздействия, Λ_6 – матрица в модели внешнего воздействия.

Как уже отмечалось, в прямой постановке решение задачи (1.1) – (1.2) вызывает большие трудности даже для простейших систем параллельной кинематической схемы, на базе используемых классических подходов теории оптимального управления не созданы эффективные алгоритмы, позволяющие в бортовом контроллере реализовать в реальном времени вычисления

управляющих воздействий с требуемой точностью. Так при разных численных методах решения могут быть получены отличные друг от друга результаты при разной организации процедуры многокритериального выбора.

Одним из направлений преодоления данной проблемы является представление задачи (1.1)–(1.2) в виде иерархической системы взаимодействующих подзадач оптимального управления. Для (1.1) – (1.2) может быть применено известное иерархическое разбиение на слои (уровни принятия решения), в данном случае упрощенные подзадачи могут решаться последовательно-параллельно в разных временных масштабах. Предлагается четырёхуровневая система управления движением, больший номер слоя соответствует большему уровню иерархии [19]:

Слой №1: Тактический регулятор модуля ИЭМС управляет перемещениями исполнительных механизмов при линейных ограничениях на фазовые координаты приводов и управляющие воздействия.

Слой №2: Групповой регулятор модуля ИЭМС управляет перемещениями баз ИЭМС, вносит поправки в синхронизацию исполнительных механизмов с целью предотвращения развития особых положений и компенсации влияния внешнего воздействия, которое может быть устранено с помощью этого модуля ИЭМС, при нестационарных линейных ограничениях на фазовые координаты модуля ИЭМС.

Слой №3. Планировщик траектории движения модуля ИЭМС рассчитывает оптимальную траекторию движения модуля ИЭМС с упрощенной системой ограничений, получаемой от слоя №4.

Слой №4. Планировщик траектории всей системы, который, исходя из стратегической цели управления, рассчитывает траекторию движения всей системы таким образом, чтобы механизм не покидал области фазового пространства H , в которой разрешено движение. Границы области H модифицируются по данным, получаемым с более низких уровней. Стратегическая траектория пересчитывается в виде цели управления и системы ограничений для уровня 3.

Так как ИЭМС являются нелинейными и нестационарными динамическими объектами, для решения задач управления необходимо иметь информацию о состоянии, параметрах и внешних воздействиях, которые определяют движение ИЭМС. Получение данной информации возможно в результате процесса идентификации ИЭМС как динамического объекта. Для этого должны быть созданы модели кинематики и динамики базового модуля ИЭМС и разработаны методы их идентификации.

Модели различной степени сложности используются на разных уровнях принятия решений в иерархической системе управления ИЭМС. Вопросы создания моделей ИЭМС с исполнительными механизмами в виде ПКМ подробно рассматриваются в главе 3 диссертации. Предлагаются модели различных уровней сложности, предназначенные для функционирования на разных уровнях принятия решения системы управления ИЭМС. В качестве универсальных моделей предлагаются нелинейные модели динамики и кинематики базового блока ИЭМС в виде n -подов с платформами изменяемой и неизменяемой геометрией. Данные модели используются при расчёте оптимальных программных траекторий базового модуля ИЭМС, что подробно описано в главе 2 диссертации.

Для задач управления в слое №3 необходимо создание линеаризованных моделей кинематики и динамики базового блока ИЭМС в стационарной точке и разработка методов идентификации их параметров. Процесс создание таких моделей путём разложения в ряд Тейлора уравнений движения базового блока ИЭМС описан в главе 3. Там же описаны методы идентификации параметров данных моделей и дан пример для определения эквивалентных и парциальных жесткостей гексапода.

Также в главе 3 описан метод построения модели и идентификации её параметров базового модуля ИЭМС для тактического слоя управления на примере гексапода PI H-810 с использованием усовершенствованного МНК-идентификатора и идентификатора на основе базисных функций.

Решение задач идентификации должно учитывать физическую адекватность протекающих в ИЭМС процессов, что может быть выполнено введением специальных ограничений, например, на максимальные и минимальные значения параметров модели ИЭМС, законов сохранения импульса, энергии и т.д. Важным является учёт диапазонов значений вектора состояния объекта при идентификации его параметров.

В четвёртой главе диссертации рассматривается применение ИЭМС в системе управления зеркальной системой радиотелескопа миллиметрового диапазона.

В качестве других примеров современных ИЭМС в диссертации рассматриваются информационно-измерительные системы (ИИС) испытательных стендов материалов на динамическую прочность [20-24].

В подобных ИИС мы видим существенное влияние информационных процессов, особенностей испытательного стенда на качество проведения экспериментов и дальнейшую обработку и интерпретацию данных. Влияние подобных факторов плохо формализуемо и в современной практике для обработки результатов экспериментов привлекаются эксперты-операторы стендов, мнения которых о тех или иных процессах и параметрах испытаний являются субъективными. Современные эксперименты направлены на выявление тонких эффектов, где влияние сторонних «паразитных» факторов приводит к разбросу результатов испытаний со средним квадратическим отклонением (СКО) до 30%. Решение задачи о повышении достоверности результатов экспериментов автором видится в использовании программных средств обработки данных, которые позволяют учитывать влияние сторонних факторов на эксперимент, так как совершенствование испытательного оборудования влечёт за собой большие капиталовложения, с негарантированным результатом. Предлагаемые программные средства основываются на эффективных методах идентификации ДО и динамических структур, использующих математические модели процессов, протекающих в материалах при ударном нагружении с учётом влияния средств

измерительной техники, которое учитывается в виде ограничений, описывающих выполнение физических законов в материале и диапазоны изменения соответствующих физических величин. Подобные ограничения на практике имеют вид неравенств или интервалов.

При создании методов идентификации и обработки данных для таких стендов должно быть учтено следующее:

- ограниченный объем данных в каждом эксперименте;
- нестационарность и нелинейность поведения объекта исследования и стендового оборудования;
- наличие фазовых сдвигов при параллельной записи нескольких регистрируемых параметров объекта исследования, обусловленных влиянием ИИС;
- наличие шумовой случайной составляющей с нестационарными законами распределения и частотной полосой, совпадающей со спектром полезных сигналами;
- наличие детерминированных составляющих, обуславливающих влияние испытательного оборудования;
- наличие ограничений, описывающих физическую адекватность процессов, проходящих в материале законам природы и диапазонам изменения физических величин.

Существующие методы идентификации не учитывают подобные ограничения.

В диссертации анализируются два вида стендов: стенд с газовой пушкой (раздел 1.6.2.) и стенд с разрезным стержнем Гопкинсона-Кольского (глава 5).

Для стенда с газовой пушкой предложен метод идентификации параметров модели профиля скорости свободной поверхности мишени при высокоскоростном ударе, позволяющий учитывать эффекты мезоскопического уровня пластической деформации в материале [20-21]. Описанный метод идентификации относится к множественно-

функциональным методам, с моделью, заданной в явном виде с ограничениями на физическую адекватность процессов и параметров в виде интервалов и систем неравенств.

Для стенда с разрезным стержнем Гопкинсона-Кольского предложен метод идентификации профилей импульсов в нагружающем и опорном стержнях [22-24]. Метод использует модель импульсов в неявном виде, заданную как систему линейных неравенств, описывающих требования к форме импульсов. Метод определяет и учитывает временные сдвиги между импульсами в нагружающем и опорном стержнях, внесённые ИИС стенда. В качестве одного из ограничений используется закон сохранения импульса в системе. Применение данного метода идентификации позволило повысить точность построения динамических характеристик материалов и уменьшить СКО результатов экспериментов с 26% до 10%.

Борьба с нерегулярными помехами может решаться с помощью вейвлет-фильтрации, в диссертации этот метод используется как вспомогательный.

Отличительной особенностью рассмотренных в данном разделе задач является наличие в их математическом описании некоторого целевого функционала и ограничений в виде систем неравенств. Задачи управления ИЭМС могут быть поставлены как задачи оптимального управления при ограничениях.

Существует три основных подхода в синтезе оптимального управления:

- динамическое программирование Р. Беллмана, которое очень требовательно к вычислительным ресурсам даже при решении задач без ограничений [25-27];
- принцип максимума Л.С. Понтрягина, имеющий вычислительные сложности в задачах с ограничениями в виде неравенств [27,28];
- методы математического программирования [27], которые в настоящее время хорошо проработаны, менее требовательны к

вычислительным ресурсам, чем динамическое программирование, и подходят для задач с ограничениями типа неравенств и дискретным видом информации.

Как отмечено, методы математического программирования являются не единственным инструментом синтеза оптимального управления с ограничениями, но для задач, рассмотренных в диссертации, они эффективны и просты в реализации. Имеют прогнозируемое время расчёта управляющих воздействий. По своему типу ИЭМС – это цифровые системы, где мы оперируем дискретной информацией, квантованной как по времени, так и по диапазону, что удобно при реализации методов математического программирования.

Методы идентификации, описанные в диссертации, ориентированы на работу с цифровой информацией, получаемой от цифровой измерительной системы. Основу методов составляют статистические идентификаторы на основе методов наименьших квадратов и множественно-функциональные методы, в которых учитываются особенности поведения динамических объектов и изменения их параметров в виде ограничений, описываемых системами неравенств. А в качестве целевого критерия качества идентификации используются экстремумы некоторых функционалов. Такая постановка задачи идентификации удобна для реализации методами математического программирования.

Можно выделить два основных направления в решении задач математического программирования:

- решение задачи условной оптимизации;
- переход к задаче безусловной оптимизации с помощью метода множителей Лагранжа;
- переход к задаче безусловной оптимизации методов штрафных или барьерных функций.

Глава 2 диссертации посвящена созданию метода математического программирования для систем с произвольными ограничениями. Метод

относится к методам условной оптимизации и использует аппроксимацию ограничений полиномами, рациональными дробями и выражениями с экспоненциальными функциями. На основе метода разработан быстрый алгоритм синтеза программных движений для модулей ИЭМС.

В главе 4 используется метод синтеза оптимального управления на основе добавления в функцию Ляпунова штрафных функций от ограничений на фазовые координаты. Данный метод используется для синтеза управления ИЭМС на тактическом уровне в слое №1. В качестве примера показаны модельные расчёты для системы управления различными элементами ЗС РТ.

1.2. Анализ методов идентификации систем управления динамическими объектами

Рассмотрены общие проблемы идентификации динамических объектов. Определены следующие основные факторы, препятствующие эффективному применению классических подходов, такие как нестационарность и нелинейность ДО, низкая информационная насыщенность измерительной информации, наличие нестационарных помех, запаздывание в каналах передачи данных и устройствах цифровой обработки. Важным является сохранение физической адекватности модели протекающим в ДО процессам и реализуемости законов управления.

Построение модели ДО — это процесс, сводящийся к формированию структуры модели с последующей настройкой ее параметров. Центральной проблемой построения адекватных реальному объекту моделей является идентификация не только параметров объекта, но и его структуры, состояния и внешних воздействий, что представляет в общей постановке нелинейную задачу большой размерности [29-34]. Поэтому для упрощения задачи идентификации её принято разбивать на ряд взаимосвязанных стадий: определение структуры модели, параметров, состояния и внешних воздействий.

Многие алгоритмы идентификации построены с учетом обобщенной функциональной схемы, отражающей основные информационные потоки, используемые в процессе идентификации объекта. Эта схема представлена на рисунке 1.2, где $X_{ж.}$ – желаемое состояние объекта управления, $X_{оц.}$ – оценка вектора состояния объекта, $u(t)$ – входное воздействие, L – коэффициенты обратных связей идентификатора, $x(t)$ – выходной сигнал, e – ошибка идентификации, x^* – оценка выходной координаты, $f_{вх.}(t)$ – входной шум, $f_{м.}(t)$ и $f_{ад.}(t)$ – измерительные шумы мультипликативный и аддитивный соответственно, $f_{вв.}$ – внешнее воздействие, $f_{оц.вв.}$ – оценка внешнего воздействия.

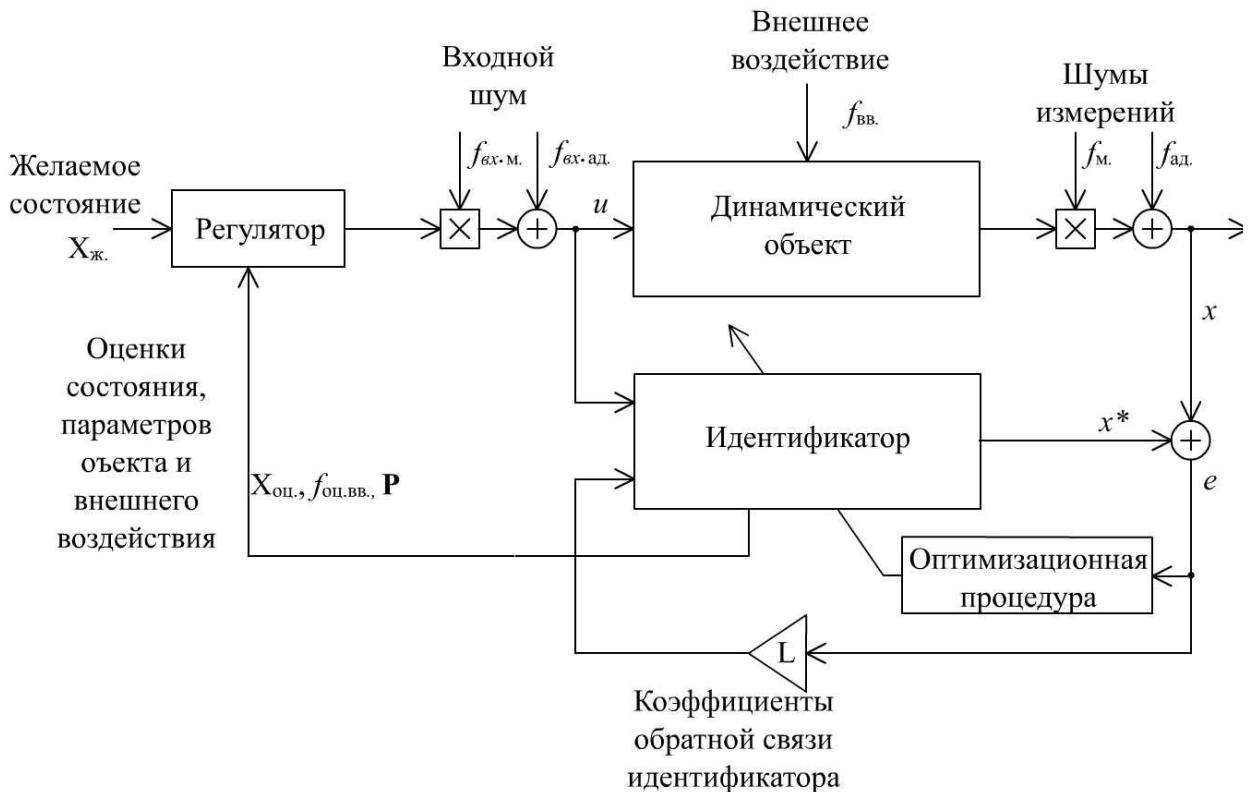


Рис. 1.2. Обобщённая функциональная схема идентификации ДО

Как видно из рисунка, на вход исследуемого объекта подается некоторое входное воздействие $u(t)$. В процессе идентификации необходимо искусственно провоцировать информационную насыщенность выходного сигнала $x(t)$ существенными эволюциями входного воздействия $u(t)$.

Заметим, что процесс идентификации вступает в противоречие с задачей управления объектом. Стабилизация движения объекта, например, затрудняет идентификацию по причине "обеднения" информационных потоков. Напротив, насыщение информационных потоков ведет к дестабилизации движения объекта. По этой причине к задающему воздействию добавляется случайный процесс (шум) $f_{\text{вх.}}(t)$, способствующий повышению информативности вход-выходных сигналов. В отличие от входного шума, играющего положительную роль в процессе идентификации, измерительные шумы мультипликативный $f_{\text{м.}}(t)$ и аддитивный $f_{\text{ад.}}(t)$ являются неточностью измерений выходного сигнала $x(t)$. Выходной шум снижает точность решения задачи идентификации, поэтому его роль негативна, и следует стремиться к понижению его величины.

Как видим, процедура идентификации требует подачи на вход объекта тестового воздействия, получения реакции на выходе объекта, регистрации процессов на входе и выходе с последующим анализом результатов. Существуют методы анализа параметров объекта по его непрерывным вход-выходным характеристикам. Однако эти методы плохо формализованы, и, следовательно, их алгоритмическая реализация на ЭВМ затруднительна. Наиболее простыми представляются сбор и обработка дискретной информации.

Измерительные системы ИЭМС и ИИС испытательных стендов являются цифровыми, соответственно, и используемые алгоритмы идентификации должны быть ориентированы на обработку дискретных выборок [35]. По типу формирования дискретных выборок можно выделить два основных их вида: с единой и переменной скважностями отсчётов, что тоже должно быть учтено при решении задачи идентификации.

На практике преобразование дискретных выборок с различными скважностями отсчётов осуществляется с помощью стеков с линейной интерполяцией данных. Описание подобного устройства носит алгоритмический характер и неудобно при использовании аналитических

методов анализа дискретных данных и при синтезе идентификаторов. Предлагается математическое описание стека с линейной интерполяцией данных в виде матричного оператора сдвига во временной области:

$$\mathbf{A}^\tau = \begin{cases} \mathbf{A}^{\text{fix}\left(\frac{\tau\omega_0}{2\pi}\right)} \left[1 - \frac{\tau\omega_0}{2\pi} + \text{fix}\left(\frac{\tau\omega_0}{2\pi}\right) \right] + \left(\frac{\tau\omega_0}{2\pi} - \text{fix}\left(\frac{\tau\omega_0}{2\pi}\right) \right) \mathbf{A}^{\text{fix}\left(\frac{\tau\omega_0}{2\pi}\right)+1}, & \tau \geq 0 \\ (\mathbf{A}^\top)^{\text{fix}\left(\frac{-\tau\omega_0}{2\pi}\right)} \left[1 + \frac{\tau\omega_0}{2\pi} + \text{fix}\left(\frac{-\tau\omega_0}{2\pi}\right) \right] + \left(\frac{\tau\omega_0}{2\pi} + \text{fix}\left(\frac{-\tau\omega_0}{2\pi}\right) \right) (\mathbf{A}^\top)^{\text{fix}\left(\frac{-\tau\omega_0}{2\pi}\right)+1}, & \tau < 0 \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

где τ – сдвиг во временной области, ω_0 – частота дискретизации по времени, $\text{fix}(\dots)$ – функция округления с отбрасыванием дробной части, n – число отсчётов в окне выборки. Данный оператор применим и для случая выборок с регулярной скважностью отсчётов. В этом случае он будет иметь вид:

$$\mathbf{A}^k = \begin{cases} \mathbf{A}^k, & k \geq 0 \\ (\mathbf{A}^\top)^k, & k < 0 \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

где k – число отсчётов, на которое происходит сдвиг данных выборки, может быть как положительным, так и отрицательным. Отрицательное значение k означает запаздывание, положительное – опережение. Данный оператор обладает рядом интересных свойств, с помощью него, например, удобно вычислять конечные разности дискретных выборок или решать разностные уравнения. В диссертации данный оператор будет использоваться в математических описаниях различных видов идентификаторов.

Выбор методов идентификации должен опираться на классы систем, которые можно разделить по виду изменения их свойств во времени. Таким образом можно выделить стационарные, квазистационарные и нестационарные системы. Рассматриваемые в диссертации ИЭМС в некоторых режимах их функционирования могут быть отнесены к квазистационарным или нестационарным системам, а процессы, исследуемые в ИИС испытательных стендов, являются исключительно нестационарными.

Рассмотрим основные типы объектов, которые приводят к различным задачам идентификации исходя из соотношения динамики изменения их параметров и вектора состояния. Можно выделить три основных случая:

- Скорость изменения параметров объекта значительно меньше скорости изменения вектора состояния. Такие системы могут рассматриваться как квазистационарные, обычно получаемые в результате линеаризации нелинейных систем в стационарных точках. В данном случае применимы классические подходы параметрической и непараметрической идентификации, которые хорошо разработаны и апробированы на данном классе систем. Процесс идентификации в данном случае распадается на ряд отдельных задач: определение параметров модели на интервале, когда параметры системы мало меняются; синтез идентификатора состояния классическими методами с помощью задания желаемой динамики данного идентификатора состоянием путём выбора корней его характеристического полинома и применением формулы Аккермана для нахождения коэффициентов обратных связей. Построение матриц параметров и нахождение коэффициентов обратных связей идентификатора происходит итеративно при переходе из одной стационарной точки в другую.

- Во втором случае скорости изменения параметров системы и вектора состояния соизмеримы, что требует совместного оценивания как параметров, так и состояния в едином масштабе времени, что приводит к постановке задачи идентификации как задаче нелинейной оптимизации даже в случае линейных систем. Одним из способов описания подобных систем для целей идентификации является построение моделей динамических объектов, параметры которых рассматриваются как выходы некоторых динамических систем, чаще всего линейных, на динамику которых наложены ограничения. Если изменения параметров объекта носят случайную природу, то в качестве их моделей используются формирующие фильтры. Целевая функция, определяющая качество идентификации, обычно выбирается в виде интеграла от квадратичной формы ошибки между выходной координатой объекта и соответствующей оценкой данной координаты, получаемой с модели, на выбранном временном интервале. Таким образом, нахождение параметров модели и коэффициентов обратных связей идентификатора

происходит одновременно с помощью оптимизационной процедуры. Помимо настройки коэффициентов обратных связей могут быть использованы более сложные механизмы регулирования идентификатором, например, основанные на методах интеллектуального управления или методах оптимального управления.

- В третьем случае скорости изменения параметров системы намного выше скорости изменения вектора состояния. К подобным системам могут быть отнесены объекты с быстрыми структурными изменениями, например, при наличии разрушений, а также быстрые физические процессы. Особенностью данного класса объектов является то, что компоненты вектора состояния представляют собой некие интегральные характеристики, либо присутствует запаздывание в «реакции» вектора состояния на изменение структуры и параметров объекта, либо в измерении компонент вектора состояния. Существует ряд задач, где возможно использование методов, которые применяются в предыдущем классе объектов, при ограничении на динамику изменения параметров и состояния, однако в общем случае, необходимо разрабатывать непараметрические методы идентификации.

Все существующие подходы к идентификации можно разбить на три группы: множественно-функциональные, статистические и интеллектуальные [29-51]. Такое деление обусловлено различиями в учёте возмущений, действующих на систему.

К статистическим методам относятся: корреляционные методы и методы регрессионного анализа, метод контраста, фильтр Калмана, МНК-идентификаторы и т.д. [30, 33-35, 40-42, 47, 49].

К множественно-функциональным методам относятся: методы идентификации по переходным характеристикам, детерминированные идентификаторы, идентификаторы на основе метода скоростного градиента, идентификаторы на основе интегральных преобразований, методы оптимальной идентификации, интервальные методы идентификации и д.р. [29-32, 35, 43, 45, 46, 48-54].

К интеллектуальным методам относятся: нейросетевые методы и методы гибридных сетей (MANFIS, интервальные нейронные сети и др.), методы нечёткой логики, методы эволюционных систем, логико-вероятностные методы и т.д. [32, 36]

Методы из каждой группы имеют свои преимущества и недостатки. Широко используемым является статистический подход, основанный на оценивании параметров и состояния ДО. «Нежесткость» моделей учитывается случайным характером неопределенных факторов и помех, модели которых задаются в виде законов распределения, как следствие необходимо использовать большие объёмы данных с высокой информационной насыщенностью. Большинство методов в своей основе опирается на различные модификации метода наименьших квадратов (МНК) [30] и требует использования мощных вычислительных средств, разработки стабильных методов оценки вероятностных характеристик возмущений.

Алгоритмы параметрической идентификации, основанные на методе наименьших квадратов (МНК-идентификаторы), находят широкое практическое применение. МНК-идентификатор обладает возможностью гибкого изменения объема регрессионной выборки и нечувствительностью к наличию шумов в измерениях. Для МНК-идентификаторов характерны два типа обработки информации, согласно одному из которых информация предварительно накапливается (формируется выборка из заданного количества вход-выходных измерений), а затем решается задача параметрического оценивания каким-либо подходящим численным методом. Другой тип МНК-идентификаторов предполагает одновременное обновление регрессионной выборки и решение задачи параметрического оценивания с учетом решений, полученных на предыдущих шагах. Построенная таким образом процедура является рекурсией, а идентификатор – рекуррентным (РМНК-идентификатором).

В случае малых выборок данных проявляется чувствительность МНК-идентификаторов к выбору начальных условий модели ДО и плохая

сходимость. Классические МНК-идентификаторы не учитывают ограничения, связанные с режимами функционирования ДО и физической адекватностью модели процессам в ДО.

Помимо МНК-идентификаторов широкое распространение получили методы на основе фильтра Калмана [55]. Изначально фильтр Калмана применялся для идентификации неизмеряемых компонент вектора состояния динамических линейных систем при наличии зашумлённых измерений. Дальнейшее развитие данного подхода позволило использовать расширенный фильтр Калмана для идентификации и состояния системы, и её параметров [56]. К недостаткам следует отнести то, что погрешности в фильтре описываются белым шумом, несуществующим в природе. Возможно составить модифицированный фильтр Калмана, у которого погрешности будут представлены цветным шумом. В качестве основной статистической модели используются наименее благоприятные распределения помехи. Такое описание является предельным и не учитывает реальные условия функционирования ДО, что снижает качество работы идентификаторов на малых выборках. Подобные методы также не учитывают ограничения при решении задачи идентификации.

Альтернативным подходом являются множественно-функциональные методы идентификации [29, 33, 49-51, 54]. Разработаны разнообразные методы параметрической и непараметрической идентификации ДО на основе данного подхода [29].

Наиболее общие результаты в создании подхода оценивания параметров моделей ДО с помощью адаптивных методов принадлежит А.А. Крассовскому [57, 58].

Большое распространение получил метод скоростного градиента А.Л. Фрадкова [52-54]. Это относительно простой в реализации метод, эффективность которого доказана его использованием во множестве приложений. Данный метод является беспойсковым. К недостаткам метода

следует отнести недоказанную сходимость при наличии ограничений и при вырождении условия достижимости [54].

При множественно-функциональном подходе учёт ограничений возможен, если задача идентификации ставится как задача вариационного исчисления при ограничениях или как задача математического программирования [22, 27]. Идея подобных методов сводится к определению набора параметров или характеристик в результате максимизации (минимизации) некоего функционала (часто являющегося квадратичной формой между откликом реальной системы выходом модели, параметры которой настраиваются) одним из известных методов оптимизации с учетом соответствующих ограничений, которые задают диапазоны изменения параметров системы и других величин, и используются для контроля правильности модели и её адекватности натуре. Такие множественно-функциональные методы позволяют описывать нестационарность и стохастичность ДО посредством сведения к «нежёстким» моделям на основе интервальных методов и систем неравенств, в том числе и целевых. Данный подход может быть использован для совместного оценивания структуры, параметров и состояния ДО. Такие методы идентификации можно отнести к разряду оптимизационных задач, которые требуют сложных вычислений и специализированных аппаратных средств для их реализации. До недавнего времени применение подобных подходов в реальных задачах сдерживалось именно по этой причине.

В настоящее время во многих технических системах для целей идентификации используются нейронные сети. Нейронные сети были известны в 50-х годах прошлого века, но как эффективный инструмент не получили развития вплоть до 80-х годов, в связи с отсутствием эффективных методов их обучения и средств аппаратной реализации. Немало внимания уделяется именно вопросам развития идентификации с применением нейронных и гибридных сетей [32]. Центральным свойством нейронной сети выбрана её избыточность, которая позволяет аппроксимировать различные

системы, в этом заключается способность предсказывать их реакции [59]. Можно выделить две основные проблемы при синтезе нейронных сетей и их обучении – это переобучение и недостаточная размерность сети. Обе они связаны с вопросом определения размерности и топологии сети (количества нейронов, слоев сети, функций активации и т.д.), методов обучения и предварительной обработкой данных на стадии проектирования нейронных сетей. На практике эти проблемы разрешаются применением специальных эвристических методик. Такой подход из-за ограниченной обучающей выборки на стадии проектирования может привести к неработоспособности сети в реальных условиях.

В нейросетевых технологиях идентификация разделена на три основных направления – определение топологии сети, методы обучения и предварительная обработка данных (препроцессинг). Зачастую топология сети выбирается для конкретной задачи исходя из накопленного опыта применения подобного вида сетей на практике [32, 59-62]. Хорошо развитых математических методов выбора топологий нейронных сетей и их сравнения не разработано. Основным практическим подходом является использование комбинированных (модульных) сетей, которые состоят из нейросетевых подсистем разных топологий, решающих одну и ту же задачу, результаты которых принимаются методом голосования. В качестве методов обучения применяются: метод обратного распространения ошибки, методы теории оптимизации, методы теории идентификации, адаптированные для определенного вида сетей, эволюционные методы и т.д. Препроцессинг – предварительная обработка данных, позволяющая выделить основные аспекты сигналов, удалять шумы и перевести данные в базис, удобный для дальнейшего использования в нейронных сетях.

Данная работа сфокусирована на модификациях методов на основе наименьших квадратов [30, 34, 49], и множественно-функциональных методах [29, 33, 49].

Как уже отмечалось, одним из основных этапов подготовки данных для применения методов идентификации является предварительная обработка данных или препроцессинг. Целью данной обработки является выделение характерных особенностей сигналов и зависимостей, которые в дальнейшем повлияют на выбор моделей системы и методов идентификации. В некоторых случаях методы, применяемые на стадии препроцессинга, могут рассматриваться как методы идентификации. Можно выделить следующие направления препроцессинга: удаление шумов (аддитивных и мультипликативных), выделение характерных особенностей сигналов (собственных частот, затухание, моды, паттерны, фракталы и т.д.) и определение связи различных сигналов между собой (логико-вероятностный подход, логико-лингвистический подход, методы математической статистики, например, корреляционный анализ и т.д.). Все это позволяет провести:

1. Нормализацию данных, что позволит оценить степень влияния различных факторов на процессы в системе.
2. Оценку полноты и непротиворечивости данных.
3. Редуцировать модель системы, или представить общую задачу построения модели в виде набора взаимосвязанных подзадач и т.д.
4. Выбор оптимального формализма для описания системы.

Одними из самых эффективных и широко распространенных методов обработки сигналов являются корреляционный и регрессионный анализы [63-68].

Еще одним из широко распространенных методов анализа сигналов является преобразование Фурье [69, 70]. На практике огромное распространение получило быстрое преобразование Фурье (БПФ). Наиболее популярным из алгоритмов ускоренного вычисления БПФ является т.н. метод Cooley-Tukey, позволяющий вычислить БПФ для числа отсчетов $N = 2^k$ за время порядка $N \log_2 N$.

Исходной информацией для решения задачи идентификации являются сигналы с измерительных систем динамических объектов, которые помимо

полезной информации содержат шум. Для предварительной обработки сигналов и устранения шума в диссертации используется вейвлет-фильтрация [70-72].

Следует отметить, что предлагаемые в диссертации методы идентификации имеют высокий коэффициент распараллеливания и могут быть реализованы с помощью нейросетевых технологий, а ограничения в виде неравенств могут быть учтены в структуре интервальных нейронных сетей. Автор рассматривает данные технологии как дальнейшие направления развития предлагаемых в диссертации методов.

1.3. Постановка задач математического программирования при идентификации ИЭМС

Для квазистационарных ИЭМС предлагается использование на тактическом уровне принятия решения (слой №1) идентификаторов с моделью в виде стационарного разностного фильтра:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} a_{i_1} x[t_k - \tau_{i_1}] = - \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_{3,i_2}} b_{i_2,i_3} u_{i_2}[t_k - \tau_{i_2,i_3}], \quad (1.3)$$

где a_{i_1}, b_{i_2,i_3} – коэффициенты фильтра, i_1, i_2, i_3 – соответствующие индексы, m_1, m_2, m_{3,i_2} – максимальные значения индексов, t_k – текущий момент времени, $\tau_{i_1}, \tau_{i_2,i_3}$ – временные сдвиги, x – выходная координата, u_{i_2} – управляющие воздействия.

Используя матричный оператор сдвига во временной области, запишем модель в компактном виде относительно невязки, удобном для синтеза идентификаторов:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \mathbf{A}^{-\tau_{i_1}} \mathbf{x} a_{i_1} + \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_{3,i_2}} \mathbf{A}^{-\tau_{i_2,i_3}} \mathbf{u}_{i_2} b_{i_2,i_3} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{F} \mathbf{p} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \left[a_0, a_1, \dots, a_{m_1}, b_{1,0}, b_{1,1}, \dots, b_{m_2,m_{3,m_2}} \right]^T = \mathbf{p}, \quad (1.4)$$

$$\left[\mathbf{A}^{-\tau_0} \mathbf{x}, \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x}, \dots, \mathbf{A}^{-\tau_m} \mathbf{x}, \mathbf{A}^{-\tau_{1,0}} \mathbf{u}_1, \mathbf{A}^{-\tau_{1,1}} \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{A}^{-\tau_{m_2,m_{3,m_2}}} \mathbf{u}_{m_2} \right] = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{u}_{i_2}, \boldsymbol{\varepsilon}$ – соответствующие вектора отсчётов выходной координаты, управляющих воздействий и невязок, $\mathbf{p}$ – вектор оцениваемых параметров.

При описании ИЭМС как квазистационарного ДО должны учитываться ограничения, обусловленные режимами его функционирования и физическими законами. Данные ограничения будут меняться при переходе ДО от одной области фазового пространства к другой. В линейной постановке они имеют вид: $\mathbf{G}\mathbf{p} \geq \mathbf{R}$, где $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$ – матрицы постоянных коэффициентов. Тогда задача идентификации параметров модели ДО в виде стационарного разностного фильтра может быть сформулирована в виде задачи МП:

$$J = \min_{\mathbf{p}} \{ \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} \} \text{ при ограничениях } \mathbf{G}\mathbf{p} \geq \mathbf{R}. \quad (1.5)$$

На небольших выборках измерительных данных на качество идентификации существенно оказывают влияние значения начальных условий ДО. Для учёта начальных условий предлагается введение матрицы $\mathbf{S}$, составленной из нулей и единиц, тогда матрица $\mathbf{H}$ будет иметь вид: $\mathbf{H} = \mathbf{F}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{F}$. Стандартные МНК-идентификаторы не учитывают начальные условия функционирования ДО, так как обычные алгоритмы оперируют большими выборками данных, большая часть которых относится к установившимся режимам. При идентификации ИЭМС стабильность параметров остаётся только в пределах небольших выборок данных, и работа идентификатора происходит по большей части в переходных режимах, поэтому часть уравнений в (1.4) являются некорректными и должны быть исключены при формировании матрицы $\mathbf{H}$. Это достигается за счёт обнуления соответствующих уравнений в (1.4). Совместное оценивание начальных условий и параметров модели ДО в виде стационарного разностного фильтра возможно применением множественно-функционального подхода, который будет рассмотрен ниже.

При выборе значения первого коэффициента в $\mathbf{p}$ равным 1 с помощью замены можно перейти от (1.5) к известной задаче МП: $J = \min_{\mathbf{p}} \{ 0.5 \mathbf{p}^{*T} \mathbf{H}^* \mathbf{p}^* + \Phi \mathbf{p}^* + c \}$ при ограничениях $\mathbf{G}^* \mathbf{p}^* \geq \mathbf{R}^*$. Если матрица $\mathbf{H}^*$ является положительно определённой, то эта задача квадратичного

программирования может быть решена стандартными методами, например, методом Вульфа [27].

В случае низкого соотношения сигнал/шум и низкой информационной насыщенности данных матрица $\mathbf{H}^*$ становится не положительно определённой, и целесообразно перейти к решению задачи методом неравенств. Тогда система линейных неравенств с учётом интервальной оценки β рассогласования $\mathbf{e}$ между измеренными значениями выходной координаты ДО и полученными с модели будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{F}(\beta_1)\mathbf{p} \geq 0 \\ \mathbf{F}(\beta_2)\mathbf{p} \leq 0 \end{cases}, \text{ при } \sum_{i_1=0}^{m_1} a_{i_1} \geq 0, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{F}(\beta_1)\mathbf{p} \leq 0 \\ \mathbf{F}(\beta_2)\mathbf{p} \geq 0 \end{cases}, \text{ при } \sum_{i_1=0}^{m_1} a_{i_1} \leq 0, \\ & \sum_{i_1=0}^{m_1} \left[\mathbf{A}^{-\tau_{i_1}} \mathbf{x} + \mathbf{I} \mathbf{e} \right] a_{i_1} + \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_{3,i_2}} \mathbf{A}^{-\tau_{i_2,i_3}} \mathbf{u}_{i_2} b_{i_2,i_3} = 0, e_i \in \beta = [\beta_1 \quad \beta_2], \\ & \mathbf{F}(\beta) = \left[\mathbf{A}^{-\tau_0} \mathbf{x} + \xi \beta, \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x} + \xi \beta, \dots, \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x} + \xi \beta, \mathbf{A}^{-\tau_{1,0}} \mathbf{u}_1, \mathbf{A}^{-\tau_{1,1}} \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{A}^{-\tau_{m_2,m_3,m_2}} \mathbf{u}_{m_2} \right], \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, ξ – вектор из единиц. При учёте ограничений $\mathbf{Gp} \geq \mathbf{R}$. Решение (1.6) может быть найдено с помощью метода эллипсоидов [73].

Алгоритм работы идентификатора, основанного на методе неравенств:

1. Начало.
2. Сбор измерительной информации и формирование выборок отсчетов управляющих и измеряемых координат.
3. Выбор интервальной оценки невязки для идентификатора.
4. Построение системы линейных неравенств.
5. Применение методов линейного программирования (например, метод эллипсоидов) для решения полученной системы неравенств.
6. Моделирование разностного фильтра с целью определения невязки между откликом реального объекта и фильтра.
7. Если качество идентификации приемлемое, перейти в пункт 8, иначе в пункт 3.
8. Конец.

Для синтеза законов управления ИЭМС используются методы пространства состояний (ПС). Переход от описания ДО от модели в виде фильтра (1.3) к виду в ПС осуществляется с помощью стандартных структурных преобразований. Наиболее простой способ получения уравнений объекта в ПС – это запись в виде канонической формы наблюдаемости, матрицы которой формируются из коэффициентов (1.3). Вектор состояния подобной системы в ПС может быть восстановлен с помощью идентификатора состояния полного порядка.

При наличии других измеряемых величин y_j кроме главной координаты, они выражаются через переменные состояния системы x_i как $y_j[t_k] = \sum_{i=1}^n c_{j,i} x_i[t_k]$, где $c_{j,i}$ – коэффициенты матрицы измеряемого выхода в ПС. Задача определения $c_{j,i}$ формулируется аналогично (1.4) или (1.6) при низком соотношении сигнал/шум. Переходя к векторам отсчетов компонент вектора состояния $\mathbf{x}_i$ и измеряемой координаты y_j получим:

$$\begin{aligned} y_j - \sum_{i=1}^n c_{j,i} x_i &= \varepsilon, \quad \mathbf{F}\mathbf{p} + y_j = \varepsilon, \\ [c_{j,1}, c_{j,2}, \dots, c_{j,n}]^T &= \mathbf{p}, [-\mathbf{x}_1, \dots, -\mathbf{x}_n] = \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Исходя из записи (1.6), коэффициенты $c_{j,i}$ могут быть найдены как минимизация целевой функции $J = \min_{\mathbf{p}} \{0.5\mathbf{p}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{p} + y_j^T \mathbf{F} \mathbf{p} + 0.5y_j^T y_j\}$, при интервальных ограничениях на параметры $\mathbf{p}$. Если матрица $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ является положительно определённой, то это задача квадратичного программирования, и она может быть решена стандартными методами, например, методом Вульфа.

В случае низкого соотношения сигнал/шум и низкой информационной насыщенности данных матрица $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ становится не положительно определённой, и целесообразно перейти к решению задачи методом неравенств по аналогии с (1.6):

$$\begin{cases} \mathbf{F}^*(\beta_1)\mathbf{p}^* \geq 0 \\ \mathbf{F}^*(\beta_2)\mathbf{p}^* \leq 0 \end{cases}, \text{ при } \sum_{i=1}^n c_{j,i} \geq 0, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{F}^*(\beta_1)\mathbf{p}^* \leq 0 \\ \mathbf{F}^*(\beta_2)\mathbf{p}^* \geq 0 \end{cases}, \text{ при } \sum_{i=0}^n c_{j,i} \leq 0,$$

$$\left[\mathbf{y}_j + \mathbf{e} \right] - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i c_{j,i} = 0, e[t_k] \in \beta = [\beta_1 \quad \beta_2], \mathbf{F}^*(\beta) = [\mathbf{y}_j + \xi\beta, -\mathbf{x}_1, \dots, -\mathbf{x}_n],$$

$$\mathbf{p}^* = [1, c_{j,1}, c_{j,2}, \dots, c_{j,n}]^T.$$

Для нестационарных ИЭМС и ИИС испытательных стендов предлагается использование идентификаторов с моделью в виде нестационарного разностного фильтра:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} a_{i_1} [t_k] x[t_k - \tau_{i_1}] = - \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_{3,i_2}} b_{i_2,i_3} [t_k] u_{i_2} [t_k - \tau_{i_2,i_3}], \quad (1.8)$$

где нестационарные коэффициенты в (1.8) определяются как выходы динамических систем:

$$\sum_{j_1=0}^{m_4} \mu_{i_1,j_1} a_{i_1} [t_k - \tau_{j_1}] = 0, \sum_{j_2=0}^{m_5} \mu_{i_2,i_3,j_2} b_{i_2,i_3} [t_k - \tau_{j_2}] = 0, \quad (1.9)$$

где j_1, j_2 – соответствующие индексы, а m_4, m_5 – их максимальные значения, $\mu_{i_1,j_1}, \mu_{i_2,i_3,j_2}$ – коэффициенты соответствующих фильтров, τ_{j_1}, τ_{j_2} – временные сдвиги. Тогда для МНК-идентификатора будем иметь выражение для целевой функции:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{p})^T \mathbf{H}_\varphi \Phi(\mathbf{p}), \quad (1.10)$$

где $\mathbf{H}_\varphi = \mathbf{F}_\varphi^T \mathbf{F}_\varphi$, $\mathbf{F}_\varphi = \text{diag} \left[\mathbf{A}^{-\tau_0} \mathbf{x}; \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x}; \dots; \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x}; \mathbf{A}^{-\tau_{1,0}} \mathbf{u}_1; \mathbf{A}^{-\tau_{1,1}} \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{A}^{-\tau_{m_2,m_3,m_2}} \mathbf{u}_{m_2} \right]$, а

$\Phi = \left[\varphi_0(\mu_0, \mathbf{a}_0); \dots; \varphi_{m_1}(\mu_{m_1}, \mathbf{a}_{m_1}); \varphi_{1,0}(\mu_{1,0}, \mathbf{b}_{1,0}); \dots, \varphi_{m_2,m_3,m_2}(\mu_{m_2,m_3,m_2}, \mathbf{b}_{m_2,m_3,m_2}) \right]$, компоненты

которого являются полиномиальными функциями от элементов из $\mathbf{p}$, которые и определяются согласно:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \varphi_{i_1}(\mu_{i_1}, \mathbf{a}_{i_1}, t_k) x[t_k - \tau_{i_1}] + \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_{3,i_2}} \varphi_{i_2,i_3}(\mu_{i_2,i_3}, \mathbf{b}_{i_2,i_3}, t_k) u_{i_2} [t_k - \tau_{i_2,i_3}] = \varepsilon[t_k] \text{ и являются}$$

выходами моделей (1.9), а $\varepsilon[t_k]$ – текущая невязка, μ_{i_1}, μ_{i_2,i_3} – оцениваемые

параметры фильтра, $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2, i_3}$ – начальные значения оцениваемых параметров в (1.9). Параметры $\boldsymbol{\mu}_{i_1}, \boldsymbol{\mu}_{i_2, i_3}, \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2, i_3}$ формируют вектор $\mathbf{p}$.

Тогда задача идентификации параметров модели ИЭМС в виде нестационарного разностного фильтра может быть сформулирована в виде задачи МП: $J = \min_{\mathbf{p}} \left\{ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p})^T \mathbf{H}_{\varphi} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}) \right\}$ при ограничениях $\mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{p} \geq \mathbf{R}$. Выбор метода решения зависит от вида целевой функции и ограничений. В работе использовались различные методы, например, применялся переход от условной оптимизации к безусловной с дальнейшим решением следующими методами: метод Гаусса-Ньютона, метод Левенберга-Марквардта, генетический алгоритм, метод последовательного квадратичного программирования, комплексный метод Бокса и др.

Одним из использованных методов решения в диссертации был метод неравенств. Посредством введения интервальной оценки β рассогласования ϵ между измеренными значениями выходной координаты ДО и полученными с модели, эта задача сводится к системе полиномиальных неравенств:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\varphi}(\beta_1)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}) \leq 0 \\ \mathbf{F}_{\varphi}(\beta_2)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}) \geq 0 \end{cases}, \text{ при } \sum_{i_1=0}^{m_1} \varphi_{i_1}(\boldsymbol{\mu}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_1}, t_k) \leq 0, \\ \text{или} \begin{cases} \mathbf{F}_{\varphi}(\beta_1)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}) \geq 0 \\ \mathbf{F}_{\varphi}(\beta_2)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}) \leq 0 \end{cases}, \text{ при } \sum_{i_1=0}^{m_1} \varphi_{i_1}(\boldsymbol{\mu}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_1}, t_k) \geq 0, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{F}_{\varphi}(\beta) = \text{diag} \left[\mathbf{A}^{-\tau_0} \mathbf{x} + \xi \beta; \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x} + \xi \beta; \dots; \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x} + \xi \beta; \mathbf{A}^{-\tau_{1,0}} \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{A}^{-\tau_{m_2, m_2}} \mathbf{u}_{m_2} \right].$$

Одним из практических подходов к упрощению задач (1.10) и (1.11) является использование масштабирования модельного времени (т.е. введение частоты квантования по времени как функции переменных масштабных коэффициентов). При данном подходе предполагается, что модель объекта описывает стационарный ДО, но отсчёты берутся через разные промежутки времени. Тогда выражения (1.10) и (1.11) преобразуются к виду, где функции в векторе $\boldsymbol{\varphi}$ будут зависеть от переменных временных сдвигов и параметров стационарного фильтра. Например, в случае колебательных систем

масштабные коэффициенты могут быть рассчитаны по изменению периодов колебания на интервале времени, в котором определяются отсчёты.

Помимо модификаций МНК-идентификаторов в работе предлагаются методы идентификации, основанные на множественно-функциональном подходе. Такие множественно-функциональные методы позволяют описывать нестационарность и стохастичность ДО посредством сведения к «нежёстким» моделям на основе интервальных методов и систем неравенств. В качестве вспомогательных инструментов при использовании данного подхода применяются различные преобразования над измерительной информацией, что повышает помехоустойчивость множественно-функциональных методов.

Введём Φ функцию оценки качества модели. Часто в качестве Φ выбирают квадратичную форму координат или параметров, описывающую отклонения модели от измеренных данных ДО, также Φ может быть выражена в виде энергетического критерия, а для задач управления Φ может быть функцией Ляпунова.

Модель ДО может быть задана как в явном, так и неявном виде. Например, в главе 5 предлагается метод идентификации профилей импульсов с моделью, заданной в неявном виде, когда требования к профилю импульса задаётся в виде системы неравенств.

В данной главе предлагается метод идентификации профиля скорости свободной поверхности при ударе в ИИС испытательного стенда на основе множественно-функционального подхода с нелинейной моделью, заданной в явном виде.

Для многих типов ИЭМС могут использоваться нелинейные нестационарные модели вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}), \quad (1.12)$$

где $\mathbf{x}$ — вектор состояния ДО, $\mathbf{p}$ — параметры ДО, $\mathbf{u}$ — управляющие воздействия, $\mathbf{f}$ — возмущающие воздействия. Выберем

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{Cx} - \mathbf{y}_0)^T \mathbf{M}(\mathbf{Cx} - \mathbf{y}_0) dt, \text{ где } \mathbf{C} - \text{ матрица измеряемых выходных}$$

величин системы, $\mathbf{M}$ – нормировочная матрица, коэффициенты которой находятся по диапазону изменения компонентов вектора измеряемых величин $\mathbf{y}_0$. Для общего случая в (1.12) неизвестными являются как функция $\mathbf{F}$, так и часть компонент $\mathbf{x}$ и аргументы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{f}$. Одним из стандартных подходов является аппроксимация (1.12) некоторой сетевой структурой, организующей численное разложение в определённый ряд, однако остаётся открытым вопрос выбора топологии такой структуры, адекватность такого описания физическим закономерностям.

В случае, если матричная функция $\mathbf{F}$ известна, задача определения неизмеряемых компонент вектора состояния $\mathbf{x}$ и неизвестных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{f}$ формулируется следующим образом:

$$J = \min_{\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{f}} \left\{ \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{Cx} - \mathbf{y}_0)^T \mathbf{M}(\mathbf{Cx} - \mathbf{y}_0) dt \right\}, \text{ при ограничениях обусловленных}$$

уравнениями модели ДО (1.11) и ограничениях, описывающих физическую адекватность модели $\mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{\max}, \quad \mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max}, \quad \mathbf{f}_{\min} \leq \mathbf{f} \leq \mathbf{f}_{\max},$
 $G_i(\mathbf{p}, \mathbf{f}, \mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m,$ где $\mathbf{p}_{\min}$ и $\mathbf{p}_{\max}$ – минимальные и максимальные значения параметров ДО, $\mathbf{x}_{\min}$ и $\mathbf{x}_{\max}$ – минимальные и максимальные значения компонент вектора состояния ДО, $\mathbf{f}_{\min}$ и $\mathbf{f}_{\max}$ – минимальные и максимальные значения внешних воздействий, действующих на ДО, G_i – функции ограничений.

Для численного решения исходная задача может быть преобразована к задаче МП:

$$J^* = \min_{\mathbf{p}, \mathbf{x}[0], \mathbf{f}} \left\{ \sum_{k=0}^N (\mathbf{Cx}[k] - \mathbf{y}_0[k])^T \mathbf{M}(\mathbf{Cx}[k] - \mathbf{y}_0[k]) \right\}, \quad (1.13)$$

при ограничениях дискретной модели ДО в виде:
 $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F}^*(\mathbf{p}[k], \mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k], \mathbf{f}[k])$ и ограничениях, описывающих физическую адекватность модели: $\mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{\max}, \mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max}, \mathbf{f}_{\min} \leq \mathbf{f} \leq \mathbf{f}_{\max},$

$G_i(\mathbf{p}, \mathbf{f}, \mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m$, где k – номер отсчёта по времени соответствующей величины или параметра ДО.

Предлагается метод решения МП (1.13) на основе введения базисных функций, которые несут информацию как о параметрах системы, так и о её начальном состоянии и внешних воздействиях. Базисные функции представляет собой аппроксимации решения системы дифференциальных уравнений, задающей модель ДО, при учёте физических закономерностей и соответствующих ограничениях на параметры $\mathbf{p}$ и $\mathbf{f}$, а также фазовые координаты $\mathbf{x}$. Выбор типов базисных функций и определение их параметров осуществляется по экспериментальным данным. Базисные функции в общем случае имеют вид: $\mathbf{z}_i = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, t), \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\rho}_j(\boldsymbol{\mu}_i, t)$, где $\mathbf{z}_i$ – базисные функции, аппроксимирующие $\mathbf{x}_i$ таким образом, что $\mathbf{x}_i = \mathbf{z}_i + \varepsilon$, где ε – погрешность модели, $\boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, t)$ – аппроксимирующие функции решений (чаще полиномиальные, или аппроксимирующиеся полиномами на основании теоремы Вейерштрасса), $\mathbf{v}_i$ – базисные функции, аппроксимирующие $\mathbf{f}_i$ таким образом, что $\mathbf{f}_i = \mathbf{v}_i + \varepsilon$, где $\boldsymbol{\rho}_j(\boldsymbol{\mu}_i, t)$ – аппроксимирующие функции модели внешних воздействий, $\boldsymbol{\mu}_i$ – соответствующие параметры. Представление $\mathbf{x}_i = \mathbf{z}_i + \varepsilon$ подставляется в (1.13) и затем решается преобразованная задача МП. Базисные функции могут быть заданы в явном виде, например, некоторой формулой, в неявном виде – как численное решение системы (1.12) или в виде систем неравенств.

Задача (1.13) приводит к решению оптимизационной задачи высокой размерности и сложности, что требует создания и адаптации существующих оптимизационных процедур.

Рассмотрим применение метода на основе базисных функций для идентификации параметров и состояния квазистационарного ДО. В качестве модели ДО будем использовать стационарный разностный фильтр со стабильной скважностью отсчётов:

$$\sum_{i=0}^n a_i x[k-i] = - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m b_{l,j} u_l[k-j], \quad (1.14)$$

где a_i , $b_{l,j}$ – параметры фильтра, k – текущий дискретный момент времени, индекс в квадратных скобках обозначает дискретный момент времени, n – порядок фильтра, m – число входных воздействий, u_l – входные воздействия, x – выходная величина фильтра.

Найдём базисную функцию, содержащую информацию как о параметрах фильтра, так и о начальном состоянии. Для этого перейдём к описанию модели (1.14) в отсчётах:

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathbf{A}^{-i} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{A}^{-i} \mathbf{D} \mathbf{x}_0 = - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m b_{l,j} \mathbf{A}^{-i} \mathbf{u}_l, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{h \times n} \\ \mathbf{1}_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

где $\mathbf{A}$ – матричный оператор сдвига во временной области, $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}_l$ – векторы отсчётов выходной величины фильтра и входных воздействий соответственно, $\mathbf{x}_0$ – начальные условия фильтра, $\mathbf{1}_{n \times n}$, $\mathbf{0}_{h \times n}$ – единичная и нулевая матрицы соответствующих размерностей. Определим выражение для выходной величины разностного фильтра используя (1.15):

$$\mathbf{x} = - \left[\sum_{i=0}^n a_i \mathbf{A}^{-i} \right]^{-1} \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{A}^{-i} \mathbf{D} \mathbf{x}_0 - \left[\sum_{i=0}^n a_i \mathbf{A}^{-i} \right]^{-1} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m b_{l,j} \mathbf{A}^{-i} \mathbf{u}_l. \quad (1.16)$$

Выберем (1.16) в качестве базисной функции для идентификации параметров разностного фильтра, тогда можно ввести целевую функцию качества идентификации в виде: $\Phi = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$, где $\hat{\mathbf{x}}$ – измеренный вектор отсчётов контролируемой выходной величины ДО. Вектор параметров, которые необходимо определить состоит из коэффициентов фильтра и вектора начальных условий:

$\mathbf{p} = [a_0, \dots, a_n, b_{1,1}, \dots, b_{m,n}, \mathbf{x}_0^T]^T$. Необходимо учесть ограничения на физическую адекватность модели (1.16) и ограничения на начальные условия и коэффициенты фильтра $\mathbf{Gp} \geq \mathbf{R}$, тогда задача МП примет вид:

$$J = \min_p \{ \Phi \}, \text{ при ограничениях в виде уравнения (1.16) и } \mathbf{Gp} \geq \mathbf{R}. \quad (1.17)$$

Решение задачи (1.17) значительно сложнее чем для МНК-идентификаторов (1.5) и не сводится к задаче квадратичного программирования. Для решения задачи (1.17) в работе использовались пакетные реализации методов условной оптимизации в среде MatLab, основанные на методе Гаусса-Ньютона, метода Левенберга-Марквардта, генетическом алгоритме и др.

Проводилось модельное исследование эффективности МНК-идентификатора и идентификатора на основе базисной функции. В качестве объекта моделировался ДО второго порядка с передаточной функцией в виде колебательного звена. Измерялись входные и выходные величины ДО, на которые действовала аддитивная помеха с нормальным законом распределения. Результаты идентификации представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Сравнение эффективности МНК-идентификатора и идентификатора на основе базисной функции (БФИ)

СКО %, шум	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
СКО %, a_i (МНК-идентификатор)	0	5.3	35.4	53.7	57.1	65.7	58.3	65.3	68.5	78.7
СКО %, a_i (БФИ)	0	1	1	3	3	3	3	10.3	28.2	38.2
СКО %, b_i (МНК-идентификатор)	0	27	32.6	76.3	96.2	98.6	99.2	102.4	122.1	134.5
СКО %, b_i (БФИ)	0	3	7.4	11.3	12.4	12.7	18.3	38	58	92
СКО %, НУ (БФИ)	0	7	8.7	9.1	10.5	10.8	11.3	11.8	14.9	17.8

где НУ – начальные условия.

Исследования предложенного идентификатора на основе базисной функции показали, что он более эффективно работает на небольших выборках в переходных режимах, имеет большую устойчивость при наличии шума в измеряемых величинах.

Данный метод и МНК-идентификатор использовались для идентификации параметров системы управления гексапода PI H-810.

1.4. Идентификация внешних воздействий, действующих на ИЭМС

Внешнее воздействие существенным образом влияет на качество идентификации систем, а также информация о нём необходима при синтезе высокоточных систем управления. Для восстановления внешнего воздействия используются идентификаторы вида:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{M}_1 \mathbf{v} + \mathbf{M}_2 e \\ \mathbf{f}_{\text{оц.}} &= \mathbf{M}_3 \mathbf{v} + \mathbf{M}_4 e,\end{aligned}$$

где $\mathbf{f}_{\text{оц.}}$ – оценка внешнего воздействия, e – ошибка идентификации по измеряемой координате, $\mathbf{v}$ – вектор состояния модели внешнего воздействия, $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$ – матрицы параметров модели. Подобные модели используются в составе идентификаторов состояния динамических объектов, задающихся в нормальной форме Коши уравнениями вида:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{U} + \bar{\mathbf{F}}\mathbf{f} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{X},\end{aligned}$$

где $\mathbf{X}$ – вектор состояния, $\mathbf{U}$ – вектор управляющих воздействий, $\mathbf{f}$ – вектор внешних воздействий, $\mathbf{y}$ – вектор измеряемого выхода, $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{C}}$ – матрицы параметров динамического объекта.

Таким образом, идентификатор состояния расширенной системы имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}_{\text{оц.}} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{X}_{\text{оц.}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{U} + \bar{\mathbf{F}}\mathbf{f}_{\text{оц.}} + \bar{\mathbf{L}}e \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{M}_1 \mathbf{v} + \mathbf{M}_2 e \\ \mathbf{f}_{\text{оц.}} &= \mathbf{M}_3 \mathbf{v} + \mathbf{M}_4 e \\ e &= y - y_{\text{оц.}} = \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\text{оц.}}),\end{aligned}$$

где $\mathbf{X}_{\text{оц.}}$ – оценка вектора состояния, y – выходная координата объекта, $y_{\text{оц.}}$ – оценка выходной координаты объекта, $\bar{\mathbf{L}}$ – вектор коэффициентов обратных связей идентификатора состояния.

Для случая скалярного выхода оценки внешнего воздействия может быть получена передаточная функция идентификатора по известной модели объекта управления в нормальной форме Коши:

$$W_{\text{оц.вв}}(s) = L_0 \left[\bar{C} [sI - \bar{A} - \bar{L}\bar{C}]^{-1} \bar{F} \right]^{-1},$$

где L_0 – коэффициент обратной связи. Необходимо рассмотреть вопрос физической реализуемости $W_{\text{оц.вв}}$, в случае если показатель числителя больше показателя знаменателя, то знаменатель должен быть дополнен высокочастотными апериодическими звеньями. Структурными преобразованиями осуществляется переход от синтезированной передаточной функции к виду в пространстве состояний, и определяются матрицы $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_4$. Подобное определение параметров модели внешнего воздействия носит характер первого приближения, опорной точки, позволяющих задать размерность идентификатора внешнего воздействия. Дальнейший синтез предусматривает поиск коэффициентов модели с помощью оптимизационной процедуры путём минимизации квадратичного функционала ошибки идентификации.

Одной из основных задач синтеза идентификатора состояния расширенной системы является нахождение матрицы внешних воздействий $\bar{F}$, которая решается как определение параметров нестационарных фильтров следующего вида:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} a_{i_1} x[t_k - \tau_{i_1}] = - \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_{3,i_2}} b_{i_2,i_3} u_{i_2}[t_k - \tau_{i_2,i_3}] - \sum_{i_4=1}^{m_4} \sum_{i_5=0}^{m_{5,i_4}} \phi_{i_4,i_5}[t_k], \quad (1.18)$$

где a_{i_1} , b_{i_2,i_3} , ϕ_{i_4,i_5} – коэффициенты фильтра, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 – соответствующие индексы, $m_1, m_2, m_{3,i_2}, m_4, m_5, m_{5,i_4}$ – максимальные значения соответствующих индексов, t_k – текущий момент времени, $\tau_{i_1}, \tau_{i_2,i_3}$ – временные сдвиги, x – выходная координата, u_{i_2} – управляющие воздействия, нестационарные коэффициенты ϕ_{i_4,i_5} в (1.18) определяются как выходы динамических систем:

$$\sum_{j_1=0}^{n_1} \mu_{i_4, i_5, j_1} \phi_{i_4, i_5} [t_k - \tau_{j_1}] = - \sum_{j_2=0}^{n_2} \rho_{i_4, i_5, j_2} v_{i_4, i_5} [t_k - \tau_{j_2}], \quad (1.19)$$

где j_1, j_2 – соответствующие индексы, а n_1, n_2 – их максимальные значения, $\mu_{i_4, i_5, j_1}, \rho_{i_4, i_5, j_2}$ – коэффициенты соответствующих фильтров, τ_{j_1}, τ_{j_2} – временные сдвиги, v_{i_4, i_5} – тестовые воздействия, в случае идентификации случайной составляющей внешнего воздействия – реализации белого шума. Тогда для МНК-идентификатора будем иметь выражение для целевой функции:

$$\Phi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \left[\mathbf{F}_l \mathbf{p}_1 + \sum_{l=1}^{n_l} \sum_{s=0}^{n_s} \phi_{l,s}(\mathbf{p}_2) \right]^T \left[\mathbf{F}_l \mathbf{p}_1 + \sum_{l=1}^{n_l} \sum_{s=0}^{n_s} \phi_{l,s}(\mathbf{p}_2) \right],$$

где l, s – индексы, n_l, n_s – максимальные значения соответствующих индексов, $\phi_{l,s}$ – векторы, составленные из ϕ_{i_4, i_5} ,

$$\mathbf{p}_1 = \left[a_0, a_1, \dots, a_{m_1}, b_{1,0}, b_{1,1}, \dots, b_{m_2, m_3, m_2} \right]^T,$$

$$\mathbf{F}_l = \left[\mathbf{A}^{-\tau_0} \mathbf{x}, \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x}, \dots, \mathbf{A}^{-\tau_{m_1}} \mathbf{x}, \mathbf{A}^{-\tau_{1,0}} \mathbf{u}_1, \mathbf{A}^{-\tau_{1,1}} \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{A}^{-\tau_{m_2, m_3, m_2}} \mathbf{u}_{m_2} \right],$$

а $\mathbf{p}_2$ – вектор настраиваемых параметров, составленный из коэффициентов и начальных условий систем (1.19).

Тогда $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ находятся как решение задачи: $J = \min_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \{ \Phi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \}$ при ограничениях на диапазоны изменения $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$.

Если определены $\phi_{i_4, i_5} [t_k]$, то для случая стационарных коэффициентов при сигналах внешнего воздействия γ_{i_4, i_5} имеем следующую запись:

$$\sum_{i_4=1}^{m_4} \sum_{i_5=0}^{m_{5, i_4}} \phi_{i_4, i_5} [t_k] = \sum_{i_4=1}^{m_4} \sum_{i_5=0}^{m_{5, i_4}} \gamma_{i_4, i_5} f_{i_4} [t_k - \tau_{i_4, i_5}],$$

где f_{i_4} – внешние воздействия, τ_{i_4, i_5} – временные сдвиги, которые выбираются кратными периоду дискретизации по времени T_0 , тогда γ_{i_4, i_5} находятся из соотношений вида:

$$\begin{aligned}
\phi_{1,n}[nT_0] &= \gamma_{1,n} f_1[0T_0] \\
\phi_{1,n-1}[(n-1)T_0] &= \gamma_{1,n-1} f_1[0T_0] \\
\phi_{1,n-2}[(n-2)T_0] &= \gamma_{1,n-2} f_1[0T_0] \quad (1.20) \\
&\vdots \\
\phi_{1,0}[0T_0] &= \gamma_{1,0} f_1[0T_0].
\end{aligned}$$

Как видно существует неоднозначность выбора $f_1[0T_0]$ с точностью до масштабного коэффициента, поэтому эта величина должна рассчитываться из диапазона изменения внешних воздействий. Предлагаемый метод позволяет определять одновременно коэффициенты при сигналах внешнего воздействия и сами внешние воздействия с точностью до масштабных коэффициентов.

Если же данные коэффициенты принять нестационарными, то их разделение описывается как минимизация целевых функций:

$$e_j = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m \left(\gamma_{j,i}[kT_0] f_j[(k-i)T_0] - \phi_{j,i}[kT_0] \right)^2,$$

где вектор настраиваемых параметров составляется из коэффициентов и начальных условий систем (1.20):

$$\begin{aligned}
\gamma_{j,i}[kT_0] &= \sum_l \mu_{l,j} \gamma_{j,i}[(k-l)T_0], \\
f_j[kT_0] &= \sum_l \chi_{l,j} f_j[(k-l)T_0] + \sum_l \rho_{l,j} v_j[(k-l)T_0],
\end{aligned}$$

где v_j — реализации белого шума, $\mu_{l,j}$, $\chi_{l,j}$, $\rho_{l,j}$ — соответствующие коэффициенты, $\gamma_{j,i}$ — коэффициенты при внешнем воздействии, f_j — оценки внешнего воздействия.

1.5. Примеры решения задач идентификации

1.5.1. Идентификация линейного электропривода исполнительного механизма контррефлектора радиотелескопа миллиметрового диапазона

Рассмотрена задача идентификации линейного привода исполнительного механизма контррефлектора (КР) с помощью модифицированного МНК-идентификатора с ограничениями для квазистационарных систем, описанного в разделе 1.3 в формулах (1.4, 1.5).

Контррефлектор представляет собой вторичное зеркало в зеркальных системах радиотелескопов и антенн. Назначение КР – это перенаправление радиоизлучения, собранного главным зеркалом (рефлектором) в область вторичного фокуса, где установлена приёмная аппаратура. Применение адаптивных КР позволяет компенсировать влияние деформаций и ошибок наведения главного зеркала (ГЗ). Структура адаптивных КР предусматривает несколько уровней адаптации. Первый из них – это установка КР на специальный исполнительный механизм, обеспечивающий перемещение по пяти степеням свободы: по трём линейным и двум угловым координатам. Второй уровень адаптации – это выполнение КР из отдельных щитов, что позволяет изменять профиль поверхности КР, таким образом, компенсируя деформации ГЗ и самого КР.

В качестве исполнительных механизмов адаптивных КР получили распространение электромеханические системы параллельной структуры, основным элементом которых являются линейные электроприводы (актуаторы). Использование подобных систем связано с их компактностью, способностью обеспечивать перемещения по многим степеням свободы, а также возможностью перемещать большие грузы с высокой точностью позиционирования.

Подобные системы состоят из перемещаемой платформы, к которой крепится КР, системы линейных электроприводов и базы, расположенной на ригеле радиотелескопа. Ригель – это элемент ферменной конструкции

радиотелескопа или антенны, на котором крепится исполнительный механизм КР. Линейные электроприводы соединяются с платформой и базой с помощью специальных шарниров. С помощью линейных электроприводов также перемещаются щиты КР.

При перемещении адаптивного КР линейные электроприводы работают в разных режимах нагружения в зависимости от ориентации радиотелескопа и КР. Также прослеживается изменение жесткостных характеристик электроприводов при разном типе нагружения и от удлинений их штоков, что существенным образом влияет на точность позиционирования КР. Поэтому является актуальной задача идентификации параметров данных электроприводов.

Линейный электропривод (ЛЭ) состоит из двух шарниров, предназначенных для крепления к базе и платформе, электродвигателя постоянного тока, планетарного редуктора и шариковинтовой пары, системы натяжения, препятствующей раскрытию люфта.

Рассматривается ЛЭ со следующими характеристиками.

Параметры электродвигателя:

Постоянная времени обмотки якоря: 0.1 с/рад;

Активное сопротивление обмотки якоря: 0.625 Ом

Моментная постоянная двигателя: 0.5 Н*м/А

Коэффициент противоЭДС: 0.06 В*с/рад

Момент инерции якоря двигателя: 0.0003 кг*м²

Коэффициент вязкого трения в подшипниках: 0.01 Н*м*с/рад

Напряжение питания: ±15 В

Параметры системы планетарный редуктор - шариковинтовая передача:

Коэффициент демпфирования: $1.4 \cdot 10^5$ Н*с/м

Передаточное число: $2 \cdot \pi / 0.0001$ рад/м

Коэффициент жесткости: $2 \cdot 10^6$ Н/м

Масса перемещаемого груза: 200-1200 кг

На основании приведённых данных в Matlab/Simulink была разработана модель линейного электропривода, используемая для тестирования МНК-идентификатора с ограничениями для квазистационарных систем. Модель состоит из трёх основных модулей:

- блок электродвигателя постоянного тока;
- блок, моделирующий редуктор и шариковинтовую пару;
- блок, моделирующий перемещаемую платформу.

Модель позволяет описывать различные варианты нагружения линейного электропривода при разных положениях ригеля КР. При тестировании идентификатора моделировалось отклонение параметров линейного электропривода в диапазоне 50% от номинальных значений.

В качестве сигнала, используемого в МНК-идентификаторе, был выбран сигнал скорости удлинения штока ЛЭ. В качестве управляющего сигнала – напряжение, подаваемое на электродвигатель.

В результате процесса идентификации были построены передаточные функции линейного электропривода от входа по управляющему напряжению по выходному сигналу – скорости удлинения штока.

В МНК-идентификаторе используется модель системы в виде разностного фильтра с фиксированной скважностью отсчётов:

$$v[k] + \sum_{i=1}^N a_i v[k-i] = - \sum_{i=1}^N b_i u[k-i], \quad (1.21)$$

где v – измеряемая скорость удлинения штока ЛЭ; k – номер дискретного момента времени; N – порядок разностного фильтра; a_i и b_i – коэффициенты разностного фильтра; u – управляющий сигнал. Вектор оцениваемых коэффициентов формируется из векторов коэффициентов разностного фильтра следующим образом $\mathbf{p} = [\mathbf{a}; \mathbf{b}]$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – векторы, составленные из соответствующих коэффициентов a_i и b_i .

Для построения МНК-идентификатора необходимо оценить размерность, используемой в нём модели (1.21). Это может быть сделано по упрощённой модели ЛЭ.

Так как модель (1.21) является линейной, рассмотрим упрощённую модель ЛЭ, включающую в себя:

- линейную модель электродвигателя постоянного тока;
- линейную модель системы планетарный редуктор - шариковинтовая пара;
- линейную модель перемещаемой платформы.

Данная модель позволяет оценить порядок разностного фильтра (1.21), период дискретизации по времени и составить систему ограничений для его коэффициентов, что существенно повышает устойчивость процесса идентификации.

Дифференциальные уравнения упрощённой модели ЛЭ в пространстве состояния имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}_m \mathbf{X} + \mathbf{B}_m u, \quad v = \mathbf{C}_m \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = [I_{\text{дв.}} \quad \Omega_{\text{дв.}} \quad v \quad d \quad L]^T, \\ \mathbf{A}_m &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{\text{дв.}}} & -\frac{C_e}{T_{\text{дв.}} R_{\text{дв.}}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_m}{J_{\text{дв.}}} & -\frac{D_{\text{ред.}}}{J_{\text{дв.}} I_{\text{ред.}}^2} - \frac{\mu_{\text{дв.}}}{J_{\text{дв.}}} & \frac{D_{\text{ред.}}}{J_{\text{дв.}} I_{\text{ред.}}} & \frac{C_{\text{ред.}}}{J_{\text{дв.}} I_{\text{ред.}}} & 0 \\ 0 & \frac{D_{\text{ред.}}}{m_{\text{пл.}} I_{\text{ред.}}} & -\frac{D_{\text{ред.}}}{m_{\text{пл.}}} & -\frac{C_{\text{ред.}}}{m_{\text{пл.}}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_{\text{ред.}}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{\text{дв.}} R_{\text{дв.}}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_m &= [0 \quad 0 \quad 1000 \quad 0 \quad 0], \end{aligned} \quad (1.22)$$

где $\mathbf{X}$ – вектор состояния; $\mathbf{A}_m$, $\mathbf{B}_m$, $\mathbf{C}_m$ – матрицы параметров модели (1.22); $I_{\text{дв.}}$ – ток электродвигателя; $\Omega_{\text{дв.}}$ – скорость электродвигателя; v – скорость удлинения штока ЛЭ; d – деформация ЛЭ; L – удлинение штока ЛЭ; $T_{\text{дв.}}$ – постоянная времени обмотки якоря; $R_{\text{дв.}}$ – сопротивление обмотки якоря; C_e –

коэффициент противоЭДС; C_m – моментная постоянная двигателя; $J_{\text{дв.}}$ – момент инерции ротора электродвигателя; $D_{\text{ред.}}$ – коэффициент демпфирования ЛЭ; $C_{\text{ред.}}$ – коэффициент жесткости ЛЭ; $I_{\text{ред.}}$ – передаточное число ЛЭ; $\mu_{\text{дв.}}$ – коэффициент вязкого трения в подшипниках; $m_{\text{пл.}}$ – масса платформы и перемещаемого груза.

Идентификация ЛЭ проводится по скорости удлинения штока, поэтому выходной интегратор может быть исключён из рассмотрения. Таким образом, порядок упрощённой модели составит 4, что будет соответствовать порядку разностного фильтра МНК-идентификатора.

Система (1.22) позволяет сформулировать систему ограничений, накладываемую на параметры разностного фильтра (1.21). Это может быть сделано следующим образом:

- необходимо перейти от непрерывной системы к дискретной;
- получить передаточную функцию дискретной системы от входной переменной u до выходной переменной v ;
- получить зависимости изменения коэффициентов передаточной функции дискретной системы от диапазонов изменения параметров упрощённой модели (1.22).

В качестве ограничений для МНК-идентификатора могут быть выбраны оценки изменения диапазонов коэффициентов дискретной передаточной функции, полученной исходя из системы (1.22). Однако в этом случае ограничения будут жёстко привязаны к структуре модели (1.22), что может сказаться на качестве идентификации реальной системы. Лучшие результаты показывают ограничения, введённые как отношения коэффициентов дискретной передаточной функции, в данном случае варьируя максимальными и минимальными величинами этих соотношений, можно получить хорошую устойчивость идентификатора при работе с реальными системами.

Для оценки диапазонов значений коэффициентов разностного фильтра (1.21) по дискретной передаточной функции, полученной с помощью (1.22),

была разработана программа в Matlab/Simulink, работающая по следующему алгоритму:

Алгоритм оценки диапазонов значений коэффициентов разностного фильтра.

1. Ввод данных: диапазоны изменений параметров системы (1.22);
2. Выбор номера коэффициента дискретной передаточной функции;
3. Формирование системы интервальных ограничений для процедуры поиска минимума и максимума выбранного коэффициента;
4. Формирование процедуры для расчёта текущего значения выбранного коэффициента с использованием системы (1.22);
5. Вызов процедуры поиска минимума и максимума выбранного коэффициента;
6. Если успешно, то перейти к следующему номеру коэффициента (пункт 2), иначе завершить с сообщением об ошибке;
7. Сформировать диапазоны изменения коэффициентов передаточной функции;
8. Конец.

Диапазоны изменения коэффициентов передаточной функции позволяют сформировать систему ограничений для коэффициентов $\mathbf{p}$ разностного фильтра (1.21):

$$\lambda_{ji,\min} \leq \frac{p_j}{p_i} \leq \lambda_{ji,\max}, \quad i = 1 \dots 2N - 1, \quad j = i + 1 \dots 2N, \quad (1.23)$$

где $\lambda_{ji,\min}$, $\lambda_{ji,\max}$ – соответствующие минимальные и максимальные значения отношений коэффициентов разностного фильтра. Систему ограничений (1.23) необходимо дополнить условиями на знаки коэффициентов $\mathbf{p}$.

Проведённые исследования показали, что для идентификации ЛЭ достаточно наложить ограничения при $i = 1$, $i = 2$ и на знаки других коэффициентов. Тогда сформированная система ограничений будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
p_1 \leq 0, \lambda_{j1,\max} p_1 - p_j \leq 0, -\lambda_{j1,\min} p_1 + p_j \leq 0, j = 2 \dots 2N, \\
-p_2 \leq 0, -\lambda_{j1,\max} p_2 + p_j \leq 0, \lambda_{j1,\min} p_2 - p_j \leq 0, j = 3 \dots 2N, \\
p_3 \leq 0, -p_4 \leq 0, p_5 \leq 0, p_6 \leq 0, -p_7 \leq 0, -p_8 \leq 0.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Ограничения (1.24) приведём к матричному неравенству $\mathbf{Gp} \leq 0$.

Сформируем целевую функцию, как это описано в разделе 1.3 в формуле (1.4). Перейдём от уравнения (1.21) к уравнению векторов отсчётов:

$$\mathbf{v} + \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{A}^i \mathbf{v} = - \sum_{i=1}^N b_i \mathbf{A}^i \mathbf{u}, \tag{1.25}$$

где $\mathbf{v}$ – вектор отсчётов измеряемого сигнала скорости выдвигания штока ЛЭ; $\mathbf{u}$ – вектор отсчётов измеряемого сигнала управляющего напряжения на электродвигателе; $\mathbf{A}^i$ – оператор сдвига во временной области.

Перейдём к матричной записи уравнения (1.25) и определим невязку модели $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} + \mathbf{Fp} = \boldsymbol{\varepsilon}, \\
\mathbf{F} = [\mathbf{A}^1 \mathbf{v}, \mathbf{A}^2 \mathbf{v}, \mathbf{A}^3 \mathbf{v}, \mathbf{A}^4 \mathbf{v}, \mathbf{A}^1 \mathbf{u}, \mathbf{A}^2 \mathbf{u}, \mathbf{A}^3 \mathbf{u}, \mathbf{A}^4 \mathbf{u}].
\end{aligned} \tag{1.26}$$

На небольших выборках данных МНК-идентификаторы чувствительны к влиянию начальных условий динамических систем, чтобы это учесть, необходимо исключить часть уравнений из (1.26). Это выполняется умножением на специальную матрицу $\mathbf{S}$. Таким образом уравнения (1.26) преобразуются к виду:

$$\mathbf{Sv} + \mathbf{SFp} = \mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{1.27}$$

Исходя из (1.27), получим целевую функцию, минимизирую которую определим параметры разностного фильтра МНК-идентификатора:

$$\begin{aligned}
\Phi &= 0.5 \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\varepsilon} = 0.5 [\mathbf{Sv} + \mathbf{SFp}]^T [\mathbf{Sv} + \mathbf{SFp}] = \\
&= 0.5 \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{Fp} + \mathbf{v}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{Fp} + \mathbf{v}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{v} = \\
&= 0.5 \mathbf{p}^T \mathbf{Hp} + \boldsymbol{\Theta} \mathbf{p} + c, \\
\mathbf{H} &= \mathbf{F}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{F}, \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{v}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{F}, c = \mathbf{v}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Учитывая (1.24), записанное в матричном виде, и (1.28), сформулируем синтез МНК-идентификатора с ограничениями как задачу математического программирования:

$$J = \min_p \{0.5 \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} + \mathbf{\Theta} \mathbf{p} + c\}, \text{ при ограничениях } \mathbf{G} \mathbf{p} \leq 0. \quad (1.29)$$

Пример численного расчёта задачи синтеза МНК-идентификатора с ограничениями.

С использованием алгоритма оценки диапазонов значений коэффициентов разностного фильтра для упрощенной модели ЛЭ, исходя из структуры ограничений (1.24), была рассчитана матрица $\mathbf{G}$. Параметры ограничений (1.24) выбирались таким образом, чтобы обеспечить устойчивый процесс идентификации во всём диапазоне изменений параметров ЛЭ.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.5099 & -1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.1484 & 0 & -1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2388 & 0 & 0 & -1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0287 & 0 & 0 & 0 & -1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0407 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0000 & 0 & 0 \\ 0.0420 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0000 & 0 \\ 0.0065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0000 \\ 8.3699 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.4487 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3070 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0224 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0316 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.0540 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.0084 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & -1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0	-2.6331	1.0000	0	0	0	0	0
0	-0.3301	0	1.0000	0	0	0	0
0	-0.0240	0	0	1.0000	0	0	0
0	-0.0340	0	0	0	1.0000	0	0
0	-0.0580	0	0	0	0	1.0000	0
0	-0.0090	0	0	0	0	0	1.0000
0	-3.3854	-1.0000	0	0	0	0	0
0	-0.2567	0	-1.0000	0	0	0	0
0	-0.0309	0	0	-1.0000	0	0	0
0	-0.0437	0	0	0	-1.0000	0	0
0	-0.0451	0	0	0	0	-1.0000	0
0	-0.0070	0	0	0	0	0	-1.0000
0	0	1.0000	0	0	0	0	0
0	0	0	-1.0000	0	0	0	0
0	0	0	0	1.0000	0	0	0
0	0	0	0	0	1.0000	0	0
0	0	0	0	0	0	-1.0000	0
0	0	0	0	0	0	0	-1.0000

Далее выполнялась верификация данного идентификатора по упрощенной модели ЛЭ. При разных типовых воздействиях формировались матрицы параметров целевой функции (1.28).

На рисунках (1.3-1.6) приведены примеры таких воздействий и соответствующая им реакция системы.

Пример расчёта 1

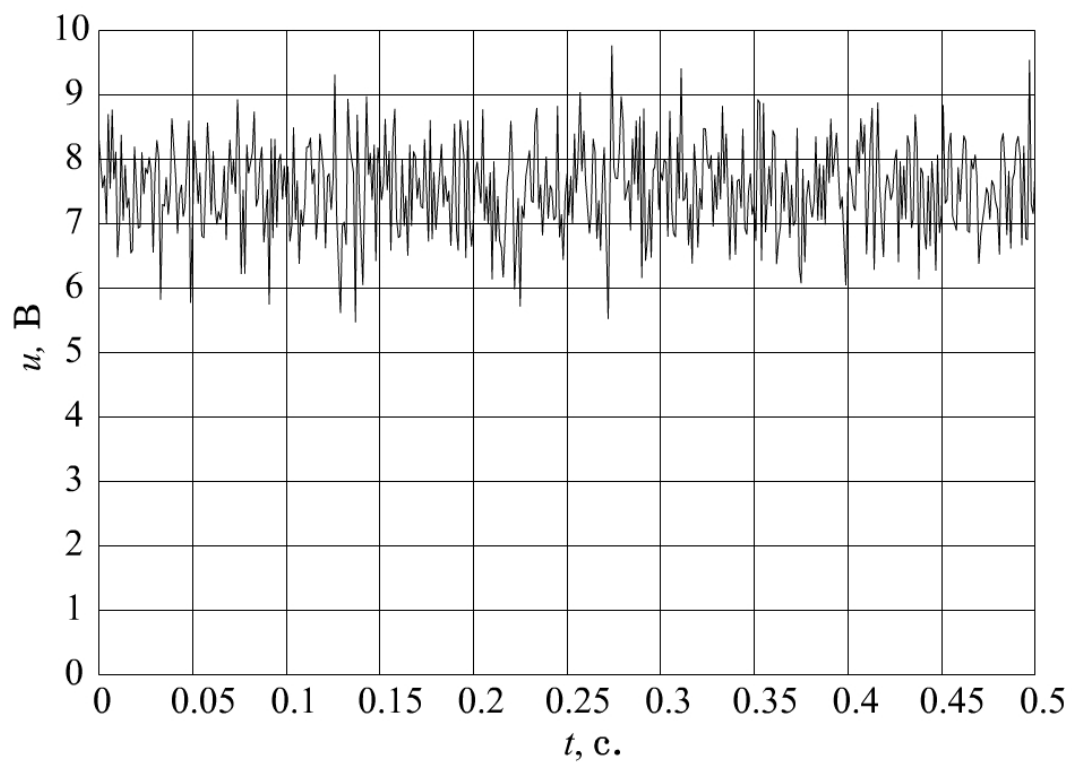


Рис.1.3. Входное воздействие постоянное напряжение +7.5 В с добавлением реализации шума с нормальным распределением и дисперсией 0.5 В

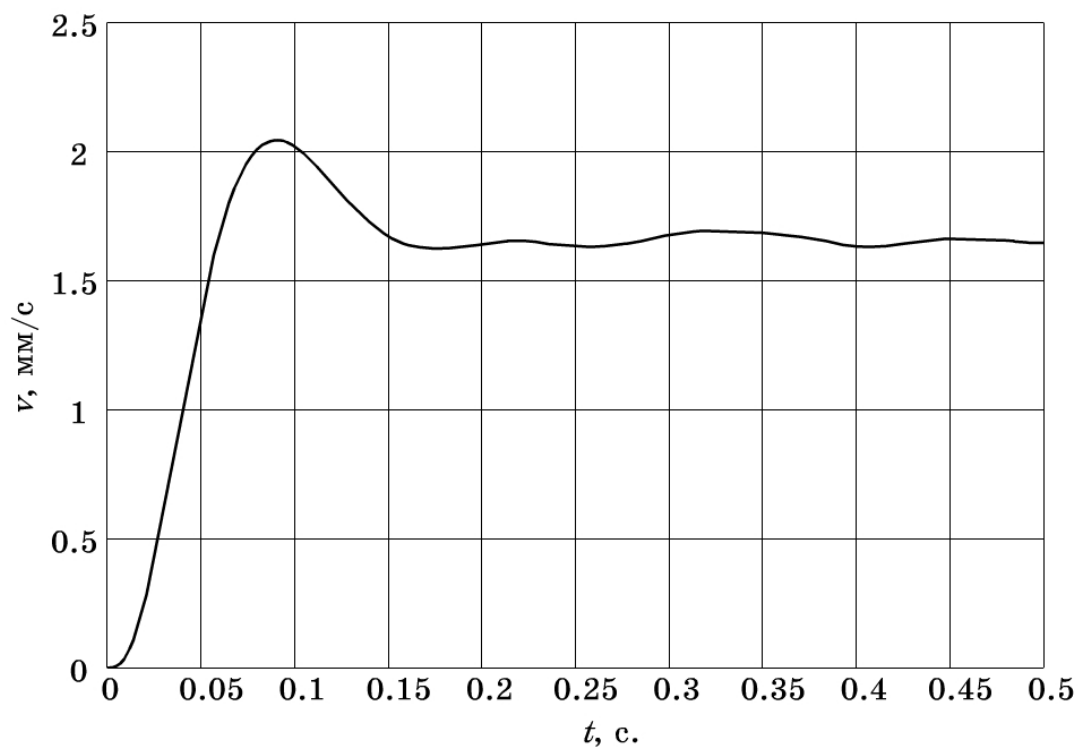


Рис.1.4. Измеряемая скорость удлинения штока ЛЭ мм/с.

Матрицы параметров целевой функции:

$$\mathbf{H} = 1.0\text{e}+004 *$$

[0.1326 0.1325 0.1324 0.1322 0.5946 0.5947 0.5947 0.5943
 0.1325 0.1324 0.1322 0.1321 0.5934 0.5934 0.5935 0.5931
 0.1324 0.1322 0.1321 0.1320 0.5921 0.5922 0.5922 0.5919
 0.1322 0.1321 0.1320 0.1318 0.5909 0.5910 0.5910 0.5906
 0.5946 0.5934 0.5921 0.5909 2.8457 2.8195 2.8200 2.8191
 0.5947 0.5934 0.5922 0.5910 2.8195 2.8463 2.8202 2.8195
 0.5947 0.5935 0.5922 0.5910 2.8200 2.8202 2.8473 2.8199
 0.5943 0.5931 0.5919 0.5906 2.8191 2.8195 2.8199 2.8451],

$$\mathbf{\Theta} = 1.0\text{e}+003 *$$

[1.3278 1.3264 1.3248 1.3233 5.9583 5.9589 5.9592 5.9558].

Необходимо выяснить, является ли матрица $\mathbf{H}$ положительно определённой, для этого всё её угловые миноры должны быть положительны. Расчёты показывают, что данное условие не выполняется, поэтому мы имеем дело не с задачей квадратичного программирования.

Для её решения использовался комплексный метод Бокса [74], являющийся дальнейшим развитием симплексного метода Недлера-Мида, позволяющий решать задачи оптимизации при наличии ограничений. Также использовался метод последовательного квадратичного программирования, где матрица $\mathbf{H}$ приводится к положительно определённой в ходе выполнения алгоритма [75].

Сравнение оценок параметров, полученных с помощью идентификатора $\mathbf{p}_и$ и параметров упрощённой модели ЛЭ $\mathbf{p}_м$:

Таблица 1.2. Результаты идентификации

$\mathbf{p}_м$	$\mathbf{p}_и$
-3.8439	-3.8442
5.5401	5.5409
-3.5483	-3.5490

0.8520	0.8523
-0.0796*1.0e-004	-0.0795*1.0e-004
-0.2285*1.0e-004	-0.2286*1.0e-004
0.2286*1.0e-004	0.2289*1.0e-004
0.0729*1.0e-004	0.0729*1.0e-004

Пример расчёта 2

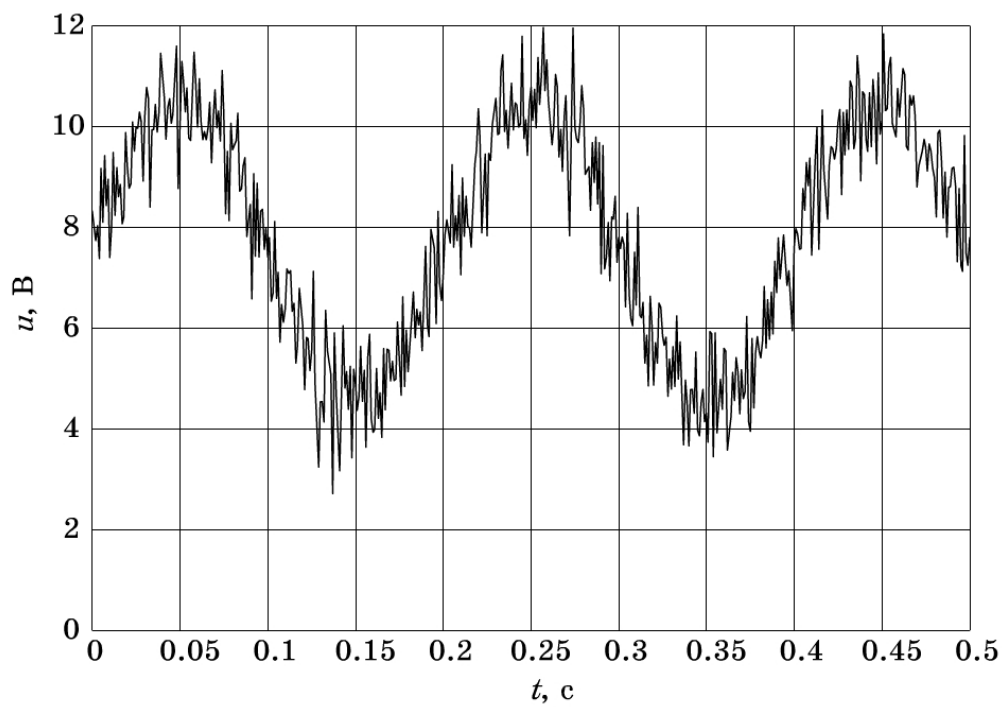


Рис.1.5. Входное воздействие смещенное на +7.5 В синусоидальное напряжение амплитудой 3В и частотой 5 Гц с добавлением реализации шума с нормальным распределением и дисперсией 0.5 В

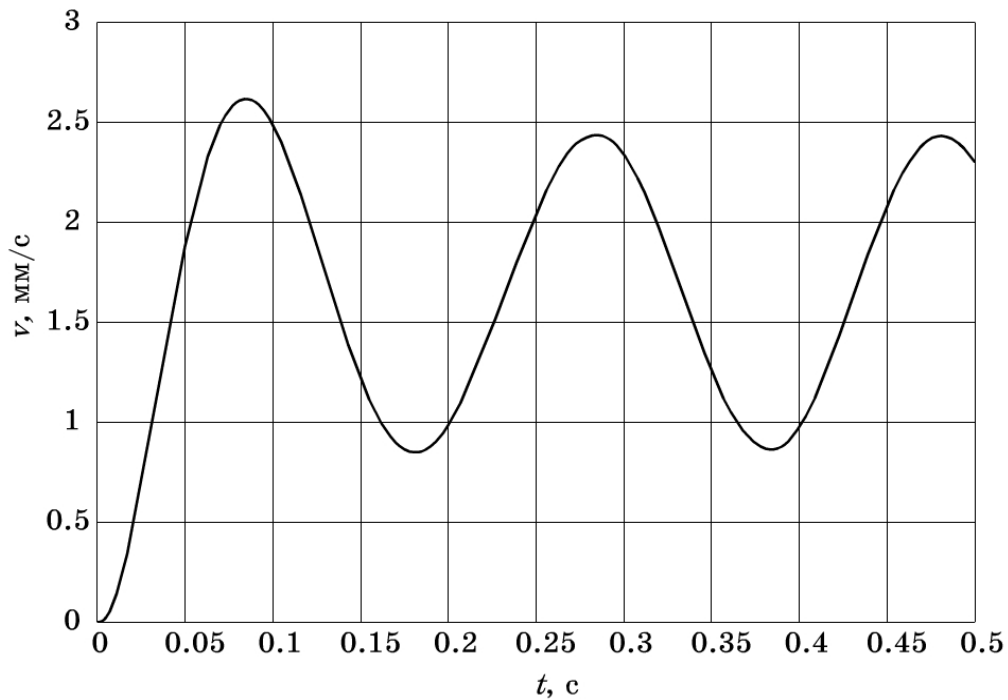


Рис.1.6. Измеряемая скорость удлинения штока ЛЭ мм/с.

Матрицы параметров целевой функции:

$$\mathbf{H} = 1.0\text{e}+004 *$$

[0.1575 0.1572 0.1569 0.1565 0.6778 0.6797 0.6816 0.6828
0.1572 0.1569 0.1566 0.1563 0.6741 0.6761 0.6780 0.6793
0.1569 0.1566 0.1564 0.1561 0.6705 0.6725 0.6744 0.6757
0.1565 0.1563 0.1561 0.1558 0.6667 0.6688 0.6707 0.6721
0.6778 0.6741 0.6705 0.6667 3.3576 3.3313 3.3315 3.3299
0.6797 0.6761 0.6725 0.6688 3.3313 3.3584 3.3321 3.3308
0.6816 0.6780 0.6744 0.6707 3.3315 3.3321 3.3592 3.3315
0.6828 0.6793 0.6757 0.6721 3.3299 3.3308 3.3315 3.3565],

$$\Theta = 1.0\text{e}+003 *$$

[1.5771 1.5741 1.5708 1.5672 6.8139 6.8329 6.8510 6.8634].

В данном случае матрица $\mathbf{H}$ также не является положительно определённой.

Сравнение оценок параметров, полученных с помощью идентификатора $\mathbf{p}_n$ и параметров упрощённой модели ЛЭ $\mathbf{p}_m$:

Таблица 1.3. Результаты идентификации

p_m	p_n
-3.4450	-3.4432
4.3668	4.3625
-2.3972	-2.3942
0.4755	0.4749
$-0.0416 \cdot 1.0e-003$	$-0.0405 \cdot 1.0e-003$
$-0.0989 \cdot 1.0e-003$	$-0.1028 \cdot 1.0e-003$
$0.1090 \cdot 1.0e-003$	$0.1132 \cdot 1.0e-003$
$0.0285 \cdot 1.0e-003$	$0.0264 \cdot 1.0e-003$

Проводилось сравнение МНК-идентификатора с ограничениями с классическим МНК-идентификатором, описанным в [30]. С использованием классического идентификатора не удалось добиться устойчивой оценки параметров при размерности модели идентификатора равной 4 при оценке параметров передаточной функции упрощённой модели ЛЭ. Устойчивый и предсказуемый процесс оценивания параметров был только при размерности модели идентификатора равной 2. Анализ частотой характеристики модели классического идентификатора показал, что данный идентификатор определяет только параметры системы перемещаемая масса+упругий элемент ЛЭ и не описывает двигатель. Это связано с плохой вычислительной обусловленностью матриц, используемых при расчёте оценок параметров модели ЛЭ. Это ожидаемый эффект, связанный с тем, что из-за большого передаточного числа редуктора ЛЭ имеет место слабая реакция на электродвигатель при перемещении платформы с грузом. В МНК с ограничениями обеспечивается устойчивая идентификация при размерности модели равной 4, происходит учёт этой слабой связи в реакции системы перемещаемая масса+упругий элемент ЛЭ на электродвигатель.

Пример идентификации нелинейной модели ЛЭ.

Была решена задача идентификации нелинейной модели ЛЭ, разработанной в среде Matlab/Simulink. Модель состоит из двух основных блоков:

- блока электродвигателя постоянного, изображённого на рисунке 1.7;
- блока, моделирующего систему редуктор - шариковинтовая пара - перемещаемая платформа.

На рис 1.7. имеются следующие обозначения: U_d – обозначает управляющее напряжение, подаваемое на двигатель; I_d – ток электродвигателя; W_d – скорость электродвигателя; C_e – коэффициент противоЭДС; R_{ja} – сопротивление обмотки якоря; T_{ja} – постоянная времени обмотки якоря; C_m – моментная постоянная двигателя; J_{mac} – момент инерции якоря двигателя; M_{umac} – коэффициент вязкого трения в подшипниках; s – обозначение функции комплексного переменного в передаточных функциях соответствующих блоков.

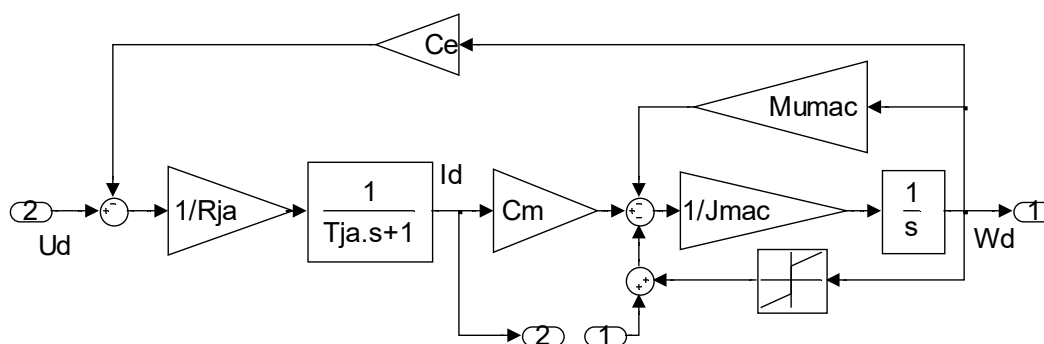


Рис.1.7. Модель электродвигателя постоянного тока

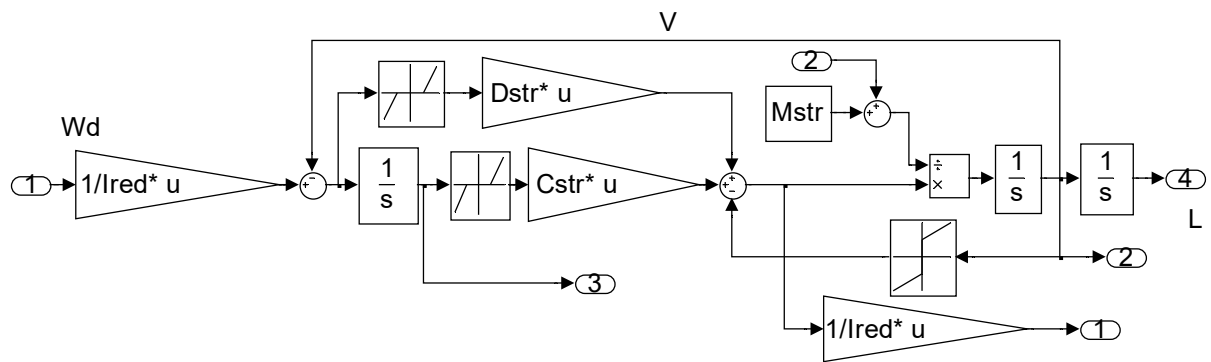


Рис.1.8. Модель системы редуктор - шариковинтовая пара - перемещаемая платформа

На рис 1.8. имеются следующие обозначения: l_{red} – передаточное число редуктора; D_{str} – коэффициент демпфирования системы редуктор - шариковинтовая пара - перемещаемая платформа; C_{str} – коэффициент жесткости системы редуктор - шариковинтовая пара - перемещаемая платформа; M_{str} – номинальная эквивалентная масса системы шариковинтовая пара - перемещаемая платформа; s – обозначение функции комплексного переменного в передаточных функциях соответствующих блоков.

Для решения задачи идентификации описанной нелинейной модели ЛЭ используется МНК-идентификатор с ограничениями. Нахождение параметров модели идентификатора выполняется как решение задачи математического программирования (1.29).

Вид задающего напряжения на электродвигатель изображён на рис. 1.5. Получены матрицы параметров для (1.29):

$\mathbf{H} = 1.0\text{e}+004 *$

[	0.0991	0.0990	0.0988	0.0986	0.5284	0.5296	0.5309	0.5317
	0.0990	0.0988	0.0986	0.0985	0.5258	0.5271	0.5283	0.5291
	0.0988	0.0986	0.0985	0.0983	0.5232	0.5245	0.5257	0.5265
	0.0986	0.0985	0.0983	0.0982	0.5206	0.5219	0.5231	0.5240
	0.5284	0.5258	0.5232	0.5206	3.3576	3.3313	3.3315	3.3299
	0.5296	0.5271	0.5245	0.5219	3.3313	3.3584	3.3321	3.3308

0.5309 0.5283 0.5257 0.5231 3.3315 3.3321 3.3592 3.3315
0.5317 0.5291 0.5265 0.5240 3.3299 3.3308 3.3315 3.3565],

$\Theta = 1.0\text{e}+003 *$

[0.9929 0.9911 0.9893 0.9874 5.3095 5.3223 5.3345 5.3425].

Матрица **H**, как и в предыдущих примерах, не является положительно определённой.

Параметры разностного фильтра МНК-идентификатора имеют вид:
 $\mathbf{p}_n = [-3.0348, 3.3578, -1.5958, 0.2732, -0.0696 \cdot 10^{-4}, -0.5749 \cdot 10^{-4}, 0, 0]$.

Используя коэффициенты $\mathbf{p}_n$, построим пример передаточной функции нелинейной модели ЛЭ по скорости удлинения штока:

$$W_{\text{ЛЭ}}(z) = \frac{V_{\text{ЛЭ}}(z)}{U_{\text{дв}}(z)} = \frac{0.0696z^{-1} + 0.5749z^{-2}}{1 + 3.0348z^{-1} - 3.3578z^{-2} + 1.5958z^{-3} - 0.2732z^{-4}} 10^{-4}, \quad (1.30)$$

где $V_{\text{ЛЭ}}$ – z-преобразование скорости перемещения штока ЛЭ; $U_{\text{дв}}$ – z-преобразование управляющего напряжения электродвигателя; z – комплексная переменная в z-преобразовании.

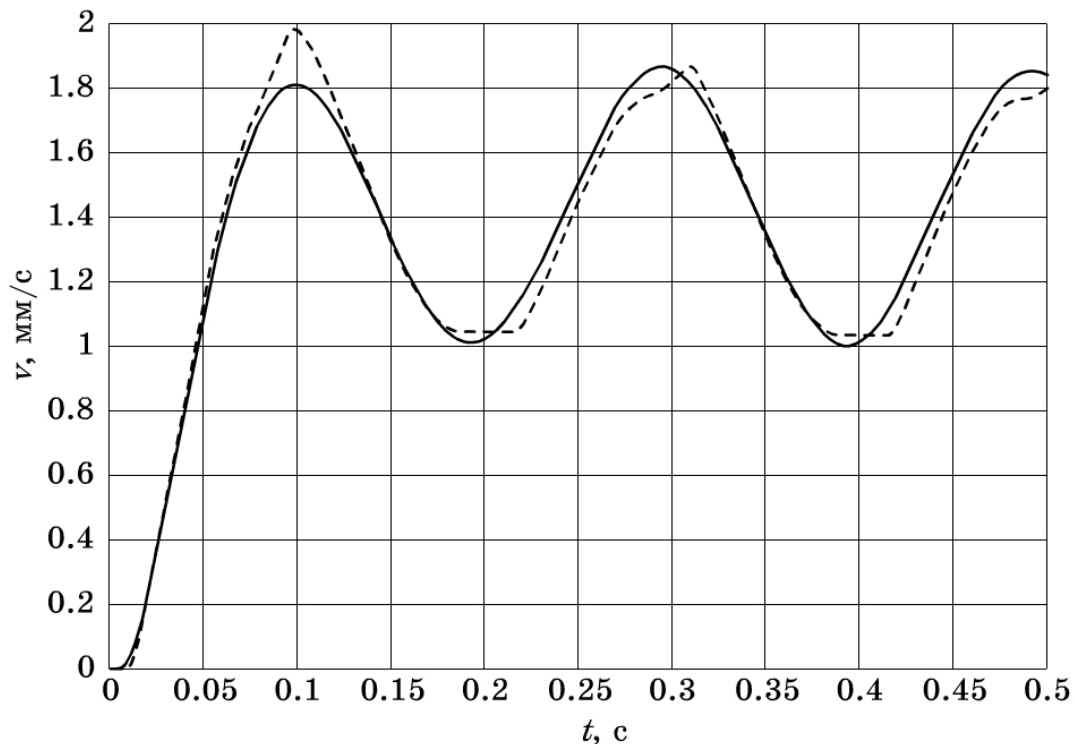


Рис.1.9. Результаты идентификации нелинейной модели ЛЭ. Измеряемая скорость удлинения штока ЛЭ мм/с.

На рис. 1.9. приведены результаты идентификации нелинейной модели ЛЭ с помощью МНК-идентификатора с ограничениями. Пунктирной линией показан сигнал удлинения штока ЛЭ, полученный с нелинейной модели ЛЭ. Сплошной линией обозначен сигнал удлинения штока ЛЭ, полученный с помощью передаточной функции (1.30).

Проведённые исследования показывают, что в сравнении с классическим МНК-идентификатором предлагаемый МНК-идентификатор с ограничениями обеспечивает большую устойчивость при идентификации динамических объектов, позволяет учитывать слабые связи в реакциях в структуре объектов, что сложно организовать в классическом МНК-идентификаторе из-за плохой обусловленности матриц, возникающей в данном случае. Показано, что предлагаемый идентификатор сохраняет устойчивость процесса идентификации при наличии существенно-нелинейных элементов модели, таких как люфт и сухое трение.

1.5.2. Идентификация параметров профиля скорости свободной поверхности мишени при высокоскоростном ударе в ИИС испытательного стенда с газовой пушкой

В работе исследуется ИИС испытательного стенда с газовой пушкой, предназначенного для проведения экспериментов на ударную прочность образцов различных материалов. Стенд размещён в лаборатории Физики разрушения ИПМаш РАН, заведующий лабораторией Ю.И. Мещеряков. Исследования проводились совместно с сотрудниками данной лаборатории.

Структура испытательного стенда с ИИС представлена на рисунке 1.10. В состав стенда входят: газовая пушка, демпфированное основание стенда, вакуумная камера, мишень, ИИС.

В состав ИИС входят: лазерный интерферометр, с помощью которого измеряется скорость свободной поверхности мишени, лазерный датчик

скорости ударника, цифровой осциллограф и компьютер с системой обработки измерительной информации и управления стендом.

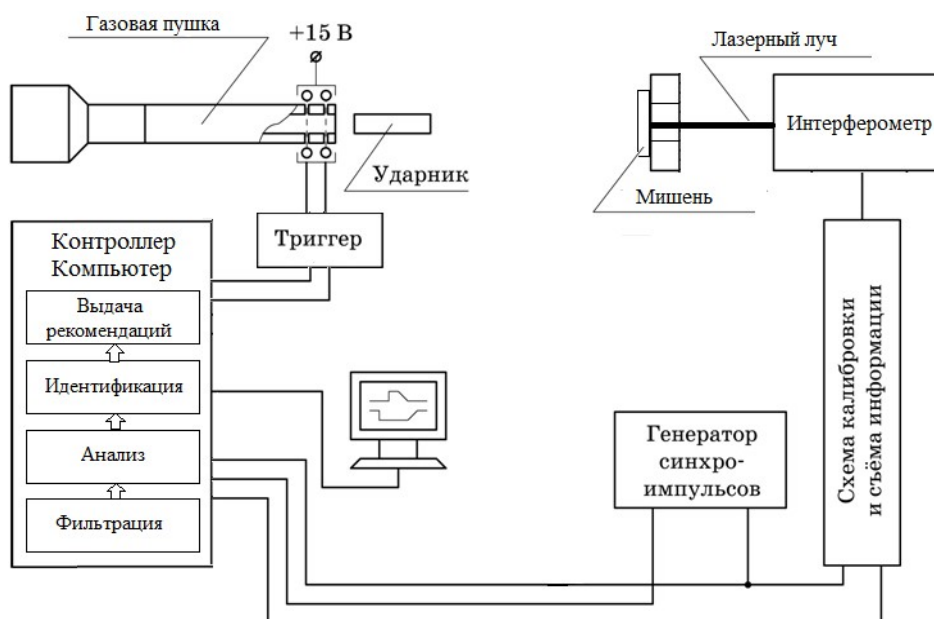


Рис. 1.10. Структура испытательного стенда с газовой пушкой

Работа стенда в режиме испытаний следующая: производится выстрел ударником из газовой пушки в вакуумной камере, где расположена мишень. Замеряется скорость ударника, скорость свободной поверхности мишени с помощью лазерного интерферометра, подключенного к цифровому осциллографу. Дисперсия скорости свободной поверхности измеряется по интенсивности отражённого от мишени лазерного луча. Данные с цифрового осциллографа передаются в компьютер, где анализируются.

Предлагается дополнить ИИС программными модулями фильтрации и анализа данных на основе вейвлет-фильтрации и модуля идентификации модели пластической деформации материалов при ударе, предложенной Ю.И. Мещеряковым и развитой в [20, 21]. Модель описывает дополнительный механизм пластической деформации на мезоскопическом масштабном уровне.

Предлагается метод идентификации параметров данной модели на основе множественно-функционального подхода.

Подробно рассмотрим предлагаемую модель для идентификации параметров профиля скорости пластической деформации при ударе. Для экспериментальной верификации многоуровневых моделей деформирования необходимы такие режимы динамического деформирования, которые обеспечивают высокую чувствительность режима к характеристикам материала и параметрам ударно-волнового нагружения. В этой связи, одной из наиболее удобных тестовых задач представляется задача о распространении стационарной упруго-пластической волны. Эта задача часто используется для верификации определяющих уравнений среды, определения эффективной вязкости материалов и при разработке численных методик [76-80].

В общем случае стохастического движения мезочастиц в случайных полях напряжения распределение мезочастиц по скоростям неравновесное. Такое распределение может быть количественно охарактеризовано статистическими моментами функции распределения по скоростям. Нулевой статистический момент – это плотность среды, первый статистический момент – математическое ожидание, или средняя массовая скорость частиц, второй статистический момент – дисперсия массовой скорости, третий момент – асимметрия функции распределения.

$$\rho(r,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r,v,t) dv , \quad (1.31)$$

$$\bar{u}(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v f(x,v,t) dv}{\rho} , \quad (1.32)$$

$$D^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (v - \bar{u})^2 f(x,v,t) dv , \quad (1.33)$$

Вместо третьего момента функции распределения по скоростям иногда рассматривают так называемую меру асимметрии Пирсона

$$S = \frac{\bar{u}(t) - u_{\max}}{D} . \quad (1.34)$$

Здесь $\bar{u}(t)$ – среднее значение массовой скорости, $u_{\max}$ – значение массовой скорости, соответствующее максимуму функции распределения, которая характеризует степень неравновесности процесса и D – вариация массовой скорости (корень квадратный из дисперсии скорости). Разность между скоростью, соответствующей максимальному значению функции распределения частиц по скоростям, и средней скоростью характеризует степень неравновесности процесса и называется дефектом скорости $\Delta u = \bar{u}(t) - u_{\max}$. Таким образом, мера асимметрии Пирсона равна отношению дефекта скорости Δu и вариации массовой скорости D .

Как показано в работах [81, 82], в динамически деформируемых гетерогенных средах вариация скорости и дефект скорости определяются соотношением:

$$\Delta u = \frac{1}{2} \frac{dD^2}{du}. \quad (1.35)$$

По аналогии с распределением по скоростям можно ввести в рассмотрение распределение по деформациям. В случае ударно-волнового одноосного деформирования гетерогенной среды средняя деформация и дисперсия деформации имеют следующий вид:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c_0} v f(x, v, t) dv, \quad (1.36)$$

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v - \bar{u})^2}{c_0} f(x, v, t) dv, \quad (1.37)$$

Вариация деформации (квадратный корень из дисперсии деформации) определяет дополнительный вклад $\Delta \varepsilon$ в суммарную пластическую деформацию. В одномерном случае по аналогии со средней пластической деформацией $\varepsilon = \frac{u}{c_0}$ дополнительная деформация за счет вариации массовой скорости может быть определена следующим образом:

$$\Delta \varepsilon = \frac{D}{c_0}, \quad (1.38)$$

где C_0 – скорость пластического фронта волны.

Эксперименты по ударному нагружению гетерогенных сред выявили наличие корреляции между вариацией скорости и макроскопической скоростью деформации [20,21].

$$D = R \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (1.39)$$

где R – коэффициент пропорциональности.

С использованием (1.39) дополнительный вклад в суммарную пластическую деформацию за счет вариации скорости равен:

$$\Delta\varepsilon = \frac{R}{c_0} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (1.40)$$

Зависимость вариации массовой скорости от времени $D(t)$, можно выразить аналитически, воспользовавшись соотношением (1.35), которое можно представить в следующем виде:

$$\Delta u = D \frac{dD}{du} = D \frac{dD}{du} = Df(t), \quad (1.41)$$

где $\frac{dD}{du} = \frac{dD/dt}{du/dt} = f(t)$, откуда $\frac{du}{dt} = \frac{dD/dt}{f(t)}$.

Скорость деформации также может быть выражена через скорость изменения массовой скорости (массовое ускорение):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{c_0} \frac{du}{dt} \quad (1.42)$$

или, с учетом (1.41) получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{c_0} \frac{1}{f(t)} \frac{dD}{dt}. \quad (1.43)$$

Если в выражении (1.41) для функции $f(t)$ взять зависимость от времени в виде гиперболического тангенса $f(t) = -b_1 th(b_1 t - b_0)$, то из решения уравнения (1.43) получим зависимость вариации массовой скорости от времени:

$$D = a_1 b_1 \left[1 - th^2(b_1 t - b_0) \right], \quad (1.44)$$

которая по своей форме близка к зависимости $D(t)$, регистрируемой в эксперименте.

Учёт мезоскопических эффектов приводит к уравнению (1.45) [20,21]:

$$u_{zz} - \left[\frac{2\gamma^* \mu}{c_0} - \frac{1}{ar} \right] u_z - \frac{\gamma^* \mu M}{ac_0^2} [a-4] u u_z + \frac{2\gamma^* \mu M r}{c_0^2} u_z^2 + \frac{\gamma^* \mu}{ac_0 r} [a-2] u - \frac{\gamma^* \mu M}{a^2 c_0^2 r} [a-2] u^2 = 0, \quad (1.45)$$

$$a = \frac{8\mu}{3\rho(c_l^2 - c_0^2)}, \quad r = \frac{3}{4}R, \quad \gamma^* = \frac{b^2 N_{m0}}{B}, \quad M = \frac{\alpha}{N_{m0}},$$

где u_{zz} – вторая производная от профиля скорости по координате z , u_z – первая производная от профиля скорости по координате z , μ – коэффициент Ляме, c_l – продольная скорость звука, b – значение вектора Бюргерса, B – константа вязкого торможения дислокаций, N_{m0} – начальная плотность подвижных дислокаций и α – коэффициент размножения дислокаций.

Перепишем уравнение (1.45) в следующем виде:

$$u_{zz} + L_{u_z} u_z + L_{u_z u} u u_z + L_{u_z^2} u_z^2 + L_u u + L_{u^2} u^2 = 0, \quad (1.46)$$

где

$$L_{u_z} = - \left[\frac{2\gamma^* \mu}{c_0} - \frac{1}{ar} \right] = - \frac{2\gamma^* \mu}{c_0 a} \left[a - \frac{c_0}{2\gamma^* \mu r} \right], \quad L_{u_z u} = - \frac{\gamma^* \mu M}{ac_0^2} [a-4],$$

$$L_{u_z^2} = \frac{2\gamma^* \mu M r}{c_0^2}, \quad L_u = \frac{\gamma^* \mu}{ac_0 r} [a-2], \quad L_{u^2} = - \frac{\gamma^* \mu M}{a^2 c_0^2 r} [a-2].$$

При $a=2$ уравнение (1.46) приобретает вид:

$$u_{zz} + L_{u_z} u_z + L_{u_z u} u u_z + L_{u_z^2} u_z^2 = 0. \quad (1.47)$$

Используя выражение для γ^* и в случае $a \neq 2$, перепишем (1.46) в виде:

$$u_{zz} + \beta_{u_z} \lambda_{u_z} k_u u_z + \beta_{u_z u} \frac{\lambda_{u_z u} k_u}{u_\infty} u u_z + \beta_{u_z^2} \frac{\lambda_{u_z^2} k_u}{u_\infty} u_z^2 + \beta_u k_u u + \beta_{u^2} \frac{k_u}{u_\infty} u^2 = 0, \quad (1.48)$$

где

$$\begin{aligned}
k_u(r) &= \frac{N_0 b^2 \mu |a-2|}{ac_0 B} \frac{1}{r}, \quad \gamma^* = \frac{N_0 b^2}{B}, \quad M = \frac{N_0}{\alpha}, \quad u_\infty = \frac{ac_0}{M} = \frac{ac_0 N_0}{\alpha}, \\
\eta &= \frac{c_0 B}{2N_0 b^2 \mu r}, \quad \beta_{u_z} = -\text{sign}(a - \eta), \quad \beta_{u_z u} = -\text{sign}(a - 4), \quad \beta_{u_z^2} = 1, \\
\beta_u &= \text{sign}(a - 2), \quad \beta_{u^2} = -\text{sign}(a - 2), \quad \lambda_{u_z}(r) = 2r \frac{|a - \eta|}{|a - 2|}, \\
\lambda_{u_z u}(r) &= a \frac{|a - 4|}{|a - 2|} r, \quad \lambda_{u_z^2}(r) = \frac{2a^2}{|a - 2|} r^2.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Знаки коэффициентов в уравнении (1.48) при различных значениях параметров a и η удобно представить в виде таблицы 1.4:

Таблица 1.4. Параметры эксперимента, определяющие поведение образца в рамках предлагаемой модели

a	β_{u_z}	$\beta_{u_z u}$	$\beta_{u_z^2}$	β_u	β_{u^2}	Примечание
$0 < a < 2, a < \eta$	1	1	1	-1	1	имеет аналитическое решение
$0 < a < 2, a = \eta$	0	1	1	-1	1	имеет аналитическое решение
$0 < a < 2, a > \eta$	-1	1	1	-1	1	имеет аналитическое решение
$2 < a < 4, a < \eta$	1	1	1	1	-1	
$2 < a < 4, a = \eta$	0	1	1	1	-1	
$2 < a < 4, a > \eta$	-1	1	1	1	-1	
$a = 4, a < \eta$	1	0	1	1	-1	
$a = 4, a = \eta$	0	0	1	1	-1	
$a = 4, a > \eta$	-1	0	1	1	-1	
$a > 4, a < \eta$	1	-1	1	1	-1	имеет аналитическое решение
$a > 4, a = \eta$	0	-1	1	1	-1	
$a > 4, a > \eta$	-1	-1	1	1	-1	

Уравнение (1.48) в общем случае может быть решено численно, но при некоторых наборах коэффициентов λ_i имеет аналитические решения. При $\lambda_i = 0$ получим уравнение нелинейного осциллятора:

$$u_{zz} + k_u u - \frac{k_u}{u_\infty} u^2 = 0, \quad (1.50)$$

Решение данного уравнения находится следующим образом (1.51):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} \partial u_z &= -k_u u \partial u + \frac{k_u}{u_\infty} u^2 \partial u, \quad \frac{u_z^2}{k_u} = \frac{2}{3u_\infty} u^3 - u^2 + \frac{u_\infty^2}{3}, \\ u_z &= \sqrt{k_u} \operatorname{sign}(z - z_0) \sqrt{\frac{2}{3u_\infty} u^3 - u^2 + \frac{u_\infty^2}{3}}, \quad \frac{2}{3u_\infty} u^3 - u^2 + \frac{u_\infty^2}{3} = (u - u_\infty)^2 \left(u + \frac{u_\infty}{2} \right), \\ \frac{\partial u}{\sqrt{(u - u_\infty)^2 \left(u + \frac{u_\infty}{2} \right)}} &= \sqrt{k_u} \operatorname{sign}(z - z_0) \partial z, \quad \operatorname{arcth} \left(\sqrt{\frac{2}{3u_\infty}} \sqrt{u + \frac{u_\infty}{2}} \right) = \frac{\sqrt{k_u}}{2} (z - z_0), \quad (1.51) \\ \sqrt{u + \frac{u_\infty}{2}} &= \frac{\sqrt{3u_\infty} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{k_u}}{2} (z - z_0) \right)}{\sqrt{2}}, \quad u = \frac{3u_\infty}{2} \left[\operatorname{th}^2 \left(\frac{\sqrt{k_u}}{2} (z - z_0) \right) - \frac{1}{3} \right]. \end{aligned}$$

Для уравнения (1.52):

$$u_{zz} + k_u u - \frac{3k_u}{u_\infty} u^2 = 0, \quad (1.52)$$

решением будет:

$$u = \frac{u_\infty}{\cos \sqrt{k_u} z + 1}, \quad (1.53)$$

что доказывается следующим образом (1.54):

$$\begin{aligned}
f &= \cos \sqrt{k_u} z, f_z = -\sqrt{k_u} \sin \sqrt{k_u} z, f_{zz} = -k_u f, f_z^2 = k_u \sin^2 \omega z, f^2 = \cos^2 \omega z, \\
f_z^2 + k_u f^2 &= k_u, u = \frac{u_\infty}{f+1}, u_z = -\frac{u_\infty f_z}{(f+1)^2}, \\
u_{zz} &= -u_\infty \left[\frac{f_{zz}(f+1)^2 - 2f_z^2(f+1)}{(f+1)^4} \right] = -u_\infty \left[\frac{f_{zz}}{(f+1)^2} - \frac{2f_z^2}{(f+1)^3} \right] = \\
&= -u_\infty \left[\frac{-k_u f}{(f+1)^2} - 2 \frac{f_z^2 + k_u f^2 - k_u f^2}{(f+1)^3} \right] = -u_\infty \left[\frac{-k_u f}{(f+1)^2} + 2k_u \frac{f^2 - 1}{(f+1)^3} \right] = \\
&= -u_\infty \left[k_u \frac{1}{f+1} - \frac{3k_u}{u_\infty} \frac{u_\infty}{(f+1)^2} \right] = -k_u u + \frac{3k_u}{u_\infty} u^2.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Найдём диапазоны изменения параметров a и η исходя их значений физических величин, приведённых в таблице 1.5, для рассматриваемых экспериментов.

Таблица 1.5. Диапазоны изменения физических величин модели

$c_l,$ $\times 10^5$ см/с	$b,$ $\times 10^{-8}$ См	ρ г/см ³	$\alpha,$ $\times 10^8$	$N_0,$ $\times 10^7$ см ⁻²	$\mu,$ $\times 10^{11}$ дин/см ²	$B,$ $\times 10^{-4}$ пз	$c_0,$ $\times 10^5$ см/с	$r,$ $\times 10^{-3}$ см	$u_\infty,$ $\times 10^4$ см/с
6,35	2,86	2,7	0,1	0,1	2,55	1,0	5,26	2,25	2,5
			10,0	10,0	2,80	10,0	5,47	2,62	3,7

Определим диапазон изменения a из решения задачи оптимизации при ограничениях:

$$\begin{aligned}
a_{\min} &= -\frac{8}{3\rho} \min_y \left\{ \frac{y_1}{(y_2^2 - c_l^2)} \right\}, a_{\max} = -\frac{8}{3\rho} \max_y \left\{ \frac{y_1}{(y_2^2 - c_l^2)} \right\}, A\mathbf{y} \leq B, \\
\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ c_0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2,55 \cdot 10^{11} \\ 2,8 \cdot 10^{11} \\ -5,26 \cdot 10^5 \\ 5,47 \cdot 10^5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Используя стандартные методы оптимизации, получим, что $a_{\min} = 1,99$ и $a_{\max} = 2,66$.

Определим диапазон изменения η из решения задачи оптимизации при ограничениях:

$$\eta_{\min} = \frac{1}{2b^2} \min_{\mathbf{v}} \left\{ \frac{v_2 v_3}{v_4 v_1 v_5} \right\}, \eta_{\max} = \frac{1}{2b^2} \max_{\mathbf{v}} \left\{ \frac{v_2 v_3}{v_4 v_1 v_5} \right\}, A\mathbf{v} \leq B, H(\mathbf{v}) \leq 0,$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mu \\ c_0 \\ B \\ N_0 \\ r \\ \alpha \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2,55 \cdot 10^{11} \\ 2,8 \cdot 10^{11} \\ -5,26 \cdot 10^5 \\ 5,47 \cdot 10^5 \\ -10^{-4} \\ 10^{-3} \\ -10^6 \\ 10^8 \\ -2,25 \cdot 10^{-2} \\ 2,62 \cdot 10^{-2} \\ -10^7 \\ 10^9 \end{bmatrix},$$

$$H(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{8}{3\rho v_6} \frac{v_1 v_2 v_4}{(v_2^2 - c_l^2)} + 2,5 \cdot 10^4 \\ -\frac{8}{3\rho v_6} \frac{v_1 v_2 v_4}{(v_2^2 - c_l^2)} - 3,7 \cdot 10^4 \end{bmatrix}.$$

Используя методы оптимизации (метод последовательного квадратичного программирования), получим, что $\eta_{\min} = 0,14$ и $\eta_{\max} = 58,28$.

Чтобы идентифицировать коэффициенты уравнения (1.48) исходя из экспериментальных данных, воспользуемся методами параметрической идентификации. Эта задача относится к разряду задач МП, постановка которой в данном случае описывается следующим образом:

$$J = \min_{\mathbf{p}} \left\{ \frac{1}{z_n - z_0} \sum_{z=z_0}^{z_n} (u - u^*(\mathbf{p}))^2 \right\}, \mathbf{p} = (B \quad \mu \quad r \quad N_0 \quad \alpha \quad c_0)^T, \quad (1.55)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned}
& B_{\min} \leq B \leq B_{\max}, \mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}, r_{\min} \leq r \leq r_{\max}, N_{0\min} \leq N_0 \leq N_{0\max}, \\
& \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, c_{0\min} \leq c_0 \leq c_{0\max}, u_{\infty\min} \leq u_{\infty} \leq u_{\infty\max}, \\
& a = \frac{8}{3\rho(c_l^2 - c_0^2)} \mu, a \in A, k_u = \frac{N_0 \mu |a - 2| b^2}{aBr c_0}, u_{\infty} = \frac{c_0}{\alpha} N_0 a, \eta \in N, (1.56) \\
& \eta = \frac{B}{N_0 \mu r} \frac{c_0}{2b^2}, \lambda_{u_z} = 2r \frac{|a - \eta|}{|a - 2|}, \lambda_{u_{zu}} = a \frac{|a - 4|}{|a - 2|} r, \lambda_{u_z^2} = \frac{2a^2}{|a - 2|} r^2,
\end{aligned}$$

где J – функционал, u^* – выход модели, u – экспериментальные данные, $\mathbf{p}$ – вектор настраиваемых параметров, z_0, z_n – начальные и конечные значения переменной z , A, N – множества соответствующих параметров, выбираемых согласно режимам из таблицы 1.4.

Задача аппроксимации профиля и определения его параметров осложняется наличием в сигнале как полезной, так и паразитных составляющих, которые представлены аддитивными и мультипликативными шумами. Для очистки сигнала от помех использовались алгоритмы вейвлет фильтрации.

Для решения задачи (1.55) в работе использовались пакетные реализации методов условной оптимизации в среде MatLab, методе последовательного квадратичного программирования, генетическом алгоритме и др. Алгоритм оптимизации завершается при условии, что СКО оценки значения сигнала от экспериментальных данных не превышало установленного порога по точности.

Таблица 1.6. Результаты идентификации

№ образца	режим	$\lambda_{u_z},$ $\times 10^{-1}$	$\lambda_{u_{zu}},$ $\times 10^{-2}$	$\lambda_{u_z^2},$ $\times 10^{-4}$	$k_u,$ $\times 10^4$	u_{∞} м/с	a	$\Delta, \%$
Д16(265)	7	0.15	0.63	0.29	1.32	216	2.66	4.78
Д16(315)	7	0.14	0.38	0.11	2.76	270	2.66	6.98
Д16(370)	7	0.11	0.40	0.12	3.01	310	2.66	7.10

Результаты параметрической идентификации приведены в таблицах 1.6. и 1.7, где $\Delta, \%$ – СКО модели, описывающее отклонение экспериментального

профиля скорости свободной поверхности от профиля скорости, полученного с помощью модели.

Таблица 1.7. Результаты идентификации

№ образца	режим	c_l , $\times 10^5$ см/с	c_0 , $\times 10^5$ см/с	α , $\times 10^9$	ρ г/см ³	b , $\times 10^{-8}$ См	μ , $\times 10^{11}$ дин/см ²	B , $\times 10^{-4}$ пз	r , $\times 10^{-3}$ см	N_0 , $\times 10^7$
Д16(265)	7	6.35	5.47	1.00	2.70	2.86	2.80	1.00	2,25	1.48
Д16(315)	7	6.35	5.47	1.00	2.70	2.86	2.80	1.00	2,25	1.86
Д16(370)	7	6.35	5.47	1.00	2.70	2.86	2.80	1.00	2,25	2.13

После идентификации параметров модели (1.48) были определены нестационарные высокочастотные составляющие профиля скорости. Так для меди МЗ при скорости ударника 319 м/с данные составляющие показаны на рисунке 1.11:

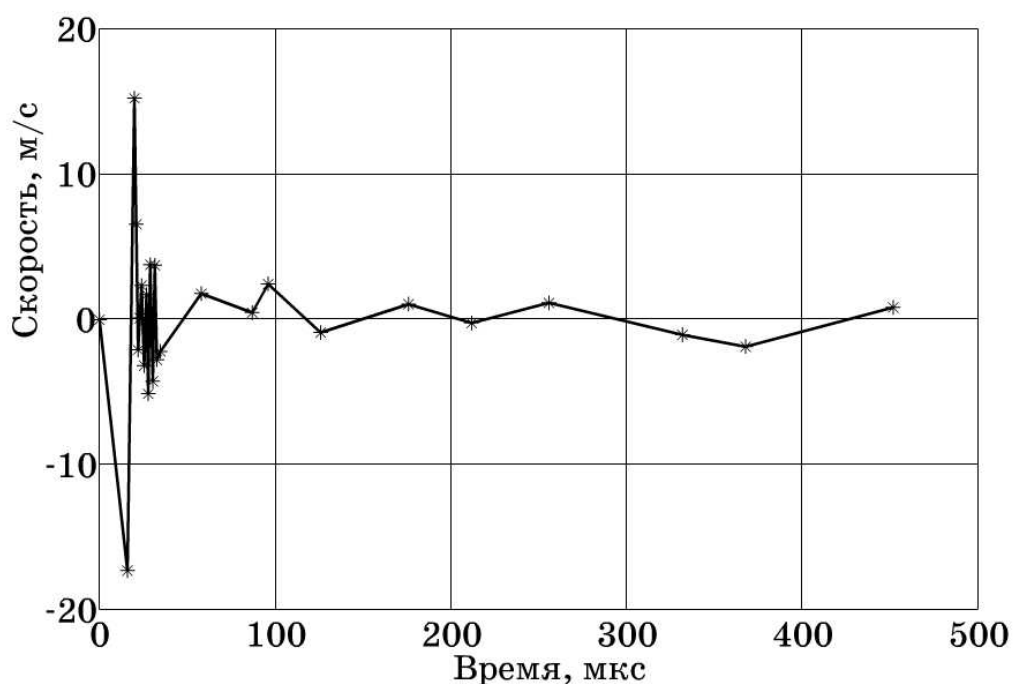


Рис.1.11. Высокочастотные составляющие профиля скорости (* - данные измерений, - - выход идентифицирующей модели.)

Данные высокочастотные составляющие являются характеристикой поведения материала и не относятся к измерительным шумам. Подобные осцилляции предсказываются моделями механизмов пластической деформации на мезоуровне. Для определения их характеристик был применен линейный нестационарный идентификатор, описываемый уравнениями (1.10), приведённый в разделе 1.3. Модель объекта выбрана в виде нестационарного фильтра. Данная модель была реализована в среде MATLAB/Simulink. Поисковыми методами были определены коэффициенты разностных фильтров, а затем получены дискретные передаточные функции для каждого временного отсчёта. Путём преобразования дискретной системы в непрерывную получены передаточные функции непрерывной системы и определены собственные частоты фильтра и декременты затухания. Порядок системы составил 12, на рисунке 1.12 представлен график изменения центральной частоты, на которую приходится максимальная энергия колебаний.

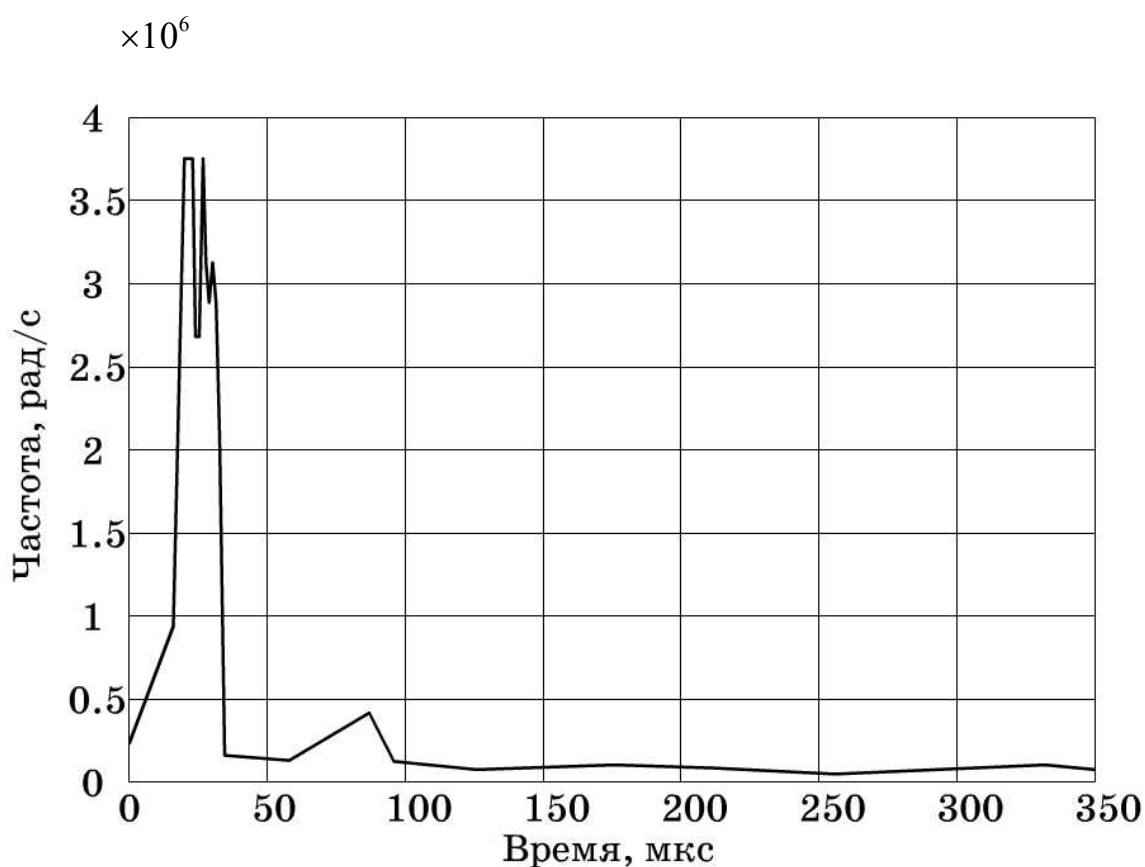


Рис. 1.12. Изменение центральной частоты колебаний фильтра.

Показано, что аддитивный чисто дислокационный механизм деформирования не способен адекватно описать распространение ударной волны в гетерогенной среде. Чтобы учесть коллективные механизмы пластического деформирования, мы использовали гипотезу о том, что вариация массовой скорости в стационарной волне пропорциональна скорости деформации. Включение этой добавки в определяющее уравнение приводит к увеличению крутизны фронта ударной волны, в результате чего удается получить разумное соответствие экспериментального и теоретического волновых профилей.

На основе предложенной модели и метода идентификации её параметров разработан пакет программ для анализа экспериментальных данных по ударной прочности материалов, позволяющий проводить идентификацию характеристик пластического деформирования с учётом механизмов мезоскопического уровня.

Данный пакет программ предполагается интегрировать в ИИС испытательного стенда с газовой пушкой.

1.5.3. Идентификация и анализ данных модельных расчётов наноразмерных систем

В качестве примера представлено применение вейвлет-фильтрации для идентификации и фильтрации данных модельных расчётов наноразмерных систем методами молекулярной динамики [83]. Анализировалась сила трения $f(t)$, при сдвиговом течении Куэтта, изменяющаяся во времени, для скорости $v = 0.1$ (при ширине канала $l=16$ ЕМД и $l=8$ ЕМД) и $v = 0.5$ (при ширине канала $l=16$ ЕМД). Данные были представлены в виде решетчатых функций от времени $f[k]$ с частотой дискретизации по времени $\omega_0 = 100 \cdot 10^9$ Гц.

Необходимо определить составляющие сигнала (комpleксы), характеризующие процессы, происходящие в среде, и выявить их свойства. Для этого нужно решить следующие задачи:

1. Удалить высокочастотные шумы;

2. Выделить низкочастотные составляющие сигнала;
3. Определить комплексы, на которые приходится большая часть мощности исходного сигнала;
4. Определить распределение энергии по составляющим;
5. Определить аналитические выражения для составляющих, энергия которых выше порогового значения;
6. Выявить общие закономерности для сигналов при скоростях $v = 0.1$ и $v = 0.5$.

Для решения поставленных задач использовался анализ силы $f(t)$ во временной и частотной областях с применением пакетных расширений MATLAB/Signal Processing Toolbox, MATLAB/Curve Fitting Toolbox, MATLAB/Spline Toolbox, MATLAB/Statistics Toolbox, MATLAB/Optimization Toolbox и MATLAB/Wavelet Toolbox.

На первом этапе производится выделение среднего значения силы f_{cp} по формуле:

$$f_{cp} = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min}} \sum_{k=0}^{\frac{t_{\max} - t_{\min}}{T_0}} f[kT_0],$$

где $t_{\min}$ – время начала отсчета; $t_{\max}$ – время окончания отсчета; T_0 – период дискретизации по времени ($T_0 = 1/\omega_0$); $f[kT_0]$ – значения силы в k -ый момент времени.

На втором этапе производится обработка сигнала с помощью дискретного преобразования Фурье с целью выявления составляющих, на которые приходится большая часть энергии сигнала. Это позволяет определить границу высокочастотных шумов, которые будут удалены из исходного сигнала. Для этих целей использовано быстрое преобразование Фурье (БПФ), реализованный в пакетном расширении MATLAB/Signal Processing Toolbox [70].

Результатом БПФ является образ исходного сигнала в частотной области в виде амплитудно- и фазо- частотные характеристики. БПФ

позволило определить спектральный состав исходного сигнала, выделить низкочастотные составляющие и определить границу высокочастотных шумов. Например, было установлено, что при скорости $v = 0.1$ (при ширине канала $l=16$ ЕМД и $l=8$ ЕМД) энергия N_1 составляющих сигнала в диапазоне частот $\omega \in [0, 0.2] 10^n$ Гц составляет $N_1 = 0.941 \cdot N$ от полной энергии сигнала N , тогда как на высокочастотные составляющие приходится лишь около 6%. При скорости $v = 0.5$ (при ширине канала $l=16$ ЕМД) на высокочастотные составляющие приходится около 12% энергии исходного сигнала.

Задача аппроксимации силы и определения параметров осложняется наличием в этом сигнале как полезной, так и паразитных составляющих, которые представлены аддитивными и мультипликативными шумами. Для очистки сигнала от помех использовались алгоритмы вейвлет фильтрации, реализованные в MATLAB/Wavelet Toolbox.

Проведенный анализ силы во временной и частотной областях позволил определить наиболее подходящие типы вейвлетов для исследования сигналов и фильтрации. Низкочастотная часть сигнала с высокой точностью (относительная погрешность не более 5%) описывается в виде затухающих гармонических составляющих, поэтому для выделения воспользуемся вейвлетом Мейера (dmey) пакетного расширения MATLAB/Wavelet Toolbox. Установлено, что высокочастотные составляющие (шумы) могут быть эффективно удалены с помощью вейвета Добеши порядка 4 (db4).

На этапе аппроксимации необходимо получить аналитические выражения для составляющих силы и определить параметры в этих выражениях. Данная задача вызвана тем, что использованные вейвлеты не имеют аналитической записи своего носителя, а реализуются в виде специальных рекуррентных фильтров. На этапе вейвлет-фильтрации мы численно определили составляющие сигнала, которые несут основной вклад, в виде решетчатых функций от времени. Анализ низкочастотных

составляющих сигнала в частотной области позволил предположить, что они могут быть описаны выражением вида:

$$f_{low}(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-\lambda_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i), \quad \omega_i = \sqrt{\lambda_i^2 + \beta_i^2}, T_i = \frac{2\pi}{\beta_i}, \quad (1.57)$$

a_0 – постоянная составляющая, ЕМД;

a_i – начальная амплитуда колебаний, ЕМД;

$\delta_i = \lambda_i T_i$ – декремент затухания;

β_i – частота колебаний;

ω_i – собственная частота в Фурье разложении;

T_i – период колебаний;

φ_i – фазовый сдвиг.

При анализе среднечастотных составляющих во временной и частотной областях установлено, что они являются периодическими, но не гармоническими и близки по типу к радиальным функциям, поэтому предполагается аппроксимировать их зависимостями вида:

$$f_{mid}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi_i, t) \cdot \left(c_{0i} e^{-(c_{1i} \sin(c_{2i}t - c_{4i}) - c_{3i})^2} - c_{0i} e^{-(c_{1i} \cos(c_{2i}t - c_{4i}) - c_{3i})^2} \right), \quad (1.58)$$

где μ_i – модулирующая;

ξ_i – вектор параметров модулирующей;

c_{ji} – постоянные коэффициенты.

Анализ высокочастотных составляющих показал, что доля приходящейся на них энергии не превышает 6-12% для разных скоростей, а коэффициенты автокорреляции малы. Поэтому следует рассматривать эти составляющие как маломощные случайные сигналы, которыми можно пренебречь.

На предыдущем этапе были предложены формулы для аппроксимации низкочастотных и среднечастотных составляющих силы. На данном этапе необходимо определить параметры этих выражений.

Постановка задачи может быть сформулирована в следующем виде: при заданной последовательности значений исходного сигнала $w_i[k]$ определить параметры ξ_i функции $\hat{w}_i[k] = \phi_i(\xi_i, k)$ таким образом, чтобы СКО оценки значения исходного сигнала $\hat{w}_i[k]$ от исходного сигнала не превышали установленного порога ε . Данная задача относится к классу оптимизационных и решается численными методами поиска.

Для используемых алгоритмов численного поиска целесообразно сформулировать задачу в следующем виде:

$$J_i = \min_{\xi_i} \sum_{k=0}^{\frac{t_{\max}-t_{\min}}{T_0}} (w_i[k] - \phi_i(\xi_i, k))^2, \quad (1.59)$$

где T_0 – период квантования по времени;

$t_{\min}$ – начальный момент времени;

$t_{\max}$ – конечный момент времени.

Условие завершения алгоритма может быть сформулировано как

$$\sqrt{\frac{T_0}{t_{\max} - t_{\min}}} J_i \leq \frac{0.05 T_0}{t_{\max} - t_{\min}} \sum_{k=0}^{\frac{t_{\max}-t_{\min}}{T_0}} |w_i[k]|.$$

Для решения задачи определения коэффициентов использовались алгоритм оптимизации Ньютона-Гаусса и алгоритм Левенберга - Марквардта, основанный на эвристических соображениях.

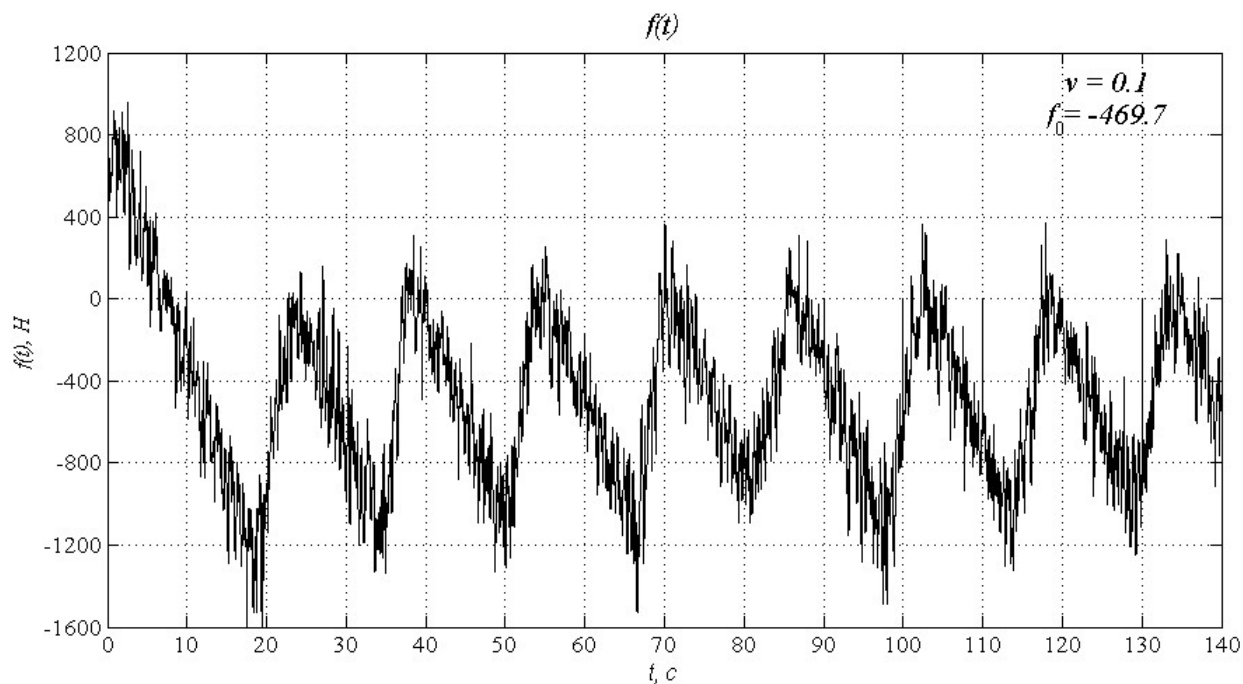


Рис. 1.13. Исходный сигнал при скорости $v = 0.1$, представлен в виде решетчатой функции с периодом $T = 0.01$

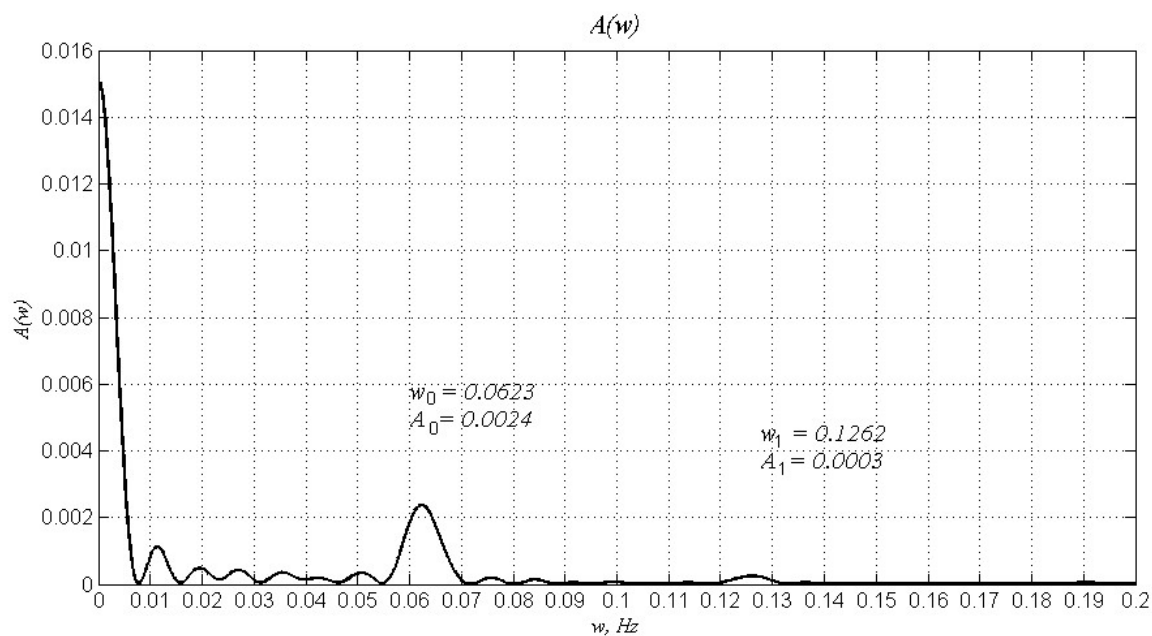


Рис. 1.14. Быстрое преобразование Фурье от исходного сигнала

$$N_1 = 0.941 \cdot N \text{ в диапазоне } \omega \in [0, 0.2] \text{ Гц}$$

$$N_2 = 0.059 \cdot N \text{ в диапазоне } \omega \in (0.2, 0.5\omega_0] \text{ Гц}$$

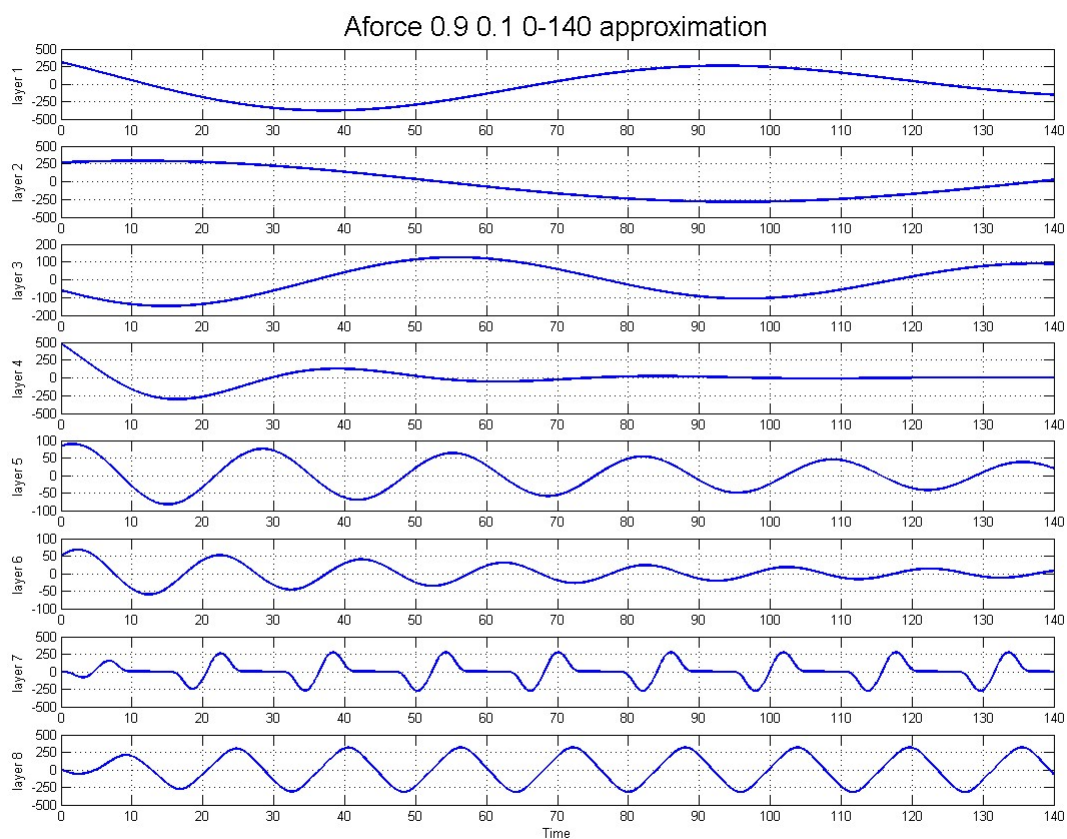


Рис. 1.15. Разложение сигнала на составляющие

Таблица 1.8. Параметры гармонических составляющих для скорости $v = 0.1$

Гармонические составляющие $f_i(t) = a_i e^{-\lambda_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i)$, $\omega_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}$

№ слоя	Собственная частота ω_i , Гц	Амплитуда a_i , Н	Частота колебаний β_i , Гц	Декремент затухания, λ_i , с ⁻¹ .
0	-	-398.7	-	-
1	0.0059	292.3	0.0059	0.0002
2	0.0090	496.3	0.0090	0.0069
3	0.0123	157.9	0.0122	0.0040
4	0.0230	581.2	0.0221	0.0380
5	0.0374	91.0	0.0373	0.0064
6	0.0500	70.3	0.0500	0.0131

Разложение сигнала на составляющие узкий канал:

Таблица 1.9. Параметры гармонических составляющих для скорости $v = 0.1$ в случае узкого канала

№ слоя	Собственная частота ω_i , Гц	Амплитуда a_i , Н	Частота колебаний β_i , Гц	Декремент затухания, λ_i с ⁻¹ .
0	-	-444.5	-	-
1	0.0021	49.9	0.0016	0.0080
2	0.0181	54.0	0.0181	0.0023
3	0.0258	53.3	0.0258	0.0027
4	0.0337	53.5	0.0337	0.0012
5	0.0471	48.8	0.0471	0.0067
6	0.0514	50.2	0.0509	0.0440
7	0.0763	49.3	0.0745	0.1049
8	0.2361	80.1	0.1212	1.2730

Таблица 1.10. Параметры гармонических составляющих для скорости $v = 0.5$

№ слоя	Собственная частота ω_i , Гц	Амплитуда a_i , Н	Частота колебаний β_i , Гц	Декремент затухания, λ_i с ⁻¹ .
0	-	-716.1	-	-
1	0.0040	27.7	0.0040	0.0000
2	0.0225	33.5	0.0225	0.0000
3	0.0447	26.3	0.0447	0.0000
4	0.0592	52.1	0.0592	0.0000
5	0.0613	46.1	0.0613	0.0000
6	0.0823	45.2	0.0823	0.0000
7	0.0856	55.6	0.0856	0.0000
8	0.1006	30.4	0.1006	0.0000

9	0.1082	63.8	0.1082	0.0000
10	0.1155	45.4	0.1155	0.0000
11	0.1316	48.7	0.1316	0.0000
12	0.1697	798.4	0.1415	0.0937
13	0.1480	41.9	0.1480	0.0000
14	0.1630	43.7	0.1630	0.0000
15	0.1671	60.8	0.1671	0.0000
16	0.1725	41.0	0.1725	0.0000
17	0.1797	63.4	0.1797	0.0000
18	0.1862	47.1	0.1862	0.0000
19	0.1884	52.6	0.1884	0.0000
20	0.2063	20.2	0.2063	0.0000

Таблица 1.11. Параметры негармонических составляющих для скорости $v=0.1$.

Негармонические составляющие

$$\phi_i(t) = \mu_i(\xi_i, t) \cdot \left(c_{0i} e^{-(c_{1i} \sin(c_{2i}t - c_{4i}) - c_{3i})^2} - c_{0i} e^{-(c_{1i} \cos(c_{2i}t - c_{4i}) - c_{3i})^2} \right)$$

№ слоя	c_{0i}	c_{1i}	c_{2i}	c_{3i}	c_{4i}
1	562.5	2.303	0.3958	3.144	1.048
2	562.5	0.508	0.3969	0.714	1.128

Таблица 1.12. Параметры негармонических составляющих для скорости $v = 0.1$ при узком канале

№ слоя	c_{0i}	c_{1i}	c_{2i}	c_{3i}	c_{4i}
1	567.5	3.244	0.3956	3.359	3.255
2	567.5	0.846	0.3949	0.7395	-3.018

Таблица 1.13. Параметры негармонических составляющих для скорости $v = 0.5$

№ слоя	c_{0i}	c_{1i}	c_{2i}	c_{3i}	c_{4i}
1	298.3	-0.7079	1.978	1.577	-7.141
2	298.3	-0.1846	1.972	-1.043	-13.414

Временная зависимость силы трения движущейся стенки при течении Куэтта в канале с кристаллическими стенками состоит из нескольких составляющих, отражающих различные процессы, происходящие в канале. Периодические составляющие с периодом, пропорциональным периоду решетки кристаллических стенок, отражают существование в жидкости периодической структуры, которая наводится стенками канала. Низкочастотные составляющие временной зависимости силы трения отвечают волновым процессам, происходящим поперёк канала. Можно сказать, что в канале имеет место некая стоячая волна, посредством которой движущаяся ограничивающая стенка действует на неподвижную стенку и наоборот. При увеличении скорости движения кристаллической стенки все упомянутые выше процессы также имеют место, хотя их анализ более затруднён большим количеством шумов во временной зависимости силы трения. Для решения задачи исключения шумов из анализируемых данных эффективно применение вейвлет-фильтрации.

Выводы

В главе проанализированы основные проблемы, возникающие при синтезе и идентификации современных информационно-измерительных и управляющих систем динамических объектов, строящихся на кибернетических принципах. В работе рассматриваются два основных класса киберфизических систем: интеллектуальные электромеханические системы и информационные системы испытательных стендов материалов на ударную прочность. Показано, что в современных киберфизических системах процесс

идентификации является неотъемлемой частью контуров управления. Описаны основные критерии управления ИЭМС и ограничения, возникающие при функционировании подобных систем, которые должны учитываться при синтезе законов управления. Предложена четырёхуровневая иерархическая система управления ИЭМС.

Проанализированы основные подходы в идентификации систем управления ДО. Предложены модификации МНК-идентификаторов квазистационарных и нестационарных для СУ ДО. Предложен метод идентификации ДО на основе множественно-функционального подхода. Показано, что синтез предлагаемых идентификаторов удобно представить в виде задач математического программирования.

На примере идентификации линейного электропривода показано преимущество МНК-идентификаторов с ограничениями при построении моделей систем со слабыми связями в реакциях между подсистемами.

На основе множественно-функционального подхода впервые предложен метод идентификации параметров профиля скорости свободной поверхности мишени при высокоскоростном ударе с учётом мезоскопических эффектов при пластической деформации материалов.

Глава 2. Метод нелинейного программирования с произвольными ограничениями для решения задач управления и идентификации ИЭМС

При решении современных задач в областях управления, моделирования и идентификации нелинейных и нестационарных систем таких как ИЭМС, а также при анализе и фильтрации данных экспериментов всё больше распространение получают методы оптимизации и, в частности, нелинейного программирования. Эти задачи относятся к классу задач многомерной оптимизации при ограничениях. К сожалению, в настоящий момент не существует эффективных численных методов для решения подобных задач для случая, когда число ограничений m многократно превосходит число варьируемых параметров $n \ll m$.

В математической постановке задача минимизации или максимизации формулируется в следующем виде:

$$J = \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \text{ или } J = \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}),$$

при

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2 \mathbf{x} \leq \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{C}_2(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{L}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{L}_2(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0},$$
(2.1)

где J – критерий; $\mathbf{x}$ – вектор варьируемых переменных; f – целевая функция; $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2$ – матрицы линейных ограничений, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ – гладкие матричные функции от соответствующих аргументов, $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ – матричные функции с разрывами первого и второго рода от соответствующих аргументов.

Классический подход в решении задач условной оптимизации – это сведение к эквивалентной задаче безусловной оптимизации методом множителей Лагранжа [27, 84-85], и дальнейшим применением разработанного инструментария методов, например, градиентного [85], случайного [86], эвристического [87] или эволюционного [88] поисков.

Недостатки этого подхода заключаются в следующем:

1. Применение метода множителей Лагранжа корректно, если доказано существование седловой точки для модифицированной целевой функции (Как следствие теоремы Куна-Таккера-Каруша).

2. Не доказана корректность метода множителей Лагранжа для общего случая нелинейных ограничений типа неравенство (Как следствие теоремы Куна-Таккера-Каруша).

3. Общее число p варьируемых переменных модифицированной целевой функции многократно увеличивается: $p=n+m_p+2m_n$, а область допустимых решений изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ по всем переменным, где n - число переменных в задаче условной оптимизации, m_p - количество ограничений типа равенство, m_n - количество ограничений типа неравенство.

4. Большое количество ограничений разного типа может привести к появлению многих экстремумов, даже для случая монотонной исходной целевой функции f .

5. Ограничения с разрывами не позволяют использовать градиентные методы поиска.

Продemonстрируем преимущества раздельного анализа ограничений и целевой функции на следующем примере: необходимо найти минимум целевой функции при ограничении (2.2).

$$J = \min_x \{f\}, f = ax^2 + bx + c, \text{ при } ax^2 + bx + c \geq d, \quad (2.2)$$

где J - функционал; f - целевая функция; x - варьируемая переменная; a, b, c, d - постоянные коэффициенты.

Решим эту задачу, анализируя ограничения и целевую функцию. Найдём интервалы аргумента, которые соответствуют ограничению:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c - d &= 0, \\ x_{1,2} &= \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4a(c-d)}}{2a}, \\ -\infty \leq x \leq +\infty, &\text{ если } b^2 - 4a(c-d) < 0 \text{ и } a > 0, \\ x \in \emptyset, &\text{ если } b^2 - 4a(c-d) < 0 \text{ и } a < 0, \\ x \leq x_1, x \geq x_2, &\text{ если } b^2 - 4a(c-d) \geq 0 \text{ и } a > 0, \\ x_1 \leq x \leq x_2, &\text{ если } b^2 - 4a(c-d) \geq 0 \text{ и } a < 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $x_{1,2}$ - корни уравнения.

Исследуем целевую функцию на монотонность для всех интервалов аргумента, полученных в (2.3):

1. Для случая $b^2 - 4a(c-d) < 0$ и $a > 0$ целевая функция f монотонно убывает на интервале $x < -b/2a$, а также функция монотонно возрастает на интервале $x \geq -b/2a$. Отсюда следует, что f имеет глобальный минимум в точке $x = -b/2a$.

2. Для случая $b^2 - 4a(c-d) < 0$ и $a < 0$ аргумент принадлежит пустому множеству, и задача не имеет решения.

3. Для случая $a > 0$ и $b^2 - 4a(c-d) \geq 0$ целевая функция f монотонно убывает на интервале $x \leq x_1$, а также функция монотонно возрастает на интервале $x \geq x_2$. Отсюда следует, что f имеет два минимума с одинаковым значением f в точках x_1 и x_2 .

4. Для случая $a < 0$ и $b^2 - 4a(c-d) \geq 0$ целевая функция f монотонно возрастает на интервале $x_1 \leq x < -b/2a$, а также функция монотонно убывает на интервале $-b/2a \leq x \leq x_2$. Отсюда следует, что f имеет два минимума с одинаковым значением f в точках x_1 и x_2 .

Количество варьируемых переменных осталось неизменным, а область поиска была существенно сокращена для случаев 2, 3 и 4. В случае 1 было доказано, что ограничения можно не учитывать.

Развивая идеи, изложенные в работах У.И. Зангвилла [85], Э. Голдрайтта [89, 90], Н.Н. Моисеева [91,92], Э. Хансена, Дж. У. Уолстера [93], Т. Моцкина [94,95], А.С. Немировского и Д.Б. Юдина [96,97], Л.С. Понтрягина [98], Л.Г. Хачияна [63] можно сделать вывод, что более эффективно использовать анализ ограничений и целевой функции в отдельности, а не переходить к безусловной оптимизации.

Можно сформулировать общий вывод по данному примеру: если решается задача условной минимизации (максимизации), целевая функция гладкая, и её экстремумы могут быть определены аналитически, тогда возможны три варианта:

1. Если глобальный минимум (максимум) находится в области допустимых значений, образованной ограничениями, тогда аргумент, соответствующий этому минимуму (максимуму) является решением поставленной задачи.

2. Если область допустимых решений - это пустое множество, тогда поставленная задача не имеет решения.

3. Если глобальный минимум (максимум) находится вне области допустимых значений, образованной ограничениями, тогда решение задачи будет находиться на границе области допустимых решений или это будут аргументы локальных минимумов (максимумов), которые находятся внутри области допустимых решений. В данном случае задача может иметь несколько решений, которые будут соответствовать одинаковым минимальным (максимальным) значениям целевой функции.

Для решения задачи (2.2) воспользуемся переходом от условной оптимизации к безусловной с применением метода множителей Лагранжа:

$$\Phi = \min_{x, \lambda, \xi} \{g\}, \quad g(x, \lambda, \xi) = f + \lambda(-ax^2 - bx - c + d + \xi^2), \quad (2.4)$$

где Φ - критерий безусловной оптимизации, λ - множитель Лагранжа, ξ - свободный параметр, для учёта неравенства.

Если доказано существование седловой точки для g , то справедливо следующее:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ax + b - \lambda 2ax - \lambda b = 0 \\ -ax^2 - bx - c + d + \xi^2 = 0 \\ 2\lambda\xi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4a(c-d)}}{2a} \\ \xi = 0 \end{cases}. \quad (2.5)$$

Полученное решение (2.5) не описывает случай №1, когда $b^2 - 4a(c-d) < 0$ и $a > 0$. Численное решение данной задачи градиентными методами даст только одно значение аргумента, а в случае $b^2 - 4a(c-d) < 0$ и $a < 0$ правильный ответ может быть получен только аналитически.

Количество варьируемых переменных увеличилось в 3 раза, область поиска стала R^3 .

Для использования метода множителей Лагранжа необходимо доказать существование седловой точки модифицированной целевой функции, что в случае большого количества переменных является сложной задачей, сравнимой по трудоёмкости с нахождением глобального оптимума.

Данный пример показывает преимущества методов, основанных на анализе ограничений, по сравнению с методами, использующими переход от условной оптимизации к безусловной.

В дальнейшем предлагается метод, основанный на раздельном анализе различных видов ограничений и целевой функции [99].

2.1. Уменьшение числа переменных путём анализа линейных ограничений типа равенство

Ограничения типа равенство можно использовать для редукции числа варьируемых переменных и исключения ограничений типа равенства, которые дублируют друг друга.

Начнём рассмотрение с ограничений типа линейное равенство:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{B}_1, \quad (2.6)$$

где матрица $\mathbf{A}_1$ имеет размерности $m_p \times n$, вектор $\mathbf{x}$ имеет размерность $n \times 1$, а $\mathbf{B}_1$ имеет размерность $m_p \times 1$. Тогда возможны три случая:

1. Если число линейно независимых уравнений больше n , то ограничения противоречивы и задача не имеет решения.

2. Если число линейно независимых уравнений равно n и найденное значение $\mathbf{x}_0 = \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1}$ не противоречит другим ограничениям, то $\mathbf{x}_0$ - это

единственное решение задачи. Если $\mathbf{x}_0$ противоречит другим ограничениям, то задача не имеет решения.

3. Если число линейно независимых уравнений n_1 меньше n , тогда необходимо определить базисные ограничения, а все линейно зависимые ограничения должны быть исключены. Полученная система уравнений позволяет определить линейную замену варьируемых переменных и сократить их число до $n - n_1$.

Для случая 3 замена переменных может быть выполнена по рекуррентной формуле (2.7):

$$z_{n-n_1+k} = b_k - \sum_{i=1}^{n-n_1} a_{k,i} z_i - \sum_{j=1}^{k-1} a_{k,n-n_1+j} z_{n-n_1+j}, \quad (2.7)$$

для переменных z_i с порядковым номером большим чем $n - n_1$ имеем:

$$\begin{aligned} z_{n-n_1+1} &= b_1 - \sum_{i=1}^{n-n_1} a_{1,i} z_i, \\ z_{n-n_1+2} &= b_2 - \sum_{i=1}^{n-n_1} a_{2,i} z_i - a_{2,n-n_1+1} z_{n-n_1+1} = b_2 - a_{2,n-n_1+1} b_1 - \sum_{i=1}^{n-n_1} [a_{2,i} + a_{2,n-n_1+1} a_{1,i}] z_i, \\ z_{n-n_1+3} &= b_3 - \sum_{i=1}^{n-n_1} a_{3,i} z_i - a_{3,n-n_1+1} z_{n-n_1+1} - a_{3,n-n_1+2} z_{n-n_1+2} = \\ &= b_3 - a_{3,n-n_1+2} b_2 - [a_{3,n-n_1+1} + a_{3,n-n_1+2} a_{2,n-n_1+1}] b_1 - \\ &- \sum_{i=1}^{n-n_1} [a_{3,i} + a_{3,n-n_1+2} a_{2,i} + [a_{3,n-n_1+1} + a_{3,n-n_1+2} a_{2,n-n_1+1}] a_{1,i}] z_i \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

где $a_{k,i}$ и b_k - коэффициенты матриц $\mathbf{A}_{1z}$ и $\mathbf{B}_{1z}$ соответственно, если в (2.6) матрица $\mathbf{A}_1$ методом Гаусса и перестановками столбцов приведена к нижней треугольной $\mathbf{A}_{1z}$ вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1z} \mathbf{z} &= \mathbf{B}_{1z}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{Tz}, \\ \mathbf{A}_{1z} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-n_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n-n_1} & a_{2,n-n_1+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1,1} & \dots & a_{n_1,n-n_1} & a_{n_1,n-n_1+1} & a_{n_1,n-n_1+2} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\mathbf{z}$ - вектор $\mathbf{x}$ с изменённым порядком следования компонентов, $\mathbf{T}$ - матрица перестановок, $\mathbf{B}_{1z}$ - преобразованный вектор $\mathbf{B}_1$. Учесть ограничения (2.6) можно линейной заменой (2.9):

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{z}_{n-n_1} + \mathbf{T}\mathbf{\beta}_1, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{\Lambda}_1$ - матрица размерностью $n \times (n - n_1)$, коэффициенты которой находятся согласно (2.7); $\mathbf{z}_{n-n_1}$ - новый вектор варьируемых переменных; $\mathbf{\beta}_1$ - вектор размерностью $n \times 1$, коэффициенты которого находятся согласно (2.7).

2.2. Построение области кандидатов в решения методом анализа линейных ограничений типа неравенство

Другой широко распространённый вид ограничений – это линейные неравенства, которые задаются выражением вида:

$$\mathbf{A}_2\mathbf{x} \leq \mathbf{B}_2, \quad (2.10)$$

где матрица $\mathbf{A}_2$ имеет размерности $m_n \times n$, вектор $\mathbf{x}$ имеет размерность $n \times 1$, а $\mathbf{B}_2$ имеет размерность $m_n \times 1$.

Первый шаг – это определить взаимоисключающие ограничения, что может быть выполнено по следующему алгоритму:

1. Начало алгоритма, ввод исходных данных: матрица $\mathbf{A}_2$ и вектор $\mathbf{B}_2$
2. Цикл: изменять индекс i от 1 до $m_n - 1$ с шагом 1, пропустить номер из запретного списка,
выполнять от пункта 3 до пункта 12,
3. Переменной флаг1 присвоить 0,
4. Цикл: изменять индекс j от $i + 1$ до m_n с шагом 1, пропустить номер из запретного списка,
выполнять от пункта 4 до пункта 12,
5. Если коэффициенты выбранных неравенств $a_{i,1} \neq 0$ и $a_{j,1} \neq 0$ или выбранные неравенства имеют нулевые коэффициенты от 1 до $s - 1$, то

рассчитать коэффициент $k = a_{i,1}/a_{j,1}$ или $k = a_{i,s}/a_{j,s}$,

- иначе перейти в пункт 4,
6. Если для всех p от 1 до n , хотя бы одно из $a_{i,p} - a_{j,p}k \neq 0$, то перейти в пункт 4
 7. Если $b_i - b_jk = 0$, то исключить ограничение j ,
 заменить ограничение i на $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i$,
 добавить в список исключённых ограничений индекс j ,
 добавить в запретный список индекс j ,
 переменной флаг1 присвоить 1, перейти в пункт 4,
 8. Если переменная флаг1 равна 1 и $b_i - b_jk \neq 0$, то
 противоречие в ограничениях, задача не имеет решения,
 добавить в список несовместных ограничений индексы i и j ,
 перейти в пункт 13,
 9. Если $k > 0$ и $b_i - b_jk > 0$, то исключить ограничение j ,
 добавить в список исключённых ограничений индекс j ,
 добавить в запретный список индекс j , перейти в пункт 4,
 10. Если $k > 0$ и $b_i - b_jk < 0$, то заменить ограничение i на j ,
 добавить в список исключённых ограничений индекс i ,
 добавить в запретный список индекс j , перейти в пункт 4,
 11. Если $k < 0$ и $b_i - b_jk > 0$, то параллельные ограничения,
 добавить в список параллельных ограничений индексы i и j ,
 перейти в пункт 4,
 12. Если $k < 0$ и $b_i - b_jk < 0$, то противоречие в ограничениях,
 задача не имеет решения,
 добавить в список несовместных ограничений индексы i и j ,
 перейти в пункт 13,
 13. Окончание алгоритма, выходные данные:
 список исключённых ограничений,
 список параллельных ограничений,
 список несовместных ограничений,
 задача имеет / не имеет решения,

формируется новая система ограничений:

$$\mathbf{A}_2^* \mathbf{x} \leq \mathbf{B}_2^*. \quad (2.11)$$

Второй шаг – это определить границу области, формируемой ограничениями, или убедиться, что подобной области не существует. Известны алгоритмы решения подобной задачи [87, 88], адаптируем их для нашего случая.

Введём следующие определения и допущения:

1. Каждое ограничение типа неравенство из (2.11) имеет *граничную гиперплоскость*, которая определяется уравнением $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n - b_i = 0$;

2. *Узлом (вершиной)* будем называть точку пересечения n граничных гиперплоскостей, и эта точка должна удовлетворять всем ограничениям из (11); узел будем обозначать как $V_{ij,\dots,s}$, где $ij,\dots,s$ – это код узла, состоящий из n индексов и формируемый номерами ограничений в (2.11); $V_{ij,\dots,s}$ – это вектор координат узла с размерностью $nx1$; индексы упорядочиваются таким образом, чтобы $i < j < \dots < s$;

3. *Ребром* будем называть отрезок, соединяющий два узла с числом общих индексов равным 2; ребро будем обозначать как $W_{ij,\dots,s}^{i,j,\dots,s}$, где верхний и нижний индексы – это коды узлов, которые соединяет ребро;

4. *Гранью* будем называть область граничной гиперплоскости, которой принадлежат все узлы, для которых один из индексов кодов i является общим, и эта область сформирована рёбрами, соединяющими эти узлы; грань будем обозначать как P_i , где i – это номер соответствующего ограничения из (2.11);

5. Все варьируемые переменные x изменяются в соответствующих интервалах $x_{\min,i} \leq x_i \leq x_{\max,i}$, что обуславливает реализуемость решения задачи; тогда следует, что система не имеет решения, когда нет ни одного узла; в случае одного узла – система имеет единственное решение, если оно не

противоречит ограничениям в (2.11); если два узла, то область кандидатов в решение - это ребро; три узла, то область кандидатов в решение - это грань и т.д.

Центральным вопросом определения области кандидатов в решение является отыскание узлов для системы (2.11), что может быть выполнено по следующему алгоритму:

1. Начало алгоритма, ввод исходных данных: матрица $\mathbf{A}_2^*$ и вектор $\mathbf{B}_2^*$,
2. Цикл: пока не выбраны все возможные последовательности из n неповторяющихся индексов $i < j < \dots < s$ такие, что не могут включаться индексы двух взаимно параллельных граничных плоскостей одновременно, выполнять от пункта 2 до пункта 6,
3. Из выбранных различных n граничных плоскостей с индексами $i < j < \dots < s$ сформировать систему уравнений $\mathbf{A}_{ij,\dots,s} \mathbf{x} = \mathbf{B}_{ij,\dots,s}$,
4. Если $\det(\mathbf{A}_{ij,\dots,s}) = 0$, то перейти в пункт 1,
5. Вычислить $V_{ij,\dots,s} = (\mathbf{A}_{ij,\dots,s})^{-1} \mathbf{B}_{ij,\dots,s}$,
6. Если ограничения (11) от $V_{ij,\dots,s}$ выполняются, то добавить $V_{ij,\dots,s}$ в список узлов, перейти в пункт 2,
7. Если список узлов пустой, то задача не имеет решение,
8. Если число узлов равно 1, то задача имеет единственное решение,
9. Окончание алгоритма, выходные данные:
список узлов,
задача имеет / не имеет решения.

Если найдены узлы для (2.11), то, исходя из определений 4 и 5, простыми средствами могут быть построены все рёбра и грани, образующие область кандидатов в решения.

2.3. Анализ полиномиальных ограничений

Другой широко распространенный вид ограничений – это полиномиальные уравнения. Разработано много методов и алгоритмов для их решения [100-103]. Следует отметить, что полиномиальные аппроксимации могут быть использованы для описания с некоторой точностью более сложных нелинейных ограничений в выбранной области аргументов. Это позволяет сводить для некоторых областей значений аргумента задачу условной оптимизации с произвольными нелинейными ограничениями к задачам условной оптимизации с полиномиальными ограничениями при заданной точности решения.

Полиномиальные ограничения встречаются 2-х видов: полиномиальные равенства и неравенства соответственно, которые также имеют и различные методы в решении. Универсальным подходом в анализе ограничения и первого, и второго вида может считаться разложение на множители порядка не старше 2 полинома ограничения φ :

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i_1} \left(\sum_{j_1} a_{1,i_1,j_1} x_{j_1} + b_{1,i_1} \right) \prod_{i_2} \left(\sum_{j_2} a_{2,i_2,j_2} x_{j_2}^2 + \sum_{j_3, j_4} a_{3,i_2,j_3,j_4} x_{j_3} x_{j_4} + \sum_{j_5} a_{4,i_2,j_5} x_{j_5} + b_{2,i_2} \right), \quad (2.12)$$

где $a_{1,i_1,j_1}, b_{1,i_1}, a_{2,i_2,j_2}, a_{3,i_2,j_3,j_4}, a_{4,i_2,j_5}, b_{2,i_2}$ – коэффициенты разложения на множители.

Видно, что ограничение с полиномом (2.12) сводится к системе линейных и квадратичных ограничений, что приводит к разделению исходной задачи на несколько подзадач, которые могут решаться независимо.

В общем случае, разложение полиномиальных ограничений – это сложная проблема, исследования в этом направлении сейчас идут очень интенсивно.

Рассмотрим случай систем ограничений, приводимых к треугольному виду (2.13):

$$\begin{cases} v_1^{m_1} + \varphi_1(v_1, v_2, \dots, v_k) = 0 \\ v_2^{m_2} + \varphi_2(v_2, v_3, \dots, v_k) = 0 \\ \dots \\ v_k^{m_k} + \varphi_k(v_k) = 0 \end{cases}, \mathbf{v} = \mathbf{T}_v \mathbf{x} + \mathbf{B}_v, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_k]^T, k \leq n, \quad (2.13)$$

где $\mathbf{T}_v, \mathbf{B}_v$ – матрицы параметров, $m_1, m_2, \dots, m_k$ – степени, соответствующих переменных, k – количество уравнений, φ_i – полиномы от переменных $v_i, \dots, v_k$, причём показатели при переменной v_i в многочлене φ_i меньше, чем m_i .

В последнее уравнение в (2.13) входит только v_k , и существуют эффективные алгоритмы нахождения корней полинома одной переменной [102]. Рассматриваются только вещественные корни полинома уравнения k , которые могут быть подставлены в уравнение $k-1$, которое после замены станет зависеть от переменной v_{k-1} , и его корни могут быть найдены аналогично уравнению k и т.д. Если все корни хотя бы одного из уравнений в (2.13) комплексные, то задача (2.1) не имеет решения. Множество вещественных корней системы (2.13), формирует наборы линейных ограничений вида (2.14) и разделяет исходную задачу на несколько параллельно решаемых подзадач:

$$\mathbf{T}_v \mathbf{x} + \mathbf{B}_v = \Lambda_{v,i}, \quad (2.14)$$

где $\Lambda_{v,i}$ – i -ый набор вещественных корней системы (2.13). Ограничения (2.14) анализируются аналогично (2.6), как описано в разделе 2.1.

Наиболее простой способ разбиения системы исходных ограничений может быть выполнен с помощью метода деревьев решений [104], который применимо к (2.13) используется следующим образом:

Слою 1 дерева соответствует уравнение k в (2.13), в которое входит только v_k . Используя алгоритмы [100] находим корни полинома одной переменной уравнения k . Каждому узлу слоя соответствует вещественный корень λ_{i_1} полинома уравнения k .

Слой 2 соответствует уравнению $k-1$ в (2.13). Выбирается родительский узел в слое 1, и связанный с ним корень подставляется в

уравнение $k-1$, которое после замены станет зависеть от переменной v_{k-1} . Аналогично слою 1 рассчитываются вещественные корни λ_{i_1, i_2} для полученного уравнения $k-1$ одной переменной. Эта процедура выполняется для всех родительских узлов. Все вещественные корни λ_{i_1, i_2} являются узлами слоя 2 и будут родительскими для следующего слоя, и должны быть подставлены в следующее уравнение.

Построение дерева будет происходить до слоя k включительно. Число индексов узла равно номеру слоя. Номер текущего узла составляется из номера родительского узла и порядкового номера потомка. Если рост дерева завершился раньше слоя k , то это означает, что система ограничений несовместна.

Число эквивалентных систем линейных ограничений типа равенство, на которые разбиваются исходные уравнения (2.13), равно числу узлов в слое k . Эти системы формируются по номеру узла $\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k}$ в слое k следующим образом:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k} \\ \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}} \\ \vdots \\ \lambda_{i_1, i_2} \\ \lambda_{i_1} \end{bmatrix},$$

где $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k$ - соответствующие индексы узлов в каждом слое.

Диагональными будем называть системы полиномиальных неравенств, которые путём линейной замены сводятся к виду:

$$\begin{cases} a_1 v_1^{m_1} + \varphi_1(v_1) \leq 0 \\ a_2 v_2^{m_2} + \varphi_2(v_2) \leq 0 \\ \dots \\ a_k v_k^{m_k} + \varphi_k(v_k) \leq 0 \end{cases}, \mathbf{v} = \mathbf{T}_v \mathbf{x} + \mathbf{B}_v, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_k]^T, \quad (2.15)$$

где каждое неравенство зависит только от одной переменной v_i , а a_i - константы, которые принимают значения либо -1 , либо 1 и определяют знак первого слагаемого в неравенстве с номером i , T_v , B_v - матрицы параметров, $m_1, m_2, \dots, m_k$ - степени, соответствующих переменных, k - количество неравенств, φ_i - полиномы от соответствующей переменной v_i , причём показатели при переменной v_i в многочлене φ_i меньше, чем m_i .

По аналогии разбиение системы исходных ограничений может быть выполнено с помощью метода деревьев решений. Каждое неравенство может анализироваться отдельно, для него строиться собственное дерево следующим образом:

1. Необходимо найти вещественные корни $\lambda_{i,j}$ полинома $v_i^{m_i} + \varphi_i(v_i) / a_i$, i - номер неравенства, j - номер вещественного корня полинома. Если вещественные корни отсутствуют, то необходимо проанализировать ограничение на непротиворечивость, рассмотрев знак a_i . Так при $a_i = -1$, неравенство справедливо при любых x , и его можно исключить, а при $a_i = 1$, задача не имеет решения.

2. Построить произведение линейных сомножителей, которые образованы только вещественными корнями: $a_i \prod_{j=1}^p (v_i - \lambda_{i,j}) \leq 0$, где p - число вещественных корней. Каждым сомножителем связать переменную u_j , которая может принимать значение 1 , при $v_i - \lambda_{i,j} \geq 0$, и значение равное -1 , при $v_i - \lambda_{i,j} \leq 0$. Для вершины дерева введём переменную $u_0 = a_i$. Таким образом, дерево имеет вид бинарного: одна ветвь определяет отрицательный переход, а другая положительный. В узлах дерева будем хранить произведения соответствующих u_j . Нумерация узлов сквозная, по уровням слева направо. Построение дерева выполняется до уровня $p+1$ включительно.

3. В уровне $p+1$ выбираются узлы с отрицательными значениями. По номеру выбранного узла строиться система линейных неравенств, для этого номер

узла представляется в бинарном виде, удаляется старшая единица. Номер символа в бинарном коде j соответствует номеру линейного слагаемого $v_i - \lambda_{i,j}$, нулю соответствует неравенство $v_i - \lambda_{i,j} \leq 0$, а единице - слагаемое $-v_i + \lambda_{i,j} \leq 0$.

В общем случае анализ подобных ограничений является сложной задачей, рассмотренной в работах [100-102,105]. Следует отметить три основных подхода:

1. Разложение полиномов многих переменных на простые сомножители:

$$\begin{cases} a_1 \prod_i \prod_j (v_i - \lambda_{1,i,j}) \leq 0 \\ a_2 \prod_i \prod_j (v_i - \lambda_{2,i,j}) \leq 0 \\ \dots \\ a_s \prod_i \prod_j (v_i - \lambda_{s,i,j}) \leq 0 \end{cases}, \mathbf{v} = \mathbf{T}_v \mathbf{x} + \mathbf{B}_v, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_k]^T, \quad (2.16)$$

2. Переход от систем неравенств к системам уравнений путём введения дополнительных переменных [27]:

$$\begin{cases} a_1 \phi_1(v_1, v_2, \dots, v_k) - v_{k+1} = 0 \\ a_2 \phi_2(v_1, v_2, \dots, v_k) - v_{k+2} = 0 \\ \dots \\ a_k \phi_k(v_1, v_2, \dots, v_k) - v_{2k} = 0 \\ -v_{k+1} \leq 0 \\ \dots \\ -v_{2k} \leq 0 \end{cases}, \mathbf{v} = \mathbf{T}_v \mathbf{x} + \mathbf{B}_v, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_{2k}]^T, \quad (17)$$

3. Применение методов интервального анализа. Данный подход удобно применять для систем ограничений треугольного вида степени не более 4:

$$\begin{cases} a_1 v_1^{m_1} + \phi_1(v_1, v_2, \dots, v_k) \leq 0 \\ a_2 v_2^{m_2} + \phi_2(v_2, v_3, \dots, v_k) \leq 0 \\ \dots \\ a_k v_k^{m_k} + \phi_k(v_k) \leq 0 \end{cases}, \mathbf{v} = \mathbf{T}_v \mathbf{x} + \mathbf{B}_v, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_k]^T, m_i \leq 4. \quad (2.18)$$

По аналогии с системами уравнений треугольного вида решается, начиная с неравенства номер k , для этого необходимо найти корни полинома не старше степени 4, что может быть выполнено по методу Феррари. В общем виде полиномиальное уравнение для v_k имеет вид:

$$v_k^4 + av_k^3 + bv_k^2 + cv_k + d = 0, \quad (2.19)$$

$$a = \frac{a_{k,2}}{a_{k,1}}, b = \frac{a_{k,3}}{a_{k,1}}, c = \frac{a_{k,4}}{a_{k,1}}, d = \frac{a_{k,5}}{a_{k,1}},$$

где $a_{k,i}$ - коэффициенты исходного полинома. По методу Феррари он сводится к решению кубического уравнения:

$$y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3 = 0, \quad (2.20)$$

$$b_1 = -b, b_2 = ac - 4d, b_3 = -a^2 d + 4bd - c^2,$$

с помощью формулы Кардано определяем вещественный корень:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad (2.21)$$

где $p = -\frac{b_1^2}{3} + b_2$, $q = \frac{2b_1^3}{27} - \frac{b_1 b_2}{3} + b_3$. Значения кубических корней следует брать

такими, чтобы их произведение было равно $-\frac{p}{3}$. В итоге, находим корни

(20), учтя замену $y_0 = z - \frac{b_1}{3}$. Затем решаются два квадратных уравнения:

$$v_k^2 + \frac{a}{2} v_k + \frac{y_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b + y_0\right) v_k^2 + \left(\frac{a}{2} y_0 - c\right) v_k + \frac{y_0^2}{4} - d} = 0, \quad (2.22)$$

в которых подкоренное выражение является полным квадратом:

$$v_k^2 + \frac{a}{2} v_k + \frac{y_0}{2} \pm \left(v_k - \frac{2c - ay_0}{a^2 - 4b + 4y_0} \right) = 0, \quad (2.23)$$

корни (24) будут корнями (19):

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a+2}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{2} + 1\right)^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} - \frac{2c - ay_0}{a^2 - 4b + 4y_0}\right)}, \quad (2.24)$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{a-2}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} + \frac{2c - ay_0}{a^2 - 4b + 4y_0}\right)}.$$

Условия вещественности корней будут

$$\begin{aligned} \text{для } \lambda_{1,2} : \left(\frac{a}{2} + 1 \right)^2 - 4 \left(\frac{y_0}{2} - \frac{2c - ay_0}{a^2 - 4b + 4y_0} \right) &\geq 0, \\ \text{для } \lambda_{3,4} : \left(\frac{a}{2} - 1 \right)^2 - 4 \left(\frac{y_0}{2} + \frac{2c - ay_0}{a^2 - 4b + 4y_0} \right) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Выражения (2.19)-(2.25) дают возможность получить границы изменения вещественных корней в случае, когда параметры в (2.19) являются интервалами:

$$\begin{aligned} v_k^4 + av_k^3 + bv_k^2 + cv_k + d = 0, \\ a_{\min} \leq a \leq a_{\max}, b_{\min} \leq b \leq b_{\max}, c_{\min} \leq c \leq c_{\max}, d_{\min} \leq d \leq d_{\max}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

с использованием интервальной арифметики.

Каждый из описанных подходов для произвольного вида полиномиальных ограничений является трудоёмким, в методе многомерных оболочек (ММО) [99] полиномиальное приближение произвольных ограничений и поэтому изначально удобно искать их аппроксимации в виде (2.16). Для анализа этого случая обобщим процедуру из предыдущего раздела:

1. Необходимо найти слагаемые с вещественными корнями $\lambda_{s,i,j}$, где s - номер неравенства, i - номер переменной v , j - номер вещественного корня полинома. Если вещественные корни отсутствуют, то необходимо проанализировать ограничение на непротиворечивость, рассмотрев знак a_s . Так при $a_s = -1$, неравенство справедливо при любых x , и его можно исключить, а при $a_i = 1$, задача не имеет решения.

2. Построить произведение линейных сомножителей, которые образованы только вещественными корнями: $a_s \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} (v_i - \lambda_{s,i,j}) \leq 0$, где p_i - число вещественных корней для переменной v_i . Каждым сомножителем связать переменную u_j , которая может принимать значение 1, при $v_i - \lambda_{i,j} \geq 0$, и значение равное -1 , при $v_i - \lambda_{i,j} \leq 0$. Для вершины дерева введём переменную

$u_0=a_i$. Таким образом, дерево имеет вид бинарного: одна ветвь определяет отрицательный переход, а другая положительный. В узлах дерева будем хранить произведения соответствующих u_j . Нумерация узлов сквозная, по уровням слева направо. Построение дерева выполняется до уровня $\sum_{i=1}^k p_i + 1$ включительно.

3. На уровне $\sum_{i=1}^k p_i + 1$ выбираются узлы с отрицательными значениями.

По номеру выбранного узла строится система линейных неравенств, для этого номер узла представляется в бинарном виде, удаляется старшая единица. Номер символа в бинарном коде m соответствует номеру линейного слагаемого $v_i - \lambda_{s,ij}$, нулю соответствует неравенство $v_i - \lambda_{s,ij} \leq 0$, а единице - слагаемое $-v_i + \lambda_{s,ij} \leq 0$.

2.4. Анализ ограничений с разрывами

Часто встречающийся на практике тип ограничений – это ограничения с разрывами. К ним относятся ограничения в виде кусочно-линейных функций, дробей, полиномов (например, гипербола) и т.д. Наиболее удобным способом представления таких ограничений является описание в виде систем равенств или неравенств, заданных на интервалах, границами которых являются особые точки, например, переход с одной ветви функции на другую. Рассмотрим случай ограничений с разрывами в особых точках. Одним из вариантов таких ограничений являются рациональные дроби. Случай систем подобных уравнений сводится к задаче решения систем полиномиальных уравнений, в результате которого находятся списки корней числителя и знаменателя, которые можно сформировать в системы линейных уравнений как в первом разделе и систем неравенств, которые определяют особые области.

Как и в предыдущем случае, аппроксимацию произвольных ограничений удобно искать в виде (2.27):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \frac{\prod_i \prod_j (v_i - \lambda_{1,i,j})}{\prod_i \prod_l (v_i - \lambda_{1,i,l})} \leq 0 \\ a_2 \frac{\prod_i \prod_j (v_i - \lambda_{2,i,j})}{\prod_i \prod_l (v_i - \lambda_{2,i,l})} \leq 0 \\ \dots \\ a_s \frac{\prod_i \prod_j (v_i - \lambda_{s,i,j})}{\prod_i \prod_l (v_i - \lambda_{s,i,l})} \leq 0 \end{array} \right., \mathbf{v} = \mathbf{T}_v \mathbf{x} + \mathbf{B}_v, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_k]^T, \quad (2.27)$$

Для этого случая можно изменить процедуру из предыдущего раздела:

1. Необходимо найти слагаемые с вещественными корнями $\lambda_{s,i,j}$ и $\lambda_{s,i,l}$, где s - номер неравенства, i - номер переменной v , j - номер вещественного корня полинома числителя, l - номер вещественного корня полинома знаменателя. Если вещественные корни отсутствуют, то необходимо проанализировать ограничение на непротиворечивость, рассмотрев знак a_s . Так при $a_s = -1$, неравенство справедливо при любых $\mathbf{x}$, и его можно исключить, а при $a_i = 1$, задача не имеет решения.

2. Построить дробь из линейных слагаемых, которые образованы

только вещественными корнями: $a_s \frac{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} (v_i - \lambda_{s,i,j})}{\prod_{i=1}^k \prod_{l=1}^{d_i} (v_i - \lambda_{s,i,l})} \leq 0$, где n_i - число

вещественных корней числителя для переменной v_i , d_i - число вещественных корней числителя для переменной v_i . С каждым сомножителем числителя и знаменателя нужно связать переменную u_j , которая может принимать значение 1, при $v_i - \lambda_{i,j} \geq 0$, и значение равное -1 , при $v_i - \lambda_{i,j} \leq 0$. Для вершины дерева введём переменную $u_0 = a_i$. Таким образом, дерево имеет вид бинарного: одна ветвь определяет отрицательный переход, а другая положительный. В узлах дерева будем хранить произведения

соответствующих u_j . Нумерация узлов сквозная, по уровням слева направо.

Построение дерева выполняется до уровня $\sum_{i=1}^k (n_i + d_i) + 1$ включительно.

3. На уровне $\sum_{i=1}^k (n_i + d_i) + 1$ выбираются узлы с отрицательными значениями. По номеру выбранного узла строится система линейных неравенств, для этого номер узла представляется в бинарном виде, удаляется старшая единица. Номер символа в бинарном коде m соответствует номеру линейного слагаемого $v_i - \lambda_{s,i,j}$ или $v_i - \lambda_{s,i,l}$, нулю соответствует неравенство $v_i - \lambda_{s,i,j} \leq 0$ или $v_i - \lambda_{s,i,l} \leq 0$, а единице - слагаемое $-v_i + \lambda_{s,i,j} \leq 0$ или $-v_i + \lambda_{s,i,l} \leq 0$.

4. Вещественные корни знаменателя формируют особые области $v_i - \lambda_{s,i,l} = 0$, которые удобно представить в виде двух строгих неравенств, которые формируют разбиение на несколько независимых областей:

$$v_i - \lambda_{s,i,l} < 0, \quad v_i - \lambda_{s,i,l} > 0. \quad (2.28)$$

Точки особых областей также должны быть проверены, как кандидаты на оптимальные решения. Для вычислительных процедур удобнее использовать аналог выражению (2.28) при заданной точности вычислений:

$$v_i - \lambda_{s,i,l} + \varepsilon \leq 0, \quad v_i - \lambda_{s,i,l} - \varepsilon \geq 0, \quad (2.29)$$

где ε - погрешность расчётов.

Анализ ограничений с разрывами должен выполняться после всех других типов ограничений, так как в этом случае повышается вероятность исключения подобных ограничений или областей аргументов, которые соответствуют разрывам.

2.5. Анализ произвольных ограничений

Каждый тип ограничений требует разработки соответствующего алгоритма анализа. Наиболее простым способом решения этой задачи является аппроксимация произвольного нелинейного ограничения кусочно-

полиномиальной моделью при заданной точности расчёта ε . В этом случае можно воспользоваться подходом, описанным в разделах 2.3 и 2.4.

При синтезе оптимальных систем управления в качестве ограничений используются уравнения объекта управления, компонентами которых являются экспоненциальные функции. Подобный пример подробно описан в [8], а ограничения имеют вид:

$$x_i e^{-b_i x_i} - a_{1,i} e^{-x_i x_i} - a_{2,i} x_i + a_{3,i} = 0, \quad (2.30)$$

$$a_j e^{-b_j x_j} - x_i e^{-x_i x_j} = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{e^{-b_i x_i} - e^{-x_i x_j}}{\frac{a_{1,j}}{x_i} - a_{2,j}} \leq c_i, \quad (2.32)$$

где $b_i, a_{1,i}, a_{2,i}, a_{3,i}, a_j, b_j, a_{1,j}, a_{2,j}, c_i$ - постоянные коэффициенты, а $i \neq j$.

Не трудно заметить в (2.30), что переменные x_i могут быть выражены через x_1 , для этого введем замену $y_i = x_1 x_i$, тогда (2.30) примет вид:

$$e^{-y_i} = -\mu_i y_i + \sigma_i, \quad \mu_i(x_1) = \frac{a_{2,i} - e^{-b_i x_1}}{a_{1,i} x_1}, \quad \sigma_i = \frac{a_{3,i}}{a_{1,i}}. \quad (2.33)$$

Уравнение (2.33) имеет два одинаковых решения в случае:

$$\frac{\partial e^{-y_i}}{\partial y_i} = -e^{-y_i} = \frac{\partial(-\mu_i y_i + \sigma_i)}{\partial y_i} = -\mu_i, \quad (2.34)$$

что позволяет уточнить нижнюю границу для σ_i :

$$y_i = -\ln \mu_i, \quad \mu_i = \mu_i \ln \mu_i + \sigma_i, \quad \sigma_i = \mu_i - \mu_i \ln \mu_i. \quad (2.35)$$

Учтём (2.35) в уравнении (2.33):

$$e^{-y_i} = -\mu_i y_i + \sigma_i, \quad \mu_i > 0, \quad \mu_i - \mu_i \ln \mu_i - \sigma_i < 0. \quad (2.36)$$

Перегруппировав (2.36) $-\frac{1}{\mu_i} = \left(y_i - \frac{\sigma_i}{\mu_i} \right) e^{y_i}$ и введя замену $z_i = y_i - \frac{\sigma_i}{\mu_i}$ получим:

$$z_i e^{z_i} = -\frac{1}{\mu_i} e^{-\frac{\sigma_i}{\mu_i}}. \quad (2.37)$$

Решением (2.37) является функция Ламберта ψ^{-1} :

$$z_i = f^{-1}\left(-\frac{1}{\mu_i}e^{-\frac{\sigma_i}{\mu_i}}\right), y_i = \frac{\sigma_i}{\mu_i} + z_i = \frac{\sigma_i}{\mu_i} + \psi^{-1}\left(-\frac{1}{\mu_i}e^{-\frac{\sigma_i}{\mu_i}}\right). \quad (2.38)$$

Тогда переменные x_i находятся из соотношения:

$$x_i = \frac{\sigma_i}{\mu_i(x_1)x_1} + \frac{1}{x_1}\psi^{-1}\left(-\frac{1}{\mu_i(x_1)}e^{-\frac{\sigma_i}{\mu_i(x_1)}}\right) = g_i(x_1), \quad (2.39)$$

$$\mu_i(x_1) > 0, \mu_i(x_1) - \mu_i(x_1)\ln \mu_i(x_1) - \sigma_i < 0.$$

Не трудно заметить, что переменные x_j могут быть выражены через $g(x_1)$, используя ограничения (2.31):

$$\frac{a_j}{g_i(x_1)} = e^{(b_j - g_i(x_1))x_j} \Rightarrow x_j = \frac{1}{b_j - g_i(x_1)} \ln\left(\frac{a_j}{g_i(x_1)}\right) = h_i(x_1), \frac{a_j}{g_i(x_1)} > 0. \quad (2.40)$$

Тогда с учётом (2.40) ограничения (2.41) будут зависеть только от x_1 и примут вид:

$$\frac{e^{-b_j g_i(x_1)} - e^{-g_i(x_1)h_i(x_1)}}{\frac{a_{1,j}}{g_i(x_1)} - a_{2,j}} \leq c_i. \quad (2.41)$$

Если учесть выражения (2.33)-(2.41), то ограничения (2.30)-(2.32) сводятся к эквивалентной системе ограничений от переменной x_1 :

$$\mu_i(x_1) > 0, \mu_i(x_1) - \mu_i(x_1)\ln \mu_i(x_1) - \sigma_i < 0, x_1 \neq 0, g_i(x_1) \neq 0,$$

$$b_j - g_i(x_1) \neq 0, \frac{e^{-b_j g_i(x_1)} - e^{-g_i(x_1)h_i(x_1)}}{\frac{a_{1,j}}{g_i(x_1)} - a_{2,j}} \leq c_i, \frac{a_j}{g_i(x_1)} > 0. \quad (2.42)$$

Нелинейные функции в (2.42) могут быть аппроксимированы с помощью кусочно-полиномиальной модели от одной переменной x_1 и проанализированы, как это описано в разделах 2.3 и 2.4.

2.6. Анализ целевой функции

После построения границы области допустимых решений и определения её узлов путём анализа ограничений необходимо определить оптимальные значения целевой функции, которые принадлежат области

допустимых решений. Как уже было описано во введении, возможны 3 случая:

1. Если глобальный минимум (максимум) находится в области допустимых значений, образованной ограничениями, тогда аргумент, соответствующий этому минимуму (максимуму) является решением поставленной задачи.

2. Если область допустимых решений - это пустое множество, тогда поставленная задача не имеет решения.

3. Если глобальный минимум (максимум) находится вне области допустимых значений, образованной ограничениями, тогда решение задачи будет находиться на границе области допустимых решений или это будут аргументы локальных минимумов (максимумов), которые находятся внутри области допустимых решений. В данном случае задача может иметь несколько решений, которые будут соответствовать одинаковым минимальным (максимальным) значениям целевой функции.

Обычно в задачах управления, идентификации и анализа сигналов целевая функция имеет простой вид и её оптимумы известны, поэтому проверка пунктов 1 и 2 не вызывает трудностей. Для произвольной целевой функции проверка пункта 3 очень трудоёмка даже на небольшой области допустимых решений, для этого могут быть использованы стандартные методы поиска, например, метод сеток, методы управляемого случайного поиска.

Рассмотрим случай, когда целевая функция является метрикой и имеет не более одного экстремума, а также все точки, в которых эта функция имеет одинаковое значение, ограничивают фигуру таким образом, что отрезок, соединяющий любые две точки её поверхности, принадлежит этой фигуре, а также выполняются соотношения (2.43):

$$\begin{aligned}
&\rho = q(\mathbf{x}), \rho \geq 0, \text{ если } \rho(\mathbf{x}(i)) = \rho_i = \text{const}, \text{ то } f(\mathbf{x}(i)) = \text{const}, \\
&\text{если } J = \min(f), \text{ то } f(\rho_0) = \max, f(\rho_0) > f(\rho_1) > \dots > f(\rho_n), \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_n, \\
&\text{если } J = \max(f), \text{ то } f(\rho_0) = \min, f(\rho_0) < f(\rho_1) < \dots < f(\rho_n), \rho_0 > \rho_1 > \dots > \rho_n.
\end{aligned}
\tag{2.43}$$

Тогда, решением будут узлы, в которых целевая функция имеет максимальное/минимальное значение для задачи максимизации/минимизации.

В случае, если выполняются условия (44):

$$\begin{aligned}
&\rho = q(\mathbf{x}), \rho \geq 0, \text{ если } \rho(\mathbf{x}(i)) = \rho_i = \text{const}, \text{ то } f(\mathbf{x}(i)) = \text{const}, \\
&\text{если } J = \min(f), \text{ то } f(\rho_0) = \min, f(\rho_0) < f(\rho_1) < \dots < f(\rho_n), \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_n, \\
&\text{если } J = \max(f), \text{ то } f(\rho_0) = \max, f(\rho_0) > f(\rho_1) > \dots > f(\rho_n), \rho_0 > \rho_1 > \dots > \rho_n,
\end{aligned}
\tag{2.44}$$

решением будут узлы или точки граней, если эти грани являются касательными к поверхности ρ в этих точках, где целевая функция имеет максимальное/минимальное значение для задачи максимизации/минимизации.

2.7. Алгоритм оптимизации

Укрупнено алгоритм оптимизации может быть описан следующим образом:

1. Начало алгоритма, ввод данных об ограничениях и целевой функции.
2. Если выделены линейные равенства, то
выполнить анализ линейных неравенств согласно разделу 2.1,
3. Если не найдены противоречия в ограничениях в 2 и выделены линейные неравенства, то
выполнить анализ линейных неравенств согласно разделу 2.2,
4. Если не найдены противоречия в ограничениях в 3 и выделены полиномиальные ограничения, то
выполнить анализ полиномиальных ограничений согласно разделу 2.3,

5. Если не найдены противоречия в ограничениях в 4 и выделены ограничения с разрывами, то
 выполнить анализ ограничений согласно разделу 2.4,
6. Если не найдены противоречия в ограничениях в 5 и выделены ограничения экспоненциального вида, то
 выполнить анализ ограничений согласно разделу 2.5,
7. Если найдены противоречия в ограничениях, то
 задача не имеет решения,
 перейти в пункт 12,
8. Найти все узлы области допустимых решений,
9. Вычислить значения целевой функции в узлах,
 найти её максимальные/минимальные значения,
10. Если целевая функция удовлетворяет условию (2.43), то
 исходя из задачи максимизации/минимизации выбрать узлы с максимальными/минимальными значениями, полученными в пункте 9,
 перейти в пункт 12,
11. Если целевая функция удовлетворяет условию (2.44), то
 исходя из задачи максимизации/минимизации выбрать узлы с максимальными/минимальными значениями, полученными в пункте 9,
 проверить являются ли выбранные узлы точками касания поверхности ρ граней области допустимых значений, вычислить точки касаний граней, образующих узел с максимальным/минимальным значением, выбрать точки с максимальным/минимальным значением целевой функции.
12. Окончание алгоритма, выходные данные:
 список решений,
 задача имеет / не имеет решения.

2.8. Пример использования ММО и его модификаций для решения задачи синтеза траектории движения модуля ИЭМС при наличии ограничений

Известны методы оптимального управления роботами [106-108], основная проблема заключается в синтезе оптимальных траекторий движения роботов. Предлагается алгоритм синтеза программных траекторий ИЭМС с учётом ограничений на реализуемость движений.

Метод многомерных оболочек [99] был применён для решения данной задачи [19], где была продемонстрирована его эффективность перед стандартными методами нелинейного программирования.

В случае n -пода, выходными данными планировщика траекторий модуля ИЭМС является выработка законов выдвигания штоков каждого актуатора с учетом быстродействия приводов актуаторов, инерции n -пода и ограничений на фазовые координаты и геометрию перемещений.

Траектория движения n -пода задается в базовой системе координат (БСК) как три линейных и три угловых перемещения контрольной точки (КТ). Требования к динамике, точности и качеству переходного процесса для модуля ИЭМС как замкнутой системы задаётся с помощью линейной эталонной динамической модели в отклонениях от желаемого состояния (цели управления). Законы изменения линейных η_r и угловых η_ϕ ошибок наведения КТ в БСК, определяемые данной моделью, учитывают динамику электроприводов и инерцию n -пода через постоянную времени модуля ИЭМС и имеют вид:

$$\eta_r = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{T_h - T_1} \left[T_h e^{-\frac{t}{T_h}} - T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} \right] \\ \frac{a_2}{T_h - T_2} \left[T_h e^{-\frac{t}{T_h}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \\ \frac{a_3}{T_h - T_3} \left[T_h e^{-\frac{t}{T_h}} - T_3 e^{-\frac{t}{T_3}} \right] \end{bmatrix}, \quad \eta_\phi = \begin{bmatrix} \frac{a_4}{T_h - T_4} \left[T_h e^{-\frac{t}{T_h}} - T_4 e^{-\frac{t}{T_4}} \right] \\ \frac{a_5}{T_h - T_5} \left[T_h e^{-\frac{t}{T_h}} - T_5 e^{-\frac{t}{T_5}} \right] \\ \frac{a_6}{T_h - T_6} \left[T_h e^{-\frac{t}{T_h}} - T_6 e^{-\frac{t}{T_6}} \right] \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

где a_i - начальное рассогласование по соответствующей координате, T_h - постоянная времени модуля ИЭМС, T_i - постоянные времени замкнутой системы с регулятором, t - время. Величины T_h и a_i – рассчитываются с учётом перемещений всей системы, исходя из кинематической и динамической моделей многомодульного механизма и области допустимых перемещений.

Выходными данными планировщика траекторий модуля ИЭМС являются удлинения Δl_j и скорости удлинений $\Delta \dot{l}_j$ актуаторов, которые зависят от рассогласований η_r и η_ϕ . Таким образом, необходимо найти оптимальные значения времени переходного процесса $T_{п.п.}$ и постоянных времени T_i регулятора замкнутой системы при заданной точности наведения по каждой координате соответственно δ_i и упрощенных ограничениях на максимальные длины, скорости выдвижения актуаторов, при ограничениях на координаты, скорости перемещения и ускорения модуля ИЭМС, пересчитанные в относительные перемещения.

В математическом виде поиск оптимальной траектории формулируется как задача максимального быстродействия при наличии нелинейных ограничений:

$$J = \min_x \{x_1\}, \quad (2.46)$$

при ограничениях:

$$k_1 T_h \leq x_1 \leq T_{\max}, \quad (2.47)$$

$$0 < x_{i+1} \leq \frac{k_2}{T_h}, \quad (2.48)$$

$$x_{i+7} > 0, \quad (2.49)$$

$$x_1 - x_{i+7} > 0, \quad (2.50)$$

$$-\lambda_i^{\max} \leq \frac{-a_i}{T_h} x_{i+1} \leq \lambda_i^{\max}, \quad (2.51)$$

$$e^{-x_1 x_{i+1}} - \left(T_h e^{\frac{-x_1}{T_h}} - \frac{\text{sign}(a_i) \delta_i T_h}{a_i} \right) x_{i+1} - \frac{\text{sign}(a_i) \delta_i}{a_i} = 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{a_i}{T_h - \frac{1}{x_{i+1}}} \left(\frac{1}{T_h} e^{\frac{-x_{i+7}}{T_h}} - x_{i+1} e^{-x_{i+7} x_{i+1}} \right) = 0, \quad (2.53)$$

$$-v_i^{\max} \leq \frac{-a_i}{T_h - \frac{1}{x_{i+1}}} \left(e^{\frac{-x_{i+7}}{T_h}} - e^{-x_{i+7} x_{i+1}} \right) \leq v_i^{\max}, \quad (2.54)$$

$$\Delta l_j + l_{0j} \leq l_{\max j}, \quad (2.55)$$

$$|\Delta \dot{l}_j| \leq \dot{l}_{\max j}, \quad (2.56)$$

где $\mathbf{x}$ – вектор варьируемых переменных, $x_1 = T_{\text{п.п.}}$; $T_{\max}$ – максимальное значение времени переходного процесса, $x_{i+1} = \frac{1}{T_i}$; x_{i+7} – моменты времени, в которые скорости изменения линейных и угловых ошибок наведения имеют максимальные по модулю значения; k_1, k_2 – весовые коэффициенты; $\lambda_i^{\max}$ – максимальное значение ускорений изменения линейных и угловых рассогласований; $v_i^{\max}$ – максимальное значение скоростей изменения линейных и угловых рассогласований; $i = 1..6$; $l_{\max j}$ – максимальная длина j -ого актуатора, $\dot{l}_{\max j}$ – максимальная скорость удлинения j -ого актуатора, l_{0j} – начальное значение длинны актуатора, $j = 1..n$.

Ограничения (2.47, 2.48) определяют минимальное допустимое значение времени переходного процесса и постоянных времени T_i , связанное с тем, что быстродействие регулятора выше быстродействия объекта управления. Ограничения (2.49, 2.50) определяют минимальные и максимальные допустимые значение x_{i+7} , так как выбранные законы изменения длины актуаторов имеют выраженные этапы разгона и торможения.

Ограничения (2.51) определяют максимальные по модулю допустимые значения ускорений изменения линейных и угловых рассогласований. Это ограничение получено двойным дифференцированием (2.45) по времени и максимизацией найденного ускорения на отрезке $[0, T_{\text{п.п.}}]$:

$$\ddot{\eta}_i = \frac{-a_i}{T_h - T_i} \left[\frac{1}{T_i} e^{-\frac{t}{T_i}} - \frac{1}{T_h} e^{-\frac{t}{T_h}} \right] = \frac{-a_i}{T_h - \frac{1}{x_{i+1}}} \left[x_i e^{-x_{i+1}t} - \frac{1}{T_h} e^{-\frac{t}{T_h}} \right]. \quad (2.57)$$

Не сложно показать, что $\ddot{\eta}_i$ имеют максимальные по модулю значения при $t = 0$ равные $\ddot{\eta}_i(t_0) = \frac{-a_i}{T_h} x_{i+1}$. Максимальные значения этих ускорений $\lambda_i^{\max}$ могут быть определены через максимальные пусковые моменты электроприводов актуаторов.

Ограничения (2.52) определяют максимальные допустимые ошибки наведения. Они получены упрощением следующего уравнения:

$$\eta_i(T_{\text{п.п.}}) = \frac{a_i}{T_h - T_i} \left[T_h e^{-\frac{T_{\text{п.п.}}}{T_h}} - T_i e^{-\frac{T_{\text{п.п.}}}{T_i}} \right] = \frac{a_i}{T_h - \frac{1}{x_{i+1}}} \left[T_h e^{-\frac{x_i}{T_h}} - \frac{1}{x_{i+1}} e^{-x_i x_{i+1}} \right] = \text{sign}(a_i) \delta_i. \quad (2.58)$$

Ограничения (2.53) определяют моменты времени, в которых скорости изменения линейных и угловых рассогласований имеют максимальные по модулю значения. Получены из условия, что ускорение (2.57) равно нулю при $t = x_{i+1}$.

Ограничения (2.54) определяют максимальные по модулю допустимые значения скоростей изменения линейных и угловых рассогласований в моменты времени x_{i+1} .

Ограничения (2.55, 2.56) определяют диапазон линейных перемещений и скоростей линейных перемещений актуаторов.

2.8.1 Синтез траектории движения с использованием градиентных методов оптимизации

Стандартным методом решения задачи (2.46) – (2.56) является использование градиентных или ньютоновских методов оптимизации [27]. Функционал (2.46) имеет линейную целевую функцию, зависящую только от времени переходного процесса, что приводит при использовании градиентных или ньютоновских методов оптимизации к плохой обусловленности вычислений и плохой сходимости численных методов. Для

улучшения сходимости можно ввести другой функционал, который обеспечит необходимое масштабирование при вычислениях:

$$J = \min_{\mathbf{x}} \left\{ x_1 + \sum_{i=1}^6 \left[\frac{m_i}{x_{i+1}} + m_{i+6} x_{i+7} \right] \right\}, \quad (2.59)$$

где m_i, m_{i+6} – масштабные коэффициенты, выбираемые таким образом, чтобы обеспечить хорошую сходимость методов оптимизации. Выбор данных коэффициентов представляет сложность в виду нелинейного вида целевой функции в (2.59) и ограничений (2.47) - (2.56).

На практике легко определяются диапазоны изменения масштабных коэффициентов по эталонным переходным процессам на стадии проектирования. В таком случае масштабные коэффициенты $\mathbf{m}$ можно ввести в задачу как дополнительные переменные при соответствующих ограничениях на их диапазоны. Тогда (2.59) примет вид:

$$J = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{m}} \left\{ x_1 + \sum_{i=1}^6 \left[\frac{m_i}{x_{i+1}} + m_{i+6} x_{i+7} \right] \right\}, \quad (2.60)$$

а систему ограничений (2.47) – (2.56) необходимо дополнить интервальными ограничениями:

$$m_{\min,i} \leq m_i \leq m_{\max,i}, \quad (2.61)$$

где $m_{\min,i}$ и $m_{\max,i}$ – минимальные и максимальные значения соответствующих коэффициентов.

Полученная задача (2.47-2.56, 2.60, 2.61) относится к классу задач условной оптимизации и применение градиентных или ньютоновских методов возможно только при использовании метода множителей Лагранжа. В результате мы получим сложную нелинейную многомерную функцию с большим числом варьируемых переменных. Проведённые численные эксперименты с применением подобных методов показали их низкую эффективность при решении данной задачи. Методы показали приемлемые результаты в случае, когда отклонения параметров искомых решений не превышало 10-15% от эталонных, синтезированных на стадии

проектирования. Поэтому, алгоритмы, созданные на базе таких методов, не могут быть использованы в контроллерах для синтеза траектории в реальном масштабе времени, так как вероятность получения адекватных траекторий с их помощью очень низкая для широких диапазонов изменения фазовых координат модуля ИЭМС.

2.8.2 Синтез траектории с использованием метода многомерных оболочек

Для решения задачи (2.46) – (2.56) можно воспользоваться ММО, описанным выше, основная идея которого заключается в следующем: если целевая функция является монотонной, а система ограничений образует замкнутую область, оптимальное решение следует искать на границе данной области. Задача (2.46) – (2.56) соответствует условиям данного метода, следовательно, необходимо построить данную область, анализируя ограничения (2.47)-(2.56). В предыдущих разделах подробно описан анализ экспоненциальных ограничений вида (2.52-2.54).

Предлагается выразить переменные x_{i+1} через x_1 , используя ограничения (2.52), для этого вводится замена $w_i = x_1 x_{i+1}$, тогда (2.52) примет вид:

$$e^{-w_i} = -\mu_i w_i + \sigma_i, \quad \sigma_i = \frac{\text{sign}(a_i) \delta_i}{a_i}, \quad \mu_i = \frac{\text{sign}(a_i) \delta_i T_h}{a_i x_1} - \frac{T_h}{x_1} e^{\frac{-x_1}{T_h}}, \quad \mu_i > 0, \quad \sigma_i > 0. \quad (2.62)$$

Тогда переменные x_{i+1} находятся из соотношения:

$$x_{i+1} = \frac{\sigma_i}{\mu_i(x_1) x_1} + \frac{1}{x_1} f^{-1} \left(-\frac{1}{\mu_i(x_1)} e^{-\frac{\sigma_i}{\mu_i(x_1)}} \right) = g_i(x_1), \quad (2.63)$$

$$\mu_i(x_1) > 0, \quad \mu_i(x_1) - \mu_i(x_1) \ln \mu_i(x_1) - \sigma_i < 0,$$

где f^1 – функция Ламберта.

Не трудно заметить, что переменные x_{i+7} могут быть выражены через $g(x_1)$, используя ограничения (2.53):

$$x_{i+7} = \frac{1}{\frac{1}{T_h} - g_i(x_1)} \ln \left(\frac{1}{T_h g_i(x_1)} \right) = h_i(x_1). \quad (2.64)$$

В результате выполненных преобразований исходная задача многомерной оптимизации с 13 переменными сводиться к задаче одномерного поиска при ограничениях:

$$k_1 T_h \leq x_1 \leq T_{\max}, \quad (2.65)$$

$$\varepsilon \leq g_i(x_1) \leq \frac{k_2}{T_h}, \quad (2.66)$$

$$h_i(x_1) \geq \varepsilon, \quad (2.67)$$

$$x_1 - h_i(x_1) \geq \varepsilon, \quad (2.68)$$

$$-\lambda_i^{\max} \leq \frac{-a_i}{T_h} g_i(x_1) \leq \lambda_i^{\max}, \quad (2.69)$$

$$-v_i^{\max} \leq \frac{-a_i}{T_h - \frac{1}{g_i(x_1)}} \left(e^{\frac{-h_i(x_1)}{T_h}} - e^{-h_i(x_1)g_i(x_1)} \right) \leq v_i^{\max}, \quad (2.70)$$

$$\Delta l_j(x_1) + l_{0j} \leq l_{\max j}, \quad (2.71)$$

$$-\dot{l}_{\max j} \leq \Delta \dot{l}_j(x_1) \leq \dot{l}_{\max j}, \quad (2.72)$$

$$\mu_i(x_1) \geq \varepsilon, \quad (2.73)$$

$$\mu_i(x_1) - \mu_i(x_1) \ln \mu_i(x_1) - \sigma_i \leq \varepsilon, \quad (2.74)$$

$$\sigma_i(x_1) \geq \varepsilon, \quad (2.75)$$

ε - малая положительная величина, определяющая точность вычислений.

Каждое ограничение из (2.65)-(2.75) представляет собой неравенство от одной переменной x_1 . Эти неравенства могут решаться независимо. Решением каждого неравенства является система интервалов для x_1 , границы которых в общем случае определяются сложными нелинейными выражениями. Решением задачи оптимизации является наименьшая граница одного из интервалов, при условии, что существует интервал или число, удовлетворяющие системе ограничений (2.65)-(2.75). Численная реализация метода поиска переменной x_1 имеет высокий коэффициент распараллеливания вычислений и на стадии проектирования или в высокопроизводительном контроллере может решаться в исходном виде.

Для быстрых вычислений, границы интервалов могут быть аппроксимированы на интервале $k_1 T_h \leq x_1 \leq T_{max}$ дробями, показатели полиномов числителей и знаменателей которых не превышают 4. В таком случае ограничения описываются адекватными системами линейных неравенств от одной переменной x_1 . Такая задача была описана как интервальная и свелась к нахождению верхней и нижней оценок для x_1 . Решением задачи максимального быстродействия будет нижняя оценка для x_1 .

В отличие от методов, описанных в разделе 2.8.1, предложенный алгоритм не использует операцию дифференцирования, имеет высокий коэффициент распараллеливания и находит решение или выявляет его отсутствие за прогнозируемое число шагов во всём рабочем диапазоне изменяемых параметров и состояния модуля ИЭМС. При численных экспериментах алгоритм находил решение или доказывал их отсутствие в 95% случаев.

2.8.3 Синтез траектории с использованием метода, основанного на построении границ области допустимых решений

Численно-аналитические исследования задачи (2.46, 2.65-2.75) с помощью ММО позволили создать более простой алгоритм поиска решения, заключающийся в том, что можно выделить ряд критических точек границ области допустимых решений, которые могут быть решением задачи. Данный алгоритм может быть использован при поиске траектории вблизи полученной с помощью алгоритма из предыдущего раздела.

Алгоритм поиска постоянных времени T_i и времени переходного процесса $T_{п.п.}$:

1. Начало.
2. Ввод исходных данных.

3. Рассчитываются нижние границы значений постоянных времени по быстродействию привода: $T_{i,1} = \frac{T_h}{k_2}$.

4. Рассчитываются нижние границы значений постоянных времени по максимальным ускорениям: $T_{i,2} = \frac{|a_i|}{\lambda_i^{\max} T_h}$.

5. Рассчитываются нижние границы значений постоянных времени по максимальным скоростям: $T_{i,3} = \ln \left(\frac{v_i^{\max} T_h}{|a_i|} \right) \frac{T_h}{f^{-1} \left(\ln \left(\frac{v_i^{\max} T_h}{|a_i|} \right) \frac{v_i^{\max} T_h}{|a_i|} \right)}$.

6. Рассчитываются максимальные значения соответствующих постоянных времени: $T_{i,4} = \max(T_{i,1}, T_{i,2}, T_{i,3})$.

7. Расчёт максимального времени переходного процесса с использованием ограничений (2.52) при значениях постоянных времени $T_{i,4}$ и ограничений (2.71, 2.72), определяемых из модели механики модуля ИЭМС.

8. Расчёт итоговых постоянных времени:

$$T_{i,5} = \left(\frac{\sigma_i^*}{\mu_i^* T_{п.п.}} + \frac{1}{T_{п.п.}} f^{-1} \left(-\exp \left(-\frac{\sigma_i^*}{\mu_i^*} \right) \frac{1}{\mu_i^*} \right) \right)^{-1}, \quad \sigma_i^* = \frac{\delta_i}{|a_i|}, \quad \mu_i^* = \frac{\delta_i T_h}{|a_i| T_{п.п.}} - \frac{T_h}{T_{п.п.}} e^{\frac{-T_{п.п.}}{T_h}}.$$

9. Проверка ограничений (2.65)-(2.75). Если все выполняются, то решение найдено, значение времени переходного процесса определено в пункте 7, а постоянные времени в пункте 8. Если хотя бы одно ограничение не выполняется, то задача не имеет решения.

10. Конец.

Несмотря на отказ от чистого одномерного поиска и возврат к многомерной оптимизации, предложенный алгоритм в пунктах 3-6, 8 имеет простые аналитические формулы для расчёта искомых переменных, что повышает скорость и точность вычислений.

2.8.4 Результаты численного расчёта оптимальной траектории с использованием метода, основанного на построении границ области допустимых решений

В качестве примера ИЭМС выбран гексапод, устройство, состоящее из двух платформ, верхняя платформа перемещается по шести степеням свободы шестью актуаторами. Каждый актуатор представляет собой электромеханический двигатель линейного перемещения, который крепится к нижней и верхней платформе с помощью шарниров.

Характеристики гексапода:

масса – 1.7 кг;

постоянная времени гексапода – 0.5 с;

высота – 100 мм;

диаметр – 120 мм;

максимальное по модулю удлинение штоков актуаторов – 15 мм;

максимальная по модулю скорость перемещения актуатора – 4 мм/с;

погрешность позиционирования по линейным координатам – 0.02 мм;

погрешность позиционирования по угловым координатам – 0.003 градуса.

Модель кинематики, используемая для расчета времени переходного процесса в пункте 7 раздела 2.83, подробно описана в главе 3.

Исходные параметры численного расчёта №1:

Начальное положение гексапода: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\beta = 0$, $\theta = 0$, $\alpha = 0$, где x , y , z – линейные координаты, β , θ , α – угловые координаты относительно осей x , y , z соответственно.

Конечное положение гексапода: $x = 5$ мм, $y = -2.5$ мм, $z = 2.5$ мм, $\beta = 1.5^\circ$, $\theta = -1^\circ$, $\alpha = -5^\circ$.

Максимальные по модулю скорости перемещений по линейным координатам – 2 мм/с.

Максимальные по модулю скорости перемещений по угловым координатам – 1.7 °/с.

Максимальные по модулю ускорения по линейным координатам – 20 мм/с².

Максимальные по модулю ускорения по угловым координатам – 8.5 градуса/с².

Таблица 2.1. Данные численного расчёта примера №1

Величина	Максимальное по модулю значение	Ограничение
V_x	1.37	2.00
V_y	0.62	2.00
V_z	0.62	2.00
Ω_x	0.45	1.70
Ω_y	0.29	1.70
Ω_z	1.70*	1.70
λ_x	4.14	20.00
λ_y	1.81	20.00
λ_z	1.81	20.00
λ_β	1.40	8.5
λ_θ	0.87	8.5
λ_α	5.57	8.5
L_1	2.10	15.00
L_2	5.34	15.00
L_3	13.03	15.00
L_4	4.13	15.00
L_5	1.65	15.00
L_6	3.22	15.00
V_1	0.9633	4.00
V_2	1.71	4.00

V_3	3.92*	4.00
V_4	1.61	4.00
V_5	0.80	4.00
V_6	1.17	4.00

где V_x , V_y , V_z – скорости линейных перемещений по соответствующим координатам; Ω_x , Ω_y , Ω_z – скорости угловых перемещений по соответствующим координатам; λ_x , λ_y , λ_z – ускорения линейных перемещений по соответствующим координатам; λ_β , λ_θ , λ_α – ускорения угловых перемещений по соответствующим координатам; $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ – удлинения соответствующих актуаторов; $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ – скорости удлинения соответствующих актуаторов. Символом * помечены величины, значения которых приближаются к ограничениям или равны им.

Время переходного процесса – 13.9 с.

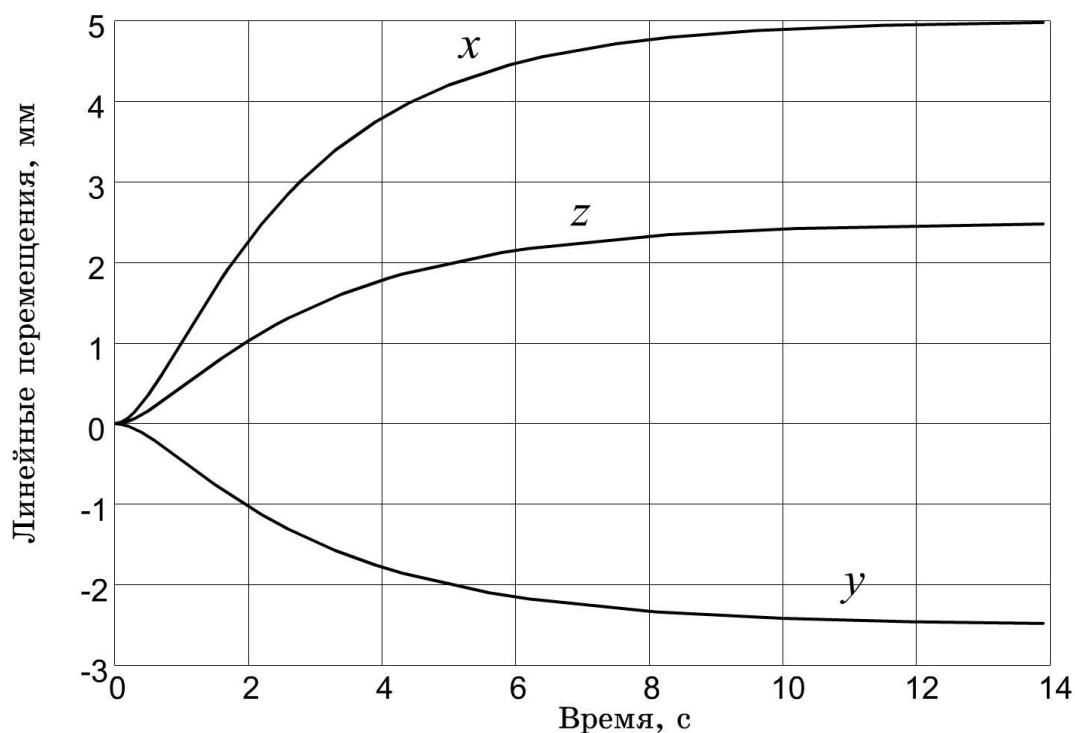


Рис. 2.1. Результаты моделирования переходного процесса системы управления гексапода по линейным координатам

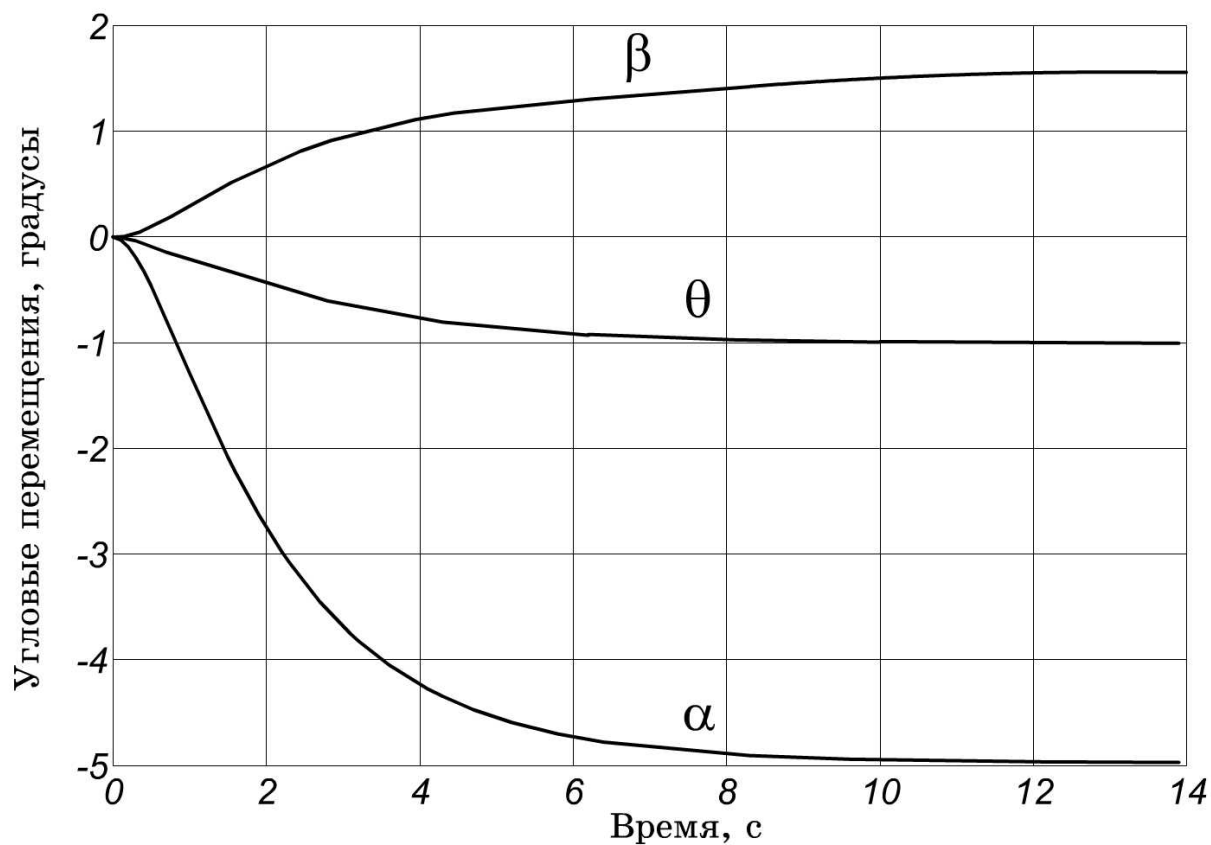


Рис. 2.2. Результаты моделирования переходного процесса системы управления гексапода по угловым координатам

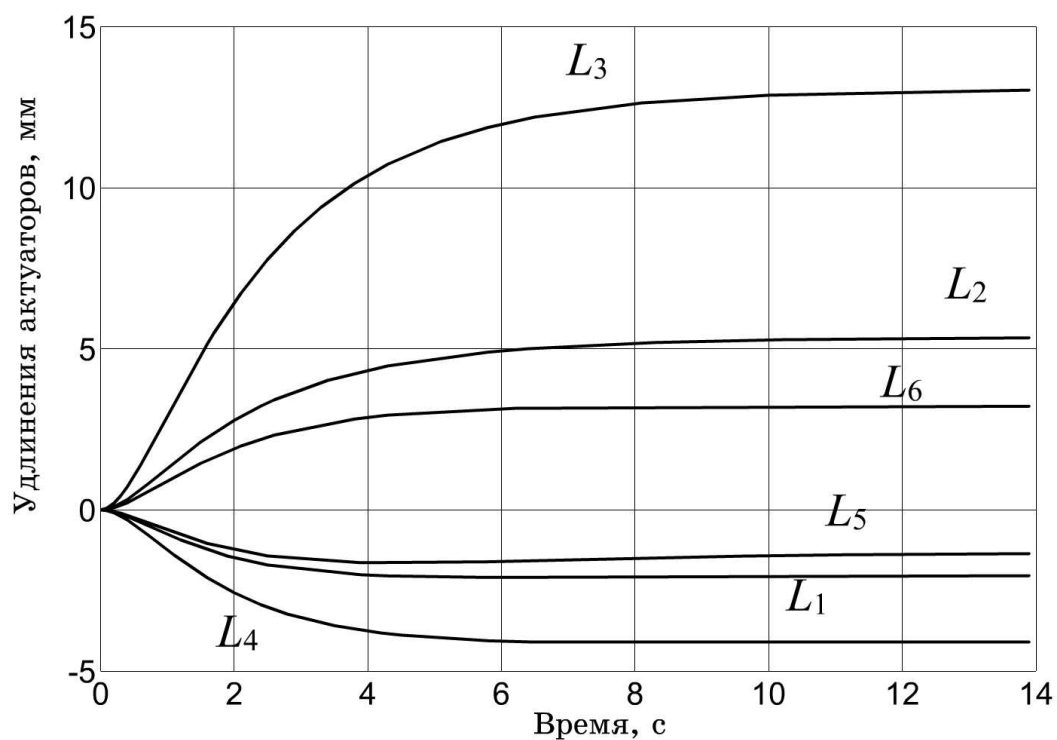


Рис. 2.3. Результаты моделирования переходного процесса системы управления гексапода по удлинениям актуаторов

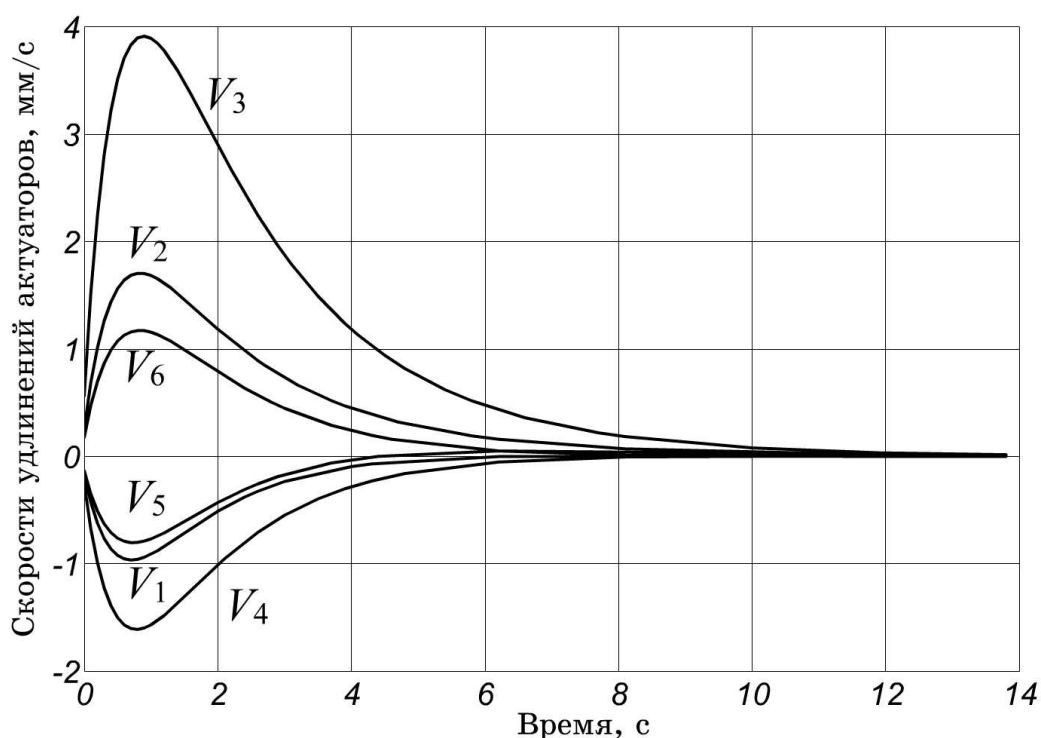


Рис. 2.4. Результаты моделирования переходного процесса системы управления гексапода по скоростям удлинений актуаторов

Исходные параметры численного расчёта №2:

Начальное положение гексапода: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\beta = 0$, $\theta = 0$, $\alpha = 0$, где x, y, z – линейные координаты, β, θ, α – угловые координаты относительно осей x, y, z соответственно.

Конечное положение гексапода: $x = 2$ мм, $y = -2.5$ мм, $z = -5$ мм, $\beta = 1^\circ$, $\theta = -1^\circ$, $\alpha = -2^\circ$.

Максимальные по модулю скорости перемещений по линейным координатам – 2 мм/с.

Максимальные по модулю скорости перемещений по угловым координатам – 1.7 °/с.

Максимальные по модулю ускорения по линейным координатам – 20 мм/с².

Максимальные по модулю ускорения по угловым координатам – 8.5 градуса/с².

Таблица 2.2. Данные численного расчёта примера №2

Величина	Максимальное по модулю значение	Ограничение
V_x	0.71	2.00
V_y	0.91	2.00
V_z	2.00*	2.00
Ω_x	0.41	1.70
Ω_y	0.41	1.70
Ω_z	0.89	1.70
λ_x	2.35	20.00
λ_y	3.08	20.00
λ_z	7.06	20.00
λ_β	1.49	8.5
λ_θ	1.49	8.5
λ_α	3.34	8.5
L_1	3.05	15.00
L_2	4.09	15.00
L_3	1.73	15.00
L_4	9.09	15.00
L_5	5.04	15.00
L_6	1.20	15.00
V_1	1.33	4.00
V_2	1.47	4.00
V_3	0.73	4.00
V_4	3.67	4.00
V_5	2.19	4.00
V_6	0.50	4.00

Время переходного процесса – 8.45 с.

Исходные параметры численного расчёта №3:

Начальное положение гексапода: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\beta = 0$, $\theta = 0$, $\alpha = 0$, где x, y, z – линейные координаты, β, θ, α – угловые координаты относительно осей x, y, z соответственно.

Конечное положение гексапода: $x = 2$ мм, $y = -2.5$ мм, $z = -5$ мм, $\beta = 1^\circ$, $\theta = -1^\circ$, $\alpha = -2^\circ$.

Максимальные по модулю скорости перемещений по линейным координатам – 2 мм/с.

Максимальные по модулю скорости перемещений по угловым координатам – 1.7 °/с.

Максимальные по модулю ускорения по линейным координатам – 5 мм/с².

Максимальные по модулю ускорения по угловым координатам – 3 градуса/с².

Таблица 2.3. Данные численного расчёта примера №3

Величина	Максимальное по модулю значение	Ограничение
V_x	0.55	2.00
V_y	0.71	2.00
V_z	1.57	2.00
Ω_x	0.33	1.70
Ω_y	0.33	1.70
Ω_z	0.71	1.70
λ_x	1.67	5.00
λ_y	2.18	5.00
λ_z	5.00*	5.00
λ_β	1.05	3.00
λ_θ	1.05	3.00
λ_α	2.36	3.00

L_1	3.05	15.00
L_2	4.09	15.00
L_3	1.73	15.00
L_4	9.09	15.00
L_5	5.04	15.00
L_6	1.20	15.00
V_1	1.05	4.00
V_2	1.15	4.00
V_3	0.58	4.00
V_4	2.90	4.00
V_5	1.74	4.00
V_6	0.39	4.00

Время переходного процесса – 11.62 с.

Выводы

Разработан новый метод нелинейного программирования «Метод многомерных оболочек», позволяющий решать задачи с большим количеством варьируемых переменных и ограничений.

Отличительной особенностью этого метода является решение задачи без перехода к задаче безусловной оптимизации. Метод использует как необходимые, так и достаточные условия оптимальности для целевых функций, имеющих вид метрик. Показано, если единственный минимум (максимум) метрики находится вне области допустимых значений, образованной ограничениями, тогда решение задачи будет находиться на границе области допустимых решений. В данном случае, задача может иметь несколько решений, которые будут соответствовать одинаковым минимальным (максимальным) значениям целевой функции и все эти решения могут быть получены с помощью ММО.

Основой ММО является построение области допустимых решений, путём анализа ограничений произвольного вида и их аппроксимации

кусочно-полиномиальными ограничениями или рациональными дробями, что позволяет свести исходную задачу к набору взаимосвязанных подзадач с линейными ограничениями, формирующими выпуклые многомерные оболочки, что существенно сужает область поиска.

Предложенный ММО при нахождении оптимальных значений не использует операцию дифференцирования, что позволяет использовать его при анализе стохастических и интервальных данных.

Показана эффективность ММО и метода, основанного на нём, для задачи синтеза оптимальных программных траекторий движения модулей ИЭМС с учётом ограничений. Метод синтеза таких траекторий продемонстрирован на примере планировщика движений для модуля ИЭМС с параллельной кинематической схемой (n -пода).

Метод является универсальным и может быть использован для синтеза оптимальных траекторий как самих модулей ИЭМС, так и систем, состоящих из таких модулей. В данном примере, в качестве объекта управления используется n -под, модель которого и ограничения на характеристики задаются выражениями (2.71, 2.72). Данная постановка может быть использована и для синтеза систем, состоящих из модулей ИЭМС при замене исходной модели n -пода на упрощённую модель механики всей системы.

Предложенные алгоритмы имеют высокий коэффициент распараллеливания и находят решение за прогнозируемое число шагов во всём рабочем диапазоне изменяемых параметров и состояния модуля ИЭМС.

Глава 3. Модели динамики базового блока ИЭМС

Глава посвящена разработке моделей базовых блоков ИЭМС с исполнительными механизмами параллельной структуры. Анализируя виды механизмов параллельной структуры [5-15,109-111], можно сделать вывод, что наиболее универсальным элементом является адаптивная платформа, перемещаемая пакетами актуаторов. Создание моделей адаптивных платформ ИЭМС на подвижном основании, перемещаемых пакетами актуаторов, с учетом изменения линии действия этих актуаторов, работающих в режиме слежения является актуальной задачей, которая играет важную роль при расчёте параметров регуляторов и оценивании неизмеряемых компонентов вектора состояния ИЭМС.

Одним из основных режимов работы адаптивной платформы является слежение, для которого характерны плавные траектории перемещения, что позволяет при рассмотрении системы в малых отклонениях перейти к нестационарным линеаризованным моделям динамики таких платформ.

В работах [8,112-115] подробно рассматривались кинематическая и динамическая модели адаптивной платформы для случая 6 и n актуаторов. Для этого был рассмотрен базовый блок подобных систем, состоящий из двух подвижных платформ (основания и адаптивной платформы (АП)), соединенных друг с другом электромеханическими актуаторами. Каждый актуатор состоит из штанги с линейным электроприводом, позволяющим изменять ее длину. Каждый актуатор соединен с нижней и верхней платформами двумя шарнирами, позволяющими толкателям свободно вращаться по углам.

Введём основные определения и формулы кинематической модели согласно [8]. Основание перемещается по трем линейным (x_0, y_0, z_0) и трем угловым ($\beta_0, \theta_0, \alpha_0$) координатам относительно некоторой базовой системы координат (БСК), где β_0 – поворот относительно оси x , θ_0 – поворот

относительно оси y , α_0 – угол поворота относительно оси z . Адаптивная платформа актуаторами перемещается по трем линейным (x, y, z) и трем угловым (β, θ, α) координатам относительно основания, где β – поворот относительно оси x , θ – поворот относительно оси y , α – угол поворота относительно оси z .

Введем БСК $E_0 = (\mathbf{o}_0, [\mathbf{e}_0])$, где $\mathbf{o}_0$ – начало координат БСК; $[\mathbf{e}_0]$ – тройка базисных векторов (ортов) БСК (Рис. 3.1). Для углов, векторов и матриц вращения нижний индекс – это номер системы координат (СК), верхний индекс является номером СК, относительно которой определяется угловое и линейное положения, второй верхний индекс обозначает номер СК, в которой рассчитываются координаты векторов. Матрицы вращения $\mathbf{c}_j^i$ имеют вид $\mathbf{c}_j^i(\varphi_j^i) = \mathbf{c}_1(\beta_j^i) \cdot \mathbf{c}_2(\theta_j^i) \cdot \mathbf{c}_3(\alpha_j^i)$, где $\varphi_j^i = [\beta_j^i \ \theta_j^i \ \alpha_j^i]^T$, а β_j^i , θ_j^i и α_j^i – углы простейших вращений относительно осей x, y и z соответственно; матрицы простейших вращений имеют вид:

$$\mathbf{c}_1(\beta_j^i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta_j^i) & -\sin(\beta_j^i) \\ 0 & \sin(\beta_j^i) & \cos(\beta_j^i) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_2(\theta_j^i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j^i) & 0 & \sin(\theta_j^i) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_j^i) & 0 & \cos(\theta_j^i) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c}_3(\alpha_j^i) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_j^i) & -\sin(\alpha_j^i) & 0 \\ \sin(\alpha_j^i) & \cos(\alpha_j^i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Введем связанную систему координат с основанием (ОСН) СК ОСН $E_{1b} = (\mathbf{o}_{1b}, [\mathbf{e}_{1b}])$, где $\mathbf{o}_{1b}$ – начало координат СК ОСН, которое относительно БСК определяется координатным столбцом $\mathbf{r}_{1b}^{0,0}$; $[\mathbf{e}_{1b}]$ – тройка базисных векторов (ортов) СК ОСН, ориентация СК ОСН относительно БСК определяется углами простейших вращений φ_{1b}^0 .

Чтобы задать начальное положение АП, введем систему координат начального положения АП СК АП0 $E_{1c} = (\mathbf{o}_{1c}, [\mathbf{e}_{1c}])$, где $\mathbf{o}_{1c}$ – начало координат СК АП0, которое относительно СК ОСН определяется

координатным столбцом $\mathbf{r}_{lc}^{lb,lb}$; $[\mathbf{e}_{lc}]$ – тройка базисных векторов (ортов) СК АП0, ориентация СК АП0 относительно СК ОСН определяется углами простейших вращений ϕ_{lc}^{lb} .

Чтобы задать положение АП, введем связанную систему координат платформы СК АП $E_1 = (\mathbf{o}_1, [\mathbf{e}_1])$, где $\mathbf{o}_1$ – начало координат СК АП, которое относительно СК АП0 определяется координатным столбцом $\mathbf{r}_1^{lc,lc}$; $[\mathbf{e}_1]$ – тройка базисных векторов (ортов) СК АП, ориентация СК АП относительно СК АП0 определяется углами простейших вращений ϕ_1^{lc} . Положение СК АП относительно БСК описывается вектором $\mathbf{r}_1^0$, координатный столбец которого в БСК может быть вычислен по формуле $\mathbf{r}_1^{0,0} = \mathbf{r}_{lb}^{0,0} + \mathbf{c}_{lb}^0 [\mathbf{r}_{lc}^{lb,lb} + \mathbf{c}_{lc}^{lb} \mathbf{r}_1^{lc,lc}]$, а угловое положение характеризуется матрицей вращения $\mathbf{c}_1^0 = \mathbf{c}_{lb}^0 \mathbf{c}_{lc}^{lb} \mathbf{c}_1^{lc}$, где $\mathbf{c}_i^j$ – матрицы вращения от соответствующих углов ϕ_i^j .

Определим координаты крепления шарниров на основании в СК ОСН: $\mathbf{r}_{lbj1}^{lb,lb}, \mathbf{r}_{lbj2}^{lb,lb}, \dots, \mathbf{r}_{lbji}^{lb,lb}, \dots, \mathbf{r}_{lbjn}^{lb,lb}$, где нижний индекс обозначает номер шарнира на основании. Аналогично введем координаты крепления шарниров на адаптивной платформе в СК АП: $\mathbf{r}_{lj1}^{1,1}, \mathbf{r}_{lj2}^{1,1}, \dots, \mathbf{r}_{lji}^{1,1}, \dots, \mathbf{r}_{ljn}^{1,1}$, где нижний индекс обозначает номер шарнира на АП.

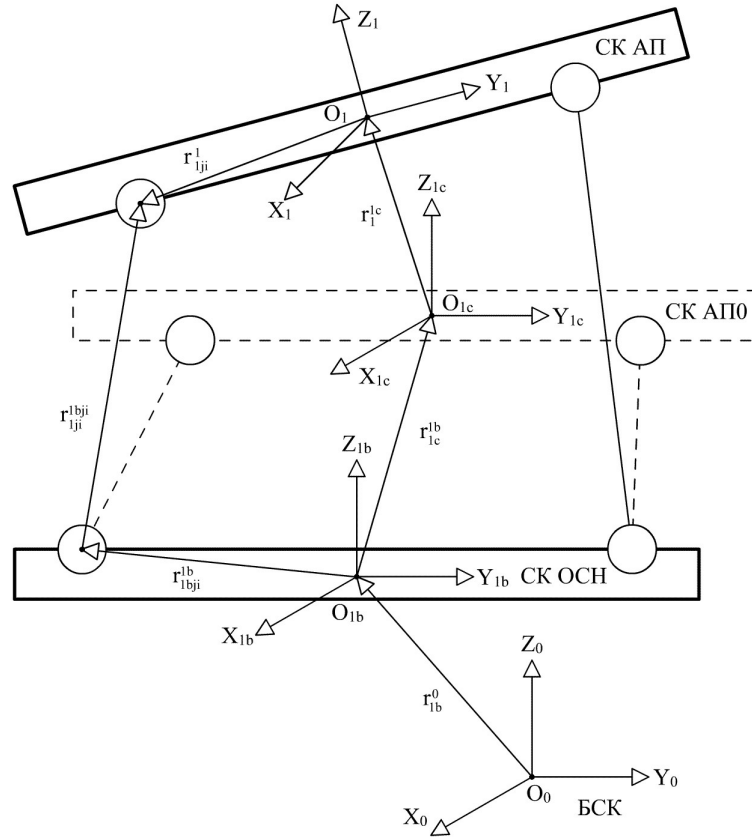


Рис.3.1. Системы координат базового блока.

Текущие длины актуаторов могут быть определены как расстояния между соответствующими шарнирами основания и АП по формуле $l_{1ji}^{1bji} = |\mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b}| = |\mathbf{r}_{1ji}^{1b,1b} - \mathbf{r}_{1bji}^{1b,1b}|$, $i = 1..n$, где $\mathbf{r}_{1ji}^{1b,1b}$ – координаты точки крепления шарниров на верхней платформе в СК ОСН, которые рассчитываются следующим образом: $\mathbf{r}_{1ji}^{1b,1b} = \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} [\mathbf{r}_1^{1c,1c} + \mathbf{c}_1^{1c} \mathbf{r}_{1ji}^{1,1}]$, $i = 1..n$. В итоге выражение для текущих длин примет вид:

$$l_{1ji}^{1bji} = |\mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} [\mathbf{r}_1^{1c,1c} + \mathbf{c}_1^{1c} \mathbf{r}_{1ji}^{1,1}] - \mathbf{r}_{1bji}^{1b,1b}| = l_{0i} + \Delta l_{ai}, \quad i = 1..n, \quad (3.1)$$

где l_{0i} – начальные значения длин актуаторов, $l_{0i} = |\mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} - \mathbf{r}_{1bji}^{1b,1b}|$; Δl_{ai} – текущие удлинения штоков актуаторов; $\Delta l_{ai} = \tau_i + \frac{\psi_i}{I_i}$, τ_i – деформация актуатора, ψ_i – угол поворота ротора двигателя актуатора, I_i – передаточное число редуктора.

Продифференцировав $\mathbf{r}_1^{0,0}$ и $\mathbf{c}_1^0$, учтя свойства кососимметрических матриц, получим выражения для линейных $\mathbf{v}_1^{0,0}$ и угловых $\boldsymbol{\omega}_1^{0,0}$ скоростей АП в БСК:

$$\mathbf{v}_1^{0,0} = \mathbf{v}_{1b}^{0,0} + \mathbf{c}_{1b}^0 \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1b} + \mathbf{c}_{1b}^0 \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{v}_1^{1c,1c}, \quad \boldsymbol{\omega}_1^{0,0} = \mathbf{c}_{1b}^0 \boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1b} + \mathbf{c}_1^0 \boldsymbol{\omega}_1^{1c,1}, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{v}_{1b}^{0,0}$ – скорость ОСН в БСК; $\boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1b}$ – угловая скорость движения ОСН относительно БСК в СК ОСН; $\langle \dots \rangle$ – кососимметрическая матрица вида

$$\langle [x, y, z]^T \rangle = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_1^{1c,1c} – \text{линейная скорость ОСН в СК АП0; } \boldsymbol{\omega}_1^{1c,1} –$$

угловая скорость ОСН относительно СК АП0 в СК ОСН.

Угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1^{0,0}$, $\boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1b}$ и $\boldsymbol{\omega}_1^{1c,1}$ могут быть определены через скорости простейших вращений $\dot{\boldsymbol{\phi}}_1^0$, $\dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0$ и $\dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c}$:

$$\boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1b} = \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0; \quad \boldsymbol{\omega}_1^{1c,1} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c}; \quad \boldsymbol{\omega}_1^{0,0} = \mathbf{c}_1^0 \boldsymbol{\varepsilon}_1^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^0,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_j^i$ – матрицы Эйлера вида $\boldsymbol{\varepsilon}_j^i = \left[\mathbf{c}_3^T(\alpha_j^i) \mathbf{c}_2^T(\theta_j^i) \mathbf{e}_x \mid \mathbf{c}_3^T(\alpha_j^i) \mathbf{e}_y \mid \mathbf{e}_z \right]$ от соответствующих углов, $\mathbf{e}_x = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{e}_y = [0 \ 1 \ 0]^T$, $\mathbf{e}_z = [0 \ 0 \ 1]^T$.

Получим скорости изменения длин актуаторов $\dot{l}_{1ji}^{1bji}$, продифференцировав (3.1):

$$\dot{l}_{1ji}^{1bji} = \frac{\mathbf{v}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b}}{l_{1ji}^{1bji}} = v_{ai} + \dot{\tau}_i, \quad i = 1..n, \quad (3.3)$$

где v_{ai} – скорости удлинения штоков актуаторов, которые в случае винтовой передачи могут быть определены по формуле $v_{ai} = \frac{\Omega_i}{I_i}$, Ω_i – угловая скорость двигателя; $\dot{\tau}_i$ – скорость деформации актуатора; $\mathbf{v}_{1ji}^{1bji,1b} = \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{v}_1^{1c,1c} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{c}_1^{1c} \left\langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \right\rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c}$ – скорость относительного поступательного движения шарниров одного актуатора в СК ОСН.

Уравнения динамики платформы имеют вид [8]:

$$\Theta \dot{V}_1^{0,1} + \Phi \Theta V_1^{0,1} = \Xi, \quad (3.4)$$

$$V_1^{0,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{0,1} \\ \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{M}_1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle & 0 \\ \langle \mathbf{v}_1^{0,1} \rangle & \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m}_1 = \text{diag}(m_1 \quad m_1 \quad m_1),$$

где Θ - матрица инерции АП; $\mathbf{v}_1^{0,1}$ - линейные скорости движения АП относительно БСК в проекциях на СК АП $\mathbf{v}_1^{0,1} = \mathbf{c}_1^{0,T} \mathbf{v}_{1b}^{0,0} + \mathbf{c}_1^{0,T} \mathbf{c}_{1b}^0 \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1b} + \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{v}_1^{1c,1c}$; $\boldsymbol{\omega}_1^{0,1}$ - угловые скорости движения АП относительно БСК в проекциях на СК АП $\boldsymbol{\omega}_1^{0,1} = \mathbf{c}_1^{0,T} \mathbf{c}_{1b}^0 \boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1b} + \boldsymbol{\omega}_1^{1c,1}$; $V_1^{0,1}$ - вектор скоростей АП; $\mathbf{F}_1$ - суммарный вектор сил, действующих на АП в СК АП; $\mathbf{M}_1$ - суммарный вектор моментов, действующих на АП в СК АП; Ξ - суммарный вектор сил и моментов, действующих на АП в СК АП; m_1 - масса АП; $\mathbf{I}_1$ - моменты инерции АП.

С учётом кинематической схемы (Рис. 3.1.) адаптивной платформы вектор скорости $V_1^{0,1}$ может быть определен следующим образом:

$$V_1^{0,1} = \mathbf{M}_1^{1c} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} + \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{M}_1^{1c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^{1c,T} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_1^{1c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^{1c} & 0 \\ \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_1^{1c} & \mathbf{c}_1^{1c} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{1c}^{1b} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1c}^{1b} & 0 \\ \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b} & \mathbf{c}_{1c}^{1b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{1b}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_1^{1c} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \\ \boldsymbol{\varphi}_1^{1c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_{1b}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1b}^{0,0} \\ \boldsymbol{\varphi}_{1b}^0 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{M}_1^{1c}$ и $\mathbf{M}_{1b}^0$ - матрицы связи скоростей платформ и обобщённых скоростей; $\mathbf{L}_1^{1c}$ и $\mathbf{L}_{1c}^{1b}$ - матрицы преобразования систем координат; $\mathbf{q}_1^{1c}$ - обобщённые координаты АП; $\mathbf{q}_{1b}^0$ - обобщённые координаты основания.

Чтобы определить ускорения $\dot{V}_1^{0,1}$, продифференцируем (3.5):

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^{0,1} &= \mathbf{M}_1^{1c} \ddot{\mathbf{q}}_1^{1c} + \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 + \dot{\mathbf{M}}_1^{1c} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} + \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \dot{\mathbf{M}}_{1b}^0 \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0 + \dot{\mathbf{L}}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0 = \\ &= \mathbf{M}_1^{1c} \ddot{\mathbf{q}}_1^{1c} + \dot{\mathbf{M}}_1^{1c} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} + \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 + \left[\Lambda_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \dot{\mathbf{M}}_{1b}^0 + \Phi_1^{1c,1,T} \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \right] \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\dot{\mathbf{L}}_1^{1c} = \mathbf{L}_1^{1c} \Phi_1^{1c,1}$. Подставив (3.5) и (3.6) в (3.4) получим:

$$\begin{aligned}
& \Theta_1^1 \mathbf{M}_1^{1c} \ddot{\mathbf{q}}_1^{1c} + \left[\Theta_1^1 \dot{\mathbf{M}}_1^{1c} + \Phi_1^{0,1} \Theta_1^1 \mathbf{M}_1^{1c} \right] \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} = \\
& = \Xi_1^1 - \Theta_1^1 \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 - \\
& - \left[\Phi_1^{0,1} \Theta_1^1 \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 + \Theta_1^1 \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \dot{\mathbf{M}}_{1b}^0 + \Theta_1^1 \Phi_1^{1c,1,T} \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \right] \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Умножив (3.7) на матрицу $\mathbf{M}_1^{1c,T}$ перейдем к обобщенным силам:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}_1^{1c,T} \Theta_1^1 \mathbf{M}_1^{1c} \ddot{\mathbf{q}}_1^{1c} + \mathbf{M}_1^{1c,T} \left[\Theta_1^1 \dot{\mathbf{M}}_1^{1c} + \Phi_1^{0,1} \Theta_1^1 \mathbf{M}_1^{1c} \right] \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} = \\
& = \mathbf{M}_1^{1c,T} \Xi_1^1 - \mathbf{M}_1^{1c,T} \Theta_1^1 \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 - \\
& - \mathbf{M}_1^{1c,T} \left[\Phi_1^{0,1} \Theta_1^1 \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 + \Theta_1^1 \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \dot{\mathbf{M}}_{1b}^0 + \Theta_1^1 \Phi_1^{1c,1,T} \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \right] \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Введя новые обозначения, перейдем к более компактной записи:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}_1^{1c}) \ddot{\mathbf{q}}_1^{1c} + \mathbf{B}(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0) \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} = \mathbf{Q}_\xi(\theta_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \mathbf{u}, \mathbf{p}) + \mathbf{Q}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0, \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0), \tag{3.9}$$

где $\mathbf{u} = [\psi_1, \dots, \psi_n, \Omega_1, \dots, \Omega_n]^T$ - входные параметры в модель платформы от моделей электроприводов, $\mathbf{p}$ - входные параметры в модель платформы от моделей внешних воздействий,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{q}_1^{1c}) &= \mathbf{M}_1^{1c,T} \Theta_1^1 \mathbf{M}_1^{1c}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0) = \mathbf{M}_1^{1c,T} \left[\Theta_1^1 \dot{\mathbf{M}}_1^{1c} + \Phi_1^{0,1} \Theta_1^1 \mathbf{M}_1^{1c} \right], \\
\mathbf{Q}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0, \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0) &= -\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 - \mathbf{B}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0) \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0, \\
\mathbf{Q}_\xi(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \mathbf{u}, \mathbf{p}) &= \mathbf{M}_1^{1c,T} \Xi_1^1, \quad \mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) = \mathbf{M}_1^{1c,T} \Theta_1^1 \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0, \\
\mathbf{B}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0) &= \mathbf{M}_1^{1c,T} \left[\Theta_1^1 \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \dot{\mathbf{M}}_{1b}^0 + \Theta_1^1 \Phi_1^{1c,1,T} \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 + \Phi_1^{0,1} \Theta_1^1 \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \right].
\end{aligned}$$

Выходными переменными модели (3.9) для задачи (2.46) и (2.65-2.75) будут текущие удлинения штоков актуаторов Δl_{ai} (3.1) и скорости изменения длин актуаторов $\dot{l}_{1ji}^{1bji}$ (3.3). Входными переменными будут желаемые перемещения платформы $\mathbf{q}_1^{1c}$ как функции от времени переходного процесса.

3.1. Линеаризованные уравнения динамики подвижной платформы с n актуаторами

Модель (3.9) очень трудоёмка в вычислительном плане и может быть использована для решения задачи (2.46) и (2.65-2.75) только на стадии проектирования, либо в контроллере реального времени необходимо использовать только кинематическую модель (3.1-3.3). Учёт динамики

возможен использованием семейства нестационарных линеаризованных и редуцированных моделей, полученных из (3.9) в различных стационарных точках опорной траектории. В качестве опорных траекторий выбираются гладкие, что позволяет проводить линеаризацию разложением в ряды при малом отклонении от стационарной точки.

Линеаризуем уравнение (3.9) в стационарной точке $\mathbf{X}_{fix} = [\mathbf{q}_{1,fix}^{1c}; \dot{\mathbf{q}}_{1,fix}^{1c}; \ddot{\mathbf{q}}_{1,fix}^{1c}; \mathbf{q}_{1b,fix}^0; \dot{\mathbf{q}}_{1b,fix}^0; \ddot{\mathbf{q}}_{1b,fix}^0; \mathbf{u}_{fix}; \mathbf{p}_{fix}]$ путём разложения в ряд Тейлора [106].

Линеаризуем первое слагаемое:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}_1^{1c})\ddot{\mathbf{q}}_1^{1c} \approx \mathbf{A}(\mathbf{q}_{1,fix}^{1c})\ddot{\mathbf{q}}_{1,fix}^{1c} + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{A}(\mathbf{q}_1^{1c})\ddot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{q}_1^{1c} + \mathbf{J}_{\ddot{\mathbf{q}}_1^{1c}}(\mathbf{A}(\mathbf{q}_1^{1c})\ddot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \ddot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \quad (3.10)$$

которое в случае совпадения центра инерции с началом координат связанной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{q}_1^{1c})\ddot{\mathbf{q}}_1^{1c} &= \mathbf{M}_1^{1c,T} \boldsymbol{\Theta}_1^1 \mathbf{M}_1^{1c} \ddot{\mathbf{q}}_1^{1c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^{1c} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^{1c,T} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \ddot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

тогда первая вариация от (3.11) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{A}(\mathbf{q}_1^{1c})\ddot{\mathbf{q}}_1^{1c}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \delta \ddot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} & 0 \\ 0 & \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \end{bmatrix} \delta \ddot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c}$ вычисляется как:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} &= \boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c} \delta \beta_1^{1c} + \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c} \delta \theta_1^{1c} + \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c} \delta \alpha_1^{1c}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c} = 0, \\ \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c} &= \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_1^{1c}) \sin(\theta_1^{1c}) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_1^{1c}) \cos(\theta_1^{1c}) & 0 & 0 \\ \cos(\theta_1^{1c}) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c} = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1^{1c}) \cos(\theta_1^{1c}) & \cos(\alpha_1^{1c}) & 0 \\ -\cos(\alpha_1^{1c}) \cos(\theta_1^{1c}) & -\sin(\alpha_1^{1c}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

С учетом (3.13) вычислим выражение:

$$\begin{aligned}
\delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c}) \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} &= \boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c} \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \delta \beta_1^{1c} + \left[\boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c} \right] \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \delta \theta_1^{1c} + \\
&+ \left[\boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c} \right] \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \delta \alpha_1^{1c} = \gamma_1 \delta \boldsymbol{\phi}_1^{1c}, \\
\gamma_1 &= \left[\boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c} \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c} \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c} \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \right].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Тогда Якобианы в (3.10) вычисляются по формулам:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}} \left(\mathbf{A}(\mathbf{q}_1^{1c}) \ddot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_1^{1c}} \left(\mathbf{A}(\mathbf{q}_1^{1c}) \ddot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Линеаризуем второе слагаемое в (3.9):

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0) \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} &\approx \mathbf{B}(\mathbf{q}_{1,fix}^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_{1,fix}^{1c}, \mathbf{q}_{1b,fix}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b,fix}^0) \dot{\mathbf{q}}_{1,fix}^{1c} + \\
&+ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}} \left(\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{q}_1^{1c} + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_1^{1c}} \left(\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{q}_{1b}^0 + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0} \left(\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

которое в случае совпадения центра инерции с началом координат связанной системы имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0) \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} &= \mathbf{M}_1^{1c,T} \boldsymbol{\Theta}_1^1 \dot{\mathbf{M}}_1^{1c} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} + \mathbf{M}_1^{1c,T} \boldsymbol{\Phi}_1^{0,1} \boldsymbol{\Theta}_1^1 \dot{\mathbf{M}}_1^{1c} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \langle \boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1c} \rangle & 0 \\ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

тогда первая вариация от (3.17) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\delta \left(\mathbf{B}(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0) \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right) &= \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \langle \delta \boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1c} \rangle & 0 \\ \mathbf{m}_1 \delta \left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \right) & \delta \left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} \right) + \delta \left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \langle \boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1c} \rangle & 0 \\ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \\ \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где $\delta \boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1c}$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1c} &= \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^0 + \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^0 = \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_2 \delta \boldsymbol{\phi}_1^0 + \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^0, \\
\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 &= \boldsymbol{\lambda}_{1b,1}^0 \delta \boldsymbol{\beta}_1^0 + \boldsymbol{\lambda}_{1b,2}^0 \delta \boldsymbol{\theta}_1^0 + \boldsymbol{\lambda}_{1b,3}^0 \delta \boldsymbol{\alpha}_1^0, \quad \boldsymbol{\gamma}_2 = \left[\boldsymbol{\lambda}_{1b,1}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^0 \mid \boldsymbol{\lambda}_{1b,2}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^0 \mid \boldsymbol{\lambda}_{1b,3}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^0 \right].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Вычислим слагаемое $\delta \left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \right)$ по формуле:

$$\begin{aligned}
\delta \left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \right) &= \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \delta \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \delta \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle = \\
&= \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \boldsymbol{\phi}_1^{1c} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \delta \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Так как $\mathbf{v}_1^{0,1c}$ описывается выражением (3.21):

$$\mathbf{v}_1^{0,1c} = \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} + \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 + \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c}, \quad (3.21)$$

то будет

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_1^{0,1c} = & \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\left\langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \boldsymbol{\gamma}_2 \right] \delta \boldsymbol{\phi}_{1b}^0 + \\ & + \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 + \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \delta \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} + \\ & + \left\langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} + \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Вычислим слагаемое $\delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c})$ по формуле:

$$\delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c}) = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c}, \quad (3.23)$$

где $\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c}$ определяется из уравнения $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} = \boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c} \dot{\beta}_1^{1c} + \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c} \dot{\theta}_1^{1c} + \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c} \dot{\alpha}_1^{1c}$ как:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} = & \delta \boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c} \dot{\beta}_1^{1c} + \delta \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c} \dot{\theta}_1^{1c} + \delta \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c} \dot{\alpha}_1^{1c} + \boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c} \delta \dot{\beta}_1^{1c} + \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c} \delta \dot{\theta}_1^{1c} + \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c} \delta \dot{\alpha}_1^{1c} = \\ = & \boldsymbol{\phi}_{1,1}^{1c} \delta \beta_1^{1c} + \boldsymbol{\phi}_{1,2}^{1c} \delta \theta_1^{1c} + \boldsymbol{\phi}_{1,3}^{1c} \delta \alpha_1^{1c} + \boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c} \delta \dot{\beta}_1^{1c} + \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c} \delta \dot{\theta}_1^{1c} + \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c} \delta \dot{\alpha}_1^{1c}, \\ & \boldsymbol{\phi}_{1,1}^{1c} = 0, \\ \boldsymbol{\phi}_{1,2}^{1c} = & \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_1^{1c}) \cos(\theta_1^{1c}) \dot{\theta}_1^{1c} + \sin(\alpha_1^{1c}) \sin(\theta_1^{1c}) \dot{\alpha}_1^{1c} & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_1^{1c}) \sin(\theta_1^{1c}) \dot{\theta}_1^{1c} + \cos(\alpha_1^{1c}) \sin(\theta_1^{1c}) \dot{\alpha}_1^{1c} & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_1^{1c}) \dot{\theta}_1^{1c} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\phi}_{1,3}^{1c} = & \begin{bmatrix} \sin(\alpha_1^{1c}) \sin(\theta_1^{1c}) \dot{\theta}_1^{1c} - \cos(\alpha_1^{1c}) \cos(\theta_1^{1c}) \dot{\alpha}_1^{1c} & -\sin(\alpha_1^{1c}) \dot{\alpha}_1^{1c} & 0 \\ \cos(\alpha_1^{1c}) \cos(\theta_1^{1c}) \dot{\theta}_1^{1c} + \sin(\alpha_1^{1c}) \sin(\theta_1^{1c}) \dot{\alpha}_1^{1c} & -\cos(\alpha_1^{1c}) \dot{\alpha}_1^{1c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Вычислим слагаемое $\delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c})$ по формуле:

$$\delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c}) = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \delta \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c}, \quad (3.25)$$

где $\delta \boldsymbol{\omega}_1^{0,1}$ определяется из уравнения $\boldsymbol{\omega}_1^{0,1} = \mathbf{c}_{1c}^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c}$ как:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} = & \delta \mathbf{c}_{1c}^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 + \mathbf{c}_{1c}^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 + \mathbf{c}_{1c}^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} = \\ = & \left[\left\langle \mathbf{c}_{1c}^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \boldsymbol{\gamma}_3 \right] \delta \boldsymbol{\phi}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} + \mathbf{c}_{1c}^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_2 \delta \boldsymbol{\phi}_{1b}^0 + \mathbf{c}_{1c}^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0, \\ & \boldsymbol{\gamma}_3 = \left[\boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

С учетом вышеизложенного первая вариация от (3.17) определяется выражением:

$$\delta(\mathbf{B}(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0) \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

где $\mathbf{b}_1$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{m}_1 \langle \delta \omega_{1b}^{0,1c} \rangle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} + \mathbf{m}_1 \langle \omega_{1b}^{0,1c} \rangle \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} = -\mathbf{m}_1 \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \delta \omega_{1b}^{0,1c} + \mathbf{m}_1 \langle \omega_{1b}^{0,1c} \rangle \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} = \\ &= \mathbf{m}_1 \langle \omega_{1b}^{0,1c} \rangle \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} - \mathbf{m}_1 \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \gamma_2 \delta \phi_{1b}^0 - \mathbf{m}_1 \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \phi_{1b}^0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Вектор $\mathbf{b}_2$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= \mathbf{m}_1 \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle) \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} + \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c}) \dot{\phi}_1^{1c} + \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \omega_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c}) \dot{\phi}_1^{1c} + \\ &+ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} + [\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \omega_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c}] \delta \dot{\phi}_1^{1c}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где слагаемое $\mathbf{m}_1 \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle) \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c}$ находится как:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle) \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} &= \mathbf{m}_1 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} - \\ &- \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \phi_1^{1c} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \delta \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} = \\ &= \mathbf{m}_1 \gamma_4 \delta \phi_1^{1c} + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \phi_1^{1c} - \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \delta \mathbf{v}_1^{0,1c} = \\ &= \mathbf{m}_1 [\gamma_4 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c}] \delta \phi_1^{1c} - \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\phi}_{1b}^0 \rangle \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} - \\ &- \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} - \\ &- \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \gamma_2 \right] \delta \phi_{1b}^0 - \\ &- \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \phi_{1b}^0 - \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \delta \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где $\gamma_4 = [\boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c}]$.

Слагаемое $\delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c}) \dot{\phi}_1^{1c}$ находится как:

$$\begin{aligned} \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c}) \dot{\phi}_1^{1c} &= \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} \dot{\phi}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} \dot{\phi}_1^{1c} = \\ &= [\gamma_5 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \gamma_6] \delta \phi_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \gamma_3 \delta \dot{\phi}_1^{1c}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где $\gamma_5 = [\boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} \dot{\phi}_1^{1c} \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} \dot{\phi}_1^{1c} \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} \dot{\phi}_1^{1c}]$, $\gamma_6 = [\boldsymbol{\phi}_{1,1}^{1c} \dot{\phi}_1^{1c} \mid \boldsymbol{\phi}_{1,2}^{1c} \dot{\phi}_1^{1c} \mid \boldsymbol{\phi}_{1,3}^{1c} \dot{\phi}_1^{1c}]$.

Слагаемое $\delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \omega_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c}) \dot{\phi}_1^{1c}$ находится как:

$$\begin{aligned}
& \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c}) \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} = \\
& = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \delta \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} = \\
& = \left[\boldsymbol{\gamma}_7 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\gamma}_3 \right] \delta \boldsymbol{\phi}_1^{1c} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \rangle \delta \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} = \\
& = \left[\boldsymbol{\gamma}_7 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\gamma}_3 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \rangle \left[\langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \boldsymbol{\gamma}_3 \right] \right] \delta \boldsymbol{\phi}_1^{1c} - \\
& \quad - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_2 \delta \boldsymbol{\phi}_{1b}^0 - \\
& \quad - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

где $\boldsymbol{\gamma}_7 = \left[\boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \right]$.

Исходя из вышеизложенного, Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{\mathbf{x}_{fix}}$ в (3.16) вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{\mathbf{x}_{fix}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{11} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{12} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{21} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{22} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{11} &= 0, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{12} = 0, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{21} &= -\mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{22} &= \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\gamma}_4 + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \boldsymbol{\gamma}_5 + \\
& \quad + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\gamma}_6 + \boldsymbol{\gamma}_7 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\gamma}_3 - \\
& \quad - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \rangle \langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \rangle \boldsymbol{\gamma}_3.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{\mathbf{x}_{fix}}$ в (3.16) вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{\mathbf{x}_{fix}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{11} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{12} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{21} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{22} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{11} &= \mathbf{m}_1 \langle \boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1c} \rangle, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{12} &= 0, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{21} &= \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} - \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{22} &= \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\gamma}_3 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{\mathbf{x}_{fix}}$ в (3.16) вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{\mathbf{x}_{fix}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{11} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{12} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{21} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{22} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{11} &= 0, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{12} = -\mathbf{m}_1 \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_2, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{21} = 0, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{22} &= -\mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 - \\
&- \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \boldsymbol{\gamma}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_2.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{\mathbf{x}_{fix}}$ в (3.16) вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{\mathbf{x}_{fix}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{11} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{12} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{21} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{22} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{11} &= 0, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{12} = -\mathbf{m}_1 \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{21} &= -\mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T}, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1^{1c})_{22} &= -\mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 - \\
&- \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\phi}}_1^{1c} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Слагаемое $\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 &= \mathbf{M}_1^{1c,T} \boldsymbol{\Theta}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} & \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Линеаризуем (3.37), тогда:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 &\approx \mathbf{A}_0(\mathbf{q}_{1,fix}^{1c}, \mathbf{q}_{1b,fix}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b,fix}^0 + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{q}_1^{1c} + \\
&+ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{q}_{1b}^0 + \mathbf{J}_{\ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Первая вариация от (3.37) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 &= \begin{bmatrix} \delta(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T}) & \delta(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0) \\ 0 & \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0) \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_{1b}^0 \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} & \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \ddot{\mathbf{r}}_{1b}^0 \\ \delta \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.39}$$

где $\delta(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T}) \ddot{\mathbf{r}}_{1b}^0$ вычисляется как:

$$\delta(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T}) \ddot{\mathbf{r}}_{1b}^0 = \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \boldsymbol{\varphi}_{1b}^0 \rangle^T \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \ddot{\mathbf{r}}_{1b}^0 = \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \ddot{\mathbf{r}}_{1b}^0 \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \boldsymbol{\varphi}_{1b}^0. \quad (3.40)$$

Слагаемое $\delta(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0) \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0$ вычисляется как:

$$\begin{aligned} & \delta(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0) \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 = \\ & = \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 \rangle \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} + \left[\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T + \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \right] \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 = \\ & = \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 \rangle \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} + \left[\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T + \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \right] \gamma_8 \delta \boldsymbol{\varphi}_{1b}^0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где $\gamma_8 = [\lambda_{1b,1}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 \mid \lambda_{1b,2}^{0,T} \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 \mid \lambda_{1b,3}^{0,T} \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0]$. Слагаемое $\delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0) \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0$ вычисляется как:

$$\begin{aligned} & \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0) \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \delta \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 + \\ & + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 = \left[\gamma_9 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \right] \delta \boldsymbol{\varphi}_1^{1c} + \\ & + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \gamma_8 \delta \boldsymbol{\varphi}_{1b}^0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где $\gamma_9 = [\lambda_{1,1}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 \mid \lambda_{1,2}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 \mid \lambda_{1,3}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0]$.

Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)_{\mathbf{x}_{fix}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)_{11} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)_{12} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)_{21} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)_{11} &= \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 \rangle, \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)_{12} = 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)_{21} = 0, \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)_{22} = \gamma_9 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1b}^0 \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c}.$$

Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0)$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)_{\mathbf{x}_{fix}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)_{11} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)_{12} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)_{21} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)_{22} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)_{11} &= 0, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)_{12} &= \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \ddot{\mathbf{r}}_{1b}^0 \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \mathbf{m}_1 \left[\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle^T + \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \right] \boldsymbol{\gamma}_8, \quad (3.44) \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)_{21} &= 0, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)_{22} &= \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_8.
\end{aligned}$$

Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)$ вычисляется по формуле:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} & \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \mathbf{m}_1 \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \end{bmatrix}.$$

Слагаемое $\mathbf{B}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right) \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right) \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0 &= \mathbf{b}_{0,1} + \mathbf{b}_{0,2}, \\
\mathbf{b}_{0,1} &= \mathbf{M}_1^{1c,T} \boldsymbol{\Theta}_1^1 \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \dot{\mathbf{M}}_{1b}^0 \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0, \quad \mathbf{b}_{0,2} = \mathbf{M}_1^{1c,T} \left[\boldsymbol{\Theta}_1^1 \boldsymbol{\Phi}_1^{1c,1,T} + \boldsymbol{\Phi}_1^{0,1} \boldsymbol{\Theta}_1^1 \right] \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0, \quad (3.45)
\end{aligned}$$

где $\mathbf{b}_{0,1}$ равно:

$$\mathbf{b}_{0,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \right\rangle^T \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} + \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 + \mathbf{m}_1 \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

а $\mathbf{b}_{0,2}$ равно:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{0,2} &= \mathbf{M}_1^{1c,T} \left[\boldsymbol{\Theta}_1^1 \boldsymbol{\Phi}_1^{1c,1,T} + \boldsymbol{\Phi}_1^{0,1} \boldsymbol{\Theta}_1^1 \right] \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,2,1} \\ \mathbf{b}_{0,2,2} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{b}_{0,2,1} &= \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \right\rangle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} + \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \right\rangle \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 + \mathbf{m}_1 \left\langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0, \quad (3.47) \\
\mathbf{b}_{0,2,2} &= \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{v}_1^{0,1} \right\rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} + \\
&+ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{v}_1^{0,1} \right\rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{v}_1^{0,1} \right\rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0.
\end{aligned}$$

Линеаризуем (3.46), тогда:

$$\mathbf{b}_{0,1} \approx \mathbf{b}_{0,1,fix} + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}} \left(\mathbf{b}_{0,1} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{q}_1^{1c} + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{b}_{0,1} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{q}_{1b}^0 + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0} \left(\mathbf{b}_{0,1} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0. \quad (3.48)$$

Первая вариация от (46) определяется следующим образом:

$$\delta \mathbf{b}_{0,1} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{b}_{0,1,1} \\ \delta \mathbf{b}_{0,1,2} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{b}_{0,1,1} = \delta \left(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle^T \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \right) + \delta \left(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right) + \delta \left(\mathbf{m}_1 \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right), \quad \delta \mathbf{b}_{0,1,2} = \delta \left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right), \quad (3.49)$$

где слагаемое $\delta \left(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle^T \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \right)$ равно:

$$\begin{aligned} & \delta \left(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle^T \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \right) = \\ & = \left[\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \right\rangle \boldsymbol{\gamma}_2 + \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \left\langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \right\rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \right] \delta \boldsymbol{\phi}_{1b}^0 + \\ & + \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle^T \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \delta \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} + \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0, \end{aligned} \quad (3.50)$$

слагаемое $\delta \left(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right)$ равно:

$$\begin{aligned} & \delta \left(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right) = \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle^T \boldsymbol{\gamma}_{10} \delta \boldsymbol{\phi}_{1b}^0 + \\ & + \left[\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle^T \boldsymbol{\gamma}_2 + \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \right] \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0, \quad \boldsymbol{\gamma}_{10} = \left[\boldsymbol{\phi}_{1b,1}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \mid \boldsymbol{\phi}_{1b,2}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \mid \boldsymbol{\phi}_{1b,3}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right], \end{aligned} \quad (3.51)$$

слагаемое $\delta \left(\mathbf{m}_1 \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right)$ равно:

$$\begin{aligned} & \delta \left(\mathbf{m}_1 \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right) = \mathbf{m}_1 \left\langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} + \\ & + \mathbf{m}_1 \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_{10} \delta \boldsymbol{\phi}_{1b}^0 + \left[\mathbf{m}_1 \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_2 + \mathbf{m}_1 \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \right] \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0, \end{aligned} \quad (3.52)$$

слагаемое $\delta \left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right)$ равно:

$$\begin{aligned} & \delta \left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right) = \left[\boldsymbol{\gamma}_{11} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \left\langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \right] \delta \boldsymbol{\phi}_1^{1c} + \\ & + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_{10} \delta \boldsymbol{\phi}_{1b}^0 + \left[\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \right] \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0, \\ & \boldsymbol{\gamma}_{11} = \left[\boldsymbol{\lambda}_{1,1}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,1})$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,1})_{11} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,1})_{12} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,1})_{21} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,1})_{22} \end{bmatrix}, \\ & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,1})_{11} = \mathbf{m}_1 \left\langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,1})_{12} = 0, \\ & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,1})_{21} = 0, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,1})_{22} = \boldsymbol{\gamma}_{11} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \left\langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{11} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{12} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{21} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{11} &= 0, \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{12} &= \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle \gamma_2 + \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \\ &+ \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \gamma_{10} + \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \gamma_{10}, \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{21} &= 0, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{22} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \gamma_{10}.\end{aligned}\tag{3.55}$$

Якобиан $\mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{11} & \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{12} \\ \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{21} & \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{11} &= \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle^T \mathbf{c}_{1b}^{0,T}, \\ \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{12} &= \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \gamma_2 + \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0 + \\ &+ \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \gamma_2 + \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0, \\ \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{21} &= 0, \quad \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,1})_{22} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \gamma_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{I}_1 \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1b}^0.\end{aligned}\tag{3.56}$$

Линеаризуем (3.47), тогда:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{0,2} &\approx \mathbf{b}_{0,2,\text{fix}} + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{\mathbf{x}_{\text{fix}}} \delta \mathbf{q}_1^{1c} + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{\mathbf{x}_{\text{fix}}} \delta \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} + \\ &+ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{\mathbf{x}_{\text{fix}}} \delta \mathbf{q}_{1b}^0 + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{\mathbf{x}_{\text{fix}}} \delta \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0.\end{aligned}\tag{3.57}$$

Первая вариация от (3.47) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{b}_{0,2} &= \begin{bmatrix} \delta \mathbf{b}_{0,2,1} \\ \delta \mathbf{b}_{0,2,2} \end{bmatrix}, \\ \delta \mathbf{b}_{0,2,1} &= \delta \left(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \right) + \delta \left(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \right) + \\ &+ \delta \left(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \right) + \delta \left(\mathbf{m}_1 \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \right), \\ \delta \mathbf{b}_{0,2,2} &= \delta \left(\mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \right) + \\ &+ \delta \left(\mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \right) + \delta \left(\mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \right),\end{aligned}\tag{3.58}$$

где слагаемое $\delta(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0})$ равно:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0}) &= \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle^T \boldsymbol{\gamma}_2 \delta \boldsymbol{\Phi}_{1b}^0 + \\ &+ \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \delta \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} + \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} [\mathbf{I} - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle] \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где $\mathbf{I}$ - единичная матрица.

Слагаемое $\delta(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0)$ равно:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0) &= \\ &= \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\langle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \right] \boldsymbol{\gamma}_2 \delta \boldsymbol{\Phi}_{1b}^0 + \\ &+ \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\langle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Слагаемое $\delta(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0)$ равно:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0) &= \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} + \\ &+ \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\langle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \right] \boldsymbol{\gamma}_2 \delta \boldsymbol{\Phi}_{1b}^0 + \\ &+ \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\langle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Слагаемое $\delta(\mathbf{m}_1 \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0)$ равно:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{m}_1 \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0) &= \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0 \rangle \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} + \\ &+ \mathbf{m}_1 \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_2 \delta \boldsymbol{\Phi}_{1b}^0 + \mathbf{m}_1 \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{1b}^0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Слагаемое $\delta(\mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0})$ равно:

$$\begin{aligned}
& \delta \left(\mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{v}_1^{0,1} \right\rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right) = \\
& = \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left[\left\langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \right\rangle + \left\langle \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \right] \left\langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} + \\
& + \mathbf{m}_1 \left[\gamma_{14} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \right\rangle \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \right] \delta \boldsymbol{\phi}_1^{1c} + \\
& + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \right\rangle \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \gamma_2 \delta \boldsymbol{\phi}_{1b}^0 + \\
& + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\left\langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \gamma_2 \right] \delta \boldsymbol{\phi}_{1b}^0 + \\
& + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \delta \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} + \\
& + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \right\rangle \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 + \\
& + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\text{где } \gamma_{14} = \left[0 \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,2}^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \right\rangle \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \mid \boldsymbol{\lambda}_{1,3}^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \right\rangle \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right].$$

Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{11} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{12} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{21} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{22} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{11} &= \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \left\langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{12} &= 0, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{21} &= \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \right\rangle \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b} + \\
& + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \left\langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle + \\
& + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left[\left\langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \right\rangle + \left\langle \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \right] \left\langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{22} &= \mathbf{m}_1 \left[\gamma_{12} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \right] + \\
& + \mathbf{m}_1 \left[\gamma_{13} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \right\rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left\langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right\rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \right] + \\
& + \mathbf{m}_1 \left[\gamma_{14} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \left\langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \right\rangle \left\langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \right\rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \right].
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_i^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{q}_i^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{11} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_i^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{12} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_i^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{21} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_i^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{\mathbf{q}_i^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{11} = \mathbf{m}_1 \langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_i^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{12} &= 0, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_i^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{21} &= \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle^T + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_i^{1c}}(\mathbf{b}_{0,2})_{22} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{ib}^0}(\mathbf{b}_{0,2})$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{ib}^0}(\mathbf{b}_{0,2}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{ib}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{11} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{ib}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{12} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{ib}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{21} & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{ib}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{22} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{ib}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{11} &= 0, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{ib}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{12} &= \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle^T \boldsymbol{\gamma}_2 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\langle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \right] \boldsymbol{\gamma}_2 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\langle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \right] \boldsymbol{\gamma}_2 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_2, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{ib}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{21} &= 0, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{ib}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{22} &= \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle^T \left[\langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \boldsymbol{\gamma}_2 \right] + \\
&+ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} + \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \boldsymbol{\gamma}_2 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \left[\langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \boldsymbol{\gamma}_2 \right] + \\
&+ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\gamma}_2 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \boldsymbol{\gamma}_2 \right].
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Якобиан $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_{ib}^0}(\mathbf{b}_{0,2})$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{lb}^0}(\mathbf{b}_{0,2}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{lb}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{11} & \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{lb}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{12} \\ \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{lb}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{21} & \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{lb}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{22} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{lb}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{11} &= \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1b}^{0,T}, \\
\mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{lb}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{12} &= \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\mathbf{I} - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \right] \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\langle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\langle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b} \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \langle \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0, \\
\mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{lb}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{21} &= \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left[\langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} + \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \langle \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle^T \right] + \\
&+ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} + \\
&+ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T}, \\
\mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{lb}^0}(\mathbf{b}_{0,2})_{22} &= \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \dot{\mathbf{r}}_{1b}^{0,0} \rangle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \left[\langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle^T + \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \mathbf{v}_1^{0,1c} \rangle \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 + \\
&+ \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \langle \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{1b}^0 \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Тогда линеаризованные уравнения платформы будут иметь вид:

$$\mathbf{A}_3 \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_0 = -\mathbf{B}_3 \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{B}_2 \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{B}_1 \mathbf{y} - \mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}_\xi, \tag{3.70}$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – соответствующие отклонения от опорной траектории, равные:

$$\mathbf{x} = \Delta \mathbf{q}_1^{1c} = \mathbf{q}_1^{1c} - \mathbf{q}_{1,fix}^{1c}, \mathbf{y} = \Delta \mathbf{q}_{1b}^0 = \mathbf{q}_{1b}^0 - \mathbf{q}_{1b,fix}^0, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_\xi \quad - \quad \text{линеаризованные силы и}$$

моменты, а матрицы параметров модели (3.70) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_3 &= \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_1^{1c}} \left(\mathbf{A}(\mathbf{q}_1^{1c}) \ddot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right)_{\mathbf{x}_{fix}}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_1^{1c}} \left(\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_1^{1c}} \left(\mathbf{b}_{0,2} \right)_{\mathbf{x}_{fix}}, \\
\mathbf{A}_1 &= \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_1^{1c}} \left(\mathbf{A}(\mathbf{q}_1^{1c}) \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_1^{1c}} \left(\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} + \\
&+ \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_1^{1c}} \left(\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)_{\mathbf{x}_{fix}} + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_1^{1c}} \left(\mathbf{b}_{0,1} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_1^{1c}} \left(\mathbf{b}_{0,2} \right)_{\mathbf{x}_{fix}}, \\
\mathbf{A}_0 &= \mathbf{A}(\mathbf{q}_{1,fix}^{1c}) \ddot{\mathbf{q}}_{1,fix}^{1c},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_3 &= \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)_{\mathbf{x}_{fix}}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0} \left(\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0} \left(\mathbf{b}_{0,1} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0} \left(\mathbf{b}_{0,2} \right)_{\mathbf{x}_{fix}}, \\
\mathbf{B}_1 &= \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0} \left(\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0} \left(\mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b}^0 \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{q}_{1b}^0 + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0} \left(\mathbf{b}_{0,1} \right)_{\mathbf{x}_{fix}} + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_{1b}^0} \left(\mathbf{b}_{0,2} \right)_{\mathbf{x}_{fix}}, \\
\mathbf{B}_0 &= \mathbf{B} \left(\mathbf{q}_{1,fix}^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_{1,fix}^{1c}, \mathbf{q}_{1b,fix}^0, \dot{\mathbf{q}}_{1b,fix}^0 \right) \dot{\mathbf{q}}_{1,fix}^{1c} + \\
&+ \mathbf{A}_0 \left(\mathbf{q}_{1,fix}^{1c}, \mathbf{q}_{1b,fix}^0 \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1b,fix}^0 + \mathbf{A} \left(\mathbf{q}_{1,fix}^{1c} \right) \ddot{\mathbf{q}}_{1,fix}^{1c} + \mathbf{b}_{0,1,fix} + \mathbf{b}_{0,2,fix}.
\end{aligned}$$

Модель (3.70) необходимо дополнить уравнениями, описывающими силы и моменты, действующие на АП. Построение модели сил и моментов выполняется по аналогичной методике разложением в ряд с удержанием линейного слагаемого.

3.2. Линеаризованные выражения векторов сил и моментов платформы с n актуаторами

Силы и моменты, действующие на адаптивную платформу, подробно рассмотрены в [8,112-115].

Линеаризуем выражения для слагаемого $\mathbf{Q}_\xi \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \mathbf{u}, \mathbf{p} \right)$ из (3.9):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}_\xi \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{q}_{1b}^0, \mathbf{u}, \mathbf{p} \right) \approx \\
&\approx \mathbf{Q}_\xi \left(\mathbf{q}_{1,fix}^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_{1,fix}^{1c}, \mathbf{q}_{1b,fix}^0, \mathbf{u}_{fix}, \mathbf{p}_{fix} \right) + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}} \left(\mathbf{Q}_\xi \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{q}_1^{1c} + \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{q}}_1^{1c}} \left(\mathbf{Q}_\xi \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} + (3.71) \\
&+ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0} \left(\mathbf{Q}_\xi \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{q}_{1b}^0 + \mathbf{J}_{\mathbf{u}} \left(\mathbf{Q}_\xi \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{u} + \mathbf{J}_{\mathbf{p}} \left(\mathbf{Q}_\xi \right)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{p},
\end{aligned}$$

Обобщённые силы могут быть найдены через проекции сил и моментов в СК АП:

$$\mathbf{Q}_\xi \left(\mathbf{q}_1^{1c}, \dot{\mathbf{q}}_1^{1c}, \mathbf{u}, \mathbf{p} \right) = \mathbf{M}_1^{1c,T} \boldsymbol{\Xi}_1^1, \quad (3.72)$$

где силы $\mathbf{F}_1$ и моменты $\mathbf{M}_1$, действующие на адаптивную платформу в СК АП имеют вид:

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{1,i}^1 + \mathbf{G}_1^1 + \mathbf{P}_1^1, \quad \mathbf{M}_1 = \sum_{i=1}^6 \left\langle \mathbf{r}_{1,ji}^{1,1} \right\rangle \mathbf{F}_{1,i}^1 + \sum_{i=1}^6 \mathbf{N}_{1,i}^1 + \mathbf{K}_1^1, \quad (3.73)$$

где $\mathbf{F}_{1,i}^1$ - силы упругости и демпфирования, действующие на АП со стороны i -ого актуатора в СК АП, $\mathbf{N}_{1,i}^1$ - моменты трения в i -том шарнире АП в СК АП, $\mathbf{P}_1^1$ - силовая нагрузка, действующая на АП, $\mathbf{K}_1^1$ - моментная нагрузка,

действующая на НП, $\mathbf{G}_1^1$ - сила тяжести, действующая на НП. Сила $\mathbf{F}_{1,i}^1$ действует вдоль актуатора и является коллинеарной вектору $\mathbf{r}_{1ji}^{1bji}$. Моменты $\mathbf{N}_{1,i}^1$ против скорости движения в шарнире.

Найдём выражения для сил и моментов $\mathbf{G}_1^1, \mathbf{P}_1^1$ и $\mathbf{K}_1^1$ в СК АП:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_1^1 &= \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{m}_1 \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad -g]^T, \\ \mathbf{P}_1^1 &= \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{p}_F, \quad \mathbf{K}_1^1 = \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{p}_M,\end{aligned}\quad (3.74)$$

где $\mathbf{p}_F$ и $\mathbf{p}_M$ — компоненты внешних сил и моментов в $\mathbf{p}$ соответственно, g — ускорение свободного падения.

Перейдём от (74) к обобщённым силам согласно (72):

$$\mathbf{Q}_g = \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{m}_1 \mathbf{g}, \quad \mathbf{Q}_P = \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{p}_F, \quad \mathbf{Q}_K = \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{0,T} \mathbf{p}_M. \quad (3.75)$$

Линеаризуем (75) разложением в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{X}_{fix}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_g &\approx \mathbf{Q}_g(\mathbf{q}_{1b,fix}^0, \mathbf{p}_{fix}) + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{Q}_g)_{\mathbf{X}_{fix}} \delta \mathbf{q}_{1b}^0, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{Q}_g) = \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{m}_1 \mathbf{g} \rangle \mathbf{e}_{1b}^0, \\ \mathbf{Q}_P &\approx \mathbf{Q}_P(\mathbf{q}_{1b,fix}^0, \mathbf{p}_{fix}) + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{Q}_P)_{\mathbf{X}_{fix}} \delta \mathbf{q}_{1b}^0 + \mathbf{J}_{\mathbf{p}_F}(\mathbf{Q}_P)_{\mathbf{X}_{fix}} \delta \mathbf{p}_F, \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{Q}_P) &= \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{p}_F \rangle \mathbf{e}_{1b}^0, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{p}_F}(\mathbf{Q}_P) = \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T}, \\ \mathbf{Q}_K &\approx \mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_{1,fix}^{1c}, \mathbf{q}_{1b,fix}^0, \mathbf{p}_{fix}) + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{Q}_K)_{\mathbf{X}_{fix}} \delta \mathbf{q}_1^{1c} + \\ &\quad + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{Q}_K)_{\mathbf{X}_{fix}} \delta \mathbf{q}_{1b}^0 + \mathbf{J}_{\mathbf{p}_M}(\mathbf{Q}_K)_{\mathbf{X}_{fix}} \delta \mathbf{p}_M, \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{1c}}(\mathbf{Q}_K) &= \gamma_{15} + \mathbf{e}_1^{1c,T} \langle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{p}_M \rangle \mathbf{e}_1^{1c}, \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_{1b}^0}(\mathbf{Q}_K) &= \mathbf{e}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \langle \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{p}_M \rangle \mathbf{e}_{1b}^0, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{p}_M}(\mathbf{Q}_K) = \mathbf{e}_1^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T}, \\ \gamma_{15} &= \left[\lambda_{1,1}^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{p}_M \mid \lambda_{1,2}^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{p}_M \mid \lambda_{1,3}^{1c,T} \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{p}_M \right].\end{aligned}\quad (3.76)$$

Линеаризуем силы упругости и демпфирования. Этот вопрос подробно рассмотрен в [112]. Обобщенные силы упругости, действующие на АП, описываются выражением вида:

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b}}{l_{1ji}^{1bji}} C_i \left[l_{1ji}^{1bji} - \frac{\psi_i}{I_i} - l_{0i} \right] \\ -\mathbf{e}_1^{1c,T} \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b}}{l_{1ji}^{1bji}} C_i \left[l_{1ji}^{1bji} - \frac{\psi_i}{I_i} - l_{0i} \right] \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

где C_i – коэффициенты упругости актуатора соответственно.

Линеаризуем (3.78) путем разложения в ряд Тейлора:

$$\mathbf{Q}_c \cong \mathbf{Q}_c(\mathbf{X}_{fix}) + \mathbf{J}_{q_1^{lc}}(\mathbf{Q}_c)_{\mathbf{X}_{fix}} \delta \mathbf{x} + \mathbf{J}_u(\mathbf{Q}_c)_{\mathbf{X}_{fix}} \delta \mathbf{u}, \quad (3.78)$$

где $\mathbf{J}_u$ – матрица Якоби от $\mathbf{Q}_c$ по координатам $\mathbf{u}$; $\delta \mathbf{u}$ – вариации соответствующих координат.

Найдем линеаризованные выражения для обобщенных сил $\mathbf{Q}_{fc}$:

$$\mathbf{Q}_{fc} = -\mathbf{c}_{lc}^{1b,T} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b}}{l_{1ji}^{1bji}} C_i \left[l_{1ji}^{1bji} - \frac{\psi_i + I_i l_{0i}}{I_i} \right], \quad (3.79)$$

исходя из определения (3.78) и учтя результаты в [75]:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{q_1^{lc}}(\mathbf{Q}_{fc}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{r_1^{lc,1c}}(\mathbf{Q}_{fc}) & \mathbf{J}_{\phi_1^{lc}}(\mathbf{Q}_{fc}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_{r_1^{lc,1c}}(\mathbf{Q}_{fc}) &= \sum_{i=1}^n C_i \left[\mathbf{I} - \frac{\psi_i + I_i l_{0i}}{l_{1ji}^{1bji}} \mathbf{I} + \frac{\psi_i + I_i l_{0i}}{I_i} \frac{\mathbf{c}_{lc}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{lc}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^3} \right] = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{C}}_i, \\ \mathbf{J}_{\phi_1^{lc}}(\mathbf{Q}_{fc}) &= \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c}, \quad \mathbf{J}_{\psi}(\mathbf{Q}_f) = \boldsymbol{\gamma}_{16}, \\ \boldsymbol{\gamma}_{16} &= \left[\mathbf{c}_{lc}^{1b,T} \mathbf{r}_{1j1}^{1bj1,1b} \frac{C_1}{I_1 l_{1j1}^{1bj1}} \mid \dots \mid \mathbf{c}_{lc}^{1b,T} \mathbf{r}_{1jn}^{1bjn,1b} \frac{C_n}{I_n l_{1jn}^{1bjn}} \right], \end{aligned} \quad (3.80)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица 3×3 ; $\bar{\mathbf{C}}_i$ – приведенная жесткость i -го актуатора, которая определяется по формуле

$$\bar{\mathbf{C}}_i = C_i \left[\mathbf{I} - \frac{\psi_i + I_i l_{0i}}{l_{1ji}^{1bji}} \mathbf{I} + \frac{\psi_i + I_i l_{0i}}{I_i} \frac{\mathbf{c}_{lc}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{lc}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^3} \right]. \quad (3.81)$$

Найдем линеаризованные выражения для обобщенных моментов $\mathbf{Q}_M$, используя результаты [75]:

$$\mathbf{Q}_{Mc} = -\sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{lc}^{1b,T} \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b}}{l_{1ji}^{1bji}} C_i \left[l_{1ji}^{1bji} - \frac{\psi_i + I_i l_{0i}}{I_i} \right], \quad (3.82)$$

исходя из определения (3.78):

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{q}_l^{lc}}(\mathbf{Q}_{Mc}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{r}_1^{lc}}(\mathbf{Q}_{Mc}) & \mathbf{J}_{\Phi_1^{lc}}(\mathbf{Q}_{Mc}) \end{bmatrix}, \\
\mathbf{J}_{\mathbf{r}_1^{lc,lc}}(\mathbf{Q}_{Mc}) &= \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{lc,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{lc,T} \bar{\mathbf{C}}_i, \\
\mathbf{J}_{\Phi_1^{lc}}(\mathbf{Q}_{Mc}) &= \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{lc,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{lc,T} \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{c}_1^{lc} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{lc} + \\
&+ \sum_{i=1}^n \left[\langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \boldsymbol{\chi}_i + \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \boldsymbol{\eta}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{lc,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{lc} \right] C_i \left[1 - \frac{\psi_i + I_i l_{0i}}{I_i l_{1ji}^{1,1}} \right], \\
\mathbf{J}_{\Psi}(\mathbf{Q}_{Mc}) &= \boldsymbol{\gamma}_{17},
\end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{17} = \left[\boldsymbol{\varepsilon}_1^{lc,T} \langle \mathbf{r}_{1j1}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{lc,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1j1}^{1b,1,1b} \frac{C_1}{I_1 l_{1j1}^{1,1}} \mid \dots \mid \boldsymbol{\varepsilon}_1^{lc,T} \langle \mathbf{r}_{1jn}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{lc,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1jn}^{1b,1,1b} \frac{C_n}{I_n l_{1jn}^{1,1}} \right],$$

где $\mathbf{r}_{1ji}^{1b,1,1} = \mathbf{c}_1^{lc,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1b,1,1b}$, а $\boldsymbol{\chi}_i(\mathbf{r}_{1ji}^{1,1}, \Phi_1^{lc})$ и $\boldsymbol{\eta}_i(\mathbf{r}_{1ji}^{1b,1,1}, \Phi_1^{lc})$ вычисляются по формулам:

$$\boldsymbol{\chi}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos(\alpha_1^{lc}) y_{1ji}^{1,1} - \sin(\alpha_1^{lc}) x_{1ji}^{1,1} \\ 0 & -\cos(\alpha_1^{lc}) \sin(\theta_1^{lc}) y_{1ji}^{1,1} - \sin(\alpha_1^{lc}) \sin(\theta_1^{lc}) x_{1ji}^{1,1} & -\sin(\alpha_1^{lc}) \cos(\theta_1^{lc}) y_{1ji}^{1,1} + \cos(\alpha_1^{lc}) \cos(\theta_1^{lc}) x_{1ji}^{1,1} \\ 0 & -\cos(\alpha_1^{lc}) \sin(\theta_1^{lc}) z_{1ji}^{1,1} - \cos(\theta_1^{lc}) x_{1ji}^{1,1} & -\sin(\alpha_1^{lc}) z_{1ji}^{1,1} - \sin(\alpha_1^{lc}) \cos(\theta_1^{lc}) z_{1ji}^{1,1} \end{bmatrix}; \tag{3.84}$$

$$\boldsymbol{\eta}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\alpha_1^{lc}) \sin(\theta_1^{lc}) x_{1ji}^{1b,1,1} & -\sin(\alpha_1^{lc}) \cos(\theta_1^{lc}) x_{1ji}^{1b,1,1} + \cos(\alpha_1^{lc}) y_{1ji}^{1b,1,1} \\ 0 & \sin(\alpha_1^{lc}) \sin(\theta_1^{lc}) x_{1ji}^{1b,1,1} & -\cos(\alpha_1^{lc}) \cos(\theta_1^{lc}) x_{1ji}^{1b,1,1} - \sin(\alpha_1^{lc}) y_{1ji}^{1b,1,1} \\ 0 & \cos(\theta_1^{lc}) x_{1ji}^{1b,1,1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Обобщенные силы демпфирования, действующие на АП, описываются выражением вида:

$$\mathbf{Q}_D = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{1b,1,1b}}{l_{1ji}^{1b,1}} D_i \left[\dot{l}_{1ji}^{1b,1} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \right] \\ -\boldsymbol{\varepsilon}_1^{lc,T} \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{lc,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{1b,1,1b}}{l_{1ji}^{1b,1}} D_i \left[\dot{l}_{1ji}^{1b,1} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \right] \end{bmatrix}, \tag{3.85}$$

где D_i – коэффициенты демпфирования актуатора соответственно.

Линеаризуем (85) путем разложения в ряд Тейлора:

$$\mathbf{Q}_D \cong \mathbf{Q}_D(\mathbf{x}_{fix}) + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_l^{lc}}(\mathbf{Q}_D)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{x} + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_1^{lc}}(\mathbf{Q}_D)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_{\mathbf{u}}(\mathbf{Q}_D)_{\mathbf{x}_{fix}} \delta \mathbf{u},$$

где $\mathbf{J}_{\mathbf{u}}$ – матрица Якоби от $\mathbf{Q}_D$ по координатам $\mathbf{u}$; $\delta \mathbf{u}$ – вариации соответствующих координат.

Найдем линейризованные выражения для обобщенных сил $\mathbf{Q}_{fd}$.

Вариация скорости выдвигения актуатора равна:

$$\delta \dot{l}_{1ji}^{lbji} = \mathbf{v}_{1ji}^{lbji,lb,T} \delta \left(\frac{\mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lbji}}{l_{1ji}^{lbji}} \right) + \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb,T}}{l_{1ji}^{lbji}} \delta \mathbf{v}_{1ji}^{lbji,lb}, \quad (3.86)$$

где соответствующие вариации вычисляются по формулам (3.87):

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{\mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb}}{l_{1ji}^{lbji}} \right) &= \left(\frac{\mathbf{c}_{1c}^{lb}}{l_{1ji}^{lbji}} - \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb} \mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb,T} \mathbf{c}_{1c}^{lb}}{(l_{1ji}^{lbji})^3} \right) \delta \mathbf{r}_1^{1c,lc} + \left(\frac{\mathbf{c}_{1c}^{lb}}{l_{1ji}^{lbji}} - \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb} \mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb,T} \mathbf{c}_{1c}^{lb}}{(l_{1ji}^{lbji})^3} \right) \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \mathbf{e}_1^{1c} \delta \phi_1^{1c}, \\ \delta \mathbf{v}_{1ji}^{lbji,lb} &= \mathbf{c}_{1c}^{lb} \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,lc} + \mathbf{c}_{1c}^{lb} \delta \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \mathbf{e}_1^{1c} \dot{\phi}_1^{1c} + \mathbf{c}_{1c}^{lb} \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \delta \mathbf{e}_1^{1c} \dot{\phi}_1^{1c} + \mathbf{c}_{1c}^{lb} \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \mathbf{e}_1^{1c} \delta \ddot{\phi}_1^{1c} = \\ &= \mathbf{c}_{1c}^{lb} \left[\mathbf{c}_1^{1c} \langle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{e}_1^{1c} \dot{\phi}_1^{1c} \rangle \mathbf{e}_1^{1c} + \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \gamma_3 \right] \delta \phi_1^{1c} + \mathbf{c}_{1c}^{lb} \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,lc} + \mathbf{c}_{1c}^{lb} \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \mathbf{e}_1^{1c} \delta \ddot{\phi}_1^{1c}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Подставив (3.87) в (3.86), получим:

$$\begin{aligned} \delta \dot{l}_{1ji}^{lbji} &= \mathbf{v}_{1ji}^{lbji,lb,T} \mathbf{c}_{1c}^{lb} \left(\frac{\mathbf{I}}{l_{1ji}^{lbji}} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{lb,T} \mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb} \mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb,T} \mathbf{c}_{1c}^{lb}}{(l_{1ji}^{lbji})^3} \right) \delta \mathbf{r}_1^{1c,lc} + \\ &+ \mathbf{v}_{1ji}^{lbji,lb,T} \mathbf{c}_{1c}^{lb} \left(\frac{\mathbf{I}}{l_{1ji}^{lbji}} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{lb,T} \mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb} \mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb,T} \mathbf{c}_{1c}^{lb}}{(l_{1ji}^{lbji})^3} \right) \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \mathbf{e}_1^{1c} \delta \phi_1^{1c} + \\ &+ \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb,T} \mathbf{c}_{1c}^{lb}}{l_{1ji}^{lbji}} \left[\mathbf{c}_1^{1c} \langle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{e}_1^{1c} \dot{\phi}_1^{1c} \rangle \mathbf{e}_1^{1c} + \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \gamma_3 \right] \delta \phi_1^{1c} + \\ &+ \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb,T} \mathbf{c}_{1c}^{lb}}{l_{1ji}^{lbji}} \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,lc} + \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb,T} \mathbf{c}_{1c}^{lb}}{l_{1ji}^{lbji}} \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \mathbf{e}_1^{1c} \delta \ddot{\phi}_1^{1c}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Первая вариация от силы демпфирования в (3.85) будет:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Q}_{fd} &= - \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_{1c}^{lb,T} \delta \left(\frac{\mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb}}{l_{1ji}^{lbji}} \right) D_i \left[\dot{l}_{1ji}^{lbji} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \right] - \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_{1c}^{lb,T} \mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb}}{l_{1ji}^{lbji}} D_i \delta \dot{l}_{1ji}^{lbji} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_{1c}^{lb,T} \mathbf{r}_{1ji}^{lbji,lb}}{l_{1ji}^{lbji}} \frac{D_i}{I_i} \delta \dot{\psi}_i. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Подставив (3.87) и (3.88) в (3.89) получим:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{Q}_{fd} = & - \sum_{i=1}^n \left[\dot{l}_{1ji}^{1bji} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \right] D_i \left(\frac{\mathbf{I}}{l_{1ji}^{1bji}} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^3} \right) \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} - \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{v}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{l_{1ji}^{1bji}} D_i \left(\frac{\mathbf{I}}{l_{1ji}^{1bji}} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^3} \right) \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} - \\
& - \sum_{i=1}^n \left[\dot{l}_{1ji}^{1bji} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \right] D_i \left(\frac{\mathbf{I}}{l_{1ji}^{1bji}} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^3} \right) \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \boldsymbol{\varphi}_1^{1c} -
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{v}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{l_{1ji}^{1bji}} D_i \left(\frac{\mathbf{I}}{l_{1ji}^{1bji}} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^3} \right) \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \boldsymbol{\varphi}_1^{1c} - \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^2} D_i \left[\mathbf{c}_1^{1c} \langle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1^{1c} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\gamma}_3 \right] \delta \boldsymbol{\varphi}_1^{1c} - \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^2} D_i \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} - \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^2} D_i \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1^{1c} + \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b}}{l_{1ji}^{1bji}} \frac{D_i}{I_i} \delta \dot{\psi}_i.
\end{aligned}$$

Эквивалентная матрица демпфирования $\mathbf{D}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} = & \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{11} & \mathbf{d}_{12} \\ \mathbf{d}_{21} & \mathbf{d}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^2} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{D}}_i, \\
\mathbf{d}_{12} = & \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^2} D_i \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{D}}_i \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c},
\end{aligned} \tag{3.91}$$

где $\bar{\mathbf{D}}_i$ – приведенная матрица демпфирования i -го актуатора, которая определяется по формуле:

$$\bar{\mathbf{D}}_i = D_i \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^2}. \tag{3.92}$$

Выражение (3.90) помимо вариаций по обобщённым скоростям содержит слагаемые с $\delta \dot{\psi}_i$, матрица-множитель $\boldsymbol{\gamma}_{18}$ при этих слагаемых в (3.90) будет иметь вид:

$$\gamma_{18} = \left[\frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1j1}^{1bj1,1b}}{l_{1j1}^{1bj1}} \frac{D_1}{I_1} \mid \dots \mid \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1jn}^{1bjn,1b}}{l_{1jn}^{1bjn}} \frac{D_n}{I_n} \right]. \quad (3.93)$$

Также в (90) присутствуют вариации от обобщённых координат $\delta \mathbf{r}_1^{1c,1c}$ и $\delta \Phi_1^{1c}$, соответствующие им компоненты матрицы $\mathbf{O}$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{O} &= \begin{bmatrix} \mathbf{o}_{11} & \mathbf{o}_{12} \\ \mathbf{o}_{21} & \mathbf{o}_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{o}_{11} &= \sum_{i=1}^n \left[\dot{l}_{1ji}^{1bj1} \mathbf{I} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \mathbf{I} + \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b} \mathbf{v}_{1ji}^{1bj1,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{l_{1ji}^{1bj1}} \right] D_i \left(\frac{\mathbf{I}}{l_{1ji}^{1bj1}} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bj1})^3} \right), \\ \mathbf{o}_{12} &= - \sum_{i=1}^n \left[\dot{l}_{1ji}^{1bj1} \mathbf{I} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \mathbf{I} + \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b} \mathbf{v}_{1ji}^{1bj1,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{l_{1ji}^{1bj1}} \right] D_i \left(\frac{\mathbf{I}}{l_{1ji}^{1bj1}} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bj1})^3} \right) \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \mathbf{e}_1^{1c} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bj1})^2} D_i \left[\mathbf{c}_1^{1c} \langle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{e}_1^{1c} \Phi_1^{1c} \rangle \mathbf{e}_1^{1c} + \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \gamma_3 \right] \delta \Phi_1^{1c}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Найдём выражение для первой вариации обобщённых сил $\mathbf{Q}_{Md}$:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Q}_{Md} &= - \sum_{i=1}^n \delta \left(\mathbf{e}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b} \right) \frac{1}{l_{1ji}^{1bj1}} D_i \left[\dot{l}_{1ji}^{1bj1} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \right] - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b} \delta \left(\frac{1}{l_{1ji}^{1bj1}} \right) D_i \left[\dot{l}_{1ji}^{1bj1} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \right] - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b}}{l_{1ji}^{1bj1}} D_i \delta \dot{l}_{1ji}^{1bj1} - \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b}}{l_{1ji}^{1bj1}} \frac{D_i}{I_i} \delta \dot{\psi}_i. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Найдём выражение для вариаций $\delta \left(\frac{1}{l_{1ji}^{1bj1}} \right)$ и $\delta \left(\mathbf{e}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b} \right)$:

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{l_{1ji}^{1bj1}} \right) &= - \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bj1})^3} \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} - \frac{\mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bj1})^3} \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \mathbf{e}_1^{1c} \delta \Phi_1^{1c}, \\ \delta \left(\mathbf{e}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b} \right) &= \delta \left(\mathbf{e}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1b} \right) = \mathbf{e}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} + \\ &\quad + \left[\langle \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1} \rangle^T \chi_i + \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \eta_i - \mathbf{e}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1bj1,1} \rangle^T \mathbf{e}_1^{1c} + \mathbf{e}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \mathbf{e}_1^{1c} \right] \delta \Phi_1^{1c}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Подставив (3.88) и (3.96) в (3.95) получим:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{Q}_{Md} = & - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \left[l_{1ji}^{1bji} \mathbf{I} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \mathbf{I} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{v}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{l_{1ji}^{1bji}} \right] D_i \left(\frac{\mathbf{I}}{l_{1ji}^{1bji}} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^3} \right) \delta \mathbf{r}_1^{1c,1c} - \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{l_{1ji}^{1bji}} \left[l_{1ji}^{1bji} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \right] \left[\langle \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1} \rangle^T \boldsymbol{\chi}_i + \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\eta}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \right] \delta \boldsymbol{\varphi}_1^{1c} + \\
& + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \left[l_{1ji}^{1bji} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \right] D_i \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^3} \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \boldsymbol{\varphi}_1^{1c} - \\
& - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{v}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{l_{1ji}^{1bji}} D_i \left(\frac{\mathbf{I}}{l_{1ji}^{1bji}} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^3} \right) \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \boldsymbol{\varphi}_1^{1c} - \\
\end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^2} D_i \left[\mathbf{c}_1^{1c} \langle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1^{1c} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\gamma}_3 \right] \delta \boldsymbol{\varphi}_1^{1c} - \\
& - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} D_i \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^2} \delta \dot{\mathbf{r}}_1^{1c,1c} - \\
& - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} D_i \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bji})^2} \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \delta \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1^{1c} - \\
& - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bji,1b}}{l_{1ji}^{1bji}} \frac{D_i}{I_i} \delta \dot{\psi}_i.
\end{aligned}$$

Из (3.97) найдём компоненты матрицы $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{d}_{21} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \bar{\mathbf{D}}_i, \quad \mathbf{d}_{22} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \bar{\mathbf{D}}_i \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c}. \tag{3.98}$$

Из (3.97) найдём компоненты матрицы $\mathbf{O}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{o}_{21} &= \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \left[\dot{l}_{1ji}^{1bj} \mathbf{I} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \mathbf{I} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1b} \mathbf{v}_{1ji}^{1bj,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{l_{1ji}^{1bj}} \right] D_i \left(\frac{\mathbf{I}}{l_{1ji}^{1bj}} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bj})^3} \right), \\
\mathbf{o}_{22} &= \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{l_{1ji}^{1bj}} \left[\dot{l}_{1ji}^{1bj} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \right] \left[\langle \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1} \rangle^T \boldsymbol{\chi}_i + \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\eta}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \right] - \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \left[\dot{l}_{1ji}^{1bj} - \frac{\dot{\psi}_i}{I_i} \right] D_i \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bj})^3} \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1b} \mathbf{v}_{1ji}^{1bj,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{l_{1ji}^{1bj}} D_i \left(\frac{\mathbf{I}}{l_{1ji}^{1bj}} - \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bj})^3} \right) \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1b,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{(l_{1ji}^{1bj})^2} D_i \left[\mathbf{c}_1^{1c} \langle \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\phi}_1^{1c} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} + \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,l} \rangle^T \boldsymbol{\gamma}_3 \right].
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Выражение (3.97) помимо вариаций по обобщённым скоростям содержит слагаемые с $\delta\dot{\psi}_i$, матрица-множитель $\boldsymbol{\gamma}_{19}$ при этих слагаемых будет иметь вид:

$$\boldsymbol{\gamma}_{19} = \left[\boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1j1}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1j1}^{1bj,1b}}{l_{1j1}^{1bj}} \frac{D_1}{I_1} \mid \dots \mid \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1jn}^{1,l} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1jn}^{1bj,1b}}{l_{1jn}^{1bj}} \frac{D_n}{I_n} \right]. \tag{3.100}$$

В шарнирах актуаторов действуют моменты трения $\mathbf{N}_{1,i}^1$. Обобщённые моменты трения будут иметь вид:

$$\mathbf{Q}_N = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \mathbf{N}_{1,i}^1 \end{array} \right]. \tag{3.101}$$

Следует отметить, что построение модели сил трения является одной из наиболее сложных задач в подобных механизмах. Поэтому ограничимся обобщённой моделью, параметры в которой необходимо определять экспериментально:

$$\mathbf{Q}_N \approx \mathbf{Q}_N(\mathbf{X}_{fix}) - \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{X}_{fix}) \delta \mathbf{q}_1^{1c} - \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{X}_{fix}) \delta \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} - \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{X}_{fix}) \delta \mathbf{u}, \tag{3.102}$$

где $\boldsymbol{\mu}_i$ – матрицы параметров, определяющиеся в результате экспериментов с адаптивной платформой.

3.3. Линеаризованные уравнения динамики платформы с учётом электроприводов

Подставим в (3.70) линеаризованные выражения для сил и моментов из (3.71)-(3.102):

$$\mathbf{A}_3 \ddot{\mathbf{x}} + [\mathbf{A}_2 + \mathbf{D}_2 + \boldsymbol{\mu}_2] \dot{\mathbf{x}} + [\mathbf{A}_1 + \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_1 + \boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\mu}_1] \mathbf{x} = \mathbf{\Pi}_3 \mathbf{z} + [\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3] \mathbf{w} - \mathbf{B}_3 \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{B}_2 \dot{\mathbf{y}} + [\mathbf{G}_1 - \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2] \mathbf{y} + [\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0 + \mathbf{G}_0 + \mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_0 + \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\Pi}_0], \quad (3.103)$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – соответствующие отклонения от опорной траектории, равные: $\mathbf{x} = \Delta \mathbf{q}_1^{lc} = \mathbf{q}_1^{lc} - \mathbf{q}_{1,fix}^{lc}$, $\mathbf{y} = \Delta \mathbf{q}_{1b}^0 = \mathbf{q}_{1b}^0 - \mathbf{q}_{1b,fix}^0$, а $\mathbf{z}$ – отклонения нагрузок от нагрузок от значений в стационарной точке, равные $\mathbf{z} = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_{fix}$, $\mathbf{w}$ – отклонения управляющих воздействий от соответствующих значений в стационарной точке, равные $\mathbf{w} = \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{fix}$, а матрицы параметров модели (103) имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_g(\mathbf{q}_{1b,fix}^0, \mathbf{p}_{fix}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{q_{1b}^0}(\mathbf{Q}_g)_{\mathbf{x}_{fix}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\Pi}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_P(\mathbf{q}_{1b,fix}^0, \mathbf{p}_{fix}) & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_{1,fix}^{lc}, \mathbf{q}_{1b,fix}^0, \mathbf{p}_{fix}) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\Pi}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{q_{1b}^0}(\mathbf{Q}_P)_{\mathbf{x}_{fix}} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{q_{1b}^0}(\mathbf{Q}_K)_{\mathbf{x}_{fix}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{q_1^{lc}}(\mathbf{Q}_K)_{\mathbf{x}_{fix}} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\Pi}_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{p_F}(\mathbf{Q}_P)_{\mathbf{x}_{fix}} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{p_M}(\mathbf{Q}_K)_{\mathbf{x}_{fix}} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_0 = \mathbf{Q}_c(\mathbf{x}_{fix}), \mathbf{C}_1 = \mathbf{J}_{q_1^{lc}}(\mathbf{Q}_c)_{\mathbf{x}_{fix}}, \\ \mathbf{H}_1 &= \mathbf{J}_u(\mathbf{Q}_c)_{\mathbf{x}_{fix}}, \mathbf{D}_0 = \mathbf{Q}_D(\mathbf{x}_{fix}), \mathbf{D}_1 = \mathbf{J}_{q_1^{lc}}(\mathbf{Q}_D)_{\mathbf{x}_{fix}}, \mathbf{D}_2 = \mathbf{J}_{q_1^{lc}}(\mathbf{Q}_D)_{\mathbf{x}_{fix}}, \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{J}_u(\mathbf{Q}_D)_{\mathbf{x}_{fix}}, \boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{Q}_N(\mathbf{x}_{fix}). \end{aligned} \quad (3.104)$$

В качестве исполнительных механизмов в модулях ИЭМС чаще всего используются двигатели постоянного тока, уравнения таких электродвигателя имеют вид:

$$\dot{I}_{Яi} = -\frac{1}{T_{Я}} I_{Яi} - \frac{c_e}{L_{Я}} \Omega_{двi} + \frac{1}{L_{Я}} U_{двi}, \quad \dot{\Omega}_{двi} = \frac{c_M}{J_{дв}} I_{Яi} - \frac{\mu_{дв}}{J_{дв}} \Omega_{двi} + \frac{R_{двi}}{J_{дв}}, \quad T_{Я} = \frac{L_{Я}}{R_{Я}},$$

где $I_{яi}$ - ток якоря; $T_{я}$ - постоянная времени якорной обмотки; $R_{яi}$ - активное сопротивление якорной обмотки; c_e - коэффициент противо-эдс; $L_{я}$ - индуктивность якорной обмотки; $U_{двi}$ - напряжение управления; c_m - коэффициент момента; $J_{дв}$ - момент инерции ротора; $\mu_{дв}$ - коэффициент вязкого трения на валу ротора, $R_{двi}$ - реакция на двигатель: $R_{двi} = \frac{C_i \Delta l_{ai} + D_i \dot{l}_{1ji}^{1bji}}{I_i}$.

Уравнения электродвигателей также можно привести к уравнениям второго порядка введением замены переменной $I_{яi} = \dot{\rho}_{яi}$, где $\rho_{яi}$ - заряд:

$$T_{я} \ddot{\rho}_{яi} = -\dot{\rho}_{яi} - \frac{c_e}{R_{я}} \dot{\alpha}_{двi} + \frac{1}{R_{я}} U_{двi}, J_{дв} \ddot{\alpha}_{двi} = c_m \dot{\rho}_{яi} - \mu_{дв} \dot{\alpha}_{двi} + R_{двi}, i = 1..n.$$

3.4. Математическая модель модуля ИЭМС с изменяемой геометрией адаптивной платформы и основания

Рассмотренные выше модели динамики описывают модули ИЭМС с постоянной геометрией платформы и основания, помимо этого существуют модули с изменяемой геометрией данных элементов. Например, подобные модули используются в универсальных захватах роботов [109-111, 116].

Математическая модель такого модуля при симметричном изменении платформы и основания строится следующим образом [116].

Введём координаты крепления шарниров на основании в СК ОСН: $\mathbf{r}_{1bj1}^{1b,1b}, \mathbf{r}_{1bj2}^{1b,1b}, \dots, \mathbf{r}_{1bjn}^{1b,1b}$, где нижний индекс обозначает номер шарнира на основании. Последняя цифра в нижнем индексе обозначает порядковый номер шарнира на основании. На основании расположено n шарниров по окружности с радиусом R_{1b} . Радиус основания может изменяться, поэтому координаты шарниров являются функцией радиуса основания: $\mathbf{r}_{1bj1}^{1b,1b}(R_{1b}), \mathbf{r}_{1bj2}^{1b,1b}(R_{1b}), \dots, \mathbf{r}_{1bjn}^{1b,1b}(R_{1b})$.

Аналогично введем координаты крепления шарниров на адаптивной платформе в СК АП: $\mathbf{r}_{1j1}^{1,1}, \mathbf{r}_{1j2}^{1,1}, \dots, \mathbf{r}_{1jn}^{1,1}$, где нижний индекс обозначает номер шарнира на АП. Последняя цифра в нижнем индексе обозначает порядковый номер шарнира на АП. На АП расположено 6 шарниров по окружности с радиусом R_1 . Радиус АП может изменяться, поэтому координаты шарниров являются функцией радиуса АП: $\mathbf{r}_{1j1}^{1,1}(R_1), \mathbf{r}_{1j2}^{1,1}(R_1), \dots, \mathbf{r}_{1jn}^{1,1}(R_1)$.

Текущие длины actuators могут быть определены как расстояния между соответствующими шарнирами основания и АП по формуле $l_{1ji}^{1bj} = |\mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1b}| = |\mathbf{r}_{1ji}^{1b,1b}(R_1) - \mathbf{r}_{1bj}^{1b,1b}(R_{1b})|$, $i = 1..n$, где $\mathbf{r}_{1ji}^{1b,1b}$ – координаты точки крепления шарниров на АП в СК ОСН, которые рассчитываются следующим образом: $\mathbf{r}_{1ji}^{1b,1b} = \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} [\mathbf{r}_1^{1c,1c} + \mathbf{c}_1^{1c} \mathbf{r}_{1ji}^{1,1}(R_1)]$, $i = 1..n$. В итоге выражение для текущих длин примет вид:

$$l_{1ji}^{1bj} = |\mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} [\mathbf{r}_1^{1c,1c} + \mathbf{c}_1^{1c} \mathbf{r}_{1ji}^{1,1}(R_1)] - \mathbf{r}_{1bj}^{1b,1b}(R_{1b})| = l_{0i} + \Delta l_{ai}(\psi_i), \quad i = 1..n, \quad (3.105)$$

где l_{0i} – начальные значения длин actuators, $l_{0i} = |\mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_{1ji}^{1,1}(R_1(0)) - \mathbf{r}_{1bj}^{1b,1b}(R_{1b}(0))|$; Δl_{ai} – текущие удлинения штоков actuators; $\Delta l_{ai} = \tau_i + \frac{\psi_i}{I_i}$, τ_i – деформация actuators, ψ_i – угол поворота ротора двигателя actuators, I_i – передаточное число редуктора, $R_1(0), R_{1b}(0)$ – начальные значения радиусов R_1, R_{1b} соответственно.

Выражение (3.105) определяет геометрические соотношения базового блока от управляемых параметров R_1, R_{1b}, ψ_i . В зависимости от задачи, эти выражения могут быть использованы как для нахождения требуемых программных значений параметров R_1, R_{1b}, ψ_i , так и положения АП базового блока по известным изменениям этих параметров.

Для расчета программных значений параметров R_1, R_{1b}, ψ_i по известным значениям $\mathbf{r}_1^{0,0}, \mathbf{r}_{1b}^{0,0}, \mathbf{c}_{1b}^0, \mathbf{c}_{1c}^{1b}$ необходимо определить $\mathbf{r}_1^{1c,1c}$ и $\mathbf{c}_1^{1c}$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1^{1c,1c} &= \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \left[\mathbf{c}_{1b}^{0,T} \left[\mathbf{r}_1^{0,0} - \mathbf{r}_{1b}^{0,0} \right] - \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \right], \\ \mathbf{c}_1^{1c} &= \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} \mathbf{c}_1^0,\end{aligned}\quad (3.106)$$

затем необходимо численно решить систему уравнений (3.106). Следует отметить, что в (3.106) число уравнений составляет 6, а искоемых параметров 8. Таким образом, мы имеем множество возможных решений и должны разработать стратегию управления базовым блоком, например, по критерию максимального быстродействия. С целью упрощения расчётов, можно изначально выработать законы изменения R_1 , R_{1b} , исходя из решаемой задачи.

Решение прямой задачи определения положения АП в БСК по параметрам R_1 , R_{1b} , ψ_i приводит к неоднозначности из-за структуры системы уравнений (3). Произвольные комбинации этих параметров могут приводить к несовместности уравнений в (3.106). Одним из методов преодоления неоднозначности является линеаризация (3.106) относительно программной траектории АП базового блока, тогда $\mathbf{r}_1^{1c,1c}$ и $\boldsymbol{\varphi}_1^{1c}$ находятся как:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \\ \boldsymbol{\varphi}_1^{1c} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} R_{1b} \\ R_1 \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}, \quad (3.107)$$

где $\boldsymbol{\psi}$ - вектор, составленный из ψ_i , $\mathbf{A}$ – матрица параметров, составленная из параметров уравнений (3.106).

Скорость относительного поступательного движения шарниров i -ого актуатора в СК ОСН найдём по формуле:

$$\mathbf{v}_{1ji}^{1bj,1b} = \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{v}_1^{1c,1c} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{c}_1^{1c} \dot{\mathbf{r}}_{1ji}^{1,1} (\dot{R}_1) + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{c}_1^{1c} \left\langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} (R_1) \right\rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1^{1c} - \dot{\mathbf{r}}_{1bji}^{1b,1b} (\dot{R}_{1b}), \quad (3.108)$$

где $\dot{\mathbf{r}}_{1ji}^{1,1} (\dot{R}_1)$ и $\dot{\mathbf{r}}_{1bji}^{1b,1b} (\dot{R}_{1b})$ - скорости изменения положения соответствующих шарниров АП и ОСН; $\dot{R}_1$ и $\dot{R}_{1b}$ - скорости изменения радиусов АП и ОСН соответственно.

Совместное решение уравнений (3.106) и (3.108) в малых отклонениях от программной траектории АП, позволяет определить $\mathbf{r}_1^{lc,lc}, \varphi_1^{lc}, \dot{\varphi}_1^{lc}, \mathbf{v}_1^{lc,lc}$ при известных значениях управляемых параметров $R_1, R_{1b}, \psi_i, \dot{R}_1, \dot{R}_{1b}$ и Ω_i . Следует отметить, что число уравнений составляет 12, а искоемых параметров 16. С целью упрощения расчётов, можно изначально выработать законы изменения R_1, R_{1b} и $\dot{R}_1, \dot{R}_{1b}$, исходя из решаемой задачи.

Модель динамики базового блока SEMS с платформой и основанием переменной геометрии будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \Theta \dot{\mathbf{V}}_1^{0,1} + \dot{\Theta} \mathbf{V}_1^{0,1} + \Phi \Theta \mathbf{V}_1^{0,1} &= \Xi, \\ \mathbf{V}_1^{0,1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{0,1} \\ \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{M}_1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle & 0 \\ \langle \mathbf{v}_1^{0,1} \rangle & \langle \boldsymbol{\omega}_1^{0,1} \rangle \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{I}}_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{m}_1 &= \text{diag}(m_1 \quad m_1 \quad m_1), \end{aligned} \quad (3.109)$$

где Θ - матрица инерции АП; $\mathbf{v}_1^{0,1}$ - линейные скорости движения АП относительно БСК в проекциях на СК АП $\mathbf{v}_1^{0,1} = \mathbf{c}_1^{0,T} \mathbf{v}_{1b}^{0,0} + \mathbf{c}_1^{0,T} \mathbf{c}_{1b}^0 \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle^T \boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1b} + \mathbf{c}_1^{1c,T} \mathbf{v}_1^{1c,1c}$; $\boldsymbol{\omega}_1^{0,1}$ - угловые скорости движения АП относительно БСК в проекциях на СК АП $\boldsymbol{\omega}_1^{0,1} = \mathbf{c}_1^{0,T} \mathbf{c}_{1b}^0 \boldsymbol{\omega}_{1b}^{0,1b} + \boldsymbol{\omega}_1^{1c,1}$; $\mathbf{V}_1^{0,1}$ - вектор скоростей АП; $\mathbf{F}_1$ - суммарный вектор сил, действующих на АП в СК АП; $\mathbf{M}_1$ - суммарный вектор моментов, действующих на АП в СК АП; Ξ - суммарный вектор сил и моментов, действующих на АП в СК АП; m_1 - масса АП; $\mathbf{I}_1$ - моменты инерции АП; $\dot{\mathbf{I}}_1$ - матрица скоростей изменения моментов инерции, которые обусловлены изменением размеров платформы. Матрица $\dot{\mathbf{I}}_1$ является функцией параметров R_1 , и $\dot{R}_1$. Силы и моменты имеют выражения аналогичные случаю, когда размеры платформ базового блока не меняются.

С учётом кинематической схемы базового блока вектор скорости $\mathbf{V}_1^{0,1}$ может быть определен следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_1^{0,1} &= \mathbf{M}_1^{1c} \dot{\mathbf{q}}_1^{1c} + \mathbf{L}_1^{1c,T} \mathbf{L}_{1c}^{1b,T} \mathbf{M}_{1b}^0 \dot{\mathbf{q}}_{1b}^0, \\
\mathbf{M}_1^{1c} &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^{1c,T} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_1^{1c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^{1c} & 0 \\ \langle \mathbf{r}_1^{1c,1c} \rangle \mathbf{c}_1^{1c} & \mathbf{c}_1^{1c} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{L}_{1c}^{1b} &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1c}^{1b} & 0 \\ \langle \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} \rangle \mathbf{c}_{1c}^{1b} & \mathbf{c}_{1c}^{1b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{1b}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1b}^{0,T} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_{1b}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_1^{1c} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{1c,1c} \\ \varphi_1^{1c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_{1b}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1b}^{0,0} \\ \varphi_{1b}^0 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.110}$$

где $\mathbf{M}_1^{1c}$ и $\mathbf{M}_{1b}^0$ - матрицы связи скоростей платформ и обобщённых скоростей; $\mathbf{L}_1^{1c}$ и $\mathbf{L}_{1c}^{1b}$ - матрицы преобразования систем координат; $\mathbf{q}_1^{1c}$ - обобщённые координаты АП; $\mathbf{q}_{1b}^0$ - обобщённые координаты основания.

Линеаризация уравнений (3.109, 3.110) осуществляется аналогично случаю базового блока с постоянной геометрией платформы и основания, в данном случае динамикой изменения их размеров пренебрегают.

3.5. Построение матриц эквивалентных жёсткостей для платформы Стюарта (гексапод)

Одним из направлений повышения точности и надёжности электромеханических систем параллельной архитектуры, например адаптивных платформ (n-подов), является применение в контуре управления моделей динамики, позволяющих прогнозировать особые положения (заклинивания) и рассчитывать оптимальные законы управления. Жесткостные характеристики подобных систем являются основным элементом прогнозирующих моделей. В качестве примера приводится методика построения матрицы эквивалентной жёсткости платформы Стюарта (гексапода), с учётом изменения линии действия актуаторов.

Воспользуемся упрощенной формулой для расчёта матрицы эквивалентной жёсткости [117]:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{C}}_i & \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \\ \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \bar{\mathbf{C}}_i & \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{c}_1^{1c} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_{i*} \mathbf{C}_{pi*} \mathbf{T}_{i*}^T, \quad (3.111)$$

$$\mathbf{T}_{i*} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1^{1c,T} \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \mathbf{c}_1^{1c,T} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{pi*} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{C}_{pi*}$ – симметрическая матрица коэффициентов жёсткости i -ого актуатора размерности 6×6 .

В случае малых угловых перемещений адаптивной платформы выражение (3.111) примет вид:

$$\mathbf{C} \approx \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{C}}_i & \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{C}}_i \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \\ \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \bar{\mathbf{C}}_i & \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle \bar{\mathbf{C}}_i \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_{i**} \mathbf{C}_{pi*} \mathbf{T}_{i**}^T, \mathbf{T}_{i**} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \langle \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \rangle & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3.112)$$

что согласуется с формулами полученными в [118], где матрица $\mathbf{C}_{pi}$ рассчитывается следующим образом:

$$\mathbf{C}_{pi} \approx \mathbf{C}_{pi*} = \begin{bmatrix} C_i \frac{\mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1jb} \mathbf{r}_{1ji}^{1bj,1jb,T} \mathbf{c}_{1c}^{1b}}{l_{0i*}^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Применим формулу (3.112) к построению матрицы эквивалентной жёсткости платформы Стюарта (гексапод) для перемещения контррефлектора антенной установки [8]. Гексапод - это исполнительный механизм параллельной структуры с шестью актуаторами, параметры которого указаны в таблице 3.1.

Таблица №3.1. Параметры гексапода.

Название параметра	Актуатор №1	Актуатор №2	Актуатор №3	Актуатор №4	Актуатор №5	Актуатор №6
жёсткость, C_i , Н/м	$1.4 \cdot 10^9$	$1.4 \cdot 10^9$	$1.4 \cdot 10^9$	$1.4 \cdot 10^9$	$1.4 \cdot 10^9$	$1.4 \cdot 10^9$
Координаты шарниров СК АП, м	$x = 0.1362$ $y = 0.2097$ $z = 0$	$x = 0.1362$ $y = -0.2097$ $z = 0$	$x = 0.1135$ $y = 0.2228$ $z = 0$	$x = -0.2497$ $y = 0.0131$ $z = 0$	$x = 0.1135$ $y = -0.2228$ $z = 0$	$x = -0.2497$ $y = -0.0131$ $z = 0$
Координаты шарниров СК ОСН, м	$x = 0.2497$ $y = 0.0131$ $z = 0$	$x = 0.2497$ $y = -0.0131$ $z = 0$	$x = -0.1135$ $y = 0.2228$ $z = 0$	$x = -0.1362$ $y = 0.2097$ $z = 0$	$x = -0.1135$ $y = -0.2228$ $z = 0$	$x = -0.1362$ $y = -0.2097$ $z = 0$
Радиус ОСН, м	0.25					
Радиус АП, м	0.25					
Высота, м	0.5					

При $\mathbf{r}_1^{1c,1c} = [0, 0, 0]^T$ м, $\boldsymbol{\varphi}_1^{1c} = [0^0, 0^0, 0^0]^T$ матрица эквивалентной жесткости будет:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.7177 & 0 & 0 & 0 & -0.1794 & 0 \\ 0 & 0.7177 & 0 & 0.1794 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.9646 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1794 & 0 & 0.2176 & 0 & 0 \\ -0.1794 & 0 & 0 & 0 & 0.2176 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0712 \end{bmatrix} \times 10^9,$$

при $\mathbf{r}_1^{1c,1c} = [0.1, -0.1, 0.1]^T$ м, $\boldsymbol{\varphi}_1^{1c} = [0^0, 0^0, 0^0]^T$ матрица эквивалентной жесткости будет:

$$C = \begin{bmatrix} 0.6303 & -0.1768 & 1.0399 & -0.0011 & -0.1371 & -0.0227 \\ -0.1768 & 0.6790 & -1.0250 & 0.1524 & 0.0018 & -0.0251 \\ 1.0399 & -1.0250 & 7.0907 & 0.0470 & 0.0426 & -0.0007 \\ -0.0011 & 0.1524 & 0.0470 & 0.2147 & -0.0076 & -0.0300 \\ -0.1371 & 0.0018 & 0.0426 & -0.0076 & 0.2285 & 0.0316 \\ -0.0227 & -0.0251 & -0.0007 & -0.0300 & 0.0316 & 0.0582 \end{bmatrix} \times 10^9,$$

при $\mathbf{r}_1^{lc,lc} = [0, 0, 0]^T$ м, $\boldsymbol{\varphi}_1^{lc} = [15^0, -15^0, 15^0]^T$ матрица эквивалентной жесткости будет:

$$C = \begin{bmatrix} 0.6780 & 0.0165 & -0.0600 & -0.0387 & -0.1574 & 0.0725 \\ 0.0165 & 0.7689 & -0.0440 & 0.1738 & -0.0315 & -0.0726 \\ -0.0600 & -0.0440 & 6.9530 & -0.0089 & 0.0162 & 0.0599 \\ -0.0387 & 0.1738 & -0.0089 & 0.1958 & 0.0099 & -0.0641 \\ -0.1574 & -0.0315 & 0.0162 & 0.0099 & 0.2063 & -0.0446 \\ 0.0725 & -0.0726 & 0.0599 & -0.0641 & -0.0446 & 0.0938 \end{bmatrix} \times 10^9,$$

при $\mathbf{r}_1^{lc,lc} = [-0.1, 0.1, -0.1]^T$ м, $\boldsymbol{\varphi}_1^{lc} = [-15^0, 15^0, -15^0]^T$ матрица эквивалентной жесткости будет:

$$C = \begin{bmatrix} 1.3276 & -0.2792 & -1.0700 & 0.0480 & -0.1947 & -0.0322 \\ -0.2792 & 1.0924 & 1.2678 & 0.1605 & 0.0148 & 0.1059 \\ -1.0700 & 1.2678 & 5.9800 & -0.0654 & -0.0433 & -0.1077 \\ 0.0480 & 0.1605 & -0.0654 & 0.2101 & -0.0102 & 0.0970 \\ -0.1947 & 0.0148 & -0.0433 & -0.0102 & 0.1573 & 0.0080 \\ -0.0322 & 0.1059 & -0.1077 & 0.0970 & 0.0080 & 0.1248 \end{bmatrix} \times 10^9.$$

Приведены простые формулы расчёта матрицы эквивалентной жёсткости адаптивных платформ, перемещаемых пакетами актуаторов. Рассмотрено применение данных формул для построения матрицы эквивалентной жёсткости для платформы Стюарта (гексапода) и приведён численный пример для гексапода с параметрами, указанными в таблице 3.1.

Показано, что в отличии от формулы для пакета пружин [118] в формуле для адаптивных платформ [117] необходимо учитывать изменение

длины и линии действия актуаторов. Из приведённого примера видно, что влияние этих факторов существенно.

Показано, что в случае малых угловых перемещений платформы формула (3.111) переходит в (3.112), которая аналогична формуле для расчёта матрицы эквивалентной жёсткости для пакета пружин.

3.6. Расчёт программной траектории базового блока ИЭМС

Задачей группового регулятора базового блока (ББ) ИЭМС является выработка законов выдвижения штоков каждого актуатора с учетом быстродействия приводов актуаторов и инерции n -пода.

Траектория движения n -пода задается в БСК как три линейных $\mathbf{r}_{КТ*}^{0,0} = [x_{КТ*}^{0,0}, y_{КТ*}^{0,0}, z_{КТ*}^{0,0}]^T$ и три угловых $\boldsymbol{\phi}_{КТ*}^0 = [\beta_{КТ*}^0, \theta_{КТ*}^0, \alpha_{КТ*}^0]^T$ перемещения контрольной точки (КТ). Реальное положение КТ определяется вектором $\mathbf{r}_{КТ}^1$ с координатным столбцом $\mathbf{r}_{КТ}^{1,1}$ и углами $\boldsymbol{\phi}_{КТ}^1$, которым соответствует матрица вращения $\mathbf{c}_{КТ}^1$. С учетом кинематической модели реальное положение КТ в БСК может быть рассчитано по формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{КТ}^{0,0} = \mathbf{r}_1^{0,0} + \mathbf{r}_{КТ}^{1,0} = \mathbf{r}_{1b}^{0,0} + \mathbf{c}_{1b}^0 \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1b}^0 \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c} + \mathbf{c}_{1b}^0 \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{c}_1^{1c} \mathbf{r}_{КТ}^{1,1}, \\ \mathbf{c}_{КТ}^0 = \mathbf{c}_{1b}^0 \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{c}_1^{1c} \mathbf{c}_{КТ}^1 \Rightarrow \boldsymbol{\phi}_{КТ}^0 = f(\mathbf{c}_{КТ}^0). \end{aligned} \quad (3.113)$$

Поэтому целесообразно рассчитывать линейные η_r и угловые η_ϕ ошибки наведения КТ в БСК, при этом законы изменения ошибок наведения от времени, должны учитывать динамику электроприводов n -пода.

Поиск программной траектории ББ сформулируем как задачу (2.46, 2.65-2.75), тогда линейные η_r и угловые η_ϕ ошибки наведения КТ в БСК примут вид:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_r &= \mathbf{r}_{\text{КТ}}^{0,0} - \mathbf{r}_{\text{КТ}^*}^{0,0} = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{T_h - T_1} \left[T_h e^{\frac{t}{T_h}} - T_1 e^{\frac{t}{T_1}} \right] \\ \frac{a_2}{T_h - T_2} \left[T_h e^{\frac{t}{T_h}} - T_2 e^{\frac{t}{T_2}} \right] \\ \frac{a_3}{T_h - T_3} \left[T_h e^{\frac{t}{T_h}} - T_3 e^{\frac{t}{T_3}} \right] \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\eta}_\varphi &= \boldsymbol{\Phi}_{\text{КТ}}^0 - \boldsymbol{\Phi}_{\text{КТ}^*}^0 = \begin{bmatrix} \frac{a_4}{T_h - T_4} \left[T_h e^{\frac{t}{T_h}} - T_4 e^{\frac{t}{T_4}} \right] \\ \frac{a_5}{T_h - T_5} \left[T_h e^{\frac{t}{T_h}} - T_5 e^{\frac{t}{T_5}} \right] \\ \frac{a_6}{T_h - T_6} \left[T_h e^{\frac{t}{T_h}} - T_6 e^{\frac{t}{T_6}} \right] \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.114}$$

где a_i - начальное рассогласование по соответствующей координате, T_h - постоянная времени п-пода, T_i - постоянные времени замкнутой системы с регулятором, t - время.

Рассчитаем необходимые удлинения штоков актуаторов, чтобы n -под следовал по желаемой траектории с ошибками наведения (3.114), для этого определим текущие перемещения $\mathbf{r}_1^{1c,1c}(t)$ и текущие значения матрицы вращения $\mathbf{c}_1^{1c}(t)$ как функции ошибок наведения, учтя что $\mathbf{r}_{\text{КТ}}^{0,0}(t) = \mathbf{r}_{\text{КТ}^*}^{0,0}(t) + \boldsymbol{\eta}_r(t)$ и $\mathbf{c}_{\text{КТ}}^0(t) = \mathbf{c}_{\text{КТ}^*}^0(t) \mathbf{c}_{\text{КТ}}^{\text{КТ}^*}(\boldsymbol{\eta}_\varphi(t))$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1^{1c,1c}(t) &= \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T}(t) \left[\mathbf{r}_{\text{КТ}}^{0,0}(t) - \mathbf{r}_{1b}^{0,0}(t) \right] - \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} - \mathbf{c}_1^{1c}(t) \mathbf{r}_{\text{КТ}}^{1,1} = \\
&= \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T}(t) \left[\mathbf{r}_{\text{КТ}^*}^{0,0}(t) + \boldsymbol{\eta}_r(t) - \mathbf{r}_{1b}^{0,0}(t) \right] - \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} - \mathbf{c}_1^{1c}(t) \mathbf{r}_{\text{КТ}}^{1,1}, \\
\mathbf{c}_1^{1c}(t) &= \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T}(t) \mathbf{c}_{\text{КТ}}^0 \mathbf{c}_{\text{КТ}}^{1,T} = \mathbf{c}_{1c}^{1b,T} \mathbf{c}_{1b}^{0,T}(t) \mathbf{c}_{\text{КТ}^*}^0(t) \mathbf{c}_{\text{КТ}}^{\text{КТ}^*}(\boldsymbol{\eta}_\varphi(t)) \mathbf{c}_{\text{КТ}}^{1,T}.
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Подставив (3.115) в выражение для длин актуаторов найдем выражения для удлинений штоков актуаторов:

$$\Delta l_{ai} = \left| \mathbf{c}_{lb}^{0,T}(t) \left[\mathbf{r}_{KT*}^{0,0}(t) + \boldsymbol{\eta}_r(t) - \mathbf{r}_{lb}^{0,0}(t) - \mathbf{c}_{KT*}^0(t) \mathbf{c}_{KT}^{KT*}(t) \mathbf{c}_{KT}^{1,T} \left[\mathbf{r}_{KT}^{1,1} - \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \right] \right] - \mathbf{r}_{1bji}^{1b,1b} \right| - l_{0i},$$

$$i = 1..n. \quad (3.116)$$

Продифференцировав (3.116), получим выражения для скоростей удлинений штоков:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{l}_{ai} &= \frac{d}{dt} \left| \mathbf{c}_{lb}^{0,T}(t) \left[\mathbf{r}_{KT*}^{0,0}(t) + \boldsymbol{\eta}_r(t) - \mathbf{r}_{lb}^{0,0}(t) - \mathbf{c}_{KT*}^0(t) \mathbf{c}_{KT}^{KT*}(t) \mathbf{c}_{KT}^{1,T} \left[\mathbf{r}_{KT}^{1,1} - \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \right] \right] - \mathbf{r}_{1bji}^{1b,1b} \right| = \\ &= \frac{1}{l_{1ji}^{1bji}} \left[\langle \boldsymbol{\omega}_{lb}^{0,1b} \rangle^T \mathbf{c}_{lb}^{0,T} \left[\mathbf{r}_{KT*}^{0,0} + \boldsymbol{\eta}_r - \mathbf{r}_{lb}^{0,0} - \mathbf{c}_{KT*}^0 \mathbf{c}_{KT}^{KT*} \mathbf{c}_{KT}^{1,T} \left[\mathbf{r}_{KT}^{1,1} - \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \right] \right] + \mathbf{c}_{lb}^{0,T} \left[\mathbf{v}_{KT*}^{0,0} + \dot{\boldsymbol{\eta}}_r - \mathbf{v}_{lb}^{0,0} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{c}_{lb}^{0,T} \mathbf{c}_{KT*}^0 \langle \boldsymbol{\omega}_{KT*}^{0,KT*} \rangle \mathbf{c}_{KT}^{KT*} \mathbf{c}_{KT}^{1,T} \left[\mathbf{r}_{KT}^{1,1} - \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \right] - \mathbf{c}_{lb}^{0,T} \mathbf{c}_{KT*}^0 \mathbf{c}_{KT}^{KT*} \langle \boldsymbol{\omega}_{KT}^{KT*,KT} \rangle \mathbf{c}_{KT}^{1,T} \left[\mathbf{r}_{KT}^{1,1} - \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \right] \right]^T \cdot \\ &\quad \cdot \left[\mathbf{c}_{lb}^{0,T} \left[\mathbf{r}_{KT*}^{0,0} + \boldsymbol{\eta}_r - \mathbf{r}_{lb}^{0,0} - \mathbf{c}_{KT*}^0 \mathbf{c}_{KT}^{KT*} \mathbf{c}_{KT}^{1,T} \left[\mathbf{r}_{KT}^{1,1} - \mathbf{r}_{1ji}^{1,1} \right] \right] - \mathbf{r}_{1bji}^{1b,1b} \right] = \frac{\Omega_i}{I_i}, \quad i = 1..n, \end{aligned} \quad (3.117)$$

где $\langle \boldsymbol{\omega}_{lb}^{0,1b} \rangle$, $\langle \boldsymbol{\omega}_{KT*}^{0,KT*} \rangle$ и $\langle \boldsymbol{\omega}_{KT}^{KT*,KT} \rangle$ - кососимметрические матрицы образованные из компонентов соответствующих координатных столбцов $\boldsymbol{\omega}_{lb}^{0,1b} = \boldsymbol{\varepsilon}_{lb}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{lb}^0$, $\boldsymbol{\omega}_{KT*}^{0,KT*} = \boldsymbol{\varepsilon}_{KT*}^0 \dot{\boldsymbol{\phi}}_{KT*}^0$ и $\boldsymbol{\omega}_{KT}^{KT*,KT} = \boldsymbol{\varepsilon}_{KT}^{KT*} (\boldsymbol{\eta}_\varphi) \dot{\boldsymbol{\eta}}_\varphi$; $\mathbf{v}_{KT*}^{0,0}$ - желаемая скорость поступательного движения КТ; $\boldsymbol{\omega}_{KT*}^{0,KT*}$ - желаемая скорость углового движения КТ; $\dot{\boldsymbol{\eta}}_r$ и $\dot{\boldsymbol{\eta}}_\varphi$ - скорости изменения соответственно линейных и угловых ошибок наведения:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_r = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{T_h - T_1} \left[e^{\frac{t}{T_1}} - e^{\frac{t}{T_h}} \right] \\ \frac{a_2}{T_h - T_2} \left[e^{\frac{t}{T_2}} - e^{\frac{t}{T_h}} \right] \\ \frac{a_3}{T_h - T_3} \left[e^{\frac{t}{T_3}} - e^{\frac{t}{T_h}} \right] \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{a_4}{T_h - T_4} \left[e^{\frac{t}{T_4}} - e^{\frac{t}{T_h}} \right] \\ \frac{a_5}{T_h - T_5} \left[e^{\frac{t}{T_5}} - e^{\frac{t}{T_h}} \right] \\ \frac{a_6}{T_h - T_6} \left[e^{\frac{t}{T_6}} - e^{\frac{t}{T_h}} \right] \end{bmatrix}. \quad (3.118)$$

Для синтеза группового регулятора необходимо рассчитать амплитуды a_i и постоянные времени T_i при известном начальном и желаемом положениях и постоянной времени T_h . В начальный момент времени

рассогласования $\eta_r(t_0)$ и $\eta_\varphi(t_0)$ согласно (105) и (106) могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned}\eta_r(t_0) &= \mathbf{r}_{\text{КТ}}^{0,0}(t_0) - \mathbf{r}_{\text{КТ}^*}^{0,0}(t_0) = \\ &= \mathbf{r}_{1b}^{0,0}(t_0) + \mathbf{c}_{1b}^0(t_0) \left[\mathbf{r}_{1c}^{1b,1b} + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{r}_1^{1c,1c}(t_0) + \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{c}_1^{1c}(t_0) \mathbf{r}_{\text{КТ}}^{1,1} \right] - \mathbf{r}_{\text{КТ}^*}^{0,0}(t_0), \\ \eta_\varphi(t_0) &= \Phi_{\text{КТ}}^0(t_0) - \Phi_{\text{КТ}^*}^0(t_0) = f(\mathbf{c}_{\text{КТ}}^{\text{КТ}^*}(t_0)) = \\ &= f(\mathbf{c}_0^{\text{КТ}^*,\Gamma}(t_0) \mathbf{c}_{1b}^0(t_0) \mathbf{c}_{1c}^{1b} \mathbf{c}_1^{1c}(t_0) \mathbf{c}_{\text{КТ}}^1),\end{aligned}\quad (3.119)$$

где $f(\mathbf{c}_j^i(\varphi_j^i)) = \left[-\arctg(\mathbf{c}_{j,(3,2)}^i / \mathbf{c}_{j,(3,3)}^i), \arcsin(\mathbf{c}_{j,(1,3)}^i), -\arctg(\mathbf{c}_{j,(1,2)}^i / \mathbf{c}_{j,(1,1)}^i) \right]^T$,

нижние индексы в скобках обозначают соответственно номер строки и номер столбца выбранного элемента матрицы. Коэффициенты a_i определяются из соотношений $\eta_r(t_0) = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ и $\eta_\varphi(t_0) = [a_4 \ a_5 \ a_6]^T$.

На следующем этапе необходимо найти оптимальные значения времени переходного процесса $T_{\text{п.п.}}$ и постоянных времени T_i при заданной точности наведения по каждой координате соответственно δ_i и ограничениях на максимальные длины, скорости и ускорения выдвижения штоков актуаторов по модулю. Данная задача подробно описана в главе 2, выражения (2.46, 2.65-2.75), а также предложен алгоритм её решения.

3.7. Идентификация параметров динамических систем на базе модулей ИЭМС

Исследование модулей ИЭМС позволяет сделать вывод, что они являются электромеханическими системами с медленно меняющимися параметрами. И возможно выполнить линеаризацию исходных нелинейных уравнений в стационарных точках программных траекторий. Параметры таких моделей на практике получают, используя методы идентификации. В задачу идентификации входит определение таких параметров системы как моменты инерции, коэффициенты жёсткостей, демпфирования и трения. В общем случае модель объекта описывается уравнением [110]:

$$\Theta(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D}(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{u} + \mathbf{f},$$

где $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$ – обобщённые координаты, обобщённые скорости и обобщённые ускорения механической системы соответственно; $\mathbf{\Theta}$ – матрица инерции; $\mathbf{B}$ – матрица коэффициентов трения; $\mathbf{D}$ – матрица коэффициентов демпфирования; $\mathbf{C}$ – матрица жесткости; $\mathbf{u}$ – управление, $\mathbf{f}$ – внешнее воздействие.

Низкая динамика изменения параметров системы, позволяет выполнить линеаризацию системы в стационарных точках, и получается множество линейных моделей для разных областей фазового пространства:

$$\mathbf{\Theta}_i \Delta \ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{B}_i + \mathbf{D}_i] \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_i \Delta \mathbf{q} + \mathbf{O}_i = \Delta \mathbf{u} + \Delta \mathbf{f},$$

где $\mathbf{\Theta}_i$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{D}_i$, $\mathbf{C}_i$, – матрицы инерции, коэффициентов трения, демпфирования, жёсткости линеаризованной системы для i -той стационарной точки; $\mathbf{O}_i$ – постоянная составляющая; $\Delta \mathbf{q}$, $\Delta \dot{\mathbf{q}}$, $\Delta \ddot{\mathbf{q}}$, $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \mathbf{f}$ – малые приращения обобщенных координат, скоростей, ускорении, управляющих и внешних воздействий соответственно.

Наличие неизмеряемого внешнего воздействия усложняет процесс идентификации, поэтому стараются выбирать такие режимы работы системы, когда его влияние минимально. В этом случае методика идентификации описывается следующим образом:

1. Выбирается измеряемая координата вектора состояния x и управляющий сигнал u .

2. Строится передаточная функция системы по выбранным переменным:

$$W(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \mathbf{H}_1 [\mathbf{\Theta}_i s^2 + [\mathbf{B}_i + \mathbf{D}_i] s + \mathbf{C}_i]^{-1} \mathbf{H}_2,$$

где $\mathbf{H}_1$ – матрица измеряемого выхода, $\mathbf{H}_2$ – матрица управления, s – комплексная переменная.

3. Если основным источником информации являются частотные характеристики, то модель системы будем искать в виде:

$$W(j\omega) = \mathbf{H}_1 [\mathbf{C}_i - \mathbf{\Theta}_i \omega^2 + [\mathbf{B}_i + \mathbf{D}_i] \omega j]^{-1} \mathbf{H}_2,$$

где j – мнимая единица, ω – частота. Тогда задача идентификации формулируется как:

$$J = \min_{\mathbf{C}_i, \mathbf{\Theta}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{D}_i} \left\{ \sum_{\omega=\omega_n}^{\omega_k} \left[\left(|W(j\omega)| - |W^*(j\omega)| \right)^2 + \lambda \left(\arg W(j\omega) - \arg W^*(j\omega) \right)^2 \right] \right\},$$

при ограничениях на диапазоны измерения параметров модели, где $W^*(j\omega)$ – экспериментально снятая характеристика объекта, λ – весовой коэффициент, ω_n, ω_k – нижняя и верхняя границы частотного диапазона.

Если в качестве источника информации используются временные сигналы, то необходимо строить модель в виде разностного фильтра. Тогда выбирается период квантования по времени, исходя из динамики объекта. С помощью z – преобразования осуществляется переход от передаточной функции непрерывной системы к дискретной. Выполняется оценка параметров фильтра с помощью множественно-функциональных методов, МНК – идентификаторов и т.д. После составляется система уравнений, где каждый параметр разностного фильтра выражается функциональной зависимостью через параметры исходной системы. Данная система уравнений обладает избыточностью и имеет множество решений, поэтому необходимо учитывать диапазоны изменения параметров механической системы.

Совместное оценивание моментов инерции и жесткостей приводит к неоднозначности. Так на практике задаются значения моментов инерции, которые могут быть рассчитаны с использованием конечно-элементных моделей конструкций, по моделям также определяются диапазоны изменения коэффициентов жёсткости системы.

Рассмотренная методика ориентирована на оценивание эквивалентных жесткостей, однако при моделировании механических систем удобно использовать в описании систем парциальные жёсткости, которые слабо зависят от изменений обобщённых координат. В линейных системах связь

между матрицей эквивалентных жесткостей и парциальными жесткостями устанавливается выражением:

$$\Gamma^T C_{\Pi} \Gamma = C_i,$$

где Γ – топологическая матрица системы, C_{Π} – матрица парциальных жесткостей. Решение данного уравнения выполняется при учёте диапазонов изменения парциальных жесткостей методами линейного программирования. Алгоритм нахождения топологической матрицы линейных систем записывается следующим образом:

Если существует связь номер s между i - ой и j - ой вершинами графа системы по соответствующим координатам q_l и q_k , где l и k - номера координат в q , то в строке матрицы Γ с номером s ставиться -1 в позиции i , и ставиться 1 в позиции j , все остальные позиции строки заполняются нулями. Если существует связь номер s между нулевой (базовая система координат) и j - ой вершинами графа системы по соответствующим координатам q_l и q_k , где l и k - номера координат в q , то в строке матрицы Γ с номером s ставиться 1 в позиции j , все остальные позиции строки заполняются нулями. В общем случае топологическая матрица является функцией обобщённых координат, где учитывается изменение линии действия упругой связи в пространстве.

3.8. Пример идентификации параметров базового модуля ИЭМС

Объектом исследования является модуль ИЭМС на базе гексапода фирмы PI M-810.



Рис.3.2. Общий вид гексапода фирмы PI H-810

Гексапод H-810 компании Physik Instrumente (PI) с платформой диаметром 10 см является одной из самых компактных шестикординатных систем микропозиционирования, работающих по принципу параллельной кинематики. Системы параллельной кинематики по сравнению с системами последовательной кинематики имеют большую жесткость, меньшие габариты, не обладают движущимися кабелями, что уменьшает трение и увеличивает точность позиционирования.

Подвижная платформа гексапода приводится в движение с помощью шести независимых прецизионных бесщёточных двигателей, благодаря чему можно проводить позиционирование по трём линейным координатам (X , Y , Z) и трём координатам вращения вокруг соответствующих осей (θ_x , θ_y , θ_z). В гексапode M-810 используется принцип векторного управления двигателями, при этом, максимальная скорость позиционирования составляет 2.5 мм/с.

Гексапод M-810 поставляется в комплекте с контроллером. Модель M-810.D12 имеет контроллер C-887.21

В комплект программного обеспечения входит пользовательское программное обеспечение PIMikroMove с широким набором возможностей и интуитивно понятным интерфейсом, драйвера LabView и библиотеки

функций для разработки собственных приложений. Имеется возможность программными методами задавать точку вращения, что особенно важно для задач юстировки.

Контроллер может быть подключен к компьютеру по средствам интерфейсов TCP/IP или RS-232.

Технические характеристики гексапода фирмы PI M-810 приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Технические характеристики гексапода фирмы PI M-810

Характеристика	M-810	Единица измерения
*Предел перемещения X,Y	± 20	мм
*Предел перемещения Z	$\pm 6,5$	мм
*Предел перемещения qx, qy	± 10	°
*Предел перемещения qz	± 30	°
Двигатель	DC-двигатель	
Ход двигателя	$\pm 7,5$	мм
Встроенный датчик	Датчик положения(угловой энкодер)	
Разрешение встроенного датчика	12800	мет/об
Минимальный шаг перемещения X, Y	1	мкм
Минимальный шаг перемещения Z	0,5	мкм
Минимальный шаг перемещения qx, qy, qz	3,5	мкрад

Стабильность позиционирования X, Y	± 2	мкм
Стабильность позиционирования Z	$\pm 0,5$	мкм
Стабильность позиционирования qx, qy, qz	± 5	мкрад
Максимальное быстродействие X, Y, Z	2,5	мм/сек
Максимальное быстродействие qx, qy, qz	60	мрад/сек
Стандартное быстродействие X, Y, Z	2	мм/сек
Стандартное быстродействие qx, qy, qz	30	мрад/сек
Механические характеристики		
Максимальная нагрузка (основание горизонтальное/произвольно)	5/2,5	кг
Прочие условия		
Диапазон рабочих температур	от 0 до +50	°C
Масса	1,7	кг
Контроллер		
Рабочее напряжение	100-240(AC) 50/60 Гц	

* Максимальные перемещения по нескольким координатам (X, Y, Z, qX, qY, qZ) взаимозависимы.

Одной из особенностей подобного рода механизмов параллельных кинематических схем является нестационарность их параметров, например,

меняются моменты инерции, массы (присоединённые грузы), коэффициенты жёсткости, что является важным при управлении подобными конструкциями. Если моменты инерции могут быть рассчитаны на стадии проектирования и загружены в управляющую ЭВМ, то коэффициенты жёсткости должны определяться в результате натурных испытаний на стенде. Методика испытаний предусматривает два подхода [50]. Первый – это определение эквивалентной жёсткости при статическом нагружении по закону Гука, определяется деформация конструкции при известном законе нагружения по формуле: $\mathbf{F} = \mathbf{C}_{eq}\mathbf{q}$, где $\mathbf{F}$ – известный закон нагружения, $\mathbf{C}_{eq}$ – эквивалентная матрица жёсткости, $\mathbf{q}$ – деформации по каждой из координат. Второй подход – это определение жёсткостей по собственным частотам системы по формуле: $\text{eig}(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}_{eq}) = \mathbf{\Omega}$, где $\mathbf{J}$ – матрица инерции, $\mathbf{\Omega}$ – спектр системы. Матрица $\mathbf{C}_{eq}$ имеет внедиагональные элементы и её значения меняются в зависимости от ориентации элементов базового модуля. Подробно этот вопрос рассмотрен в [117]. Воспользуемся готовой формулой из [117] для определения эквивалентной жёсткости через парциальную, считая, что они одинаковы для каждого исполнительного элемента:

$$\mathbf{C}_{eq} = \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{C}_i \mathbf{T}_i^T, \\ \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^T \langle \mathbf{r}_i \rangle \mathbf{c}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}}_i = C \frac{\mathbf{c}_b^T \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T \mathbf{c}_b}{(l_i)^2},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – матрица Эйлера, $\mathbf{r}_i$ – координаты крепления шарниров верхней платформы в системе координат верхней платформы, $\mathbf{c}$ – матрица вращения, C – парциальная жёсткость исполнительного элемента, $\mathbf{c}_b$ – матрица вращения, определяющая начальное положение верхней платформы, l_i – длина i -ого исполнительного механизма, $\mathbf{r}_i$ – вектор определяющий координаты верхних шарниров i -ого исполнительного механизма относительно нижних шарниров, $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Тогда определение

жёсткости можно свести к нахождению парциальной жесткости исполнительных элементов по формуле:

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}_{eq} \mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{C}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q} = \mathbf{C} \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{c}_b^T \mathbf{r}_{l_i} \mathbf{r}_{l_i}^T \mathbf{c}_b}{(l_i)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда задача идентификации C может быть записана как:

$$\begin{aligned} J &= \min_C \{ \Phi \}, C_{\min} \leq C \leq C_{\max}, \\ \Phi &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{F}_j - \mathbf{C}_{eq} \mathbf{q}_j)^T (\mathbf{F}_j - \mathbf{C}_{eq} \mathbf{q}_j) = \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\mathbf{F}_j - C \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q}_j \right)^T \left(\mathbf{F}_j - C \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q}_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^T \mathbf{F}_j - 2C \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^T \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q}_j + C^2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i^T \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i \mathbf{q}_j^T \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q}_j, \end{aligned}$$

где $\mathbf{F}_j$ – j -ое измерение нагружающей силы, $\mathbf{q}_j$ – j -ое измерение упругих деформаций, $C_{\min}$ и $C_{\max}$ – минимальные и максимальные значения парциальной жёсткости соответственно. Тогда решением задачи будет аргумент при:

$$\Phi = \min \left\{ \Phi(C_{\min}), \Phi(C_{\max}), \Phi \left(\frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^T \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q}_j}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i^T \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i \mathbf{q}_j^T \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q}_j} \right) \right\}, \quad (3.120)$$

в диапазоне $C_{\min} \leq C \leq C_{\max}$.

С помощью координатно-измерительной машины были получены координаты крепления верхних и нижних шарниров гексапода в СК верхней платформы. Эти данные были использованы в модели механики гексапода, для расчёта произвольных положений гексапода при его движении и служили для верификации модели механики.

Перемещения гексапода контролировались с помощью координатно-измерительной машины и сравнивались с моделью механики, реализованной

в среде MatLab. Рассогласование модельных данных от экспериментальных не превысило 2%, что говорит о высокой адекватности предлагаемой модели.

Таблица 3.3. Координаты верхних и нижних шарниров, система координат с центром в середине верхней платформы

№ шарнира	Координата по X	Координата по Y	Координата по Z
Координаты верхних шарниров, мм			
1	37.5079	8.6197	-11.31
2	11.4625	-36.0756	-11.31
3	-12.7979	-38.2006	-11.31
4	25.3173	29.7602	-11.31
5	-38.4502	6.6039	-11.31
6	-26.0702	28.8957	-11.31
Координаты нижних шарниров			
1	37.6972	-7.4269	-99.4
2	25.5905	-28.3469	-99.4
3	-26.2255	-30.8270	-99.4
4	11.6900	37.6949	-99.4
5	-38.4556	-9.5620	-99.4
6	-12.3291	36.3998	-99.4

Определение парциальной жёсткости актуатора выполнялось по формуле (3.120). Для нагружения гексапода использовался калиброванный груз массой 2.6 кг, который был установлен на верхнюю платформу. Между центром системы координат верхней платформы и центром масс груза имелось плечо в 10 мм, для моделирования моментных нагрузок при повороте гексапода. Деформация гексапода вычислялась как разница между положением ненагруженного и нагруженного гексапода в базовой системе координат, которая соответствует юстировочному положению. В качестве

примера, на рисунках 3.3. и 3.4. представлены графики деформации гексапода по оси z при линейном и угловом движении гексапода.

Изменения деформации имеют нелинейный вид даже в случае постоянной нагрузки, что обусловлено сложной нелинейной структурой эквивалентной матрицы жёсткости гексапода, коэффициенты которой являются функциями линейных и угловых координат, определяющих положение.

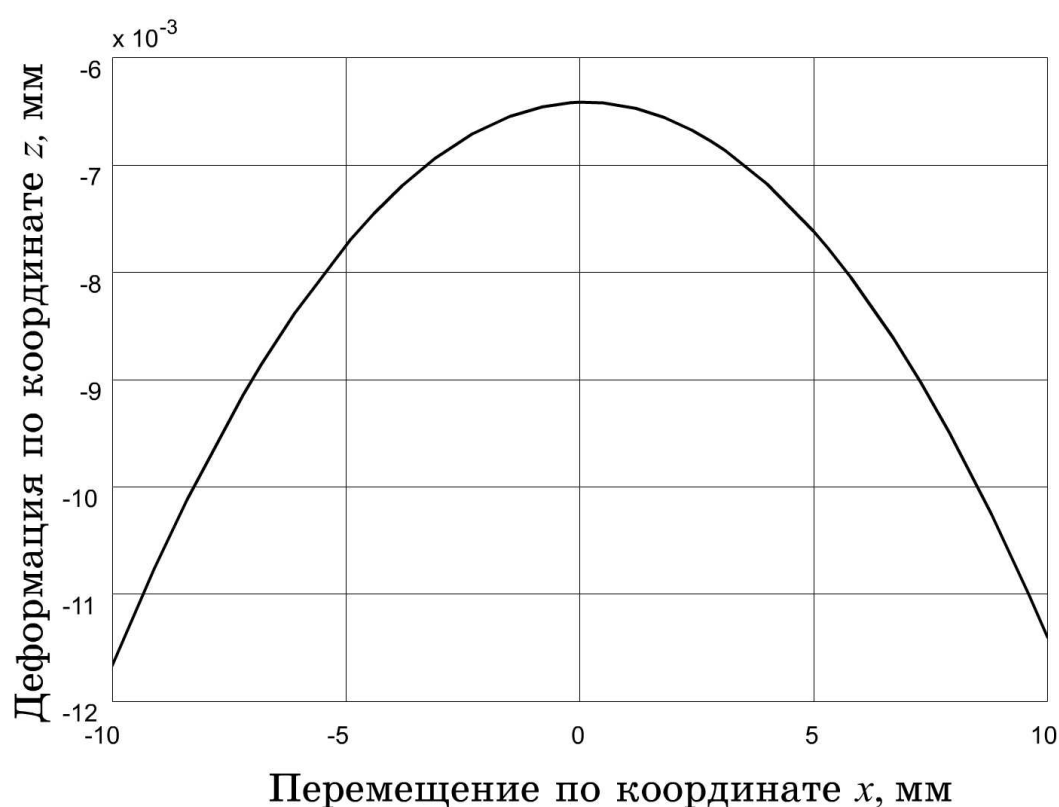


Рис. 3.3. Изменение деформации по оси z при перемещении гексапода вдоль оси x при силе постоянной нагрузки -25.5 Н по оси z в базовой системе координат.



Рис. 3.4. Изменение деформации по оси z при повороте гексапода вокруг оси x при действующей силе нагрузки -25.5 Н по оси z в базовой системе координат.

По результатам экспериментов была рассчитана парциальная жесткость актуатора равная 685 Н/мм. При найденной парциальной жёсткости исполнительного элемента могут быть рассчитаны эквивалентные жёсткости для произвольных положений гексапода.

3.9. Идентификации параметров системы управления гексаподом

Рассмотрим задачу идентификации параметров гексапода при его движении в малых отклонениях относительно заданной траектории [119]. Гексапод может перемещаться по шести степеням свободы трём линейным перемещениям (x , y , z) и трём углам (θ_x , θ_y , θ_z), поэтому имеет смысл ввести разделение движений по шести независимым каналам исходя из суперпозиции малых перемещений. Рассмотрим идентификацию параметров

на примере канала перемещения по линейной координате x . Определим структуру модели для идентификации. Выходной переменной будет являться координата линейного перемещения x . Управляющими переменными будут шесть удлинений актуаторов $u_1, \dots, u_6$. Модель для задач идентификации гексапода по координате x будет иметь вид:

$$\sum_{i=0}^n a_i x[t_k - \tau_i] + \sum_{j=1}^6 \sum_{i=0}^m b_{j,i} u_j[t_k - \tau_i] = 0,$$

где i – номер временного сдвига; t_k – текущий момент времени; n – порядок разностного фильтра; m – целое число, $n \geq m$; $a_i, b_{j,i}$ – параметры разностного фильтра; x – координата линейного перемещения; $u_1, \dots, u_6$ – удлинения актуаторов.

Используя МНК-идентификатор для квазистационарного случая и при малых отклонениях перемещений гексапода, построим передаточную матрицу системы.

Алгоритм работы идентификатора:

1. Начало
2. Сбор измерительной информации и формирование выборок отсчетов по каждой из координат перемещения гексапода (в примере x) и шести удлинений актуаторов $u_1, \dots, u_6$.
3. Формирование вектора идентифицируемых параметров разностного фильтра: $\mathbf{p} = [a_0, a_1, \dots, a_n, b_{1,0}, b_{1,1}, \dots, b_{6,m}]^T$.
3. Формирование матрицы $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{A}^{-\tau_0} \mathbf{x}, \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x}, \dots, \mathbf{A}^{-\tau_n} \mathbf{x}, \mathbf{A}^{-\tau_{1,0}} \mathbf{u}_1, \mathbf{A}^{-\tau_{1,1}} \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{A}^{-\tau_{6,m}} \mathbf{u}_6],$$

где $\mathbf{A}^{-\tau_i}$ – оператор временного сдвига, подробно описанный в главе 1.
4. Формирование матрицы $\mathbf{H} = 0.5\mathbf{F}^T \mathbf{F}$.
5. Нахождение собственных чисел $\mathbf{H}_{\text{eig}}$ и собственных векторов $\mathbf{V}_{\text{eig}}$ матрицы $\mathbf{H}$.

6. Редукция системы посредством анализа собственных частот матрицы **H**. Сохраняется только информативная часть спектра системы. Для этого формируется матрица $\mathbf{H}_{\text{cut}} = \mathbf{H}_{\text{eig}} * \mathbf{V}_{\text{eig}}^T$, из которой вырезаются строки и столбцы, соответствующие выбранным частотам, и строятся матрицы $\mathbf{A}_{\text{cut}}$ и $\mathbf{B}_{\text{cut}}$.

7. Параметры фильтра находятся по формуле: $\mathbf{p} = -\text{inv}(\mathbf{A}_{\text{cut}}) * \mathbf{B}_{\text{cut}}$.

8. Конец

В случае низкого соотношения сигнал/шум более эффективно использовать идентификатор, заданный системой линейных неравенств.

Алгоритм работы идентификатора:

1. Начало

2. Сбор измерительной информации и формирование выборок отсчетов по каждой из координат перемещения гексапода (в примере x) и шести удлинений актуаторов $u_1, \dots, u_6$.

3. Выбор интервальной оценки невязки для идентификатора.

4. Посторонние системы линейных неравенств.

5. Применение методов линейного программирования для решения полученной системы неравенств.

6. Моделирование разностного фильтра с целью определения невязки между откликом реального объекта и фильтра.

7. Если качество идентификации приемлемое, перейти в пункт 8, иначе в пункт 3.

8. Конец

Передаточная функция для выхода x и входа u_1 :

$$-3.022 z^3 + 6.558 z^2 - 4.734 z + 1.136$$

$$z^4 - 2.183 z^3 + 1.577 z^2 - 0.3763 z + 0.0001721$$

Передаточная функция для выхода x и входа u_2 :

$$2.501 z^3 - 5.407 z^2 + 3.885 z - 0.9274$$

$$z^4 - 2.183 z^3 + 1.577 z^2 - 0.3763 z + 0.0001721$$

Передаточная функция для выхода x и входа u_3 :

$$0.7856 z^3 - 1.694 z^2 + 1.213 z - 0.2883$$

$$z^4 - 2.183 z^3 + 1.577 z^2 - 0.3763 z + 0.0001721$$

Передаточная функция для выхода x и входа u_4 :

$$1.587 z^3 - 3.43 z^2 + 2.464 z - 0.5877$$

$$z^4 - 2.183 z^3 + 1.577 z^2 - 0.3763 z + 0.0001721$$

Передаточная функция для выхода x и входа u_5 :

$$1.231 z^3 - 2.659 z^2 + 1.908 z - 0.4547$$

$$z^4 - 2.183 z^3 + 1.577 z^2 - 0.3763 z + 0.0001721$$

Передаточная функция для выхода x и входа u_6 :

$$-1.782 z^3 + 3.868 z^2 - 2.793 z + 0.6708$$

$$z^4 - 2.183 z^3 + 1.577 z^2 - 0.3763 z + 0.0001721$$

Результаты идентификации приведены на рисунке 3.3.

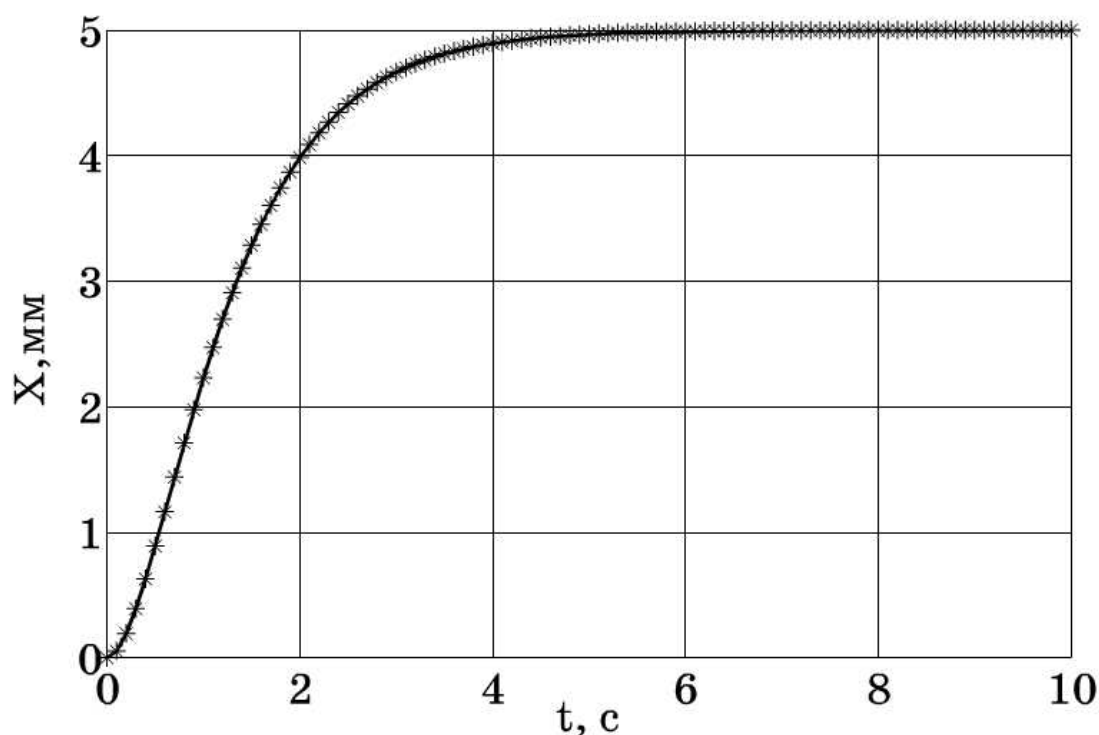


Рис. 3.5. Результат идентификации гексапода. (- - выход идентифицированной модели, * - выход реального объекта)

Результаты идентификации, отражённые на рисунке 3.5. адекватность полученной модели в виде передаточных функций.

Выводы

В главе рассмотрены вопросы разработки кинематической и динамической моделей модулей ИЭМС с параллельной кинематической схемой с постоянной и меняющейся геометрией платформ.

Предложена упрощенная модель модуля ИЭМС путём линеаризации уравнений динамики базового блока в стационарной точке.

Предложены простые формулы расчёта матрицы эквивалентной жёсткости адаптивных платформ, перемещаемых пакетами актуаторов. Рассмотрено применение данных формул для построения матрицы эквивалентной жёсткости для платформы Стюарта (гексапода) и приведён численный пример для гексапода.

Предложен метод идентификации парциальной жёсткости актуатора адаптивных платформ. С помощью данного метода выполнена идентификация парциальной жёсткости актуатора гексапода PI H-810.

Показано, что в отличии от формулы для пакета пружин в формуле для адаптивных платформ необходимо учитывать изменение длины и линии действия актуаторов. Из приведённого примера видно, что влияние этих факторов существенно.

Рассмотрен метод идентификации параметров такой упрощенной модели гексапода. Применение таких упрощенных моделей позволит использовать их в бортовом компьютере для прогнозирования и оптимизации траекторий движения и управления подобными системами.

Глава 4. Методы повышения качества управления зеркальными системами радиотелескопов миллиметрового диапазона посредством применения ИЭМС

4.1. Анализ существующих зеркальных систем радиотелескопов, методов и средств управления ими

Модули ИЭМС получили широкое распространение в системах управления антенными установками в качестве элементов опорно-поворотных устройств (ОПУ) зеркальных систем (ЗС) радиотелескопов (РТ) [8,120-133]. За время развития радиоастрономии предлагались различные конструкции РТ. Наибольшее распространение получили РТ с зеркальными системами с полноповоротными рефлекторами. Вопросы создания и управления крупными радиотелескопами отражены в работах учёных и конструкторов: М.Ю. Архипова [134], Л.Д. Бахраха [135], И.С. Виноградова [136], Д.И. Воскресенского [137], М.А. Гурбанязова [138], П.Д. Калачева [139], А.Н. Козлова [138], Г.Г. Соколовского [140,141], П.В. Белянского [142], В.С. Поляка [143], В.Б. Тарасова [138], А.Е. Городецкого [15, 120-122, 125, 128, 131-133, 144, 145], В.В. Дубаренко [15, 122, 125-128, 131, 144-147], С.Ю. Мисюрина [148], И.А. Коняхина [149-152], В.Г. Гимельмана [153], Ю.Н. Артёменко [8, 15, 113, 114, 122, 126, 127], С.С. Щесняка [154,155], Ю.В. Постникова [156-159], А.И. Нечаева, А.И. Боровкова, А.В. Юсова, О.К. Елифанова, В.В. Козырева и др.

Радиотелескопы подобного типа собирают космическое радиоизлучение с помощью рефлектора, представляющего собой зеркало, часто имеющего вид параболоида вращения. В таких системах энергия падающего излучения концентрируется в особых зонах, называемых фокусами или фокальными линиями, где устанавливается приёмная аппаратура. Работа подобных систем возможна как на одиночный приёмник с одним рупором, так и на матричный приёмник с матрицей рупоров. Параметры диаграммы направленности рупора выбираются таким образом,

чтобы облучить большую поверхность зеркала и исключить влияние шума Земли и боковых источников.

На практике применяются следующие схемы зеркальных систем РТ с параболическим рефлектором:

- 1) Схема с параболическим рефлектором;
- 2) Схема Грегори;
- 3) Схема Кассегрена;
- 4) Схема Нейсмита.

Для РТ, построенных по схеме, состоящей из одного параболического зеркала, имеются сложности с организацией приёма радиоизлучения из-за большого угла раскрыва облучателя и из-за того, что облучатель направлен в сторону земли, являющейся источником шумового излучения. При этом кабина, где расположена приёмная аппаратура, находится в фокусе ГЗ на большой высоте, что затрудняет её обслуживание.

По этим причинам широкое распространение получили системы, состоящие из нескольких зеркал. Такие ЗС используют дополнительные зеркала для перенаправления излучения в область вторичного фокуса, где организовать его сбор наиболее удобно. В данном случае положение облучателя направлено в сторону неба, а шумовая составляющая от земли отсекается ГЗ и рупором облучателя. В таких системах применяются рупорные облучатели с малыми углами раскрыва. Для повышения чувствительности приёмников их помещают в охлаждающие криогенные системы, размещение которых в области вторичного фокуса вызывает меньше затруднений. К недостаткам таких зеркальных систем следует отнести затенение ГЗ от вторичного зеркала, которое называется контррефлектором (КР). Также увеличивается уровень стоячих волн.

Примерами двухзеркальных систем являются схемы Грегори и Кассегрена. Схема Кассегрена состоит из главного рефлектора параболической формы и гиперболического контррефлектора. Отраженное от КР излучение собирается во вторичном фокусе, расположенном между

вершиной и фокусом ГЗ. Кабина с приёмной аппаратурой обычно размещается на специальной платформе таким образом, чтобы шумовая температура антенны была минимальной. Схема Кассегрена является короткофокусной и в малой степени чувствительной к деформациям и ошибкам наведения элементов конструкции РТ.

Другим вариантом двухзеркальной системы является схема Грегори, которая состоит из параболического ГЗ и эллиптического КР. Схема Грегори позволяет вести работу из первичного фокуса без съёма КР, так как он устанавливается за первичным фокусом. Преимуществом схемы Грегори является возможность построения длиннофокусных зеркальных систем, когда вторичный фокус расположен за вершиной ГЗ. Радиоизлучение в подобных системах фокусируется в тонкий луч, что обеспечивает более эффективный приём. Кабина с приёмной аппаратурой размещается в удобном для обслуживания месте, защищённом от внешних воздействий и шумов, что повышает чувствительность приёмной аппаратуры. В системе Грегори удобно использовать вторичные зеркала для решения задач переключения приёмников и автофокусировки, так как из-за очень узкого луча вспомогательные зеркала будут иметь небольшой размер и, как следствие, высокое быстродействие. К недостаткам схемы Грегори стоит отнести высокую чувствительность к деформациям и ошибкам наведения ЗС РТ по сравнению со схемой Кассегрена. В схеме Грегори особое внимание следует уделять точности поверхности КР, и взаимному положению ГЗ и КР.

Примерами схемы Грегори являются: радиотелескоп с диаметром ГЗ 100 метров в Грин-Бэнк, США и 100-метровый радиотелескоп в Эффельсберге, Германия.

Помимо двухзеркальных систем используются схемы с третьим зеркалом, получившие название схем Нейсмита. В классической схеме Нейсмита ГЗ является параболическим, а КР представляет собой гиперболоид. Плоское зеркало Нейсмита устанавливается вблизи вторичного фокуса и предназначено для перенаправления радиоизлучения на различные

приёмники и решения задачи автофокусировки. В настоящее время зеркала Нейсмита применяются в схеме Грегори. Использование подобных зеркал удобно именно в схеме Грегори, так как в этом случае из-за узкого луча, эти зеркала будут иметь небольшие размеры и высокое быстродействие.

В зависимости от схемы ЗС радиотелескоп состоит из следующих основных элементов:

1. Элементы ЗС РТ:

- 1.1. Главное зеркало (ГЗ), или рефлектор;
- 1.2. Контррефлектор (КР) (для схем Кассегрена, Грегори и Нейсмита);
- 1.3. Перископическое зеркало (ПЗ), или зеркало Нейсмита (только для схемы Нейсмита);
- 1.4. Приёмник, или облучатель;

2. Элементы ОПУ РТ:

- 2.1. Платформа, обеспечивающая поворот ЗС относительно азимутальной оси;
- 2.2. Основание, обеспечивающее поворот относительно угломестной оси;
- 2.3. Ферменный каркас, поддерживающий элементы ЗС;
- 2.4. Ригель, к которому крепиться КР (для схем Кассегрена, Грегори и Нейсмита);
- 2.5. Противовесы, уравнивающие ферменный каркас, основание, ригель и ЗС.

По типу работы РТ можно разделить на стационарные и полноповоротные. Стационарные РТ имеют неподвижное ГЗ и перемещаемый КР. Такие РТ могут сопровождать космические источники непродолжительное время и работают по большей части «на проход». Скорость ориентации подобных РТ – это скорость суточного вращения Земли.

В отличие от стационарных РТ полноповоротные способны наводить свою ЗС в различные участки неба и сопровождать источники радиоизлучения, тем самым могут долгое время накапливать сигнал. Это

позволяет принимать слабые радиосигналы посредством долгого накопления, что существенно повышает качество радиоприёма.

Основным элементом РТ является его ЗС, качество отражающих поверхностей которых определяет диапазон рабочих радиоволн, так деформации элементов ЗС от эталонных профилей не должны превышать $\lambda/10$, где λ – это длина волны принимаемого радиоизлучения. Большие РТ – это громоздкие сооружения, подверженные влиянию внешних факторов, таких как ветер, неравномерный нагрев и гравитационные воздействия. Поэтому вопрос компенсации этих возмущений является приоритетной задачей.

На территории России используются большие РТ для решения астрономических задач: 70-метровый РТ с параболическим зеркалом в Евпатории (Крым), 64-метровые рефлекторные антенны в Медвежьих Озерах под Москвой, в Калязине и 70-метровый РТ, аналог евпаторийскому, в Уссурийске, сеть 32-метровых РТ с параболическим зеркалом (п. Светлое, п. Зеленчук).

За рубежом также существуют большие полноповоротные РТ: 64 м (Паркс, Австралия), 100 м (Эффельсберг, Германия), 100 м (Гран Бэнк, США), 50-метровый РТ GTM, расположенный в Мексике, антенны миллиметровых волн, работающие вплоть до длины волны ~ 1 мм: 15-м шведский телескоп SEST, установленный в Чили, 30-м телескоп IRAM в Испании и 45-м телескоп Обсерватории Нобеяма (Япония).

Зеркальная система РТ поддерживается и перемещается с помощью ОПУ. Для большинства современных полноповоротных больших РТ используются азимутально-угломестные ОПУ, обеспечивающие позиционирование по углу азимута за счёт поворота платформы РТ и по углу места посредством ориентации качающей части (основания), состоящей из ЗС, ферменного каркаса и противовесов.

Современные большие РТ строятся с использованием гомологической схемы [160, 161], основная идея которой заключается в том, что ГЗ под

действием гравитационных сил деформируется таким образом, чтобы на каждом угле места поверхность рефлектора сохраняла форму, близкую к параболической, но с другим фокусным расстоянием, чем у исходного параболоида, и с погрешностью не выше $\lambda/10$ в сравнении с новым параболоидом. Таким образом, на каждом угле места антенна РТ переходит в новый параболоид с заданной погрешностью. Подобная схема реализована на 70-метровых РТ в Евпатории и Уссурийске, на 100-метровом РТ в Эффельсберге, 100-метровом GBT, 50-метровом GTM и других.

Большие полноповоротные РТ – это дорогостоящие, сложные астрономические инструменты, затраты на строительство которых увеличиваются с их диаметром. Альтернативным вариантом получения высокого углового разрешения является создание системы, состоящей из большого количества РТ диаметром до 25 м, работающих в режиме интерферометра. Подобные РТ, находясь на расстоянии L друг от друга, наблюдая за одним и тем же источником, формируют антенну эквивалентного диаметра L . Таким образом, достигается повышение углового разрешения по сравнению с одиночным РТ. Используя подобный принцип, создаются системы радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (РСДБ), когда РТ могут находиться на большом удалении друг от друга, на других континентах или в космосе. В этом случае мы можем получать сверхвысокие разрешения при наблюдении за космическими источниками.

В России функционирует радиоинтерферометр «Квазар-КВО» на основе 32-метровых радиотелескопов обсерваторий «Светлое», «Зеленчукская» и «Бадары», работает Сибирский солнечный радиотелескоп в Бурятии. В других странах функционируют интерферометры: VLA (Very Large Array, Нью-Мексико, США), ANTF (Наррабрай, Австралия), Вестерборк (Голландия), MERLIN (Великобритания). Работают системы РСДБ такие как американская VLBA, европейская EVN и др.

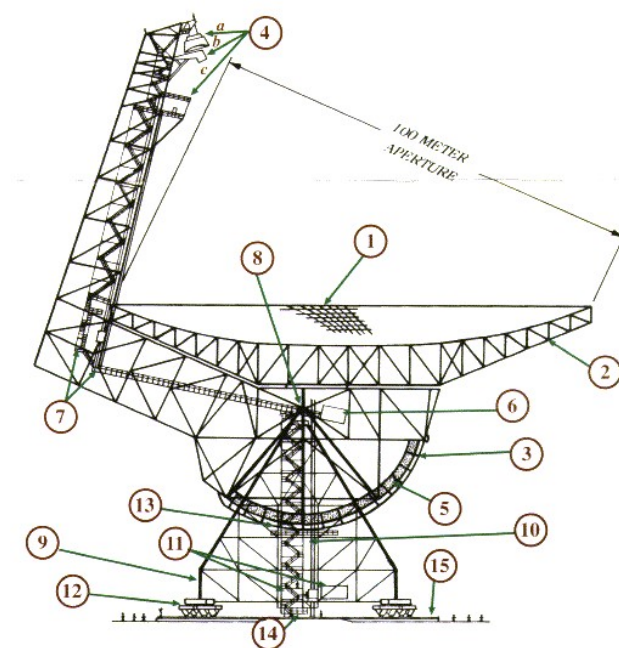
Радиоинтерферометры позволяют решать задачи, связанные с увеличением разрешающей способности радиоастрономических

инструментов, но для приёма сигналов от сверхудалённых космических объектов они не подходят. Связано это с тем, что чувствительность приёмников ограничена, и чтобы собрать необходимое количество энергии для преодоления порога приёмника, необходимо увеличивать эффективную площадь антенны. А собрать излучение на один приёмник в массивах, состоящих из нескольких РТ, не представляется возможным из-за больших расстояний между ними. Таким образом, массив 25-метровых антенн с учётом порога приёмника, не может решать задачи больших РТ. Поэтому создание больших полноповоротных РТ с диаметром ГЗ более 50 метров не потеряло своей актуальности особенно в диапазонах сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых волн. Развитие высокоточной измерительной техники и средств автоматического управления позволило создавать крупные РТ с адаптивными ЗС, которые способны компенсировать влияния внешних воздействий, чтобы обеспечить точность профиля поверхностей зеркал в диапазоне требуемых значений $\lambda/10$. По данному принципу построено несколько больших РТ, например, 100-метровый GBT в США и 50-метровый GTM в Мексике.

Например, на 100-метровом РТ GBT (США) ГЗ выполнено в виде параболоида, составленного из отдельных щитов (Рис.4.1). Положение щитов ГЗ меняется при помощи электромеханических актуаторов (Рис.4.1, в) так, чтобы обеспечить минимальное среднеквадратическое отклонение от рассчитанного аппроксимирующего параболоида (АП). Наведение ГЗ осуществляется по углу азимута и углу места при помощи двух электроприводов (Рис.4.1, б). Положение контррефлектора изменяется при помощи пятистепенного привода (Рис.4.1, г) так, чтобы фокус и фокальная ось ГЗ, фокус и фокальная ось КР совмещались с минимальными ошибками.



а)



б)



в)



г)

а) общий вид GBT; б) структурная схема GBT; в) главное зеркало с актуаторами; г) контррефлектор и помещение с приемной аппаратурой.

Рис.4.1. Радиотелескоп GBT

Радиотелескоп 50-метровый РТ GTM (Мексика) [160] помимо адаптивных ГЗ и КР имеет перископическое зеркало (ПЗ), установленное на приводе, которое направляет принимаемый сигнал на выбранный приёмник.

Создание больших полноповоротных РТ, способных работать в миллиметровых и субмиллиметровых волнах напрямую связано с

совершенствованием систем активной коррекции профилей поверхностей ЗС РТ. Поэтому модули ИЭМС могут быть использованы для этих целей. Существуют действующие антенны с адаптивными рефлекторами, щиты которых перемещаются с помощью адаптивных платформ Гью-Стюарта, например, как это реализовано в 500-метровом радиотелескопе FAST. Также подобные системы используются для позиционирования зеркал Нейсмита и контррефлекторов (GTM, РТ-13 и др.). Помимо этого, существуют реализации опорно-поворотных устройств на платформе Гью-Стюарта, например, массив анизотропии реликтового излучения им. Ли Юаньчжэ, радиоинтерферометр из 13 элементов (с возможностью расширения до 19) на поворотной 6-метровой платформе, проект ММА, космический радиотелескоп «Миллиметрон» и др.

4.2. Принципы построения адаптивных зеркальных систем на основе модулей ИЭМС

Современные требования к точности отражающих поверхностей ЗС больших радиотелескопов приводят к созданию средств их адаптации к внешним нагрузкам, таким как вес, ветровые нагрузки, термодформации и т.д. Мировые тенденции в проектировании подобных ЗС направлены на внедрение универсальных модулей ИЭМС, что связано с конструктивными и экономическими преимуществами их использования. Для антенн небольшого и среднего диаметра (до 25 метров) опорно-поворотное устройство может быть выполнено на адаптивной платформе, которое обеспечивает как угловые, так и линейные перемещения антенны по шести степеням свободы, что может быть использовано, например, для компенсации качки, если антенна установлена на корабле, такая антенна не имеет мёртвых секторов и может обеспечивать непрерывное сопровождение космических объектов при больших углах места. При сложении антенны обеспечивается доступ к приёмно-передающей аппаратуре без башни обслуживания.

Подобные монтажки в своей основе используют адаптивные платформы Гью-Стюарта (гексапод), перемещаемые электромеханическими актуаторами, положение платформы определяется встроенной лазерной измерительной системой.

Следующий уровень адаптации – это использование активных методов коррекции отражающих поверхностей. Многие современные антенны в своей основе используют принцип гомологии и есть необходимость коррекции формы и положения вторичных зеркал: контррефлектора и перископического зеркала. Для этой цели КР и ПЗ также могут быть установлены на адаптивные платформы или подвесы с параллельной кинематической схемой, например, гексапод. Целью перемещения КР является совмещение фокусов ГЗ и КР по трём линейным и двум угловым координатам, а также осуществление сканирования, с целью захвата источников на сопровождение, измерение шумовой температуры неба и т.д. С помощью ПЗ реализуется переключение с одного приёмника на другой и быстрая коррекция ошибок наведения ГЗ и КР, также может быть осуществлено быстрое сканирование, со скоростями большими, чем у КР. Для компенсации деформаций ГЗ поверхность КР может быть выполнена из отдельных щитов, каждый из которых также устанавливается на трипод или гексапод, что обеспечивает с одной стороны высокий уровень адаптации, с другой требуемую жесткость конструкции и универсализацию её компонентов.

Для работы в миллиметровом диапазоне радиоволн требуются предельные точности поверхности ГЗ, которые не могут быть получены только за счёт эффектов гомологии, и требуется использовать адаптивные поверхности ГЗ. Для этого поверхность ГЗ выполняется составленной из отдельных щитов, по аналогии с поверхностью КР. Данные щиты также устанавливаются системы электромеханических домкратов. Так в адаптивных поверхностях ГЗ и КР первого поколения (Грин Бэнк, США) группа из четырёх щитов скрепляется углами на суппорте, и каждый суппорт перемещается актуатором. Таким образом, каждый щит имеет четыре точки

закрепления, что приводит к его деформации при перемещении, а сама конструкция позволяет только линейные перемещения и обладает низкой жёсткостью. Адаптивные поверхности второго поколения строятся на базе триподов и гексаподов, с помощью которых перемещается каждый щит. В данном случае щиты механически развязаны и обеспечиваются как угловые, так и линейные перемещения щитов без их деформации. Третье поколение адаптивных зеркал предусматривает использование дополнительных актуаторов, позволяющих корректировать поверхности щитов ГЗ и КР. Основной проблемой в управлении подобными ЗС является расчёт аппроксимирующих поверхностей с учётом свойств электродинамики и линий действия исполнительных механизмов.

Применение модулей ИЭМС будет рассмотрено на примере разрабатываемого наземного РТ миллиметрового диапазона РТ-70. На РТ-70 планируется использовать ЗС, состоящую из 3 зеркал: параболического рефлектора, эллиптического контррефлектора и плоского перископического зеркала. Радиотелескоп РТ-70 будет являться основным инструментом создающейся международной обсерватории, строящейся на высокогорном плато Суффа в отрогах Туркестанского хребта в Республике Узбекистан. Рабочий диапазон частот принимаемого излучения 5 – 300 ГГц (6 см – 1 мм). С учетом уникального радиоастроклимата региона плато РТ преимущественно будет работать в коротковолновой части миллиметрового диапазона волн.

Таблица 4.1. Основные проектные характеристики антенной установки радиотелескопа РТ-70

Диаметр главного зеркала, м	70
Геометрическая форма поверхности ГЗ	Параболоид вращения
Фокусное расстояние, м	21
Угол раскрытия, град	160

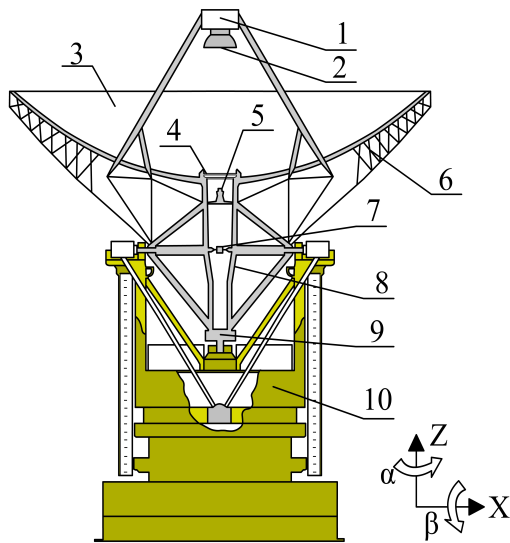
Схема облучения	Трёхзеркальная система с параболическими рефлектором, эллиптическим контррефлектором и плоским перископическим зеркалом
Рабочий диапазон волн λ	S – миллиметровый ($\lambda = 0.87 - 10$ мм) М- сантиметровый ($\lambda = 1 - 6$ см)
Диаметр вторичного зеркала, м	3
Геометрическая форма	эллипсоид вращения
Межфокусное расстояние	24,2
Размер перископического	600 мм
Эквивалентный фокус системы	57,1
Метод компенсаций весовых деформаций ГЗ	гомология и активная коррекция формы поверхности ГЗ
СКО деформированного параболоида ГЗ от аппроксимирующего, мм	0.062
Ошибки профиля панелей рабочей обшивки (СКО), мкм	50
Тип антенной установки	полноповоротная
Тип основания	башенное
Тип монтажа	азимутальная, с взаимно-перпендикулярными не пересекающимися осями
Высота над уровнем моря, м	2324

Общий вид и основные элементы РТ-70 представлены на рисунке 4.2. Радиотелескоп РТ-70 имеет адаптивное ГЗ – параболоид вращения диаметром 70 метров. Наведение ГЗ осуществляется по углу азимута и углу места при помощи двух электроприводов (Рис.4.3).

Прорабатываются различные создания адаптивной ЗС РТ-70. В изначальном проекте предусматривалось использовать щиты трапецевидной формы, максимальный размер которых 2,5х2 метра, общее число щитов 1188 14-ти типоразмеров.

Для обеспечения работы РТ в коротковолновой части миллиметрового диапазона форма поверхности ГЗ должна сохраняться во время наблюдений

при действии гравитационных, тепловых и ветровых деформаций с точностью 50 – 70 мкм.



1 - Ригель; 2 - Контррефлектор; 3 - Главное зеркало; 4 - Опорное кольцо; 5 - Облучатель; 6 - Ферменный каркас; 7 - Гироплатформа; 8 - Основание; 9 - Противовес; 10 - Платформа; α - угол азимута; β - угол места.

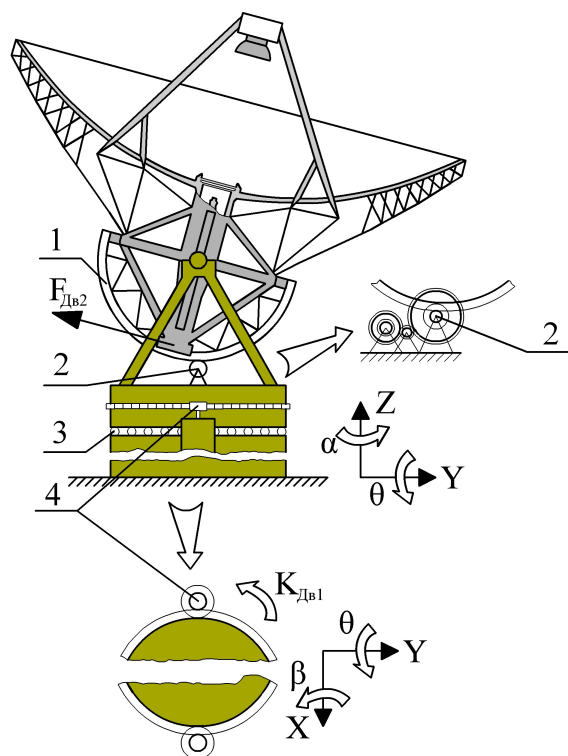
Рис.4.2. Общий вид радиотелескопа РТ-70

Чтобы решить подобную задачу была предложена система активной коррекции профиля поверхности ГЗ [162, 163], предусматривающая установку каждого щита на специальных электродомкратах (актуаторах), которые крепятся на ферменном каркасе РТ (как на 100-метровом GBT в США и 50-метровом GTM в Мексике). Каждый актуатор штоком соединён со суппортом, к которому крепятся углы четырёх щитов. Каждый щит крепится к четырём суппортам. Число актуаторов 1440. Во время наблюдений системой управления отслеживается положение каждого щита и при необходимости регулируется их взаимное положение для создания

оптимальной формы отражающей поверхности ГЗ. В разделе 4.4. предложен алгоритм расчёта управляющих воздействий для адаптивной поверхности ГЗ с учётом линии действия актуаторов и ограничений на диапазон их перемещений.

Ферменный каркас ГЗ спроектирован с использованием принципа гомологических деформаций, что необходимо учитывать при управлении ЗС РТ. Так на каждом угле места конструкция ГЗ при деформации переходит в форму, близкую параболоиду вращения, но с другим фокусом и вершиной чем у исходного. Компенсация изменения фокусного расстояния и положения фокальной оси при наведении по углу места производится автоматически системой управления [162, 163] путем линейного и углового

перемещения КР таким образом, чтобы фазовые искажения в раскрыве облучателя, вызываемые этим перемещением, полностью компенсировали фазовые искажения, вызываемые деформацией ГЗ.



1 – делительная окружность зубчатого сектора; 2 – угломестный привод; 3 – шаровой погон; 4 – азимутальный привод; $K_{Дв1}$ – управляющий момент, действующий на платформу; $F_{Дв2}$ – управляющая сила, действующая на противовес.

Рис.4.3. Расположение электросиловых приводов наведения на РТ

Согласно [162, 163] на РТ-70 проектируется использовать КР диаметром 3 м, который имеет форму эллипсоида вращения. Контррефлектор будет собран из отдельных листов на каркасе. Управление положением КР осуществляется системой управления. По проекту, описанному в [162, 163], КР будет оснащен шестистепенным приводом, позволяющим КР перемещаться по трем линейным и трём угловым координатам.

Быстродействия адаптивной поверхности ГЗ и перемещаемого КР недостаточно для компенсации влияния деформаций конструкции и динамических ошибок наведения для обеспечения устойчивой работы РТ в миллиметровом диапазоне. Для решения данной задачи было предложено использовать малоинерциальный

элемент – зеркало Нейсмита (перископическое зеркало) [162, 163]. Перископическое зеркало (ПЗ) устанавливается на привод, обеспечивающий перемещения по трём линейным и трем угловым координатам. Альтернативный вариант применению ПЗ [128, 162, 163] – это установка приёмника на специальную адаптивную платформу (адаптивная платформа облучателя – АПО), которая тоже обеспечивает перемещение приёмника по

трём линейным и трём угловым координатам, для компенсации влияния деформаций и ошибок наведения ЗС и автофокусировки системы.

Стремление корректно сформулировать цель управления, привело к необходимости анализа типовых режимов работы РТ и исследования электродинамических свойств ЗС РТ мм диапазона для получения оценок влияния деформаций ее элементов на распределение электромагнитного поля в области вторичного фокуса, где установлен облучатель. Для этого была разработана электродинамическая модель (ЭДМ) ЗС [163-165].

В [163] анализировались основные режимы работы РТ, главным из которых является приём радиоизлучения от космических источников радиоизлучения (КИР), что предусматривает накопление радиосигнала при длительной экспозиции (до нескольких часов). В [163] было показано, что в этом случае применение одиночного приёмника с площадью апертуры большей, чем площадь главного интерференционного кольца в раскрыве облучателя приведет к тому, что в приемник могут попасть излучения от нескольких источников, что сильно затруднит их идентификацию. С другой стороны, уменьшение площади апертуры облучателя приведет к чрезвычайно жестким требованиям к точности наведения ГЗ, что является проблематичным при создании следящих приводов и измерительной системы. Применение матричных приемников (МПР) [159-169], представляющих собой пакет облучателей, упакованных в матрицу, подобную ПЗС, применяемой в оптике, является эффективным способом компенсации влияния деформаций конструкции РТ и позволяет существенно снизить требования к точности наведения ГЗ и одновременно увеличить разрешающую способность за счет одновременного приема сигнала несколькими облучателями. Но МПР большой площади имеют высокий уровень собственных шумов и при наведении приём осуществляется на различные элементы МПР, в результате чего может быть ситуация, когда сигнал даже при длительной экспозиции не сможет превысить порог чувствительности приёмника. Поэтому радиоприем целесообразно вести на

матричный приёмник МПР небольшой площади, расположенный во вторичном фокусе. При этом положение МПР должно изменяться в пространстве за счет установки его на специальную управляемую платформу на подвеске (адаптивная платформа облучателя).

В радиоастрономии существует ряд задач, когда необходимо использование одиночного приёмника. Чтобы обеспечить непрерывное сопровождение КИР, было предложено [128, 162, 163] изменять положение приёмника в пространстве за счет установки его на специальную адаптивную платформу или применять ПЗ, что позволит эффективно компенсировать влияния деформаций ЗС и снизить требования по точности к приводам ГЗ.

В [163] был предложен **метод автофокусировки зеркальной системы радиотелескопа**, выраженной в виде обобщенного критерия качества управления ЗС, который имеет вид:

$$J = \int_{S_{об}} I(e_{зс}, q_{об}, x, y) ds + a_2 - a_3 |q_{фц} - q_{об}|^2 + a_1 A(e_{зс}, q_{об}, x_{фц}, y_{фц}), \quad \text{где } S_{об} - \text{площадь}$$

облучателя; $q_{фц} = (x_{фц}, y_{фц}, z_{фц}, \beta_{фц}, \theta_{фц})^T$ – координаты точки с наибольшей интенсивностью электромагнитного поля (фазовый центр) и углы ориентации вектора направления распространения результирующей ЭМВ; a_i – коэффициенты; $q_{фц} = H_1 e_{зс} + H_2 (e_{зс}) e_{зс}$; H_1, H_2 – матрицы;

$$I(e_{зс}, q_{об}, x, y) = A(e_{зс}, q_{об}, x, y) \sin^2(\delta(e_{зс}, q_{об}) \rho(e_{зс}, q_{об}, x, y)) / (\delta(e_{зс}, q_{об}) \rho(e_{зс}, q_{об}, x, y))^2,$$

где $e_{зс} = (\Delta\alpha_{ГЗ}, \Delta\beta_{ГЗ}, \Delta x_{кр}, \Delta y_{кр}, \Delta z_{кр}, \Delta\beta_{кр}, \Delta\theta_{кр})^T$ – ошибки наведения элементов ЗС:

$\Delta\alpha_{ГЗ}, \Delta\beta_{ГЗ}$ – ошибки наведения фокальной оси (ФО) ГЗ; $\Delta x_{кр}, \Delta y_{кр}, \Delta z_{кр}$ – линейные рассогласования фокусов КР и ГЗ; $\Delta\beta_{кр}, \Delta\theta_{кр}$ – угловые рассогласования между ФО ГЗ и ФО КР; x, y – координаты задающие точку в плоскости облучателя; $q_{об} = (\Delta x_{об}, \Delta y_{об}, \Delta z_{об}, \Delta\beta_{об}, \Delta\theta_{об})^T$ – линейные и угловые отклонения облучателя от юстировочного положения;

$$\rho^2 = (x + \Delta x_{об} + \delta_1 \Delta\alpha_{ГЗ} + \delta_2 \Delta\beta_{кр} + \delta_3 \Delta x_{кр} + \delta_4 \Delta z_{кр} \Delta\theta_{кр})^2 + (y + \Delta y_{об} + \delta_1 \Delta\beta_{ГЗ} + \delta_2 \Delta\theta_{кр} + \delta_3 \Delta y_{кр} + \delta_4 \Delta z_{кр} \Delta\beta_{кр})^2; \quad \delta = \delta_5 - \delta_6 (\Delta z_{об} + \delta_7 \Delta z_{кр} + \delta_8 \Delta\beta_{об} + \delta_8 \Delta\theta_{об} + \delta_9 \Delta\beta_{кр} \Delta y_{кр} + \delta_9 \Delta\theta_{кр} \Delta x_{кр})^2; \quad A = \delta_{10} - \delta_{11} (\Delta y_{кр} (x - \Delta x_{об}) + \delta_{12} \Delta x_{кр} \times$$

$\times(y-\Delta y_{06})+\delta_{13}\Delta x_{кр}(x-\Delta x_{06})+\delta_{14}\Delta y_{кр}(y-\Delta y_{06})+\delta_{15}\Delta z_{06})^2$; δ_i – весовые коэффициенты определяются при моделировании и верифицируются методами радиоголографии.

В качестве базового варианта для радиотелескопа РТ-70 в [162, 163] была предложена система управления, которая взята в качестве прототипа и усовершенствована в диссертационной работе. Исходная система управления состоит из 4 основных контуров [162, 163]:

1. Контур управления ГЗ. Наведение ГЗ осуществляется по углу азимута и углу места так, чтобы фокальная ось аппроксимирующего параболоида (АП), построенного по методу наименьших квадратов (МНК) по измерениям реперных точек поверхности ГЗ, совместились с линией визирования космического источника радиоизлучения (КИР);
2. Контур управления КР. Положение КР изменяется так, чтобы фокус и фокальная ось АП ГЗ и фокус и фокальная ось аппроксимирующего эллипсоида (АЭ) КР совместились с минимальными ошибками;
3. Контур управления адаптивной поверхностью ГЗ. Положение щитов ГЗ меняется при помощи электромеханических актуаторов так, чтобы обеспечить минимальное среднеквадратическое отклонение (СКО) профиля поверхности от рассчитанного АП ГЗ;
4. Контур автофокусировки приёмника [128]. По данным о координатах КИР и взаимном положении элементов ЗС с измерительной системы и наблюдателя пространственной металлоконструкции (ПМК) с помощью ЭДМ ЗС рассчитываются координаты фазового центра (ФЦ). Затем определяется управление, выдаваемое на привод ПЗ либо на привод подвижного приёмника, чтобы система координат (СК) приемника совместились с СК ФЦ.

Рассмотренная в [162, 163] система управления обладает следующими недостатками:

- система управления адаптивной поверхностью ГЗ не учитывает ограничений на реализуемость исполнительными механизмами желаемой поверхности, построенной с помощью аппроксимирующего параболоида;

- так как актуатор одновременно перемещает углы четырёх щитов, невозможно независимо скорректировать положение одного щита, таким образом, в управление вовлекается большая часть щитов, что приводит к большим энергозатратам и, как следствие, к увеличению мощности и массогабаритов питающей сети ГЗ;

- в ходе наведения антенны из-за деформаций линии действия актуаторов меняются непредсказуемо, а организовать локальную измерительную систему невозможно из-за ограничений, обусловленных конструкцией ферменного каркаса и щитов;

- не решена задача коррекции термдеформаций щитов;

- контррефлектор не имеет адаптивной поверхности, что существенным образом снижает качество приёма радиосигнала;

- при деформации РТ с учётом принципа гомологии на каждом угле места мы получаем свой аппроксимирующий параболоид с параметрами отличными от эталонного для которого были изготовлены щиты. Таким образом, кривизна щитов не соответствует АП ГЗ на текущем угле места, что так же приводит к снижению качества приёма.

Эти вопросы были рассмотрены и предложены методы их решения, изложенные в [15, 131]. Для компенсации температурных деформаций предлагается использовать дополнительно введены пьезоэлектрические элементы [15], жестко закрепленные на внешней и внутренней сторонах поверхности каждого из подвижных управляемых щитов антенны. Для измерения профиля поверхности щитов предлагается использовать локальную телевизионную систему измерения. Подобным образом формируется контур коррекции профиля щитов на локальном уровне.

Для усовершенствования ЗС предлагается использовать КР с адаптивной поверхностью. Остальные вопросы связаны со структурой

исполнительных механизмов перемещения щитов ГЗ и КР. Классическим решением у многих РТ с адаптивными поверхностями, является применения актуаторов для перемещения щитов. Система строится так, чтобы актуатор одним концом закреплялся на платформе ферменного каркаса, а шток перемещал суппорт, к которому монтируются углы щитов. Каждый суппорт соединяет углы четырёх соседних щитов с помощью шпилек, которые деформируются при наклоне антенны или выдвижении штока актуатора. Сделано это с целью минимизировать деформацию щитов в местах крепления. Всё это вносит дополнительные ошибки в позиционирование щитов. К преимуществам такой схемы стоит отнести простые методы выставления щитов на стадии юстировки, нет необходимости использовать специальную систему контроля зазоров между щитами. В разделе 4.4. предлагается алгоритм расчёта АП ГЗ и удлинений штоков актуаторов для подобной адаптивной поверхности с учётом линии действия актуаторов и диапазонов их перемещений по критерию минимума выдвижения их штоков. Линии действия актуаторов определяются на стадии юстировки для каждого угла места РТ, а потом записываются в память управляющей ЭВМ.

Решение задачи компенсации термдеформаций предусматривает использование локальной системы контроля профиля поверхности щитов, на которую можно возложить контроль зазоров между щитами и их положений. Тогда можно применить исполнительные механизмы параллельной структуры типа гексапод для перемещения щитов. Модули ИЭМС на основе гексоподов обладают большей жесткостью по сравнению с системами актуаторов и имеют встроенную систему управления положением, позволяют организовать высокоточное перемещение отдельного щита по трём линейным и трём угловым координатам. В данном случае появляется возможность перемещать щиты независимо, что не достигалось в классической схеме и можно использовать законы управления, описанные в [131]. Для этого по значениям положений щитов для каждого щита строят аппроксимирующий параболоид так, чтобы фокусное расстояние и

положение основания каждого параболоида минимально отличалось от соседнего и при этом разности между их фокусными расстояниями были кратны длине волны принимаемого радиоизлучения. Вычисляются отклонения каждого щита от соответствующего параболоида, после окончания перемещений щитов ГЗ измеряют положения каждого щита КР. С помощью ЭДМ ЗС, описанной в разделе 4.3, строят ходы лучей, отраженных от щитов ГЗ в сторону КР, и положения отражающих поверхностей щитов КР. Вычисляются рассогласования крайних лучей с положениями соответствующих краев отражающих поверхностей щитов КР, и с помощью системы автоматического управления перемещают каждый щит КР в сторону уменьшения рассогласований так, чтобы положения их фокусов минимально расходились между собой и с положением вторичного фокуса ЗС и (или) с положением приемника излучения при условии, что длины лучей от первичного фокуса до отражающих поверхностей щитов КР, а также длины лучей от отражающих поверхностей щитов КР до вторичного фокуса, и расхождения в обоих случаях были кратны длине волны принимаемого излучения.

На основании идей, изложенных в [15, 131, 162, 163], предлагается усовершенствованная система управления, состоящая из 5 контуров:

1. Контур управления ГЗ. Наведение ГЗ осуществляется по углу азимута и углу места с помощью электроприводов так, чтобы эквивалентная фокальная ось (ЭФО) ГЗ, совместилась с линией визирования космического источника радиоизлучения (КИР). Эквивалентная фокальная ось ГЗ строится таким образом, чтобы фокальные оси аппроксимирующих параболоидов, рассчитанные для каждого щита, имели относительно ЭФО ГЗ минимальные угловые рассогласования.
2. Контур управления КР. Контррефлектор устанавливается на исполнительный механизм в виде гексапода. Положение КР изменяется так, чтобы эквивалентный фокус (ЭФ) ГЗ и ЭФО ГЗ и ЭФ КР и ЭФО КР совместились с минимальными ошибками. Эквивалентный фокус ГЗ

выбирается так, чтобы фокусы аппроксимирующих параболоидов, рассчитанные для каждого щита, имели относительно ЭФ ГЗ минимальные линейные рассогласования с учётом кратности длины волны принимаемого радиоизлучения. Аналогичным образом рассчитывается ЭФ КР. Для каждого щита КР строится свой аппроксимирующий эллипсоид, для него определяется фокальная ось и фокус. Эквивалентный фокус КР определяется так, чтобы фокусы аппроксимирующих эллипсоидов, рассчитанные для каждого щита КР, имели относительно ЭФ КР минимальные линейные рассогласования с учётом кратности длины волны принимаемого радиоизлучения. Эквивалентная фокальная ось КР строится таким образом, чтобы фокальные оси аппроксимирующих эллипсоидов, рассчитанные для каждого щита, имели относительно ЭФО КР минимальные угловые рассогласования.

3. Контур управления адаптивной поверхностью ГЗ. Каждый щит ГЗ устанавливается на исполнительный механизм типа гексапод. Все щиты ГЗ механически развязаны, каждый щит перемещается своим исполнительным механизмом. Профиль поверхности щита и положение щита, и зазоры между соседними щитами контролируются локальной телевизионной измерительной системой (ЛТИС). Привязка ЛТИС групп щитов к системе координат ГЗ осуществляется лазерной измерительной системой верхнего уровня (ЛаИС). Для каждого щита по результатам измерения ЛТИС и ЛаИС строится аппроксимирующий параболоид так, чтобы фокусное расстояние и положение основания каждого параболоида минимально отличалось от соседнего и при этом разности между их фокусными расстояниями были кратны длине волны принимаемого радиоизлучения. После измерений каждый щит перемещается так, чтобы обеспечить минимальное отклонение от АП. Контроль перемещений осуществляется ЛТИС. После перемещения щита, при необходимости его поверхность корректируется с помощью системы пьезоактуаторов, чтобы обеспечить требуемое СКО реальной поверхности щита от АП.

4. Контур управления адаптивной поверхностью КР. Каждый щит КР устанавливается на исполнительный механизм типа гексапод. Все щиты КР механически развязаны, каждый щит передвигается своим исполнительным механизмом. Контроль положения и профиля щитов КР и зазоров между ними обеспечивается ЛТИС КР. После окончания перемещений щитов ГЗ измеряют положения каждого щита КР. По результатам измерений ЛТИС строятся аппроксимирующие эллипсоиды (АЭ) для каждого щита. При необходимости поверхность каждого щита корректируется системой пьезоактуаторов. С помощью ЭДМ ЗС строятся ходы лучей, отраженных от щитов ГЗ в сторону КР, и положения отражающих поверхностей щитов КР. Вычисляются рассогласования крайних лучей с положениями соответствующих краев отражающих поверхностей щитов КР, и с помощью системы автоматического управления перемещают каждый щит КР в сторону уменьшения рассогласований так, чтобы положения их фокусов минимально расходились между собой и с положением вторичного фокуса ЗС и (или) с положением приемника излучения при условии, что длины лучей от первичного фокуса до отражающих поверхностей щитов КР, а также длины лучей от отражающих поверхностей щитов КР до вторичного фокуса, и расхождения в обоих случаях были кратны длине волны принимаемого излучения.

5. Контур автофокусировки приёмника [128]. По данным о координатах КИР и взаимном положении элементов ЗС с измерительной системы и наблюдателя ПМК с помощью ЭДМ ЗС рассчитываются координаты фазового центра (ФЦ) вблизи вторичного фокуса ЗС. Затем определяется управление, выдаваемое на привод ПЗ либо на привод подвижного приёмника, чтобы система координат (СК) приемника совместилась с СК ФЦ.

Приведём основные сведения о предлагаемой системе управления и алгоритме её функционирования [15, 131, 162, 163]. Основной режим работы РТ – это программное наведение, слежение за заданной траекторией КИР.

Угловые координаты КИР задаются в СК, связанной с географическим местом Земли (СКЗ), в котором установлен РТ. Относительно СКЗ рассчитывается программа целеуказания КИР, в которой для дискретных моментов времени с высокой точностью учитываются все астрономические и астрофизические поправки, связанные с нутацией, прецессией, параллаксом и т.д. СКЗ является базовой СК и все другие СК, используемые при наведении РТ, должны быть к ней привязаны. Наиболее жесткая часть ГЗ – верхняя часть центральной трубы, называемая опорным кольцом (ОК). На нем расположена система лазерных дальномеров (ЛазИС), с помощью которой измеряются координаты реперных точек КР, поверхности ГЗ и приемника. Положения и профили поверхности щитов ГЗ и КР измеряются с помощью группы ЛТИС, которые привязываются к опорному кольцу с использованием ЛазИС. С ОК связана подвижная система координат (СК ОК), в которой производится расчет аппроксимирующих параболоидов щитов ГЗ, ЭФО ГЗ, ЭФ ГЗ, аппроксимирующие эллипсоиды щитов КР, ЭФ КР, ЭФО КР и ЭДМ ЗС. В таблице 4.2. приведены основные элементы измерительной системы ЗС РТ с указанием их точностных характеристик. В таблице 4.3. приведены основные сведения о типе исполнительных механизмов ЗС РТ.

Электродинамическая модель ЗС реализуется в виде вычислительного функционального блока, на вход которого подаются:

- положение КИР в СКЗ;
- положение СК ОК в СКЗ;
- координаты вершин и фокусов АП щитов ГЗ в СК ОК;
- координаты вершин и фокусов АЭ щитов КР в СК ОК.

С помощью ЭДМ ЗС рассчитываются положения фазовых центров вблизи первичного и вторичного фокусов ЗС РТ. Также ЭДМ ЗС используется для расчёта положения щитов КР, АПО и ПЗ.

Таблица 4.2. Измерительная система РТ

Идентификатор	Что измеряется	Система координат	Чем измеряется	Точность измерения
1	Угол поворота Платформы вокруг вертикальной оси (ВО)	Земля	ЦДОС азимута 22 разряда	1 угл.с.
2	Угол поворота Основания вокруг горизонтальной оси (ГО)	Платформа	ЦДОС угла места 22 разряда	1 угл.с.
3	Угловые скорости инерционных масс ПМК	СК инерционных масс	Блок ДУС	1 угл.с/с
4	Вектор координат реперных точек поверхности ГЗ	ОК	ЛазИС	0.1 мм
5	Вектор координат реперных точек поверхности КР	ОК	ЛазИС	0.1 мм
6	Угловое положение ОК	Основание	ЛазИС	0.5 угл.с.
7	Угловое положение ГО	Земля	ЛазИС	0.5 угл.с.
8	Вектор перемещений приводов КР	КР	ЦДОС приводов КР 16разрядов	0.01мм 1 угл.с.
9	Вектор перемещений приводов ПЗ	ОК	ЦДОС приводов ПЗ 16разрядов	0.05мм 5 угл.с.
10	Вектор перемещений приводов щитов ГЗ	СК исполнительных механизмов щитов ГЗ	ЦДОС приводов щитов 16разрядов	0.01мм 1 угл.с.
11	Вектор перемещений приводов щитов КР	СК исполнительных механизмов щитов КР	ЦДОС приводов щитов 16разрядов	0.01мм 1 угл.с.

12	Контроль положения и поверхности щитов	СК ЛТИС	ЛТИС	0.01мм 1 угл.с.
13	Начальное положение Основания	Земля	ЛазИС	0.5 угл. с.

Таблица 4.3. Исполнительные механизмы ЗС РТ

Идентификатор	Элемент ЗС	Тип исполнительного механизма
1.	Главное зеркало	– азимутальный следящий электропривод на основе двигателя переменного тока; – угломестный следящий электропривод на основе двигателя переменного тока;
2.	Контррефлектор	электромеханический привод на основе гексапода
3.	Перископическое зеркало	электромеханический привод на основе гексапода
4.	Адаптивная платформа облучателя	электромеханический привод на основе гексапода
5.	Щиты ГЗ	каждый щит перемещается электромеханическим приводом на основе гексапода
6.	Щиты КР	каждый щит перемещается электромеханическим приводом на основе гексапода

Расчет аппроксимирующих параболоидов щитов ГЗ, ЭФО ГЗ, ЭФ ГЗ, аппроксимирующие эллипсоиды щитов КР, ЭФ КР и ЭФО КР

осуществляется путем построения математических моделей по результатам измерений ЛайИС и ЛТИС в статике.

В динамике положения ЭФ ГЗ, ЭФО ГЗ, ЭФ КР и ЭФО КР уточняются данными о деформациях, которые снимаются с динамической модели ПМК и ЗС РТ, реализованной в виде идентификатора состояния [126,146,163,170,171]. По положениям ЭФ ГЗ, ЭФО ГЗ, ЭФ КР и ЭФО КР рассчитываются ошибки наведения ЗС, которые пересчитываются в СК электромеханических следящих приводов (ЭСП) элементов ЗС. В наблюдателе реализована нелинейная редуцированная модель ПМК в виде пространственной системы семи твердых тел, соединенных упругими связями [163]. Входами наблюдателя являются данные с измерительной системы (ЛазИС; ЦДОС – цифровых датчиков обратных связей, расположенных на исполнительных осях; ДУС – датчиков угловых скоростей, используемых для демпфирования резонансных эффектов в ПМК) и управление, выдаваемое на ЭСП элементов ЗС.

4.3. Электродинамическая модель зеркальной системы радиотелескопа миллиметрового диапазона

Управление адаптивной ЗС РТ, описанное выше, предусматривает использование ЭДМ для расчёта прохождения радиоизлучения в зеркальной системе и на основании этой информации решения задачи расчёта положения щитов ГЗ, КР, ПЗ и АПО. В [163] была предложена ЭДМ для расчёта распределения поля в ЗС РТ миллиметрового диапазона, основанная на лучевом методе. В качестве поверхностей в данной модели рассматривались аппроксимирующий параболоид ГЗ, аппроксимирующий эллипсоид КР и плоское ПЗ. Данная модель не учитывает то, что адаптивные поверхности ГЗ и КР составлены из независимо перемещаемых щитов. Для каждого щита ГЗ рассчитывается свой АП, как и для каждого щита КР также используется свой АЭ. Предлагается модернизировать модель с учётом новой структуры адаптивных поверхностей ЗС РТ. С помощью лучевого метода были

получены хорошие приближения распределения излучения в областях первичного и вторичного фокусов для исходной структуры адаптивных поверхностей ЗС РТ, которые были верифицированы с применением методов физической оптики [166]. Погрешность лучевого метода составила 8-14%, что приемлемо при решении задачи управления ЗС РТ. Предлагаемая лучевая модель проще в реализации и удобней для задач управления ЗС чем модель, основанная на принципах физической оптики.

Рассмотрим основные положения исходной модели [163], которые мы будем использовать в дальнейшем. Для больших радиотелескопов, когда выполняется соотношение $D > 50\lambda$, где D – диаметр зеркала, прохождение радиоизлучения через ЗС может быть описано законами геометрической оптики. Электромагнитный поток будем считать совокупностью отдельных электромагнитных лучей. Из-за больших расстояний от Земли до КИР, приходящий фронт волны можно считать плоским, монохроматическим; все лучи в такой волне параллельны друг другу, а интенсивность энергии, переносимой волной в единицу времени сквозь единицу площади, перпендикулярной к направлению распространения волны есть величина постоянная. Энергетической характеристикой электромагнитной волны (ЭМВ) можно считать вектор Пойтинга S , модуль которого равен потоку энергии переносимой через плоскость площадью 1 м^2 перпендикулярную направлению распространения ЭМВ.

Лучи ЭМВ во фронте считаются когерентными, с разностью фаз равной нулю, поэтому явления интерференции и дифракции лучей во фронте отсутствуют; такие фронты ЭВ в электродинамике получили название поверхностей равных фаз (ПРФ).

С каждой точкой луча связывается своя подвижная система координат, начало которой определяется вектором относительно базовой неподвижной системы координат (БСК) всей системы управления. Ось Z ориентирована в направлении распространения ЭМВ, ось X лежит во фронте ЭМВ параллельно линии горизонта. Система координат XYZ правая. Каждой

точке луча соответствует определенное значение взаимно-перпендикулярных векторов E и H напряжённостей электрического и магнитного полей, лежащих в плоскости YX .

В данном случае будет рассматриваться плоская, линейно поляризованная волна, волна у которой вектора магнитной напряженности поля H и электрического поля E не изменяют своей ориентации с течением времени. Их положение определяется углом поляризации.

При попадании лучей на отражающую поверхность считается, что луч полностью, без потерь отражается от границы раздела двух сред. Отраженный луч лежит в плоскости отражения, проходящей через падающий луч и вектор нормали к отражающей поверхности в точке падения. При этом полагается, что соблюдается закон Снеллиуса, согласно которому угол между нормалью и падающим лучом равен углу между нормалью и отраженным лучом. Отражение сопровождается изменением ориентации вектора E . Вектор $E^{\text{отр}}$ лежит в плоскости отражения и перпендикулярен отраженному лучу.

Фронтом отраженной ЭМВ считается геометрическое место точек отраженных лучей с равной длиной оптических путей от фронта произвольно выбранной исходной плоской ЭМВ по каждому отдельному лучу. Многократно отражаясь от поверхностей ЗС (ГЗ, КР) лучи теряют свою параллельность, а ПРФ приобретают сложную форму и являются векторными полями E и H .

В миллиметровом диапазоне при больших размерах отражающих поверхностей ЗС семейства отраженных лучей стягиваются практически в точки или области с малыми линейными размерами. Это даёт основание векторно суммировать в этих зонах векторы $E^{\text{отр}}$ и $H^{\text{отр}}$ по всем лучам, определять суммарные векторы E и H , вычислять плотность потока электромагнитной энергии $\Pi = E \times H$ и ее интенсивность.

Уравнение плоской электромагнитной волны имеет вид:

$$E(r) = E \frac{r}{|r|} \sin(\omega t - k|r|), \quad H(r) = H \frac{r}{|r|} \sin(\omega t - k|r|), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

где λ - длина волны; E, H – амплитуды колебаний, k – волновое число, r – радиус- вектор направления распространения волны, ω - частота колебаний.

Все системы координат (СК), которые используются при построении модели, определяются поворотом БСК (Рис.4.4.) на углы простейших вращений $\beta_i^0, \theta_i^0, \alpha_i^0$ последовательности X - Y - Z и вектором параллельного переноса r_i^0 с координатным столбцом в БСК $r_i^{0,0} = (x_i^{0,0}, y_i^{0,0}, z_i^{0,0})^T$, где верхний индекс – идентификатор исходной СК, а верхний индекс – идентификатор новой СК, полученной переносом на этот вектор, второй верхний индекс обозначает базис СК, в котором определен координатный столбец.

Переход от СК с индексом i к БСК будет описываться матрицей вращения:

$$c_i^0(\beta_i^0, \theta_i^0, \alpha_i^0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta_i^0) & -\sin(\beta_i^0) \\ 0 & \sin(\beta_i^0) & \cos(\beta_i^0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_i^0) & 0 & \sin(\theta_i^0) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_i^0) & 0 & \cos(\theta_i^0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i^0) & -\sin(\alpha_i^0) & 0 \\ \sin(\alpha_i^0) & \cos(\alpha_i^0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

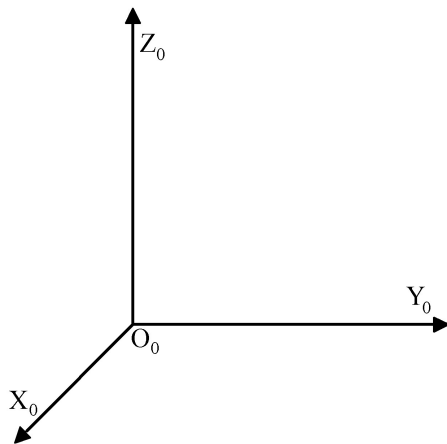


Рис.4.4. Базовая система координат

Волновой фронт имеет СК, которую будем обозначать ФСК. В ФСК направление распространения лучей фронта параллельно оси OZ_Φ и задается направляющим вектором фронта e_Φ с координатным столбцом $e_\Phi^\Phi = (0, 0, 1)^T$, направляющие вектора напряженностей электрического e_E и магнитного e_H полей имеют координатные столбы соответственно $e_E^\Phi = (1, 0, 0)^T$,

$$e_H^\Phi = (0, 1, 0)^T.$$

Введем СК падающего луча (ЛСК), полученную переносом ФСК на вектор начала луча $r_{\text{нл}}^{\phi}$ с координатным столбцом $r_{\text{нл}}^{\phi,\phi}$. Уравнение падающего луча в ФСК задается уравнением:

$$R_{\text{пад}}^{\text{нл},\phi} = r_{\text{нл}}^{\phi,\phi} + \mu_{\text{пад}} e_{\phi}^{\phi},$$

где $R_{\text{пад}}^{\text{нл},\phi}$ - координатный столбец вектора $R_{\text{пад}}^{\text{нл}}$, задающего положение точки лежащей на падающем луче; $\mu_{\text{пад}}$ - параметр, характеризующий длину луча.

Положение ФСК в БСК определяется вектором r_{ϕ}^0 с координатным столбцом $r_{\phi}^{0,0}$ и матрицей вращения $c_{\phi}^0(180^0 + \beta_{\phi}^0, 0, \alpha_{\phi}^0)$ от углов ориентации фронта $\beta_{\phi}^0, \alpha_{\phi}^0$. Координатный столбец вектора $R_{\text{пад}}^{\text{нл}}$ в БСК рассчитывается как $R_{\text{пад}}^{\text{нл},0} = c_{\phi}^0 R_{\text{пад}}^{\text{нл},\phi} + r_{\phi}^{0,0}$.

Для каждого щита ГЗ строится свой АП. Параметры этих АП, такие как положение фокусов и вершин, для разных щитов будут отличаться друг от друга и от исходного эталонного параболоида.

Воспользуемся методикой расчёта хода лучей в ЗС, изложенной в [163] для каждого щита. Чтобы определить в пространстве положение ГЗ необходимо ввести следующие вспомогательные СК, обусловленные конструкцией ЗС: АЗСК – СК азимутальной оси, положение которой в БСК характеризуется матрицей вращения $c_{\text{аз}}^0(0, 0, \alpha_{\text{аз}}^0)$ от угла азимута $\alpha_{\text{аз}}^0$; УМСК – СК угломестной оси, положение которой в АЗСК характеризуется вектором $r_{\text{ум}}^{\text{аз}}$ с координатным столбцом $r_{\text{ум}}^{\text{аз},\text{аз}}$; ОССК – СК основания, положение которой в УМСК характеризуется матрицей вращения $c_{\text{ос}}^{\text{ум}}(\beta_{\text{ос}}^{\text{ум}}, 0, 0)$ от угла места $\beta_{\text{ос}}^{\text{ум}}$; ПСК – СК вершины ГЗ, положение которой в ОССК характеризуется вектором $r_{\text{п}}^{\text{ос}}$ с координатным столбцом $r_{\text{п}}^{\text{ос},\text{ос}}$. Для определения точки падения луча на ГЗ необходимо записать выражение для луча в ПСК:

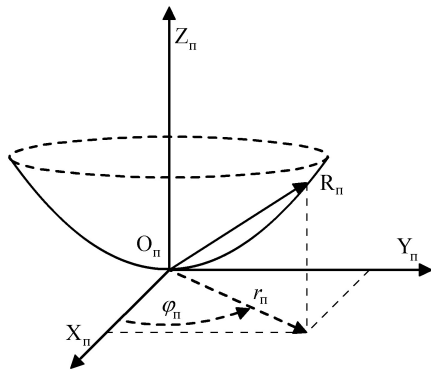
$$\begin{aligned}
R_{\text{пад}}^{\text{нл},\text{п}} &= c_{\text{ос}}^{\text{ум},\text{T}} \left[c_{\text{аз}}^{0,\text{T}} R_{\text{пад}}^{\text{нл},0} - r_{\text{ум}}^{\text{аз},\text{аз}} \right] - r_{\text{п}}^{\text{ос},\text{ос}} = r_{\text{нл}}^{\text{п},\text{п}} + \mu_{\text{пад}} e_{\text{ф}}^{\text{п}} = \\
&= c_{\text{ос}}^{\text{ум},\text{T}} c_{\text{аз}}^{0,\text{T}} c_{\text{ф}}^0 r_{\text{нл}}^{\text{ф},\text{ф}} + c_{\text{ос}}^{\text{ум},\text{T}} c_{\text{аз}}^{0,\text{T}} r_{\text{ф}}^{0,0} - c_{\text{ос}}^{\text{ум},\text{T}} r_{\text{ум}}^{\text{аз},\text{аз}} - r_{\text{п}}^{\text{ос},\text{ос}} + \mu_{\text{пад}} c_{\text{ос}}^{\text{ум},\text{T}} c_{\text{аз}}^{0,\text{T}} c_{\text{ф}}^0 e_{\text{ф}}^{\text{ф}}, \quad (4.1) \\
r_{\text{нл}}^{\text{п},\text{п}} &= \left[x_{\text{нл}}^{\text{п},\text{п}}, y_{\text{нл}}^{\text{п},\text{п}}, z_{\text{нл}}^{\text{п},\text{п}} \right]^{\text{T}}, \quad e_{\text{ф}}^{\text{п}} = \left[x_{\text{ф}}^{\text{п}}, y_{\text{ф}}^{\text{п}}, z_{\text{ф}}^{\text{п}} \right]^{\text{T}}.
\end{aligned}$$

В ПСК уравнение параболоида имеет наиболее простой вид:

$$(x_{\text{п}})^2 + (y_{\text{п}})^2 = 2pz_{\text{п}}, \quad (4.2)$$

где $x_{\text{п}}, y_{\text{п}}, z_{\text{п}}$ – координаты в ПСК точки, лежащей на параболоиде; p – параметр параболоида.

Параметрическое уравнение параболоида в ПСК будет следующим:



$$R_{\text{п}}(r_{\text{п}}, \varphi_{\text{п}}) = \left[r_{\text{п}} \cos \varphi_{\text{п}}, r_{\text{п}} \sin \varphi_{\text{п}}, \frac{(r_{\text{п}})^2}{2p} \right]^{\text{T}} = [x_{\text{п}}, y_{\text{п}}, z_{\text{п}}]^{\text{T}}, \quad (4.3)$$

где $R_{\text{п}}$ – координатный столбец вектора, задающего точку параболоида; $r_{\text{п}}$ – расстояние до проекции точки $R_{\text{п}}$ на плоскость $X_{\text{п}}Y_{\text{п}}$; $\varphi_{\text{п}}$ – угол, задающий положение точки на параболоиде.

Рис.4.5. Параметрическое

задание параболоида

Точка падения $R_{\text{кп}}^{\text{п},\text{п}}$ одновременно

принадлежит и лучу, и параболоиду, и $R_{\text{пад}}^{\text{нл},\text{п}} = R_{\text{п}} = R_{\text{кп}}^{\text{п},\text{п}}$, поэтому чтобы найти её подставим уравнение (4.1) в (4.2):

$$\begin{aligned}
&\left((x_{\text{ф}}^{\text{п}})^2 + (y_{\text{ф}}^{\text{п}})^2 \right) (\mu_{\text{пад}})^2 + 2(x_{\text{ф}}^{\text{п}} x_{\text{нл}}^{\text{п},\text{п}} + y_{\text{ф}}^{\text{п}} y_{\text{нл}}^{\text{п},\text{п}} - 2pz_{\text{ф}}^{\text{п}}) \mu_{\text{пад}} + \\
&+ (x_{\text{нл}}^{\text{п},\text{п}})^2 + (y_{\text{нл}}^{\text{п},\text{п}})^2 - 2pz_{\text{нл}}^{\text{п},\text{п}} = 0.
\end{aligned}$$

Решив полученное уравнение, находим значение параметра $\mu_{\text{пад}}$, и подставив его в (4.1) находим $R_{\text{кп}}^{\text{п},\text{п}}$.

В точке падения введем касательную СК параболоида (КПСК), образованную касательной плоскостью и нормалью к ней, координатные столбцы ортов $e_{\text{кп}}^x, e_{\text{кп}}^y, e_{\text{кп}}^z$ которой в ПСК определяются выражениями:

$$R_{\Pi}(r_{\Pi}, \varphi_{\Pi}) = \left[r_{\Pi} \cos \varphi_{\Pi}, r_{\Pi} \sin \varphi_{\Pi}, \frac{(r_{\Pi})^2}{2p} \right]^T, \quad e_{\text{кп}}^{z, \Pi} = (e_{\text{кп}}^x \times e_{\text{кп}}^y)^{\Pi},$$

$$e_{\text{кп}}^{x, \Pi} = \frac{\partial R_{\Pi}(r_{\Pi}, \varphi_{\Pi})}{\partial r_{\Pi}} \bigg/ \left| \frac{\partial R_{\Pi}(r_{\Pi}, \varphi_{\Pi})}{\partial r_{\Pi}} \right|, \quad e_{\text{кп}}^{y, \Pi} = \frac{\partial R_{\Pi}(r_{\Pi}, \varphi_{\Pi})}{\partial \varphi_{\Pi}} \bigg/ \left| \frac{\partial R_{\Pi}(r_{\Pi}, \varphi_{\Pi})}{\partial \varphi_{\Pi}} \right|,$$

$$\frac{\partial R_{\Pi}(r_{\Pi}, \varphi_{\Pi})}{\partial r_{\Pi}} = \left[\cos \varphi_{\Pi}, \sin \varphi_{\Pi}, \frac{r_{\Pi}}{p} \right]^T, \quad \frac{\partial R_{\Pi}(r_{\Pi}, \varphi_{\Pi})}{\partial \varphi_{\Pi}} = [-r_{\Pi} \sin \varphi_{\Pi}, r_{\Pi} \cos \varphi_{\Pi}, 0]^T,$$

где $(e_{\text{кп}}^x \times e_{\text{кп}}^y)^{\Pi}$ - координатный столбец векторного произведения ортов $e_{\text{кп}}^x, e_{\text{кп}}^y$ в ПСК. Положение КПСК в ПСК определяется вектором $R_{\text{кп}}^{\Pi}$ с координатным столбцом $R_{\text{кп}}^{\Pi, \Pi}$ и матрицей вращения $c_{\text{кп}}^{\Pi} = [e_{\text{кп}}^{x, \Pi}, e_{\text{кп}}^{y, \Pi}, e_{\text{кп}}^{z, \Pi}]$. Введем СК отражения (ОПСК), координатные столбцы ортов $e_{\text{оп}}^x, e_{\text{оп}}^y, e_{\text{оп}}^z$ которой определяются выражениями:

$$e_{\text{оп}}^{z, \text{кп}} = [0, 0, 1]^T, \quad e_{\text{оп}}^{y, \text{кп}} = (e_{\phi} \times e_{\text{оп}}^z)^{\text{кп}}, \quad e_{\text{оп}}^{x, \text{кп}} = (e_{\text{оп}}^y \times e_{\text{оп}}^z)^{\text{кп}}.$$

Положение ОПСК в КПСК определяется матрицей вращения $c_{\text{оп}}^{\text{кп}} = [e_{\text{оп}}^{x, \text{кп}}, e_{\text{оп}}^{y, \text{кп}}, e_{\text{оп}}^{z, \text{кп}}]$. Угол между $e_{\text{оп}}^z$ и $-e_{\phi}$ определяется как $\theta_{\text{оп}} = \arccos(-e_{\phi}^{\text{кп}, T} e_{\text{оп}}^{z, \text{кп}})$, где $e_{\phi}^{\text{кп}} = c_{\text{кп}}^{\Pi, T} e_{\phi}^{\Pi}$.

Координатные столбцы векторов e_E , e_H и e_{ϕ} в ОПСК будут:

$$e_E^{\text{оп}} = c_{\text{оп}}^{\text{кп}, T} c_{\text{кп}}^{\Pi, T} c_{\text{ос}}^{\text{ум}, T} c_{\text{аз}}^{0, T} c_{\phi}^0 e_{\phi}^{\text{оп}}, \quad e_H^{\text{оп}} = c_{\text{оп}}^{\text{кп}, T} c_{\text{кп}}^{\Pi, T} c_{\text{ос}}^{\text{ум}, T} c_{\text{аз}}^{0, T} c_{\phi}^0 e_{\phi}^{\text{оп}},$$

$$e_{\phi}^{\text{оп}} = c_{\text{оп}}^{\text{кп}, T} c_{\text{кп}}^{\Pi, T} c_{\text{ос}}^{\text{ум}, T} c_{\text{аз}}^{0, T} c_{\phi}^0 e_{\phi}^{\text{оп}}.$$

Координатные столбцы векторов $e_{\text{Еп}}$, $e_{\text{Нп}}$ и $e_{\text{лп}}$ отраженного луча в ОПСК будут:

$$e_{\text{Еп}}^{\text{оп}} = c_{\text{лп}}(0, 180^0 - 2\theta_{\text{оп}}, 0) e_E^{\text{оп}}, \quad e_{\text{Нп}}^{\text{оп}} = c_{\text{лп}}(0, 180^0 - 2\theta_{\text{оп}}, 0) e_H^{\text{оп}},$$

$$e_{\text{лп}}^{\text{оп}} = c_{\text{лп}}(0, 180^0 - 2\theta_{\text{оп}}, 0) e_{\phi}^{\text{оп}}.$$

Координатные столбцы векторов $e_{\text{Еп}}$, $e_{\text{Нп}}$ и $e_{\text{лп}}$ в ПСК будут:

$$e_{\text{Еп}}^{\Pi} = c_{\text{кп}}^{\Pi} c_{\text{оп}}^{\text{кп}} e_{\text{Еп}}^{\text{оп}}, \quad e_{\text{Нп}}^{\Pi} = c_{\text{кп}}^{\Pi} c_{\text{оп}}^{\text{кп}}, \quad e_{\text{лп}}^{\Pi} = c_{\text{кп}}^{\Pi} c_{\text{оп}}^{\text{кп}} e_{\text{лп}}^{\text{оп}}.$$

Тогда выражение для отраженного луча в ПСК примет вид:
 $R_{\text{лп}}^{\text{кп,п}} = R_{\text{кп}}^{\text{п,п}} + \mu_{\text{лп}} e_{\text{лп}}^{\text{п}}$, где $\mu_{\text{лп}}$ - параметр, характеризующий длину отраженного луча.

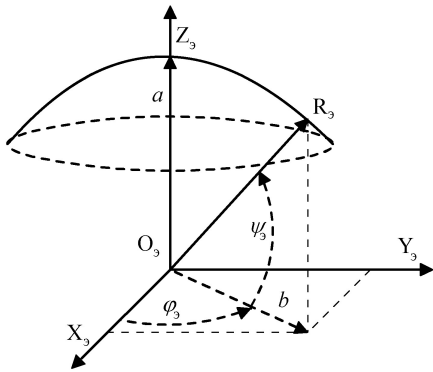


Рис.4.6. Параметрическое задание эллипсоида

Чтобы определить в пространстве положение КР необходимо ввести следующие вспомогательные СК, обусловленные конструкцией ЗС: КРСК – СК привода КР, положение которой в ОССК характеризуется вектором $r_{\text{кр}}^{\text{ос}}$ с координатным столбцом $r_{\text{кр}}^{\text{ос,ос}}$ и матрицей вращения $c_{\text{кр}}^{\text{ос}}(\beta_{\text{кр}}^{\text{ос}}, 0, \alpha_{\text{кр}}^{\text{ос}})$; ЭСК – СК эллипсоида, положение которой в КРСК характеризуется вектором $r_{\text{э}}^{\text{кр}}$ с координатным столбцом $r_{\text{э}}^{\text{кр,кр}}$. Для определения точки падения луча отраженного от ГЗ луча на КР необходимо записать выражение для луча в ЭСК:

$$\begin{aligned} R_{\text{лп}}^{\text{кп,э}} &= c_{\text{кр}}^{\text{ос,Т}} \left[R_{\text{кп}}^{\text{п,п}} + \mu_{\text{лп}} e_{\text{лп}}^{\text{п}} + r_{\text{п}}^{\text{ос,ос}} - r_{\text{кр}}^{\text{ос,ос}} \right] - r_{\text{э}}^{\text{кр,кр}} = r_{\text{кп}}^{\text{э,э}} + \mu_{\text{лп}} e_{\text{лп}}^{\text{э}} = \\ &= c_{\text{кр}}^{\text{ос,Т}} R_{\text{кп}}^{\text{п,п}} + c_{\text{кр}}^{\text{ос,Т}} r_{\text{п}}^{\text{ос,ос}} - c_{\text{кр}}^{\text{ос,Т}} r_{\text{кр}}^{\text{ос,ос}} + \mu_{\text{лп}} c_{\text{кр}}^{\text{ос,Т}} e_{\text{лп}}^{\text{п}}, \\ r_{\text{кп}}^{\text{э,э}} &= \begin{bmatrix} x_{\text{кп}}^{\text{э,э}} \\ y_{\text{кп}}^{\text{э,э}} \\ z_{\text{кп}}^{\text{э,э}} \end{bmatrix}^{\text{T}}, \quad e_{\text{лп}}^{\text{э}} = \begin{bmatrix} x_{\text{лп}}^{\text{э}} \\ y_{\text{лп}}^{\text{э}} \\ z_{\text{лп}}^{\text{э}} \end{bmatrix}^{\text{T}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В ЭСК уравнение параболоида имеет наиболее простой вид:

$$(z_{\text{э}})^2 + \frac{a^2}{b^2}(x_{\text{э}})^2 + \frac{a^2}{b^2}(y_{\text{э}})^2 = a^2, \quad (4.5)$$

где $x_{\text{э}}, y_{\text{э}}, z_{\text{э}}$ – координаты в ЭСК точки, лежащей на эллипсоиде; a, b – параметры эллипсоида.

Параметрическое уравнение эллипсоида в ЭСК будет следующим:

$$R_{\text{э}}(\psi_{\text{э}}, \varphi_{\text{э}}) = [b \cos \psi_{\text{э}} \cos \varphi_{\text{э}}, b \cos \psi_{\text{э}} \sin \varphi_{\text{э}}, a \sin \psi_{\text{э}}]^{\text{T}} = [x_{\text{э}}, y_{\text{э}}, z_{\text{э}}]^{\text{T}}, \quad (4.6)$$

где $R_{\text{э}}$ – координатный столбец вектора, задающего точку параболоида; $\varphi_{\text{э}}, \psi_{\text{э}}$ – углы, задающие положение точки на эллипсоиде.

Точка падения $R_{\text{кэ}}^{\text{э,э}}$ одновременно принадлежит и лучу, и эллипсоиду, и

$R_{\text{лп}}^{\text{кп,э}} = R_{\text{э}} = R_{\text{кэ}}^{\text{э,э}}$, поэтому чтобы найти её подставим уравнение (4.4) в (4.5):

$$\left(\frac{a^2}{b^2} (x_{\text{лп}}^3)^2 + \frac{a^2}{b^2} (y_{\text{лп}}^3)^2 + (z_{\text{лп}}^3)^2 \right) (\mu_{\text{лп}})^2 + 2 \left(\frac{a^2}{b^2} x_{\text{лп}}^3 x_{\text{пк}}^{3,3} + \frac{a^2}{b^2} y_{\text{пк}}^{3,3} y_{\text{лп}}^3 + z_{\text{пк}}^{3,3} z_{\text{лп}}^3 \right) \mu_{\text{лп}} + \frac{a^2}{b^2} \left((x_{\text{пк}}^{3,3})^2 + (y_{\text{пк}}^{3,3})^2 \right) - a^2 = 0$$

Решив полученное уравнение, находим значение параметра $\mu_{\text{лп}}$, и подставив его в (4.1) находим $R_{\text{кэ}}^{3,3}$.

В точке падения введем касательную СК эллипсоида (ЭСК), образованную касательной плоскостью и нормалью к ней, координатные столбцы ортов $e_{\text{кэ}}^x, e_{\text{кэ}}^y, e_{\text{кэ}}^z$ которой в ПСК определяются выражениями:

$$R_3(\psi_3, \varphi_3) = [b \cos \psi_3 \cos \varphi_3, b \cos \psi_3 \sin \varphi_3, a \sin \psi_3]^T, \quad e_{\text{кэ}}^{z,3} = (e_{\text{кэ}}^x \times e_{\text{кэ}}^y)^3,$$

$$e_{\text{кэ}}^{x,3} = \frac{\partial R_3(\psi_3, \varphi_3)}{\partial \psi_3} \bigg/ \left| \frac{\partial R_3(\psi_3, \varphi_3)}{\partial \psi_3} \right|, \quad e_{\text{кэ}}^{y,3} = \frac{\partial R_3(\psi_3, \varphi_3)}{\partial \varphi_3} \bigg/ \left| \frac{\partial R_3(\psi_3, \varphi_3)}{\partial \varphi_3} \right|,$$

$$\frac{\partial R_3(\psi_3, \varphi_3)}{\partial \varphi_3} = [-b \cos \psi_3 \sin \varphi_3, b \cos \psi_3 \cos \varphi_3, 0]^T,$$

$$\frac{\partial R_3(\psi_3, \varphi_3)}{\partial \psi_3} = [-b \sin \psi_3 \cos \varphi_3, -b \sin \psi_3 \sin \varphi_3, a \cos \psi_3]^T,$$

где $(e_{\text{кэ}}^x \times e_{\text{кэ}}^y)^3$ - координатный столбец векторного произведения ортов $e_{\text{кэ}}^x, e_{\text{кэ}}^y$ в ЭСК. Положение КЭСК в ЭСК определяется вектором $R_{\text{кэ}}^3$ с координатным столбцом $R_{\text{кэ}}^{3,3}$ и матрицей вращения $c_{\text{кэ}}^3 = [e_{\text{кэ}}^{x,3}, e_{\text{кэ}}^{y,3}, e_{\text{кэ}}^{z,3}]$. Введем СК отражения (ОЭСК), координатные столбцы ортов $e_{\text{оэ}}^x, e_{\text{оэ}}^y, e_{\text{оэ}}^z$ которой определяются выражениями:

$$e_{\text{оэ}}^{z,\text{кэ}} = [0, 0, 1]^T, \quad e_{\text{оэ}}^{y,\text{кэ}} = (e_{\text{лп}} \times e_{\text{оэ}}^z)^{\text{кэ}}, \quad e_{\text{оэ}}^{x,\text{кэ}} = (e_{\text{оэ}}^y \times e_{\text{оэ}}^z)^{\text{кэ}}.$$

Положение ОЭСК в КЭСК определяется матрицей вращения $c_{\text{оэ}}^{\text{кэ}} = [e_{\text{оэ}}^{x,\text{кэ}}, e_{\text{оэ}}^{y,\text{кэ}}, e_{\text{оэ}}^{z,\text{кэ}}]$. Угол между $e_{\text{оэ}}^z$ и $-e_{\text{лп}}$ определяется как $\theta_{\text{оэ}} = \arccos(-e_{\text{лп}}^{\text{кэ},T} e_{\text{оэ}}^{z,\text{кэ}})$, где $e_{\text{лп}}^{\text{кэ}} = c_{\text{кэ}}^{3,T} e_{\text{лп}}^3$.

Координатные столбцы векторов $e_{\text{еп}}$, $e_{\text{нп}}$ и $e_{\text{лп}}$ в ОЭСК будут:

$$e_{\text{еп}}^{\text{оэ}} = c_{\text{оэ}}^{\text{кэ},T} c_{\text{кэ}}^{3,T} c_{\text{кр}}^{\text{оэ},T} e_{\text{еп}}^{\text{п}}, \quad e_{\text{нп}}^{\text{оэ}} = c_{\text{оэ}}^{\text{кэ},T} c_{\text{кэ}}^{3,T} c_{\text{кр}}^{\text{оэ},T} e_{\text{нп}}^{\text{п}}, \quad e_{\text{лп}}^{\text{оэ}} = c_{\text{оэ}}^{\text{кэ},T} e_{\text{лп}}^{\text{кэ}}.$$

Координатные столбцы векторов $e_{\text{Ез}}$, $e_{\text{Нз}}$ и $e_{\text{Лз}}$ отраженного луча в ОЭСК будут:

$$e_{\text{Ез}}^{\text{оз}} = c_{\text{Лз}} (0, 180^\circ - 2\theta_{\text{оз}}, 0) e_{\text{Еп}}^{\text{оз}}, \quad e_{\text{Нз}}^{\text{оз}} = c_{\text{Лз}} (0, 180^\circ - 2\theta_{\text{оз}}, 0) e_{\text{Нп}}^{\text{оз}}, \quad e_{\text{Лз}}^{\text{оз}} = c_{\text{Лз}} (0, 180^\circ - 2\theta_{\text{оз}}, 0) e_{\text{Лп}}^{\text{оз}}.$$

Координатные столбцы векторов $e_{\text{Ез}}$, $e_{\text{Нз}}$ и $e_{\text{Лз}}$ в ЭСК будут:

$$e_{\text{Ез}}^{\text{э}} = c_{\text{кз}}^{\text{э}} c_{\text{оз}}^{\text{кз}} e_{\text{Ез}}^{\text{оз}}, \quad e_{\text{Нз}}^{\text{э}} = c_{\text{кз}}^{\text{э}} c_{\text{оз}}^{\text{кз}}, \quad e_{\text{Лз}}^{\text{э}} = c_{\text{кз}}^{\text{э}} c_{\text{оз}}^{\text{кз}} e_{\text{Лз}}^{\text{оз}}.$$

Тогда выражение для отраженного луча в ЭСК примет вид:
 $R_{\text{Лз}}^{\text{кз,э}} = R_{\text{кз}}^{\text{э,э}} + \mu_{\text{Лз}} e_{\text{Лз}}^{\text{э}}$, где $\mu_{\text{Лз}}$ - параметр, характеризующий длину отраженного луча.

Чтобы найти распределение поля в плоскости облучателя, введём СК облучателя (ОБСК), положение которой относительно ОССК определяется вектором $r_{\text{об}}^{\text{ос}}$ с координатным столбцом $r_{\text{об}}^{\text{ос,ос}}$ и матрицей вращения $c_{\text{об}}^{\text{ос}}(\beta_{\text{об}}^{\text{ос}}, 0, \alpha_{\text{об}}^{\text{ос}})$.

Плоскость облучателя в ОБСК задается в параметрическом виде следующим образом:

$$R_{\text{об}} = u e_{\text{об}}^{x,\text{об}} + v e_{\text{об}}^{y,\text{об}}, \quad e_{\text{об}}^{x,\text{об}} = [1, 0, 0]^T, \quad e_{\text{об}}^{y,\text{об}} = [0, 0, 1]^T,$$

где u, v – линейные размеры облучателя.

Для определения точки падения луча отраженного от КР луча на облучатель необходимо записать выражение для луча в ОБСК:

$$\begin{aligned} R_{\text{Лз}}^{\text{кз,об}} &= c_{\text{об}}^{\text{ос,Т}} \left[c_{\text{кр}}^{\text{ос}} \left[R_{\text{кз}}^{\text{э,э}} + \mu_{\text{Лз}} e_{\text{Лз}}^{\text{э}} + r_{\text{э}}^{\text{кр,кр}} \right] + r_{\text{кр}}^{\text{ос,ос}} - r_{\text{об}}^{\text{ос,ос}} \right] = r_{\text{кз}}^{\text{об,об}} + \mu_{\text{Лз}} e_{\text{Лз}}^{\text{об}} = \\ &= c_{\text{об}}^{\text{ос,Т}} c_{\text{кр}}^{\text{ос}} R_{\text{кз}}^{\text{э,э}} + c_{\text{об}}^{\text{ос,Т}} c_{\text{кр}}^{\text{ос}} r_{\text{э}}^{\text{кр,кр}} + c_{\text{об}}^{\text{ос,Т}} r_{\text{кр}}^{\text{ос,ос}} - c_{\text{об}}^{\text{ос,Т}} r_{\text{об}}^{\text{ос,ос}} + \mu_{\text{Лз}} c_{\text{об}}^{\text{ос,Т}} c_{\text{кр}}^{\text{ос}} e_{\text{Лз}}^{\text{э}}, \\ r_{\text{кз}}^{\text{об,об}} &= [x_{\text{кз}}^{\text{об,об}}, y_{\text{кз}}^{\text{об,об}}, z_{\text{кз}}^{\text{об,об}}]^T, \quad e_{\text{Лз}}^{\text{об}} = [x_{\text{Лп}}^{\text{об}}, y_{\text{Лп}}^{\text{об}}, z_{\text{Лп}}^{\text{об}}]^T. \end{aligned}$$

Точка падения $R_{\text{ко}}^{\text{об,об}}$ одновременно принадлежит и лучу, и плоскости:

$$r_{\text{кз}}^{\text{об,об}} + \mu_{\text{Лз}} e_{\text{Лз}}^{\text{об}} = R_{\text{ко}}^{\text{об,об}} = u e_{\text{об}}^{x,\text{об}} + v e_{\text{об}}^{y,\text{об}},$$

Решив полученное уравнение, находим значение параметра $\mu_{\text{Лз}}$, и подставив его в уравнение плоскости находим $R_{\text{ко}}^{\text{об,об}}$.

Поле в срезе облучателя может быть представлено в виде шести ортогональных волн, распространяющихся вдоль осей СК облучателя. Волна раскладывается на активные (S_1, S_3) и реактивные (S_2, S_4, S_5, S_6) составляющие.

$$\begin{aligned} S_1 &= E_X \times H_Y & S_4 &= E_Y \times H_Z \\ S_2 &= E_X \times H_Z & S_5 &= E_Z \times H_X \\ S_3 &= E_Y \times H_X & S_6 &= E_Z \times H_Y \end{aligned}$$

Для активной составляющей интерференция может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} e_i &= E_i \cdot \sin \left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (L_i - L_{\min}) + \varphi_i \right) \\ \Psi_i &= \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (L_i - L_{\min}) + \varphi_i \end{aligned}$$

где, Ψ_i - фаза i электромагнитной волны; L_i - длина оптического пути луча; $L_{\min}$ - минимальная длина оптического пути из всех лучей;

$$E = \text{norm} \left(\sum_i [E_i \cdot \cos \Psi_i, E_i \cdot \sin \Psi_i] \right), \Psi_E = \text{arctg} \left(\frac{\sum_i E_i \cdot \sin \Psi_i}{\sum_i E_i \cdot \cos \Psi_i} \right),$$

E - амплитуда результирующего колебания; Ψ_E - фаза результирующего колебания;

$$\begin{aligned} h_i &= H_i \cdot \sin \left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (L_i - L_{\min}) + \varphi_i \right), \Psi_i = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (L_i - L_{\min}) + \varphi_i, \\ H &= \text{norm} \left(\sum_i [H_{Xi} \cdot \cos \Psi_i, H_{Xi} \cdot \sin \Psi_i] \right), \Psi = \text{arctg} \left(\frac{\sum_i H_{Xi} \cdot \sin \Psi_i}{\sum_i H_{Xi} \cdot \cos \Psi_i} \right), \end{aligned}$$

H - амплитуда результирующего колебания; Ψ_H - фаза результирующего колебания.

Энергия, переносимая результирующей волной за период, будет определяться выражением:

$$P = \frac{1}{T} \int_T E \sin(\omega t + \Psi) H \sin(\omega t + \Psi) dt = \frac{EH}{2}.$$

Распределение интенсивности в плоскости облучателя может быть аппроксимировано как

$$I(e_{zc}, q_{об}, x, y) = A(e_{zc}, q_{об}, x, y) \sin^2(\delta(e_{zc}, q_{об}) \rho(e_{zc}, q_{об}, x, y)) / (\delta(e_{zc}, q_{об}) \rho(e_{zc}, q_{об}, x, y))^2,$$

где $e_{zc} = (\Delta\alpha_{ГЗ}, \Delta\beta_{ГЗ}, \Delta x_{кр}, \Delta y_{кр}, \Delta z_{кр}, \Delta\beta_{кр}, \Delta\theta_{кр})^T$ - ошибки наведения элементов ЗС: $\Delta\alpha_{ГЗ}, \Delta\beta_{ГЗ}$ - ошибки наведения фокальной оси (ФО) ГЗ; $\Delta x_{кр}, \Delta y_{кр}, \Delta z_{кр}$ -

линейные рассогласования фокусов КР и ГЗ; $\Delta\beta_{кр}, \Delta\theta_{кр}$ – угловые рассогласования между ФО ГЗ и ФО КР; x, y – координаты задающие точку в плоскости облучателя; $q_{об}=(\Delta x_{об}, \Delta y_{об}, \Delta z_{об}, \Delta\beta_{об}, \Delta\theta_{об})^T$ – линейные и угловые отклонения облучателя от юстировочного положения; $\rho^2=(x+\Delta x_{об}+\delta_1\Delta\alpha_{ГЗ}+\delta_2\Delta\beta_{кр}+\delta_3\Delta x_{кр}+\delta_4\Delta z_{кр}\Delta\theta_{кр})^2+(y+\Delta y_{об}+\delta_1\Delta\beta_{ГЗ}+\delta_2\Delta\theta_{кр}+\delta_3\Delta y_{кр}+\delta_4\Delta z_{кр}\Delta\beta_{кр})^2$; $\delta=\delta_5-\delta_6(\Delta z_{об}+\delta_7\Delta z_{кр}+\delta_8\Delta\beta_{об}+\delta_8\Delta\theta_{об}+\delta_9\Delta\beta_{кр}\Delta y_{кр}+\delta_9\Delta\theta_{кр}\Delta x_{кр})^2$; $A=\delta_{10}-\delta_{11}(\Delta y_{кр}(x-\Delta x_{об})+\delta_{12}\Delta x_{кр}\times$
 $\times(y-\Delta y_{об})+\delta_{13}\Delta x_{кр}(x-\Delta x_{об})+\delta_{14}\Delta y_{кр}(y-\Delta y_{об})+\delta_{15}\Delta z_{об})^2$; δ_i – весовые коэффициенты определяются при моделировании и верифицируются методами радиоголографии.

4.4. Расчёт аппроксимирующего параболоида главного зеркала

Для расчета удлинений штоков актуаторов адаптивной поверхности главного зеркала необходимо рассчитать аппроксимирующий параболоид (АП) ГЗ, использованием метода наименьших квадратов (МНК) [130]. В результате измерений поверхности ГЗ, получено множество точек, которые характеризуются координатами $x_{0,i}$, $y_{0,i}$ и $z_{0,i}$ в БСК, через которые необходимо провести параболоид и выбрать его числовые параметры, так чтобы сумма квадратов отклонений вычисленных точек была минимальна, с учётом конечной величины хода штоков актуаторов и линии их действия.

Сформулируем критерии нахождения АП ГЗ. Основной задачей адаптивной поверхности является обеспечение требуемого среднеквадратичного отклонения поверхности ГЗ от поверхности, сформированной за счёт принципа гомологии. С другой стороны, необходимо обеспечивать физическую реализуемость данного АП, так как величина перемещения щитов ограничена и следует предусмотреть, что данные перемещение происходили вблизи юстировочных значений выдвиганий штоком актуаторов. Поэтому целесообразно выбрать в качестве критериев следующие: минимум среднего отклонения ошибок АП от

измеренного поля точек по нормали к поверхности АП ГЗ и минимум суммы ходов штоков актуаторов:

$$J_1 = \min_{\mathbf{p}} \xi_n^2(\mathbf{p}), J_2 = \min_{\mathbf{p}} \sum_{j=1}^m l_{a,j}^2(\mathbf{p}),$$

где ξ_n^2 - сумма квадратов невязок по нормали к АП ГЗ, $l_{a,j}^2$ - квадрат длины j -ого актуатора, $\mathbf{p}$ - вектор параметров АП ГЗ: $\mathbf{p} = [x_v \ y_v \ z_v \ \beta \ \theta \ a_p]^T$, $|p_i| \leq p_i^{\max}$, $\mathbf{v}_0 = [x_v, y_v, z_v]$ - координаты вершины в БСК, β, θ - углы ориентации фокальной оси в БСК, a_p - фокусное расстояние.

В качестве ограничений выбирается модель АП, который задаётся системе координат АП (СК АП) каноническим уравнением параболоида:

$$\mathbf{x}_{p,i}^T \mathbf{A}_p \mathbf{x}_{p,i} + 2a_p \mathbf{B}_p^T \mathbf{x}_{p,i} = 0,$$

$$\mathbf{x}_{p,i} = \begin{bmatrix} x_{p,i} \\ y_{p,i} \\ z_{p,i} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

где $x_{p,i}$ - координаты точки параболоида в СК АП. Так как измеренные координаты точек поверхности задаются в БСК удобнее воспользоваться представлением АП в БСК:

$$\mathbf{x}_{p,i} = \mathbf{c}(\beta, \theta)^T [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0],$$

$$[\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0]^T \mathbf{A}_0 [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0] + 2a_p \mathbf{B}_0^T [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0] = 0, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{c} \mathbf{A}_p \mathbf{c}^T, \mathbf{B}_0^T = \mathbf{B}_p^T \mathbf{c}^T,$$

где $x_{p,0,i}$ - координаты точки параболоида в БСК.

Чтобы рассчитать невязки между точками поверхности ГЗ и АП необходимо ввести нормаль к АП, которая определяется уравнением в БСК:

$$\mathbf{B}_p^T \mathbf{x}_{p,i} - \mathbf{B}_p^T \mathbf{c}^T [\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{v}_0] + a_p \sqrt{\frac{[\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{v}_0]^T \mathbf{c} \mathbf{A}_p \mathbf{c}^T [\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{v}_0]}{\mathbf{x}_{p,i}^T \mathbf{c} \mathbf{A}_p \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{p,i}}} = 0,$$

$x_{0,i}$ - координаты точки поверхности главного зеркала. Тогда уравнение невязки по нормали имеет вид:

$$\xi_n^2 = \sum_i \left[\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{c}^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{x}_{p,i} \right]^T \left[\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{c}^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{x}_{p,i} \right].$$

Необходимо определить ограничения на ход штоков актуаторов. Линия действия актуаторов задается в БСК в параметрическом виде следующим образом:

$$\mathbf{x}_{p,b0,j} = \mathbf{x}_{b0,j} + l_{a,j} \mathbf{e}_{a0,j}, \quad (4.8)$$

где $\mathbf{x}_{p,b0,j}$ - точка пересечения линии действия актуатора с АП ГЗ, $\mathbf{x}_{b0,j}$ - координаты юстировочного положения базы актуатора, $l_{a,j}$ - длина штока актуатора, $\mathbf{e}_{a0,j}$ - орт линии действия актуатора. Подставив (4.8) в (4.7) получим выражение для длин штоков актуаторов:

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{e}_{a0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_{a0,j} \right] l_{a,j}^2 + \left[2\mathbf{e}_{a0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{b0,j} - 2\mathbf{e}_{a0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_0 + 2a_p \mathbf{B}_0^T \mathbf{e}_{a0,j} \right] l_{a,j} + \\ & + \left[\mathbf{x}_{b0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{b0,j} - 2\mathbf{x}_{b0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^T \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_0 + 2a_p \mathbf{B}_0^T \mathbf{x}_{b0,j} - 2a_p \mathbf{B}_0^T \mathbf{v}_0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ход штока актуатора должен находиться в диапазоне $0 \leq l_{a,j} \leq l_{a,j}^{\max}$, где $l_{a,j}^{\max}$ - максимальное значение хода штока актуатора.

Обычно на практике задаются ошибки отклонения реальной поверхности от АП ГЗ, что позволяет перейти к одной целевой функции, введя дополнительные ограничения, тогда получим следующую постановку задачи построения АП ГЗ:

$$J_2 = \min_{\mathbf{p}} \sum_{j=1}^m l_{a,j}^2(\mathbf{p})$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{p,i} &= \mathbf{c}(\beta, \theta)^T [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0], \\
[\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0]^T \mathbf{A}_0 [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0] + 2a_p \mathbf{B}_0^T [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0] &= 0, \\
\mathbf{A}_0 &= \mathbf{c} \mathbf{A}_p \mathbf{c}^T, \mathbf{B}_0^T = \mathbf{B}_p^T \mathbf{c}^T, \\
\mathbf{B}_p^T \mathbf{x}_{p,i} - \mathbf{B}_p^T \mathbf{c}^T [\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{v}_0] + a_p \sqrt{\frac{[\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{v}_0]^T \mathbf{c} \mathbf{A}_p \mathbf{c}^T [\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{v}_0]}{\mathbf{x}_{p,i}^T \mathbf{c} \mathbf{A}_p \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{p,i}}} &= 0, \\
\xi_n^2 = \sum_i [\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{c}^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{x}_{p,i} - \mathbf{x}_{s,i}]^T [\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{c}^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{x}_{p,i} - \mathbf{x}_{s,i}] &\leq \varepsilon^2, \\
[\mathbf{e}_{a0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_{a0,j}] l_{a,j}^2 + [2\mathbf{e}_{a0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{b0,j} - 2\mathbf{e}_{a0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_0 + 2a_p \mathbf{B}_0^T \mathbf{e}_{a0,j}] l_{a,j} + \\
+ [\mathbf{x}_{b0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{b0,j} - 2\mathbf{x}_{b0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^T \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_0 + 2a_p \mathbf{B}_0^T \mathbf{x}_{b0,j} - 2a_p \mathbf{B}_0^T \mathbf{v}_0] &= 0,
\end{aligned}$$

$\mathbf{x}_{s,i}$ – координаты точек подвинутых щитов, ε – СКО поверхности. Выдвижения штоков $l_{a,j}$ рассчитываются как функции параметров АП ГЗ согласно (4.9).

4.5. Применение прямого метода Ляпунова для управления элементами зеркальной системы с исполнительными механизмами ИЭМС в режимах слежения и сканирования

Методы управления различными видами наземных и космических ЗС рассмотрены в работах [8, 15, 113, 120-122, 125-128, 162, 163, 172-177].

Рассмотрена методика [127, 163] аппроксимации оптимального управления приводами элементов ЗС с помощью прямого метода Ляпунова, позволяющая учитывать линейные ограничения на перемещения этих элементов путем добавления в классическую функцию Ляпунова штрафных функций, от расстояний до ограничений.

Основной проблемой при слежении РТ за КИР в целевом множестве является предельно малый временной интервал, в течении которого необходимо определить управляющее воздействие. Хорошо разработаны методы управления, основанные на прямом методе Ляпунова, например, метод скоростного градиента и его модификации подробно изложенные в работах А.Л. Фрадкова [17, 53, 54, 178].

Наиболее общие результаты по исследованию устойчивости систем могут быть получены по методу А.М. Ляпунова [17]. При использовании прямого метода Ляпунова, исследуемая система описывается дифференциальными уравнениями в форме уравнений первого порядка, полагая, что они записаны для переходного процесса в отклонениях всех переменных вектора состояния x , от их значений в установившемся режиме x_g :

$$e = x - x_g, \dot{e} = \Psi(e, u, f), \quad (4.10)$$

где e – ошибка управления; u – управление; f – возмущение; Ψ – функция произвольного вида, удовлетворяющая условию

$$\Psi(e, u, f) = 0, \text{ при } e = 0,$$

так как в установившемся состоянии все отклонения и их производные равны нулю.

Чтобы исследовать устойчивость по Ляпунову, необходимо подобрать некоторую знакоопределенную функцию $V(e)$ и вычислить производную по времени от этой функции.

Функция $V(e)$ называется *знакоопределенной* в некоторой области, если она во всех точках этой области в окрестности начала координат сохраняет один и тот же знак и нигде не обращается в нуль, кроме начала координат.

Функция $V(e)$ называется *знакопостоянной*, если она сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках данной области.

Функция $V(e)$ называется *знакопеременной*, если она в данной области вокруг начала координат может иметь разные знаки.

Теорема Ляпунова об устойчивости систем [17]: если при заданных в форме (4.10) уравнениях системы n -го порядка можно подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова $V(e)$, чтобы ее производная по времени тоже была знакоопределенной (или знакопостоянной), но имела знак, противоположный знаку $V(e)$, то данная система устойчива; при

знакоопределенной функции W будет иметь место асимптотическая устойчивость.

Теорема Ляпунова о неустойчивости систем [17]: если при заданных в форме (4.10) уравнениях системы n -го порядка производная по времени от какой-нибудь функции Ляпунова $V(\mathbf{e})$ окажется знакоопределенной, причем сама функция $V(\mathbf{e})$ в какой-нибудь области, примыкающей к началу координат, будет иметь знак, одинаковый со знаком производной, то данная система неустойчива.

Замечания к теореме Ляпунова об устойчивости.

1. При заданных в форме (4.10) уравнениях системы выбор функции $V(\mathbf{e})$ неоднозначен, поэтому данная теорема Ляпунова обеспечивает получение достаточных условий устойчивости, которые не всегда будут и необходимыми, т.е. при выполнении условий теоремы система наверняка будет устойчивой, но эти условия могут не охватывать всей области устойчивости системы по параметрам.
2. Понятие устойчивости по Ляпунову допускает, что при знакоопределенной функции $V(\mathbf{e})$ производная от нее по времени была не обязательно знакоопределенной или знакопостоянной, а могла быть и тождественно равна нулю. В результате система хотя и не будет асимптотически приближаться к установившемуся состоянию, но все же будет все время в достаточной близости от него.

С точки зрения теории оптимального управления функция Ляпунова $V(\mathbf{e})$ является целевой функцией и в силу своих свойств (знакоопределенной, знакопостоянной) может быть выбрана в виде метрики (расстояния) фазового пространства системы (4.10).

Классическим примером $V(\mathbf{e})$ является квадратичная форма ошибки:

$$V(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}, \quad (4.11)$$

где $\mathbf{P}$ - положительноопределенная матрица весовых коэффициентов.

Найти управление u динамическим объектом, цель управления которого задана целевой функцией (4.11), можно с помощью метода

скоростного градиента (МСГ) [17, 178]. Суть МСГ состоит в следующем, чтобы достичь цели управления необходимо u в направлении уменьшения $V(e)$. Однако $V(e)$ не зависит от u , найти такое направление затруднительно. Вместо этого можно уменьшать производную от $V(e)$, чтобы выполнялось неравенство $\dot{V}(e) \leq 0$, означающее уменьшение $V(e)$.

Для построения алгоритма управления по МСГ необходимо найти производную по времени от целевой функции (4.11):

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}. \quad (4.12)$$

Рассмотрим случай управления линейным ДО при ограничениях на управление. Уравнения ДО имеют вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u_i \in [-u_i^{\max}, u_i^{\max}], \quad x \in R^n, u \in R^m, \quad (4.13)$$

где A , B – параметры ДО; x – вектор состояния ДО; u – вектор управления, компоненты которого ограничены по диапазону.

Тогда (4.12) с учетом (4.13) примет вид:

$$\dot{V}(e) = e^T (A^T P + P A) e + 2u^T B^T P e. \quad (4.14)$$

Найдем градиент от (4.14) по u : $\nabla_{u_i} \dot{V}(e) = B^T P e$, тогда алгоритм управления по МСГ будет иметь вид:

$$\dot{u} = -\Gamma \nabla_{u_i} \dot{V}(e) = -\Gamma B^T P e, \quad (4.15)$$

где Γ – диагональная матрица усиления. Алгоритм (4.15) представляет собой хорошо известный интегральный закон регулирования.

Аналогичным образом строится и обобщение другого классического закона регулирования — пропорционального. Это так называемый *алгоритм скоростного градиента в конечной форме*:

$$u = -\Gamma \nabla_{u_i} \dot{V}(e) = -\Gamma B^T P e. \quad (4.16)$$

При ограничениях на управления применяется *релейный алгоритм*, полученный из следующих условий. Система (4.14) будет устойчива, если $\dot{V}(e) \leq 0$ для всех t , т. е. если:

$$e^T (A^T P + P A) e \leq 0, \quad (4.17)$$

$$2\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{e} \leq 0. \quad (4.18)$$

Выражение (4.17) выполняется в случае:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}, \quad (4.19)$$

где $\mathbf{Q}$ – положительно определенная матрица.

В данном случае релейный алгоритм управления будет иметь вид:

$$u_i = -u_i^{\max} \text{sign}(\beta_{i1}e_1 + \beta_{i2}e_2 + \dots + \beta_{in}e_n), \quad \beta = \mathbf{B}^T \mathbf{P}. \quad (4.20)$$

Для того, чтобы обеспечить устойчивое сопровождение КИР, необходимо чтобы траектория РТ в фазовом пространстве не выходила за линейные ограничения, рассчитываемые из параметров ЗС РТ.

В [179] рассматривалась возможность применения релейного алгоритма управления, для аппроксимации эталонных процессов, полученных методами математического программирования. Данный метод заключался в следующем: рассматривалось движение системы вблизи стационарной точки, методами математического программирования определялся оптимальный закон управления в виде меандра при наличии ограничений. Для меандра определялись точки переключения, составлялась система алгебраических уравнений, по которым в результате оптимизации находились веса $\mathbf{P}$.

Недостатки такого метода заключаются в следующем:

1. Для различных начальных условий необходимо находить различные $\mathbf{P}$;
2. При управлении возможен, неконтролируемый выход компонент вектора состояния за ограничения.

Устранить недостатки данного метода можно введением в $V(e)$ штрафных функций от ограничений.

Рассмотрим задачу управления механическим объектом:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{f}, \quad \mathbf{y} \in R^s, \quad \mathbf{u} \in R^m, \quad \mathbf{f} \in R^p, \quad (4.21)$$

где $\mathbf{y}$ – обобщенные координаты; $\mathbf{u}$ – управление; $\mathbf{f}$ – возмущение; $\mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{C}$ – симметрические матрицы параметров; $\mathbf{B}$ – матрица управления; $\mathbf{F}$ – матрица возмущения.

Объект (4.21) необходимо перевести из начального состояния $\mathbf{x}(t_0) = [\mathbf{y}(t_0); \dot{\mathbf{y}}(t_0)]$ в желаемое состояние $\mathbf{x}_g = [\mathbf{y}_g; \dot{\mathbf{y}}_g]$, за минимальное время при линейных ограничениях на фазовые координаты: $\mathbf{y}^{\max}, \mathbf{y}^{\min}$ - максимальные и минимальные значения обобщенных координат; $\mathbf{v}^{\max}, \mathbf{v}^{\min}$ - максимальные и минимальные значения обобщенных скоростей; $\mathbf{u}^{\max}$ - максимальные по модулю значения управляющих воздействий.

Желаемое состояние может рассматриваться как выход некоторой фиктивной системы:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{y}}_g + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}}_g + \mathbf{C}\mathbf{y}_g = \mathbf{F}\mathbf{f}^*, \mathbf{y} \in R^s, \mathbf{f}^* \in R^p, \quad (4.22)$$

где $\mathbf{f}^*$ - оценка возмущающего воздействия. Построение $\mathbf{x}_g = [\mathbf{y}_g; \dot{\mathbf{y}}_g]$ может быть выполнено с помощью алгоритмов, изложенных ниже.

Уравнения ДО в отклонениях относительно желаемого состояния имеет вид:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_g, \mathbf{e} \in R^s, \mathbf{u} \in R^m, \quad (4.23)$$

где $\mathbf{e}$ – векторная ошибка управления по всем обобщенным координатам ДО.

Чтобы применить МСГ необходимо, чтобы уравнения ДО (4.23) были приведены к нормальной форме Коши:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_z \mathbf{z} + \mathbf{B}_z \mathbf{u}, \mathbf{z} = [\mathbf{e}; \dot{\mathbf{e}}], \mathbf{z} \in R^{2s}, \mathbf{u} \in R^m. \quad (4.24)$$

Классические функции Ляпунова вида (4.11) как целевые функции не учитывают ограничения. Чтобы ввести ограничения в (4.11) воспользуемся методом штрафных функций, подробно изложенном в [27,85]. Метод штрафных функций позволяет свести задачу минимизации при ограничениях к задаче минимизации без ограничений добавлением в исходную целевую функцию функций, удовлетворяющих следующим свойствам [85]:

1. Внутри области фазового пространства, очерченного ограничениями, значение штрафной функции стремиться к нулю;
2. При приближении к ограничениям значение штрафной функции увеличивается;

3. Так как V является метрикой фазового пространства, то и модифицированная V также должна быть метрикой, поэтому штрафные функции должны быть больше или равны нулю при всех значениях состояния системы.

Этим условиям удовлетворяют функции вида:

$$\begin{aligned} G_i^{\max}(y_i) &= \exp\left[\delta_i^y (y_i - y_i^{\max})\right] > 0, \quad G_i^{\min}(y_i) = \exp\left[\delta_i^y (y_i^{\min} - y_i)\right] > 0, \\ Q_i^{\max}(\dot{y}_i) &= \exp\left[\delta_i^v (\dot{y}_i - v_i^{\max})\right] > 0, \quad Q_i^{\min}(\dot{y}_i) = \exp\left[\delta_i^v (v_i^{\min} - \dot{y}_i)\right] > 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $G_i^{\max}(y_i)$ и $G_i^{\min}(y_i)$ - штрафные функции минимальных и максимальных значений обобщенных координат; $Q_i^{\max}(\dot{y}_i)$ и $Q_i^{\min}(\dot{y}_i)$ - штрафные функции минимальных и максимальных значений обобщенных скоростей; δ_i^y и δ_i^v - положительные весовые коэффициенты.

Для удобства выразим $G_i^{\max}(y_i)$, $G_i^{\min}(y_i)$, $Q_i^{\max}(\dot{y}_i)$ и $Q_i^{\min}(\dot{y}_i)$ через $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}_g$:

$$\begin{aligned} W_i^{\max}(z_i) &= \exp\left[\delta_i^z (z_i + x_{g,i} - x_i^{\max})\right] > 0, \quad W_i^{\min}(z_i) = \exp\left[\delta_i^z (x_i^{\min} - x_{g,i} - z_i)\right] > 0, \\ \delta^z &= \text{diag}(\delta_1^y, \delta_2^y, \dots, \delta_s^y, \delta_1^v, \delta_2^v, \dots, \delta_s^v), \quad \mathbf{x}^{\max} = [\mathbf{y}^{\max}; \dot{\mathbf{y}}^{\max}], \quad \mathbf{x}^{\min} = [\mathbf{y}^{\min}; \dot{\mathbf{y}}^{\min}]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Модифицированная функция Ляпунова имеет вид:

$$V(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \boldsymbol{\delta} \mathbf{z} + \sum_{i=1}^{2s} W_i^{\max}(z_i) + \sum_{i=1}^{2s} W_i^{\min}(z_i) > 0, \quad (4.27)$$

где $\boldsymbol{\delta}$ - положительно определенная матрица коэффициентов.

Найдем производную по времени от (4.27) и учтём (4.26):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{z}) &= \mathbf{z}^T (\mathbf{A}_z^T \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta} \mathbf{A}_z) \mathbf{z} + 2\mathbf{u}^T \mathbf{B}_z^T \boldsymbol{\delta} \mathbf{z} + (\mathbf{A}_z \mathbf{z} + \mathbf{B}_z \mathbf{u} + \dot{\mathbf{x}}_g)^T \boldsymbol{\delta}^z [\mathbf{W}^{\max} - \mathbf{W}^{\min}], \\ \mathbf{W}^{\max} &= [W_1^{\max}, W_2^{\max}, \dots, W_{2s}^{\max}]^T, \quad \mathbf{W}^{\min} = [W_1^{\min}, W_2^{\min}, \dots, W_{2s}^{\min}]^T. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Найдем градиент от (4.28) по $\mathbf{u}$:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \dot{V}(\mathbf{z}) = \mathbf{B}_z^T \boldsymbol{\delta} \mathbf{z} + \mathbf{B}_z^T \boldsymbol{\delta}^z [\mathbf{W}^{\max} - \mathbf{W}^{\min}], \quad (4.29)$$

тогда релейный алгоритм управления будет:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\text{diag}(\mathbf{u}^{\max}) \boldsymbol{\Psi} (\mathbf{B}_z^T \boldsymbol{\delta} \mathbf{z} + \mathbf{B}_z^T \boldsymbol{\delta}^z [\mathbf{W}^{\max} - \mathbf{W}^{\min}]), \\ \boldsymbol{\Psi}(a_1, a_2, \dots, a_m) &= [\text{sign}(a_1), \text{sign}(a_2), \dots, \text{sign}(a_m)]^T. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Рассмотрим задачу управления дискретным ДО при квантовании по времени с периодом T . Уравнения ДО (4.24) в дискретном виде будут:

$$\mathbf{z}[k+1] = \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}[k] + \mathbf{H}_z \mathbf{u}[k], \quad \mathbf{z} \in R^{2s}, \quad \mathbf{u} \in R^m, \quad (4.31)$$

где k – номер такта.

Модифицированная функция Ляпунова для дискретного ДО имеет вид:

$$V(\mathbf{z}[k]) = \mathbf{z}^T[k] \delta \mathbf{z}[k] + \sum_{i=1}^{2s} \mathbf{W}_i^{\max}(\mathbf{z}_i[k]) + \sum_{i=1}^{2s} \mathbf{W}_i^{\min}(\mathbf{z}_i[k]) > 0. \quad (4.32)$$

Рассмотрим первую разность от (4.32):

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{z}[k]) = & \mathbf{z}^T[k] (\mathbf{\Lambda}_z^T \delta \mathbf{\Lambda}_z - \delta) \mathbf{z}[k] + \mathbf{u}^T[k] \mathbf{H}_z^T \delta \mathbf{H}_z \mathbf{u}[k] + 2\mathbf{u}^T[k] \mathbf{H}_z^T \delta \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}[k] + \\ & + (\mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}[k] + \mathbf{H}_z \mathbf{u}[k] - \mathbf{z}[k] + \mathbf{x}_g[k+1] - \mathbf{x}_g[k])^T \delta^z [\mathbf{W}^{\max}(\mathbf{z}_i[k]) - \mathbf{W}^{\min}(\mathbf{z}_i[k])]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Найдем градиент от (4.33) по $\mathbf{u}[k]$:

$$\nabla_{\mathbf{u}[k]} (\Delta V(\mathbf{z}[k])) = 2\mathbf{H}_z^T \delta \mathbf{H}_z \mathbf{u}[k] + 2\mathbf{H}_z^T \delta \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}[k] + \mathbf{H}_z^T \delta^z [\mathbf{W}^{\max}(\mathbf{z}_i[k]) - \mathbf{W}^{\min}(\mathbf{z}_i[k])], \quad (4.34)$$

потребуем наличие минимума скорости убывания $\Delta V(\mathbf{z}[k])$, тогда релейный алгоритм управления будет:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & -\text{diag}(\mathbf{u}^{\max}) \Psi \left((\mathbf{H}_z^T \delta \mathbf{H}_z)^{-1} \mathbf{H}_z^T (\delta \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}[k] + 0.5 \delta^z [\mathbf{W}^{\max}(\mathbf{z}_i[k]) - \mathbf{W}^{\min}(\mathbf{z}_i[k])]) \right), \\ & \Psi(a_1, a_2, \dots, a_m) = [\text{sign}(a_1), \text{sign}(a_2), \dots, \text{sign}(a_{2s})]^T. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Для алгоритма (4.35) необходимо определить коэффициенты δ и δ^z , общее число которых в данном случае равно $4s^2+s$. Эти коэффициенты, как и в [174] можно определить, записав уравнения для точек переключения оптимальных управлений, рассчитанных другими методами.

Чтобы сократить количество искомых коэффициентов можно использовать функцию вида:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{e}, \mathbf{e}_v, t) = & \mathbf{e}^T \mathbf{\Lambda}_e \mathbf{e} + \delta_E E(\mathbf{e}, \mathbf{e}_v) + \\ & + \sum_{i=1}^s \left[\exp(\delta_i^y \bar{y}^{\max}) + \exp(\delta_i^y \bar{y}^{\min}) + \exp(\delta_j^v \bar{v}^{\min}) + \exp(\delta_j^v \bar{v}^{\max}) \right] > 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{e}_v = \dot{\mathbf{e}}$ – скорость изменения ошибки управления; $\mathbf{\Lambda}_e$ – диагональная матрица положительных весовых коэффициентов при ошибках наведения; δ_E – весовой коэффициент при полной энергии механической системы;

$E(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = 0.5\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{A}\dot{\mathbf{e}} + 0.5\mathbf{e}^T \mathbf{C}\mathbf{e}$ - полная энергия системы; $\bar{\mathbf{y}}^{\max}$ - отклонение текущего положения ДО от максимальных значений $\bar{\mathbf{y}}^{\max} = \mathbf{y}_g - \mathbf{y}^{\max} + \mathbf{e}$; $\bar{\mathbf{y}}^{\min} = \mathbf{y}^{\min} - \mathbf{y}_g - \mathbf{e}$ - отклонение текущего положения ДО от минимальных значений $\mathbf{y}^{\min}$; $\mathbf{v}_g = \dot{\mathbf{y}}_g$; $\bar{\mathbf{v}}^{\min} = \mathbf{v}^{\min} - \mathbf{v}_g - \mathbf{e}_v$; $\bar{\mathbf{v}}^{\max} = \mathbf{v}_g - \mathbf{v}^{\max} + \mathbf{e}_v$; δ_i^y , δ_j^v - положительные весовые коэффициенты.

В дискретном виде функция Ляпунова имеет вид:

$$V[k] = \mathbf{e}[k]^T \mathbf{\Lambda}_e \mathbf{e}[k] + \delta_E E[k] + \sum_{i=1}^s \left[\exp(\delta_i^y \bar{\mathbf{y}}^{\max}[k]) + \exp(\delta_i^y \bar{\mathbf{y}}^{\min}[k]) + \exp(\delta_j^v \bar{\mathbf{v}}^{\min}[k]) + \exp(\delta_j^v \bar{\mathbf{v}}^{\max}[k]) \right] > 0, \quad (4.36)$$

где k – номер такта.

Уравнения ДО в дискретном виде в нормальной форме Коши имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}[k+1] \\ \mathbf{e}_v[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{11} & \mathbf{\Lambda}_{12} \\ \mathbf{\Lambda}_{21} & \mathbf{\Lambda}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}[k] \\ \mathbf{e}_v[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}[k],$$

где $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{H}$ - матрицы параметров дискретного ДО.

Управление, обеспечивающее минимум $\Delta V[k]$, находится из условия $\nabla_{\mathbf{u}[k]}(\Delta V[k]) = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}[k] = & -\text{diag}(\mathbf{u}^{\max}) \text{sign} \left(\left[\mathbf{H}_1^T \mathbf{\Lambda}_e \mathbf{H}_1 + 0.5\delta_E \mathbf{H}_1^T \mathbf{C} \mathbf{H}_1 + 0.5\delta_E \mathbf{H}_2^T \mathbf{A} \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1 \mathbf{\Lambda}_e \mathbf{H}_1^T + \right. \right. \\ & + 0.5\delta_E \mathbf{H}_1 \mathbf{C} \mathbf{H}_1^T + 0.5\delta_E \mathbf{H}_2 \mathbf{A} \mathbf{H}_2^T \left. \right]^{-1} \times \left(\left[2\mathbf{H}_1^T \mathbf{\Lambda}_e \mathbf{\Lambda}_{11} + \delta_E \mathbf{H}_1^T \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}_{11} + \delta_E \mathbf{H}_2^T \mathbf{A} \mathbf{\Lambda}_{21} \right] \mathbf{e}[k] + \right. \\ & + \left[2\mathbf{H}_1^T \mathbf{\Lambda}_e \mathbf{\Lambda}_{12} + \delta_E \mathbf{H}_1^T \mathbf{\Lambda}_e \mathbf{\Lambda}_{12} + \delta_E \mathbf{H}_2^T \mathbf{A} \mathbf{\Lambda}_{22} \right] \mathbf{e}_v[k] + \\ & \left. + \mathbf{H}_1^T \delta^y \left[\exp(\delta^y \bar{\mathbf{y}}^{\max}[k]) - \exp(\delta^y \bar{\mathbf{y}}^{\min}[k]) \right] + \mathbf{H}_2^T \delta^v \left[\exp(\delta^v \bar{\mathbf{v}}^{\max}[k]) - \exp(\delta^v \bar{\mathbf{v}}^{\min}[k]) \right] \right) \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Коэффициенты $\mathbf{\Lambda}_e$ определяются как отношение диапазона обобщенной координаты к соответствующей максимально допустимой по модулю ошибке управления $e_i^{\max}$:

$$\delta = \text{diag}[\delta_1, \dots, \delta_s], \quad \delta_i = \frac{|y_i^{\max} - y_i^{\min}|}{\delta_{\max} e_i^{\max}}, \quad \delta_{\max} = \max \left(\frac{|y_1^{\max} - y_1^{\min}|}{e_1^{\max}}, \dots, \frac{|y_s^{\max} - y_s^{\min}|}{e_s^{\max}} \right);$$

δ_E – по качеству переходного процесса; δ_i^y и δ_j^v - из погрешности соблюдения ограничений:

$$\delta_i^y = -\frac{\ln(e^{\max, T} \Delta e^{\max})}{\frac{\sigma_{y,i}^{\max}}{100\%} |y_i^{\max} - y_i^{\min}|}, \text{ где } \sigma_{y,i}^{\max} - \text{погрешность соблюдения ограничений в процентах от диапазона } |y_i^{\max} - y_i^{\min}|;$$

$$\delta_i^v = -\frac{\ln(e^{\max, T} \Delta e^{\max})}{\frac{\sigma_{v,i}^{\max}}{100\%} [v_i^{\max} - v_i^{\min}]}, \sigma_{v,i}^{\max} - \text{погрешность соблюдения ограничений в процентах от диапазона } |v_i^{\max} - v_i^{\min}|.$$

4.6. Моделирование системы позиционирования главного зеркала на примере привода азимута.

В качестве модели объекта управления выбран привод азимута ГЗ в составе асинхронного двигателя, блока управления им и упрощённой модели механики пространственной металлоконструкции, описывающий её первый резонансный тон, который существенным образом влияет на качество управления [126,127].

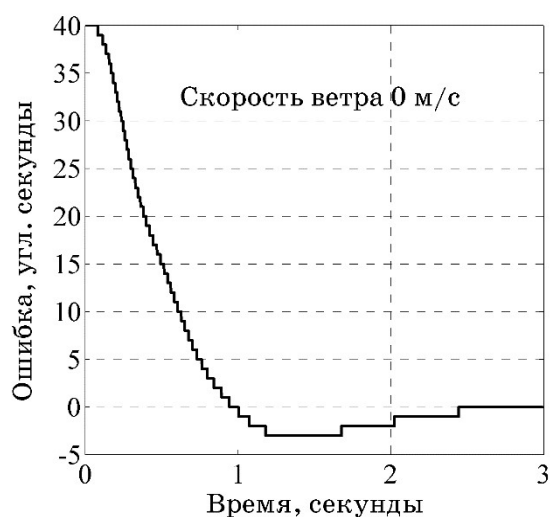
На упрощённой модели отработаны основные принципы синтеза систем управления ГЗ РТ, созданная модель позволяет дать оценки точности позиционирования ГЗ при наличии нелинейного элемента, ограничивающего управляющий сигнал, а так же при ограничениях на фазовые координаты привода, такие как ток и скорость поворота антенны и т.д. Модель ПМК может быть расширена путём увеличения числа масс и упругих связей.

Привод азимута имеет один управляющий вход, исходя из принципа управления по прямому методу Ляпунова, управление ищется в виде:

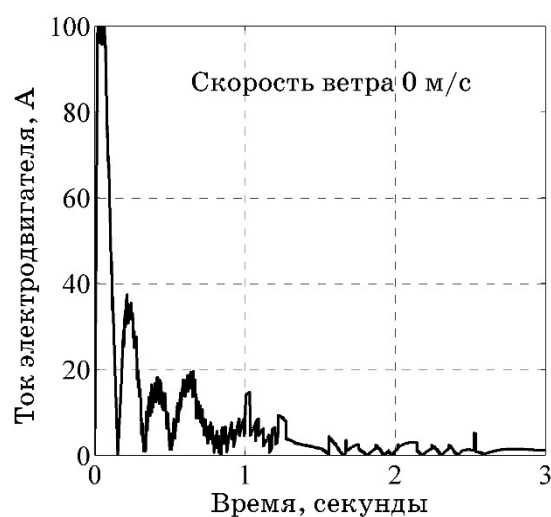
$$u = -u^{\max} \text{sign} \left(\mathbf{p}_1 \mathbf{z} + \int_t \mathbf{p}_2 \mathbf{z} + \mathbf{B}_z^T \delta^z [\mathbf{W}^{\max} - \mathbf{W}^{\min}] \right), \quad (4.38)$$

где $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ – векторы коэффициентов обратных связей. Выбор структуры управляющего воздействия обусловлен тем, что матрица объекта $\mathbf{A}_z$ имеет нулевой корень, и определение коэффициентов δ не может быть выполнено

через решение уравнения Ляпунова. Для поиска коэффициентов p_1 , p_2 по качеству переходного процесса использовалась оптимизационная процедура NCD пакета Matlab. Наличие интегратора в законе управления обусловлено необходимостью увеличения астатизма синтезируемой системы, с целью более эффективного компенсирования внешнего воздействия.



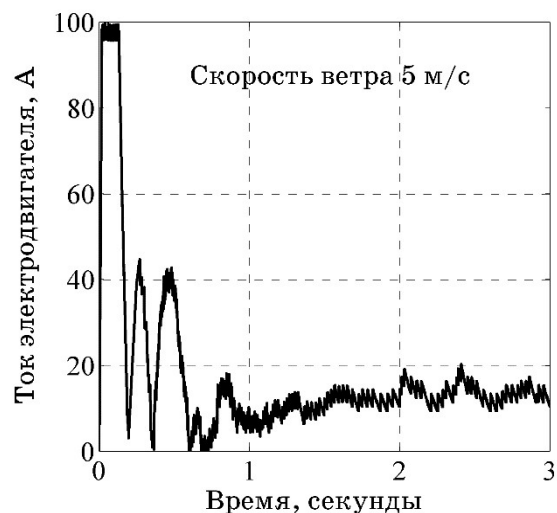
а



б



в



г

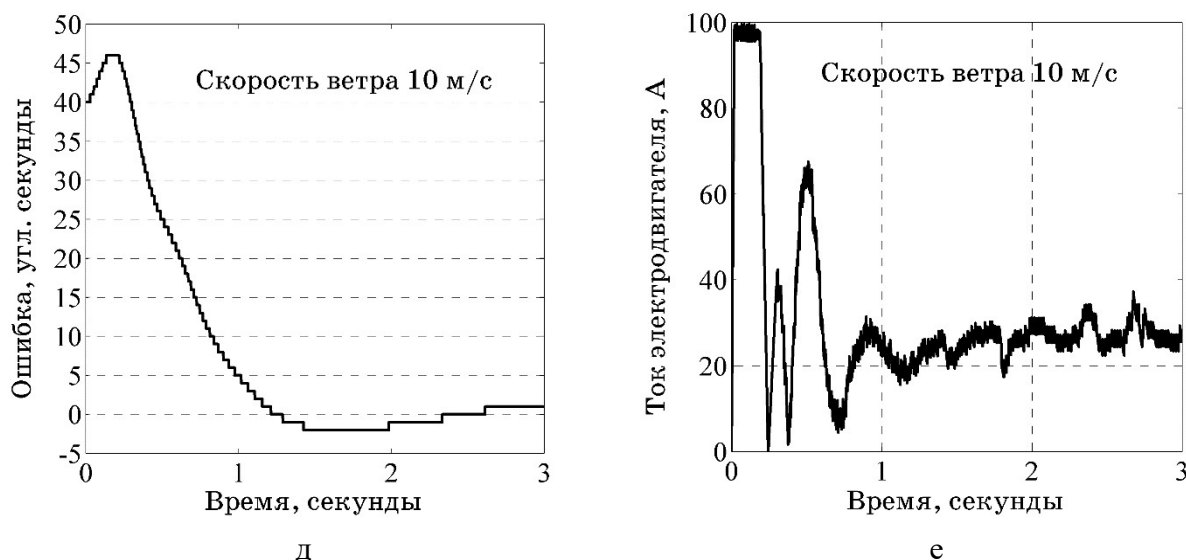


Рис. 4.7. Результаты моделирования системы управления наведением радиотелескопа по углу азимута при разной скорости ветра.

Выводы

В главе проведен обзор методов, которые могут быть использованы для управления ГЗ, АПО и КР в реальном времени, так как применение методов оптимального управления невозможно из-за высокой динамики этих элементов ЗС.

Рассмотрен вопрос о возможности аппроксимации заранее рассчитанных оптимальных законов управления с помощью релейного метода, который является модификацией метода скоростного градиента. Установлено, что такая задача может быть решена только для стационарных точек и фиксированных начальных условий, такой алгоритм не мог гарантировать соблюдение ограничений во время слежения, поэтому была предложена его модификация, что позволило учитывать линейные ограничения на перемещения этих элементов путем добавления в классическую функцию Ляпунова штрафных функций, от расстояний до ограничений.

Предложенный алгоритм управления может быть отнесен к классу алгоритмов для нахождения субоптимального управления, поэтому

полученные с помощью него решения в общем случае не являются оптимальными, что является существенным недостатком.

К достоинствам следует отнести: небольшое время выполнения, адаптируемость к дрейфу начальных условий и ограничений, простоту реализации и возможность применения в реальном времени.

Глава 5. Идентификация характеристик материалов в информационно-измерительной системе испытательного стенда с разрезными стержнями Гопкинсона-Кольского

В работе исследовалась ИИС испытательного стенда с разрезными стержнями Гопкинсона-Кольского, предназначенного для проведения динамических испытаний образцов различных материалов на прочность.

Изучению вопросов динамических испытаний материалов на прочность посвящены труды Г. Кольского, Дж. Тейлора, А. Кобаяси, Дж. Даффи, Р. Дэвиса, А. Надаи, У. Линдхольма, Дж. Кэмпбелла, Дж. Белла, Н.Ф. Морозова, Ю.В. Петрова, Д.А. Индейцева, А.М. Брагова, Ю.И. Мещерякова, А.К. Абрамяна, Ю.В. Судьенкова, С.А. Новикова, Г.В. Степанова, А.П. Большакова и др. Анализ существующих методик построения моделей разрушения материалов при динамическом нагружении и изучение тонких эффектов данных процессов, приводит к вопросу об учёте влияния экспериментальной установки и её ИИС на качество получаемых экспериментальных данных. Данный вопрос в настоящее время слабо изучен.

Предлагается повысить эффективность ИИС стенда на основе разрезных стержней Гопкинсона-Кольского применением разработанных модулей обработки измерительной информации с использованием методов идентификации на основе множественно-функционального подхода.

Разработка методов и их верификация осуществлялись на основе экспериментальных данных по динамической прочности известняка, битума и фибробетона, габбро-диабазы полученные на установке Гопкинсона [22-24, 180, 181]. В ходе анализа ИИС установки Гопкинсона и полученных на ней данных было выяснено, что основной проблемой при построении характеристик динамической прочности строительных материалов явились: наличие разных масштабов и значений амплитуд данных для каждого из экспериментов, осцилляционные составляющие в фиксируемых сигналах, а также погрешности, внесённые системой единого времени установки (СЕВ) –

несогласованные фазовые сдвиги между нагружающим, отражённым и прошедшими сигналами с датчиков.

5.1. Анализ результатов динамических испытаний на установке Гопкинсона

При динамических испытаниях материалов часто используется установка с разрезными стержнями Гопкинсона-Кольского [181-183]. Типичная схема установки представлена на Рис. 5.1.

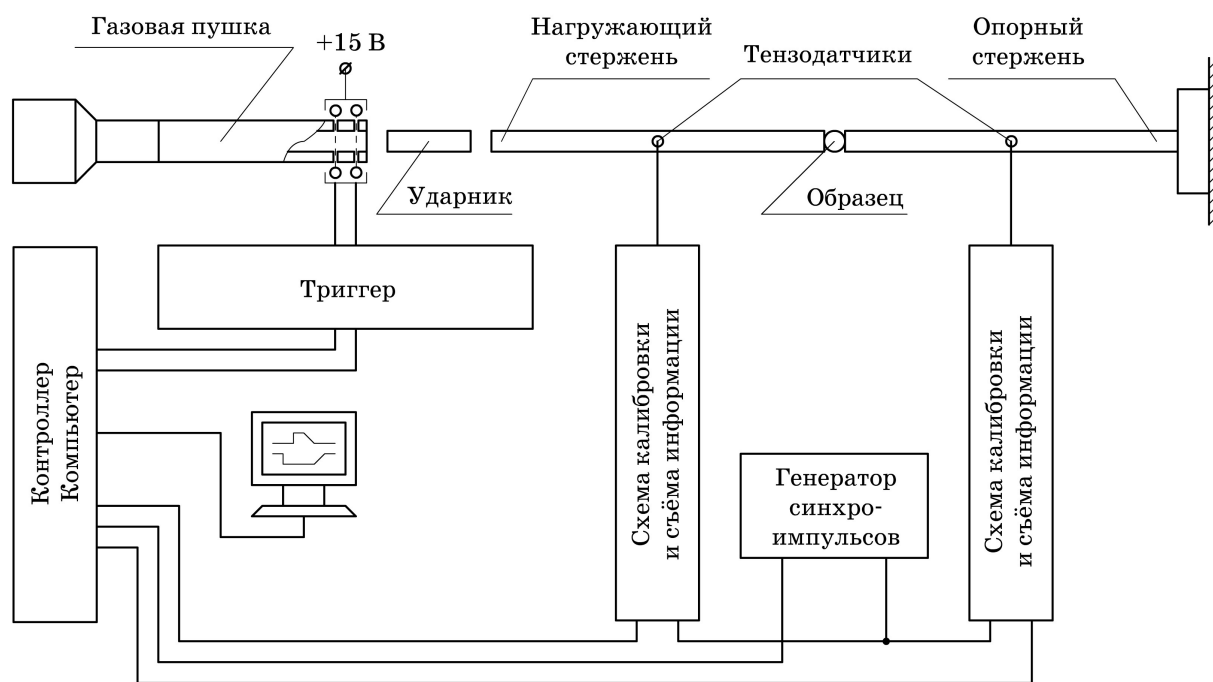


Рис. 5.1. Установка для динамических испытаний материалов.

Установка с разрезными стержнями Гопкинсона-Кольского включает в себя газовую пушку с системой контроля давления, систему сбора данных и набор сменных измерительных стержней. Образец располагается между стержнями. Стержни используются для передачи импульса напряжений в образец, а также регистрации параметров данного импульса. Соударение ударника с передающим стержнем приводит к формированию и распространению волны сжатия в этом стержне. Часть волны переходит в образец, а другая отражается на границе образца и стержня. Необходимое условие эксперимента, чтобы время распространения волны по образцу было достаточно меньше, чем длительность импульса напряжений. Это приводит к

многократному переотражению волны от границ образца и стержней и формированию однородного напряженного состояния по всему объему образца. Поэтому силы, действующие на образец со стороны входящего и выходящего стержня равны. Импульсы деформации во входном и выходном стержнях измерялись с помощью тензодатчиков, приклеенных на внешнюю поверхность стержней.

Для испытаний на одноосное сжатие используется классическая схема Кольского. Для испытаний на растяжение обычно используется схема Бразильского теста. Разница в техническом исполнении экспериментов заключается в установке образца (Рис. 5.2), где F – сила, действующая на образец, σ_t – скорость роста напряжений.

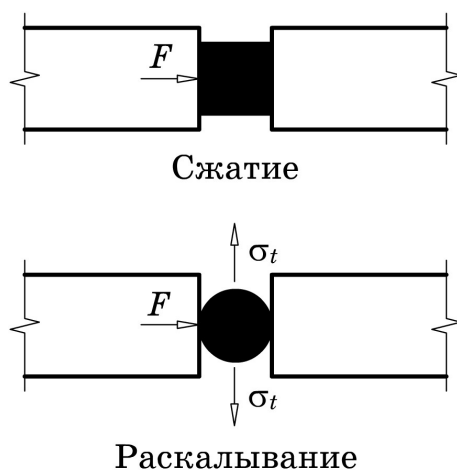
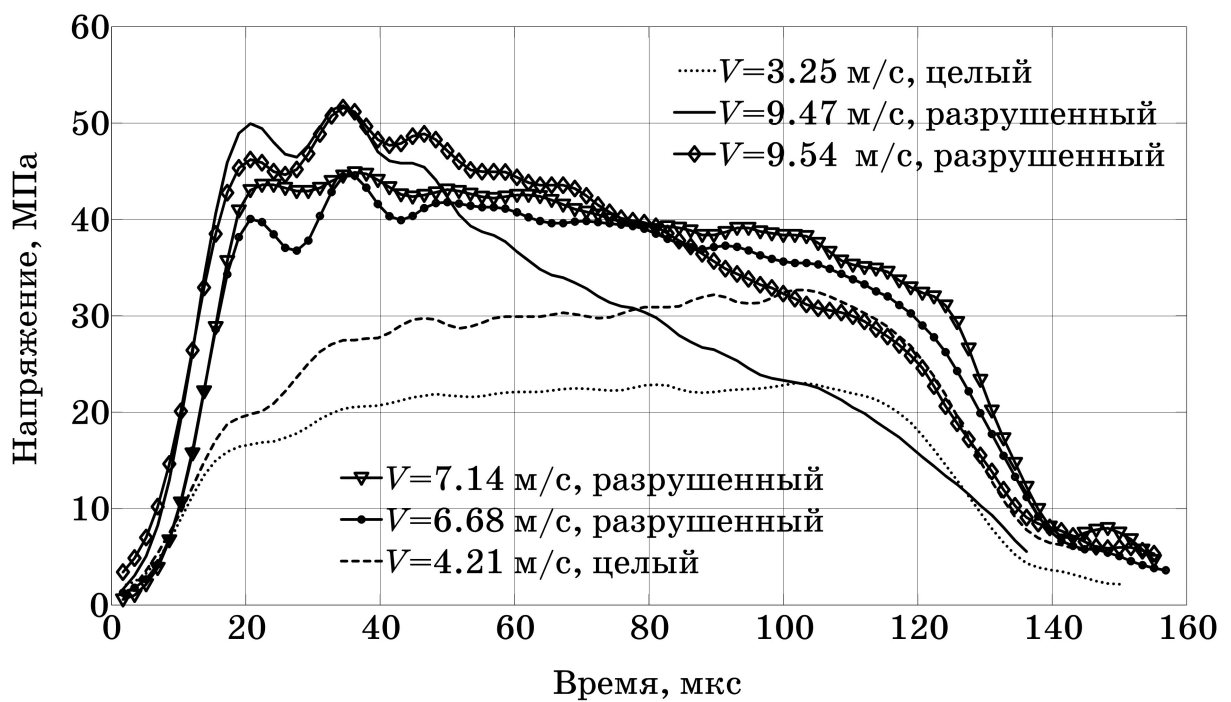
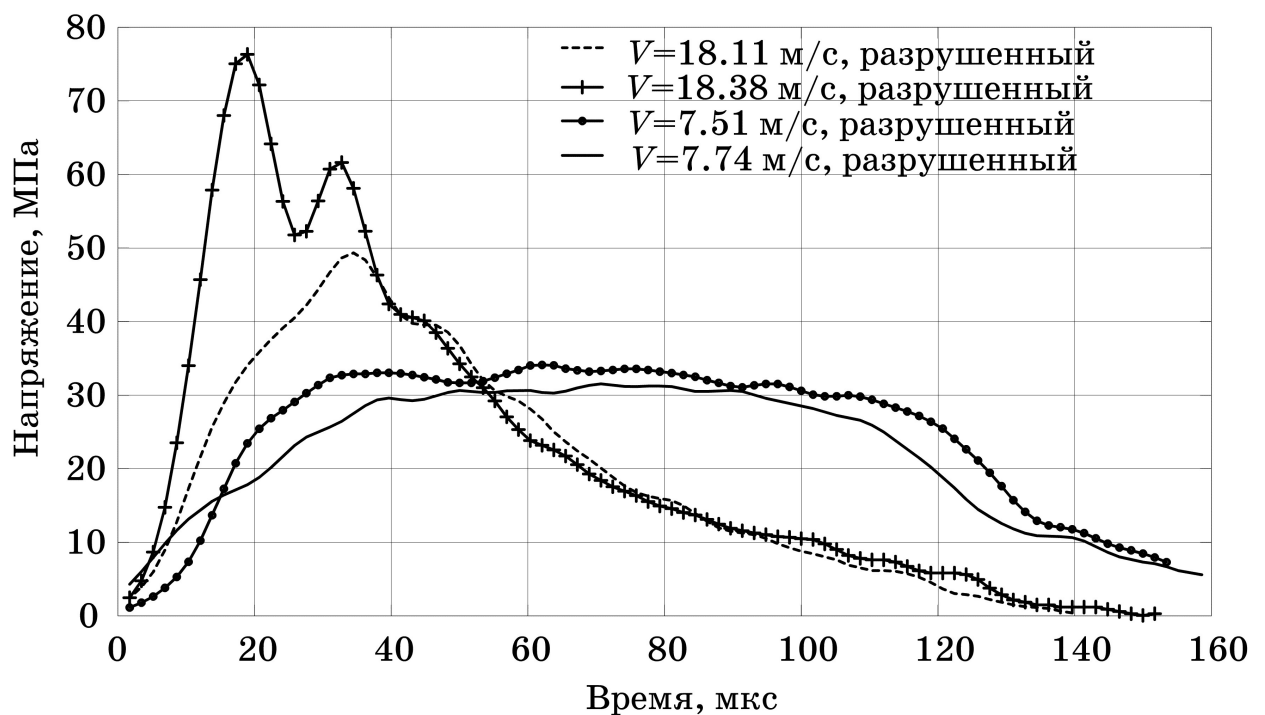


Рис. 5.2. Схема испытаний на одноосное сжатие (тест Кольского) и раскалывание (Бразильский тест).

В результате испытаний получают зависимости в виде графиков, необходимых для оценки прочности материалов при действии на них динамических нагрузок. Пример типичных графиков, полученных с помощью традиционных методов обработки данных экспериментов, проведенных по схеме Гопкинсона, даны на Рис. 5.3, где представлены диаграммы напряжений, возникающих в образцах, изготовленных из известняка (сухого и влагонасыщенного), при разных скоростях ударника [180]. Профили напряжений были получены после обработки сигналов с тензодатчиков.



а)



б)

Рис. 5.3 Диаграммы напряжений в образцах известняка при динамическом сжатии для разных скоростей ударника. а) сухой известняк;
б) влагонасыщенный известняк.

Диаграммы показывают хорошую повторяемость результатов при близких скоростях ударника для сухих (рис. 5.3, а: скорость 9,54 и 9,47 м/с или 7,14 и 6,68 м/с), а также для влагонасыщенных (рис. 5.3, б: скорость 18.11 и 18.38 м/с или 7.51 и 7.74 м/с). С помощью полученных графиков вычисляют такую величину как инкубационное время разрушения [184]. Для нахождения этой величины необходимо знание максимального значения напряжения при динамическом сжатии и время, при котором это максимальное значение достигается. Как видно на рисунке 5.3 при малых скоростях ударника на графиках наблюдается несколько максимумов. В связи с этим возникает вопрос о природе возникновения этих максимумов. Решение этого вопроса позволит выбрать тот из максимумов, который отвечает моменту разрушения материала и точнее определить инкубационное время, чем в случае, когда за максимум априори принимается первый из них, как это делается по принятой в настоящее время методике. Предлагаемый алгоритм фильтрации экспериментальных данных позволил обосновать выбор максимума напряжений и уточнить величину инкубационного времени.

Для нормализации данных было введено следующее масштабирование: по времени и амплитуде. В качестве опорного сигнала выбирался нагружающий импульс y_{ni} , для него амплитудный масштабный коэффициент находится по формуле: $K_n = \max(\max(y_{ni})), i = 1..n, K_{ni} = \frac{\max(y_{ni})}{K_n}$, где i – номер

эксперимента, а для отражённого K_o , и прошедшего, K_{pi} :

$$K_{oi} = \frac{\max(y_{oi})}{K_n}, K_{pi} = \frac{\max(y_{pi})}{K_n}.$$

Масштабный коэффициент по времени K_{ti} рассчитывается исходя из длительности нагружающего импульса, разбиением на N временных интервалов. Число N одинаково для серии экспериментов выбирается таким

образом, чтобы искажения сигнала были минимальны:

$$K_t = \max_i (T_{0i}), K_{ii} = \frac{T_{0i}}{\max_i (T_{0i})}, T_{0i} = \frac{T_{нач,i} - T_{кон,i}}{N}, i = 1..n.$$

В качестве характеристики динамической прочности использовался импульс воздействия, который может привести к разрушению материала

$$S = \int_{t_0}^{t_{\max}} \sigma d\tau, \sigma - \text{напряжение}, t_0 - \text{время начала регистрации данных с}$$

тензодатчика, $t_{\max}$ - время окончания регистрации данных с тензодатчика.

Данные экспериментов были использованы для построения характеристики, показывающей зависимость импульсов от скорости нагружения. Вычисляем

$$\text{импульсы по формуле: } S_i = \int_{t_{0,i}}^{t_{\max,i}} \sigma_i d\tau \approx K_n K_{ш} K_t K_{ii} K_\sigma \sum_{j=1}^N e_{i,j}, \sigma_i \approx K_\sigma e_{i,j}, \text{ где } e_{i,j} -$$

сигналы, снимаемые с тензодатчиков на стержнях для i -ого образца, $t_{0,i}$ -

время начала регистрации данных с тензодатчиков для i -ого образца, $t_{\max,i}$ -

время окончания регистрации данных с тензодатчиков для i -ого образца.

Верификация расчётов производилась по импульсу ударника $S_{уд.}$,

$$\text{который определяется как } S_{уд.} = \frac{m_{уд.} v_{уд.}}{\pi r_{уд.}^2}, \text{ где } m_{уд.} - \text{масса ударника, } v_{уд.} -$$

скорость ударника, $r_{уд.}$ - радиус ударника.

Известны методы сквозной калибровки экспериментальных установок Гопкинсона [185], однако, эти методы не устраняют ряд факторов: разброс форм нагружающего импульса, неточности временной привязки импульсов τ и наличие в них шумовых составляющих и т.д., к которым чувствительны методики расчета характеристик материалов, например, инкубационного времени. Поэтому необходимо применение методов цифровой обработки сигналов для фильтрации и анализа экспериментальных данных как взаимосвязанной триады нагружающего, отраженного и прошедшего импульсов.

Проведенный анализ экспериментальных данных y как функций времени t для нагружающего и прошедшего импульсов позволяет выделить три характерных участка для отфильтрованного импульса:

- 1) производная от импульса монотонно возрастает;
- 2) производная от импульса монотонно убывает;
- 3) производная от импульса монотонно возрастает.

Данное свойство сигнала можно использовать как критерий для фильтрации, в частности, для определения плавающего среднего $\bar{y}$. В математической форме критерий для разделения на осцилляции и плавающее среднее может быть записан следующим образом:

$$J = \min_{\bar{y}} \left\{ \int_{t_0}^{t_k} (y - \bar{y})^2 dt + \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{dy}{dt} - \frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 dt \right\}, \quad (5.1)$$

при ограничениях:

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{y} \geq 0, t \in \left[t_0, t_{\max\left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)} \right], \frac{d^2}{dt^2} \bar{y} \leq 0, t \in \left[t_{\max\left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)}, t_{\min\left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)} \right], \frac{d^2}{dt^2} \bar{y} \geq 0, t \in \left[t_{\min\left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)}, t_k \right], \quad (5.2)$$

где t_0 – время начала импульса, t_k – время окончания импульса, $t_{\max\left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)}, t_{\min\left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)}$ – моменты времени, соответствующие максимуму и минимуму $\frac{d\bar{y}}{dt}$.

При численной реализации (5.1), (5.2) можно свести к задаче квадратичного программирования. Перейдем от непрерывного представления функционала (5.1), (5.2) к дискретному, для этого представим t , y и $\bar{y}$ как решетчатые функции в виде последовательности отсчетов $\mathbf{t}$, $\mathbf{y}$ и $\bar{\mathbf{y}}$. Тогда (1) примет вид

$$J = \min_{\bar{\mathbf{y}}} \left\{ (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) + (\Delta \mathbf{y} - \Delta \bar{\mathbf{y}})^T (\Delta \mathbf{y} - \Delta \bar{\mathbf{y}}) \right\}, \quad (5.3)$$

где Δ – первые конечные разности соответствующих величин. Используя свойства конечных разностей (5.4):

$$\Delta y[k] = y[k] - y[k-1], \Delta \bar{y}[k] = \bar{y}[k] - \bar{y}[k-1], \Delta \mathbf{y} = \mathbf{H}_1 \mathbf{y}, \Delta \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{H}_1 \bar{\mathbf{y}},$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times n}, \quad (5.4)$$

упростим (5.3):

$$J = \min_{\bar{\mathbf{y}}} \left\{ (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) + (\Delta \mathbf{y} - \Delta \bar{\mathbf{y}})^T (\Delta \mathbf{y} - \Delta \bar{\mathbf{y}}) \right\} =$$

$$= \min_{\bar{\mathbf{y}}} \left\{ (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T [\mathbf{I} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1] (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \right\} = \min_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{x}^T [\mathbf{I} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1] \mathbf{x} \right\}, \quad (5.5)$$

где новые переменных $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$, n – размер выборки, k – текущий номер отсчёта, а $\mathbf{I}$ – единичная матрица размерности $n \times n$, далее нижний индекс у единичной матрицы, обозначает её размерность. Используя (5.4) и (5.5) перепишем ограничения (5.2) в следующем виде:

$$\Delta^2 \bar{y}[k] \geq 0, k \in [3, k_{\max(\Delta \bar{y})}], \Delta^2 \bar{y}[k] \leq 0, k \in (k_{\max(\Delta \bar{y})}, k_{\min(\Delta \bar{y})}],$$

$$\Delta^2 \bar{y}[k] \geq 0, k \in (k_{\min(\Delta \bar{y})}, k_{\kappa}], \quad (5.6)$$

где Δ^2 – вторые конечные разности соответствующих величин, $k_{\max(\Delta \bar{y})}, k_{\min(\Delta \bar{y})}$ – номера отсчётов, соответствующие максимуму и минимуму $\Delta \bar{\mathbf{y}}$, k_{κ} – номер последнего отсчёта.

Используя свойства вторых конечных разностей (5.7):

$$\Delta^2 y[k] = \Delta y[k] - \Delta y[k-1] = y[k] - 2y[k-1] + y[k-2], \Delta^2 \mathbf{y} = \mathbf{H}_2 \mathbf{y}, \Delta^2 \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{H}_2 \bar{\mathbf{y}},$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{(n-2) \times n}, \quad (5.7)$$

упростим (5.6):

$$\gamma \mathbf{H}_2 \bar{\mathbf{y}} \leq 0,$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{(k_{\max}(\Delta \bar{\mathbf{y}})-2) \times (k_{\max}(\Delta \bar{\mathbf{y}})-2)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{(k_{\min}(\Delta \bar{\mathbf{y}})-k_{\max}(\Delta \bar{\mathbf{y}})) \times (k_{\min}(\Delta \bar{\mathbf{y}})-k_{\max}(\Delta \bar{\mathbf{y}}))} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I}_{(n-k_{\min}(\Delta \bar{\mathbf{y}})) \times (n-k_{\min}(\Delta \bar{\mathbf{y}}))} \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

Используя замену $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$, сформулируем (5.1), (5.2) как задачу квадратичного программирования относительно $\mathbf{x}$:

$$J = \min_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{x}^T \left[\mathbf{I} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \right] \mathbf{x} \right\}, \quad (5.9)$$

при ограничениях:

$$-\gamma \mathbf{H}_2 \mathbf{x} \leq -\gamma \mathbf{H}_2 \mathbf{y}. \quad (5.10)$$

Основной проблемой в предлагаемом алгоритме является определение максимума и минимума $\Delta \bar{\mathbf{y}}$, так как функция $\bar{\mathbf{y}}$ заранее не известна. В ходе многократных пробных вычислений и анализа экспериментальных данных было установлено, что в качестве $\bar{\mathbf{y}}$ на первых итерациях алгоритма могут быть использованы исходные данные $\mathbf{y}$ и $\Delta \mathbf{y}$ после фильтрации стандартными методами, например с применением вейвлетов. На дальнейших итерациях алгоритма уже может использоваться найденная последовательность $\bar{\mathbf{y}}$.

5.2. Фильтрация и анализ триады импульсов

Фильтрация триады импульсов (нагружающего, отраженного и прошедшего) осложняется наличием взаимосвязей между ними, такими как закон сохранения энергии и импульса. Поэтому необходимо решать задачу фильтрации этих сигналов согласованно и ввести в задачу (5.1), (5.2) дополнительные ограничения:

$$\bar{y}_n(t) - \bar{y}_n(t) - \bar{y}_o(t) \geq 0, \quad (5.11)$$

где $\bar{y}_n, \bar{y}_o, \bar{y}_n$ – очищенные значения нагружающего, отраженного и прошедшего импульсов соответственно. При дискретном описании представим $\bar{y}_n, \bar{y}_o, \bar{y}_n$ как решетчатые функции в виде последовательности отсчетов $\bar{y}_n, \bar{y}_o$ и $\bar{y}_n$. Тогда (5.11) примет вид

$$\bar{y}_n[k] - \bar{y}_n[k] - \bar{y}_o[k] \geq 0. \quad (5.12)$$

Для фильтрации сигналов y_n и y_n может быть использовано их описание в виде (9), (10), однако y_o имеет более сложную структуру и целесообразно обрабатывать сумму сигналов $y_o + y_n$, вид которой подобен y_n . Тогда задача фильтрации триады y_n , y_n и y_o формулируется как

$$J = \min_{\bar{y}_n, \bar{y}_n, \bar{y}_o} \left\{ \int_{t_0}^{t_k} (y_n - \bar{y}_n)^2 dt + \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{dy_n}{dt} - \frac{d\bar{y}_n}{dt} \right)^2 dt + \int_{t_0}^{t_k} (y_n - \bar{y}_n)^2 dt + \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{dy_n}{dt} - \frac{d\bar{y}_n}{dt} \right)^2 dt + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t_k} (y_o - \bar{y}_o)^2 dt + \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{dy_o}{dt} - \frac{d\bar{y}_o}{dt} \right)^2 dt \right\}, \quad (5.13)$$

при ограничениях

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_n \geq 0, t \in \left[t_0, t_{\max\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)} \right], \frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_n \leq 0, t \in \left[t_{\max\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)}, t_{\min\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)} \right], \frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_n \geq 0, t \in \left[t_{\min\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)}, t_k \right], \\ \frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_n \geq 0, t \in \left[t_0, t_{\max\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)} \right], \frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_n \leq 0, t \in \left[t_{\max\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)}, t_{\min\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)} \right], \frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_n \geq 0, t \in \left[t_{\min\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)}, t_k \right], \\ \frac{d^2}{dt^2} (\bar{y}_o + \bar{y}_n) \geq 0, t \in \left[t_0, t_{\max\left(\frac{d(\bar{y}_o + \bar{y}_n)}{dt}\right)} \right], \frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_o \leq 0, t \in \left[t_{\max\left(\frac{d(\bar{y}_o + \bar{y}_n)}{dt}\right)}, t_{\min\left(\frac{d(\bar{y}_o + \bar{y}_n)}{dt}\right)} \right], \\ \frac{d^2}{dt^2} (\bar{y}_o + \bar{y}_n) \geq 0, t \in \left[t_{\min\left(\frac{d(\bar{y}_o + \bar{y}_n)}{dt}\right)}, t_k \right], \bar{y}_n(t) - \bar{y}_n(t) - \bar{y}_o(t) \geq 0,$$

где $t_{\max\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)}, t_{\min\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)}, t_{\max\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)}, t_{\min\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)}, t_{\max\left(\frac{d(\bar{y}_n + \bar{y}_o)}{dt}\right)}, t_{\min\left(\frac{d(\bar{y}_n + \bar{y}_o)}{dt}\right)}$ — моменты времени,

соответствующие максимумам и минимумам $\frac{d\bar{y}_n}{dt}, \frac{d\bar{y}_n}{dt}$ и $\frac{d(\bar{y}_n + \bar{y}_o)}{dt}$

соответственно.

При дискретном представлении (13) получим

$$J = \min_{\bar{y}_n, \bar{y}_n, \bar{y}_o} \left\{ (y_n - \bar{y}_n)^T (y_n - \bar{y}_n) + (\Delta y_n - \Delta \bar{y}_n)^T (\Delta y_n - \Delta \bar{y}_n) + \right. \\ \left. + (y_n - \bar{y}_n)^T (y_n - \bar{y}_n) + (\Delta y_n - \Delta \bar{y}_n)^T (\Delta y_n - \Delta \bar{y}_n) + \right. \\ \left. + (y_o - \bar{y}_o)^T (y_o - \bar{y}_o) + (\Delta y_o - \Delta \bar{y}_o)^T (\Delta y_o - \Delta \bar{y}_o) \right\}. \quad (5.14)$$

Используя свойства конечных разностей (5.4) и введя новые переменные

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\text{H} \\ \mathbf{x}_\text{П} \\ \mathbf{x}_\text{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_\text{H} - \bar{\mathbf{y}}_\text{H} \\ \mathbf{y}_\text{П} - \bar{\mathbf{y}}_\text{П} \\ \mathbf{y}_\text{O} - \bar{\mathbf{y}}_\text{O} \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

упростим (5.14):

$$\begin{aligned} J &= \min_{\bar{\mathbf{y}}_\text{H}, \bar{\mathbf{y}}_\text{П}, \bar{\mathbf{y}}_\text{O}} \left\{ \mathbf{x}_\text{H}^\text{T} \mathbf{x}_\text{H} + \mathbf{x}_\text{H}^\text{T} \mathbf{H}_1^\text{T} \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_\text{H} + \mathbf{x}_\text{П}^\text{T} \mathbf{x}_\text{П} + \mathbf{x}_\text{П}^\text{T} \mathbf{H}_1^\text{T} \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_\text{П} + \mathbf{x}_\text{O}^\text{T} \mathbf{x}_\text{O} + \mathbf{x}_\text{O}^\text{T} \mathbf{H}_1^\text{T} \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_\text{O} \right\} = \\ &= \min_{\bar{\mathbf{y}}_\text{H}, \bar{\mathbf{y}}_\text{П}, \bar{\mathbf{y}}_\text{O}} \left\{ \mathbf{x}^\text{T} \mathbf{H} \mathbf{x} \right\}, \quad (5.16) \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{H}_1^\text{T} \mathbf{H}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} + \mathbf{H}_1^\text{T} \mathbf{H}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} + \mathbf{H}_1^\text{T} \mathbf{H}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ограничения в (5.13) примут вид

$$\begin{aligned} \Delta^2 \bar{\mathbf{y}}_\text{H} &\geq 0, \quad k \in \left[3, k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{H})} \right], \quad \Delta^2 \bar{\mathbf{y}}_\text{H} \leq 0, \quad k \in \left(k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{H})}, k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{H})} \right], \\ \Delta^2 \bar{\mathbf{y}}_\text{H} &\geq 0, \quad k \in \left(k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{H})}, k_\text{K} \right], \quad \Delta^2 \bar{\mathbf{y}}_\text{П} \geq 0, \quad k \in \left[k_0, k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{П})} \right], \\ \Delta^2 \bar{\mathbf{y}}_\text{П} &\leq 0, \quad k \in \left(k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{П})}, k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{П})} \right], \quad \Delta^2 \bar{\mathbf{y}}_\text{П} \geq 0, \quad k \in \left(k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{П})}, k_\text{K} \right], \\ \Delta^2 (\bar{\mathbf{y}}_\text{O} + \bar{\mathbf{y}}_\text{П}) &\geq 0, \quad k \in \left[k_0, k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_{\text{O+П}})} \right], \quad \Delta^2 (\bar{\mathbf{y}}_\text{O} + \bar{\mathbf{y}}_\text{П}) \leq 0, \\ k \in \left(k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_{\text{O+П}})}, k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_{\text{O+П}})} \right], \quad \Delta^2 (\bar{\mathbf{y}}_\text{O} + \bar{\mathbf{y}}_\text{П}) &\geq 0, \quad k \in \left(k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_{\text{O+П}})}, k_\text{K} \right], \\ \bar{\mathbf{y}}_\text{H} - \bar{\mathbf{y}}_\text{П} - \bar{\mathbf{y}}_\text{O} &\geq 0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где $k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{H})}, k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{H})}, k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{П})}, k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{П})}, k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_{\text{O+П}})}, k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_{\text{O+П}})}$ — номера отсчётов, соответствующие максимумам и минимумам $\Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{H}, \Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{П}, \Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{O} + \Delta \bar{\mathbf{y}}_\text{П}$ соответственно. Используя аналогичный подход как в (5.8), получим компактную запись (5.17):

$$\begin{aligned} -\Lambda \mathbf{x} &\leq -\Lambda \mathbf{y}, \\ \Lambda &= \begin{bmatrix} \gamma_\text{H} \mathbf{H}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_\text{П} \mathbf{H}_2 & 0 \\ 0 & \gamma_{\text{П+O}} \mathbf{H}_2 & \gamma_{\text{П+O}} \mathbf{H}_2 \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_\text{H} \\ \mathbf{y}_\text{П} \\ \mathbf{y}_\text{O} \end{bmatrix}, \quad (5.18) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_H &= \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{(k_{\max}(\Delta\bar{y}_H)-2) \times (k_{\max}(\Delta\bar{y}_H)-2)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{(k_{\min}(\Delta\bar{y}_H)-k_{\max}(\Delta\bar{y}_H)) \times (k_{\min}(\Delta\bar{y}_H)-k_{\max}(\Delta\bar{y}_H))} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I}_{(n-k_{\min}(\Delta\bar{y}_H)) \times (n-k_{\min}(\Delta\bar{y}_H))} \end{bmatrix}, \\
\gamma_\Pi &= \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{(k_{\max}(\Delta\bar{y}_\Pi)-2) \times (k_{\max}(\Delta\bar{y}_\Pi)-2)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{(k_{\min}(\Delta\bar{y}_\Pi)-k_{\max}(\Delta\bar{y}_\Pi)) \times (k_{\min}(\Delta\bar{y}_\Pi)-k_{\max}(\Delta\bar{y}_\Pi))} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I}_{(n-k_{\min}(\Delta\bar{y}_\Pi)) \times (n-k_{\min}(\Delta\bar{y}_\Pi))} \end{bmatrix}, \\
\gamma_{\Pi+O} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{(k_{\max}(\Delta\bar{y}_{O+\Pi})-2) \times (k_{\max}(\Delta\bar{y}_{O+\Pi})-2)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{(k_{\min}(\Delta\bar{y}_{O+\Pi})-k_{\max}(\Delta\bar{y}_{O+\Pi})) \times (k_{\min}(\Delta\bar{y}_{O+\Pi})-k_{\max}(\Delta\bar{y}_{O+\Pi}))} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I}_{(n-k_{\min}(\Delta\bar{y}_{O+\Pi})) \times (n-k_{\min}(\Delta\bar{y}_{O+\Pi}))} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

Выражения (5.16) и (5.18) являются задачей квадратичного программирования, которая в компактном виде может быть записана как:

$$J = \min_{\bar{y}_H, \bar{y}_\Pi, \bar{y}_O} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} \}, \quad (5.19)$$

при ограничениях: $-\Lambda \mathbf{x} \leq -\Lambda \mathbf{u}$.

5.3. Фильтрация и анализ триады импульсов с учетом фазового сдвига

Важной проблемой при фильтрации триады является наличие фазового сдвига во временной области импульсов относительно друг друга. Этот аспект не учитывается в (5.19), и поэтому требуется создание нового алгоритма. Нагружающий импульс является опорным сигналом, относительно которого будут рассчитываться фазовые сдвиги отраженного τ_o и прошедшего τ_Π сигналов. При дискретном описании фазовый сдвиг может быть описан следующим образом:

$$\mathbf{y}_n[\tau_n] = \mathbf{A}^{\tau_n} \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_o[\tau_o] = \mathbf{A}^{\tau_o} \mathbf{y}_o, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{A}^\tau = \begin{cases} \mathbf{A}^{\text{fix}(\tau)} \left[1 - 2\pi \frac{\tau - \text{fix}(\tau)}{\omega_0} \right] + 2\pi \frac{\tau - \text{fix}(\tau)}{\omega_0} \mathbf{A}^{\text{fix}(\tau)+1}, & \text{если } \tau \geq 0 \\ (\mathbf{A}^T)^{\text{fix}(-\tau)} \left[1 - 2\pi \frac{-\tau - \text{fix}(-\tau)}{\omega_0} \right] + 2\pi \frac{-\tau - \text{fix}(-\tau)}{\omega_0} (\mathbf{A}^T)^{\text{fix}(\tau)+1}, & \text{если } \tau < 0 \end{cases},$$

где ω_0 – частота дискретизации по времени, $\text{fix}(\dots)$ – функция округления с отбрасыванием дробной части. Тогда фильтрация триады сигналов с учетом фазовых сдвигов может быть записана как задача математического программирования в следующем виде:

$$J = \min_{\tau_n, \tau_o} \{ \Phi(\tau_n, \tau_o) \}, \quad (5.21)$$

при ограничениях: $\tau_{\min} \leq \tau_n \leq \tau_{\max}$, $\tau_{\min} \leq \tau_o \leq \tau_{\max}$, где $\Phi(\tau_n, \tau_o)$ – функция, вычисляемая как решение задачи квадратичного программирования, аналогично (5.19) при фиксированных τ_o и τ_n :

$$\Phi(\tau_n, \tau_o) = \min_{\bar{\mathbf{y}}_n, \bar{\mathbf{y}}_n, \bar{\mathbf{y}}_o} \left\{ \mathbf{x}[\tau_n, \tau_o]^T \mathbf{H} \mathbf{x}[\tau_n, \tau_o] \right\}, \quad (5.22)$$

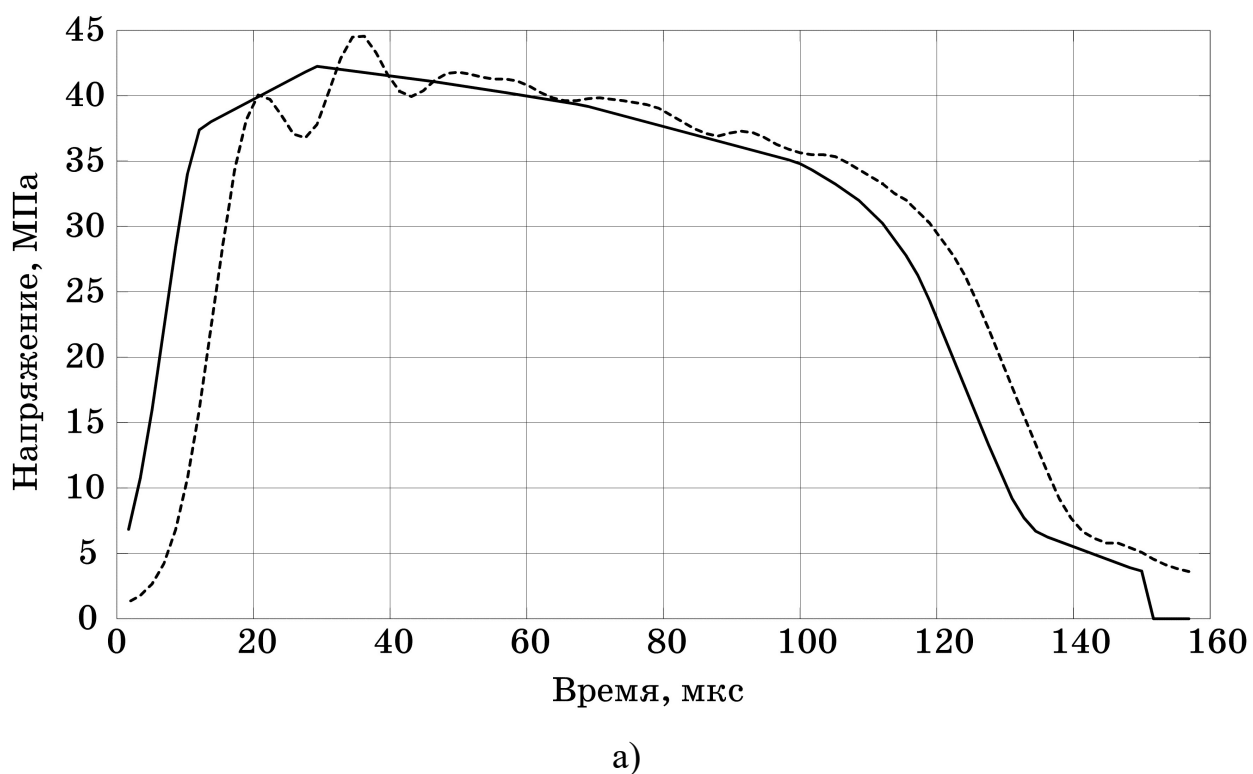
при ограничениях $-\Lambda \mathbf{x}[\tau_n, \tau_o] \leq -\Lambda \mathbf{y}[\tau_n, \tau_o]$, где

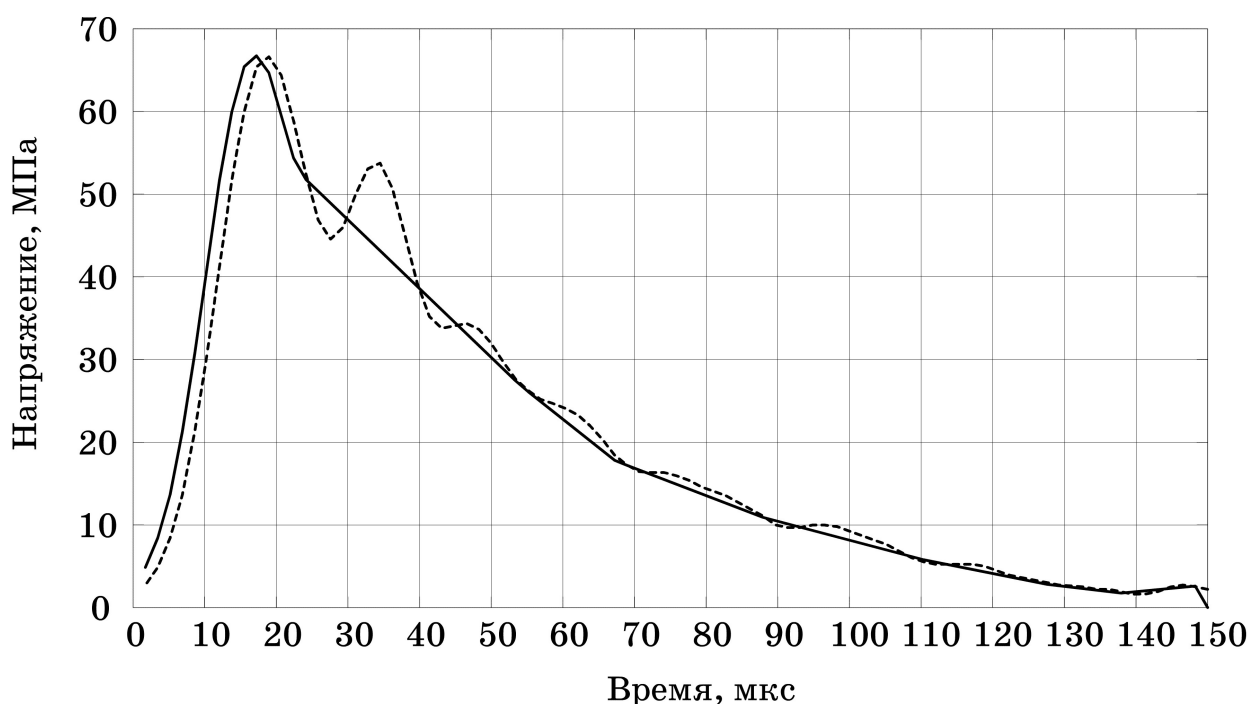
$$\mathbf{x}[\tau_n, \tau_o] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_n[\tau_n] \\ \mathbf{x}_o[\tau_o] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n \\ \mathbf{y}_n[\tau_n] - \bar{\mathbf{y}}_n \\ \mathbf{y}_o[\tau_o] - \bar{\mathbf{y}}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n \\ \mathbf{A}^{\tau_n} \mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n \\ \mathbf{A}^{\tau_o} \mathbf{y}_o - \bar{\mathbf{y}}_o \end{bmatrix}, \mathbf{y}[\tau_n, \tau_o] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_n \\ \mathbf{A}^{\tau_n} \mathbf{y}_n \\ \mathbf{A}^{\tau_o} \mathbf{y}_o \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Максимальные и минимальные значения фазовых сдвигов $\tau_{\min}$ и $\tau_{\max}$ выбираются по результатам сквозной калибровки экспериментальных установок.

5.4. Результаты расчета характеристик материалов с учетом фильтрации

С помощью алгоритма, изложенного в разделе 5.3, были обработаны данные экспериментов на установке Гопкинсона [22-24, 180, 181]. На рисунке 5.4. представлены результаты обработки импульсов для сухого образца при малой скорости ударника (рис. 3, а: скорость ударника 6,68 м/с), а также для влагонасыщенного при большой скорости ударника (рис. 3, б: скорость 18.38 м/с).





б)

Рис. 5.4. Результаты обработки сигналов. Пунктиром обозначены исходные сигналы, сплошной линией – после фильтрации

Анализ сигналов показал, что осцилляционные составляющие, характеризующие второй и последующие всплески на прошедшем импульсе, присутствуют также и в нагружающем импульсе, и в данном случае эти составляющие могут быть отнесены к шумам самой экспериментальной установки и, как следствие, могут быть удалены и не учитываться в методиках расчета характеристик материалов.

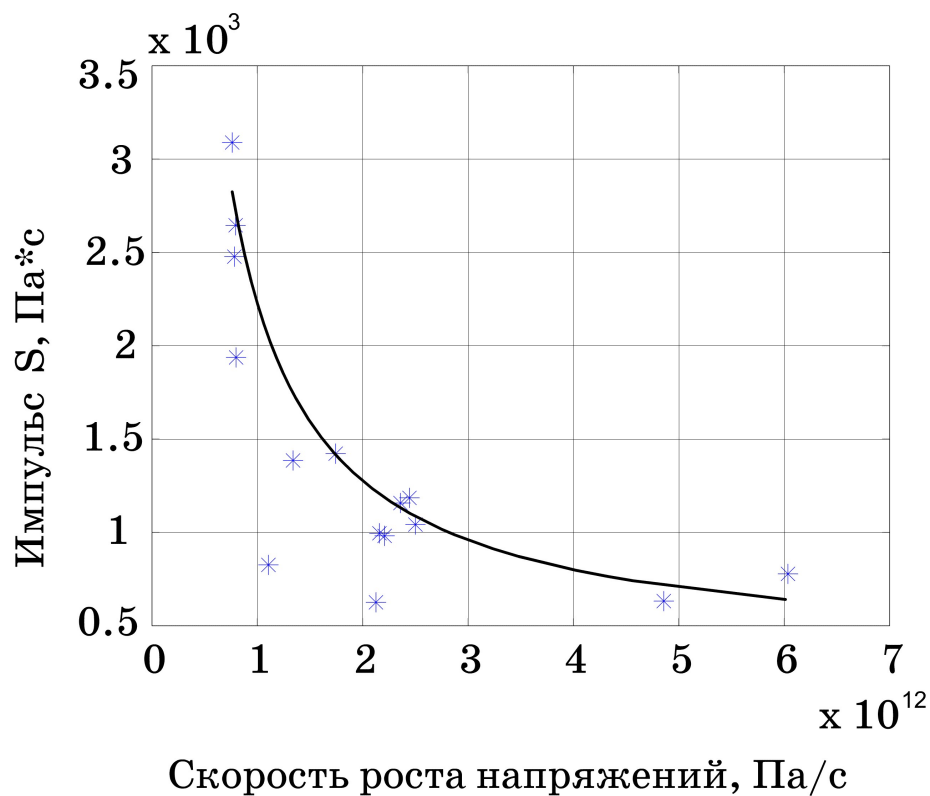
Данные экспериментов были использованы для построения характеристики, показывающей зависимость импульса разрушения S от скорости роста напряжений σ_t . Расчет проводился по следующей методике:

1. Вычисляем импульс разрушения по формуле: $S = \int_{t_0}^{t_{\sigma_{\max}}} \sigma(t) d\tau$, где $t_{\sigma_{\max}}$ – время, когда напряжение достигает максимума.

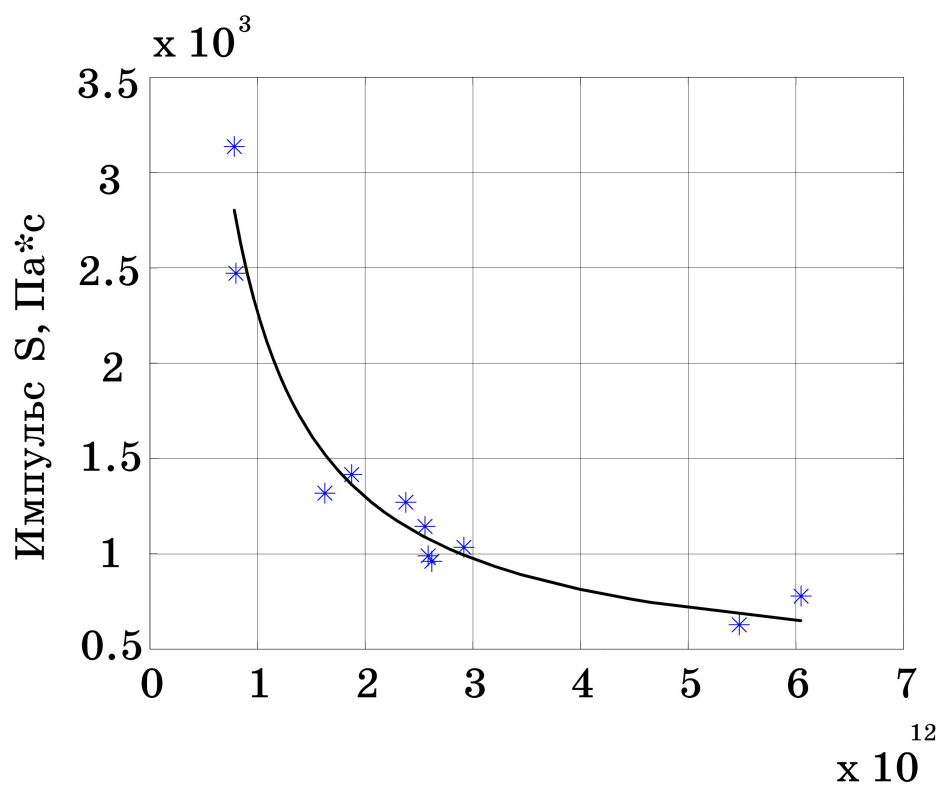
2. Вычисляем скорость роста напряжений по формуле: $\sigma_t = \frac{\sigma_{\max}}{t_{\sigma_{\max}}}$, $\sigma_{\max}$ – максимальное значение напряжения.

3. Строим график зависимости $S(\sigma_{max})$.

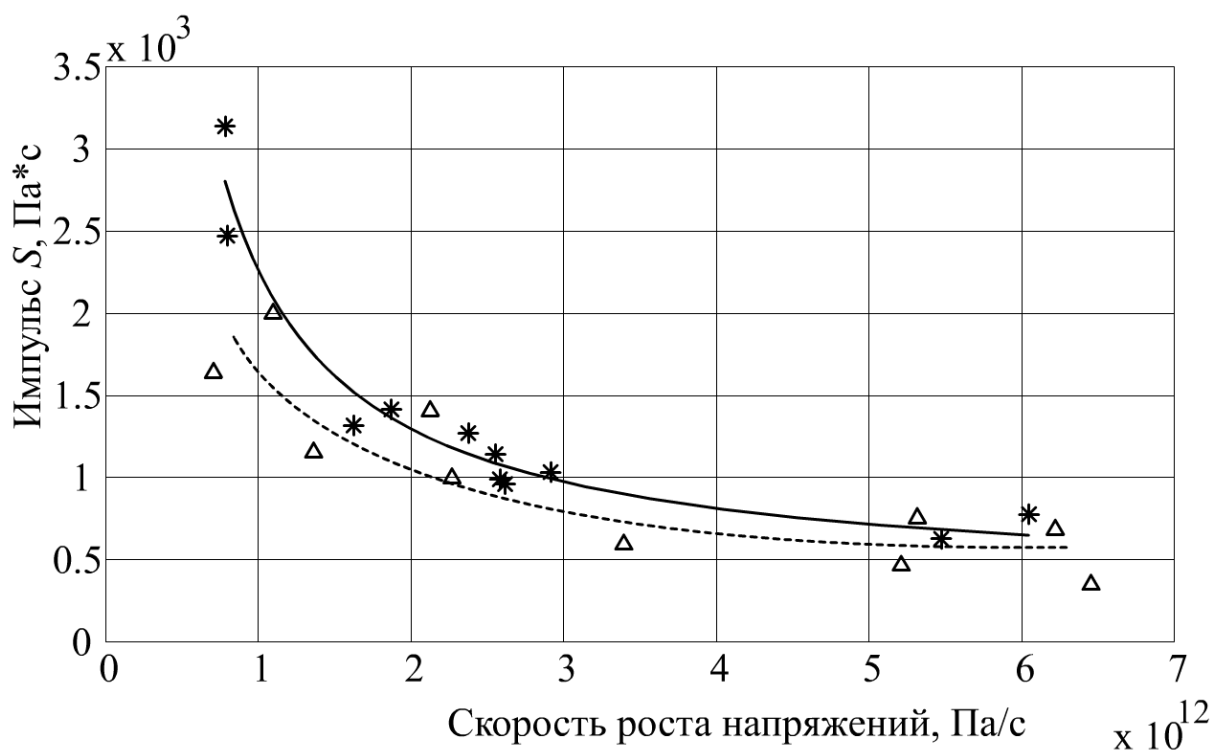
На рис. 5.5 приведены зависимости $S(\sigma_{max})$ для исходных данных (рис. 6, а) и данных, которые были обработаны с помощью алгоритма, изложенного в разделе 5.3 (рис. 6, б).



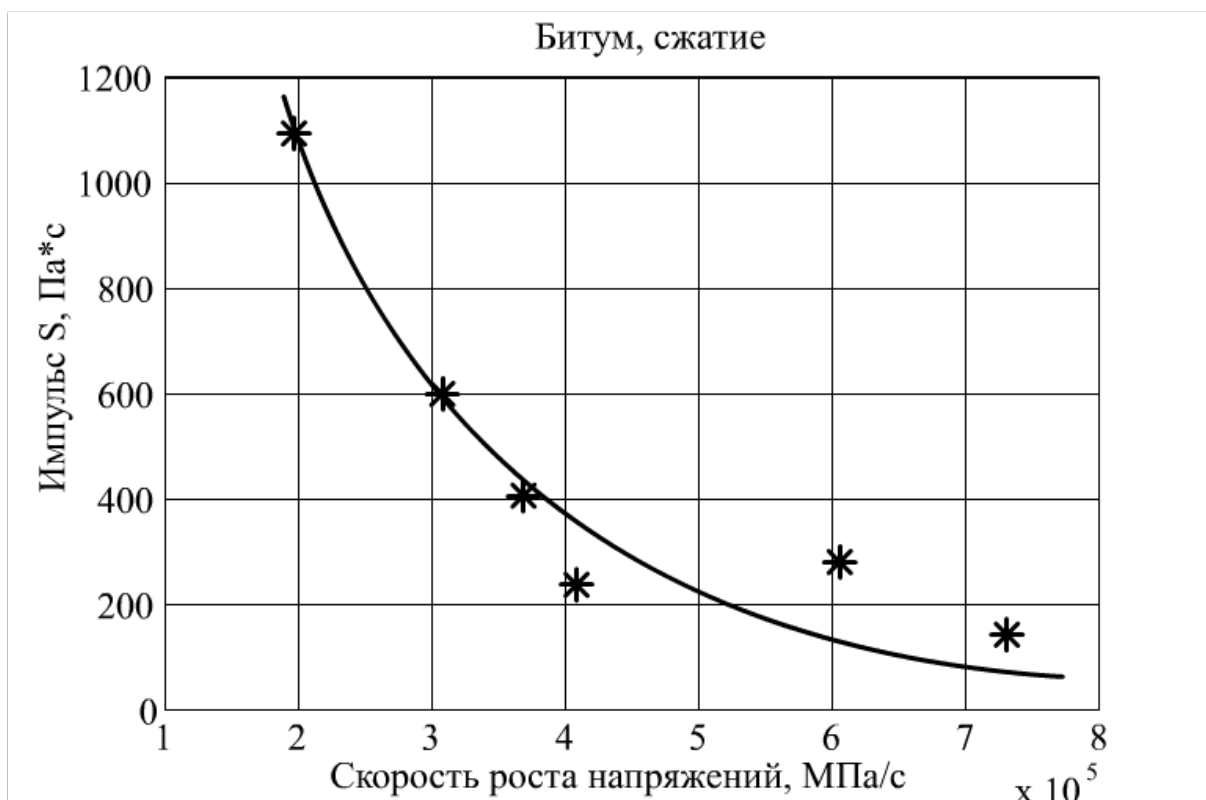
а) сухой известняк (сжатие, без обработки)



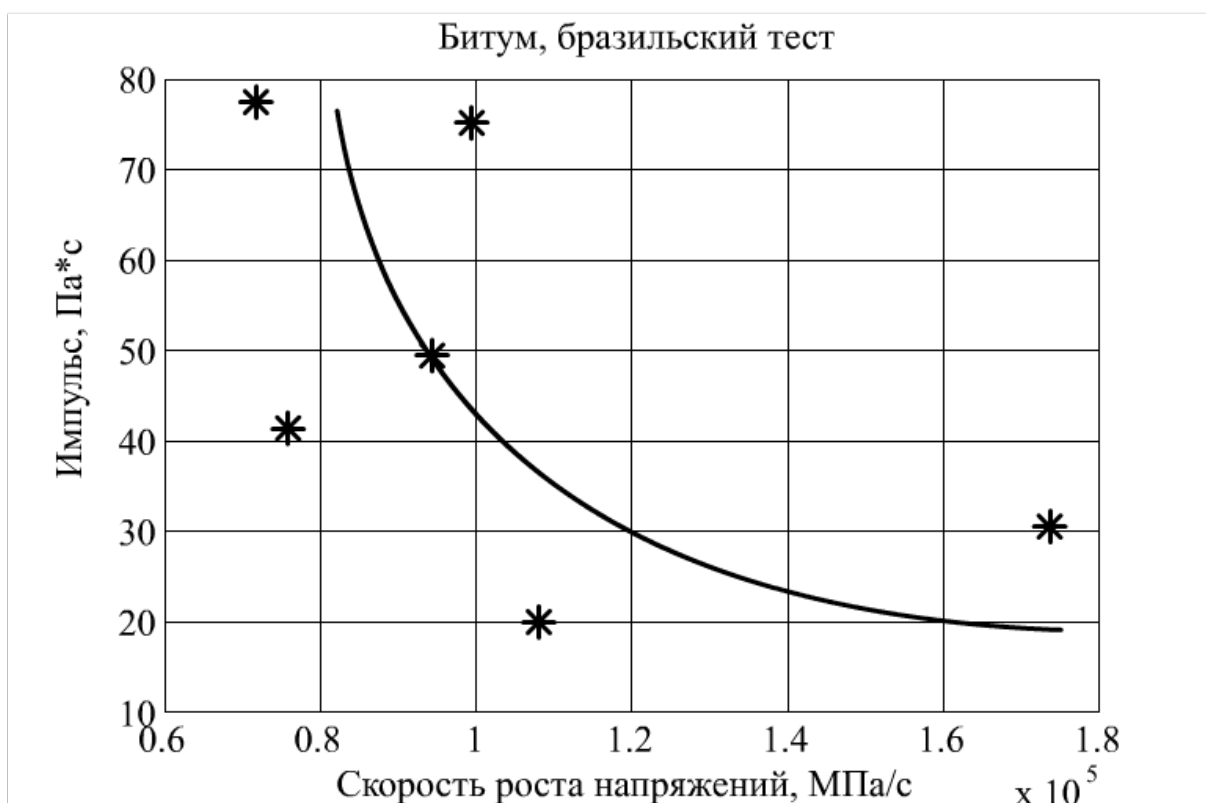
б) Сухой известняк (сжатие, с обработкой)



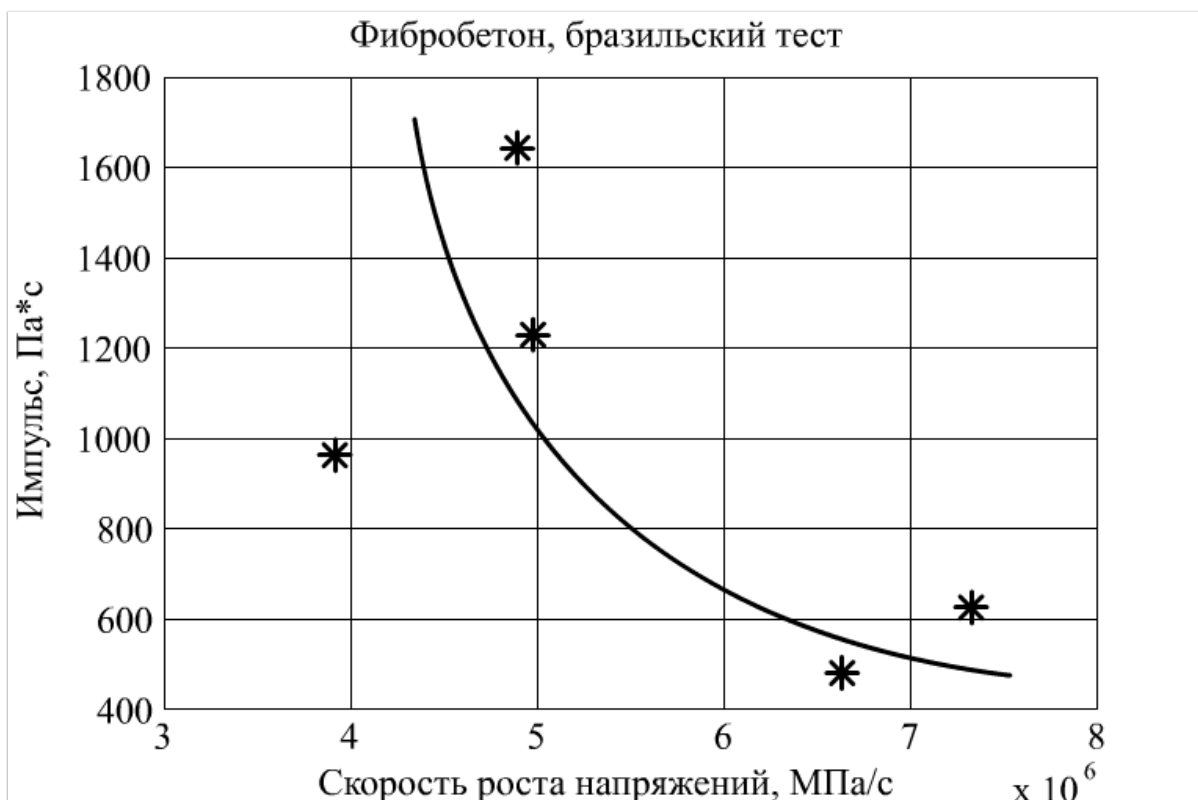
в) сравнение сухого (сплошная линия, * - данные измерений после обработки) и влагонасыщенного известняков (пунктирная линия, Δ – данные измерений после обработки)



г) Битум (сжатие)



д) Битум (бразильский тест)



е) Фибробетон (бразильский тест)

Рис. 5.5. Зависимость импульса разрушения от скорости роста напряжений

Данные зависимости были аппроксимированы с использованием метода наименьших квадратов и описываются выражением (5.24):

$$S(\sigma_t) = \frac{a_1}{\sigma_t} + a_0. \quad (5.24)$$

Для нефiltroванных данных среднеквадратическое отклонение от аппроксимации зависимостью (5.24) в 2 раза больше чем для отфильтрованных и составило 26.7 и 11.9% соответственно. Для исходных данных из-за большого разброса значений зависимость (5.24) не использовалась. Если a_0 мало и им можно пренебречь, то постоянной величиной является произведение $U = S(\sigma_t)\sigma_t$.

Была определена ΔS - разница между нагружающим импульсом системы и суммой импульсов прошедшего и отражённого сигналов. Зависимость этой величины от скорости ударника для сухого (пунктирный график, о – данные без аппроксимации) и влагонасыщенного (сплошной

график, * - данные без аппроксимации) известняков приведена на Рис. 5.6, где линии - это аппроксимация моделью вида:

$$\Delta S = b_0 + b_1(v_{\text{уд.}} - b_2)e^{-b_3(v_{\text{уд.}} - b_4)^2} + \frac{b_5}{e^{-b_6(v_{\text{уд.}} - b_7)} + 1}, \quad b_i - \text{коэффициенты модели;}$$

графиками из точек обозначены аппроксимации данных пороговой функцией. Из графиков видно, что при скоростях ударника меньших 8.3 м/с величина ΔS находится в окрестности постоянной величины, при скорости ударника выше 8.3 м/с величина ΔS также находится в окрестности постоянной величины, значение которой увеличивается почти вдвое.

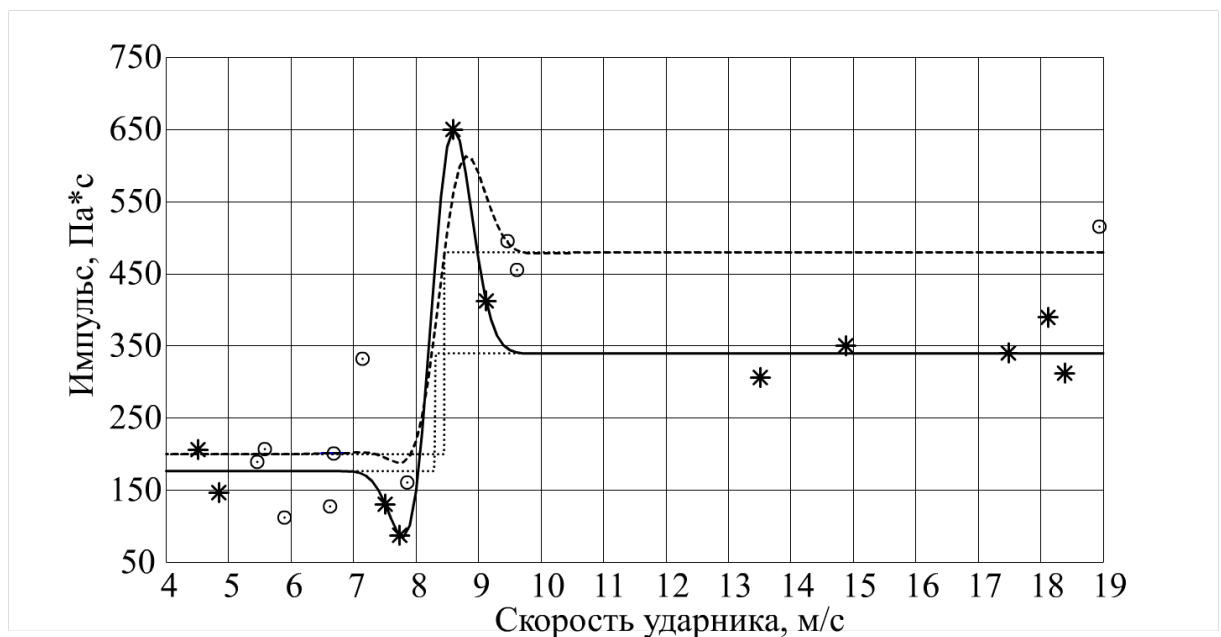


Рис. 5.6. Зависимость разницы между нагружающим импульсом системы и суммой импульсов прошедшего и отражённого сигналов от скорости ударника для сухого и влагонасыщенного известняков.

На рисунке 5.7 приведены зависимости импульсов от скорости нагружения, где * – импульс, рассчитанный по нагружающему сигналу, (сплошная линия – аппроксимация импульса), которому отвечают данные, снятые на нагружающем стержне; Δ – импульс, рассчитанный по отражённому сигналу (пунктирная линия – аппроксимация импульса), зарегистрированному на нагружающем стержне; – импульс, рассчитанный по прошедшему сигналу (линия из точек - аппроксимация импульса), измеренном в опорном стержне.

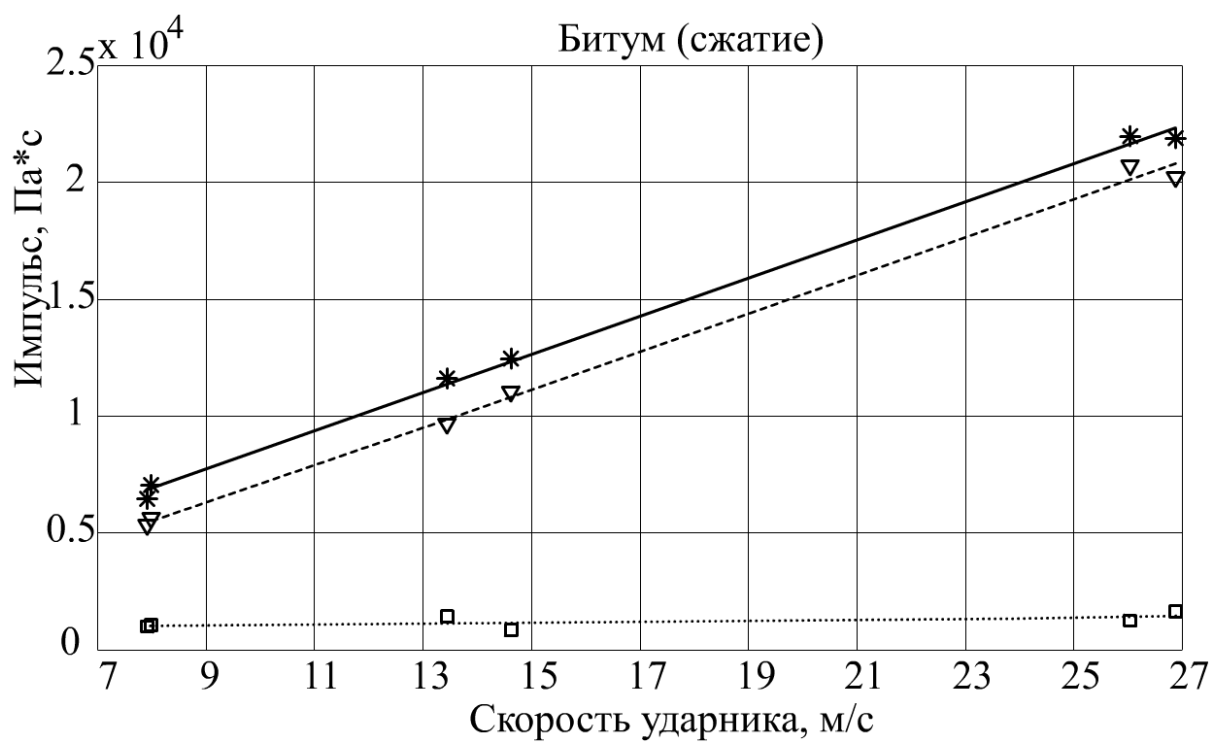


Рис.5.7. а. Битум, сжатие.

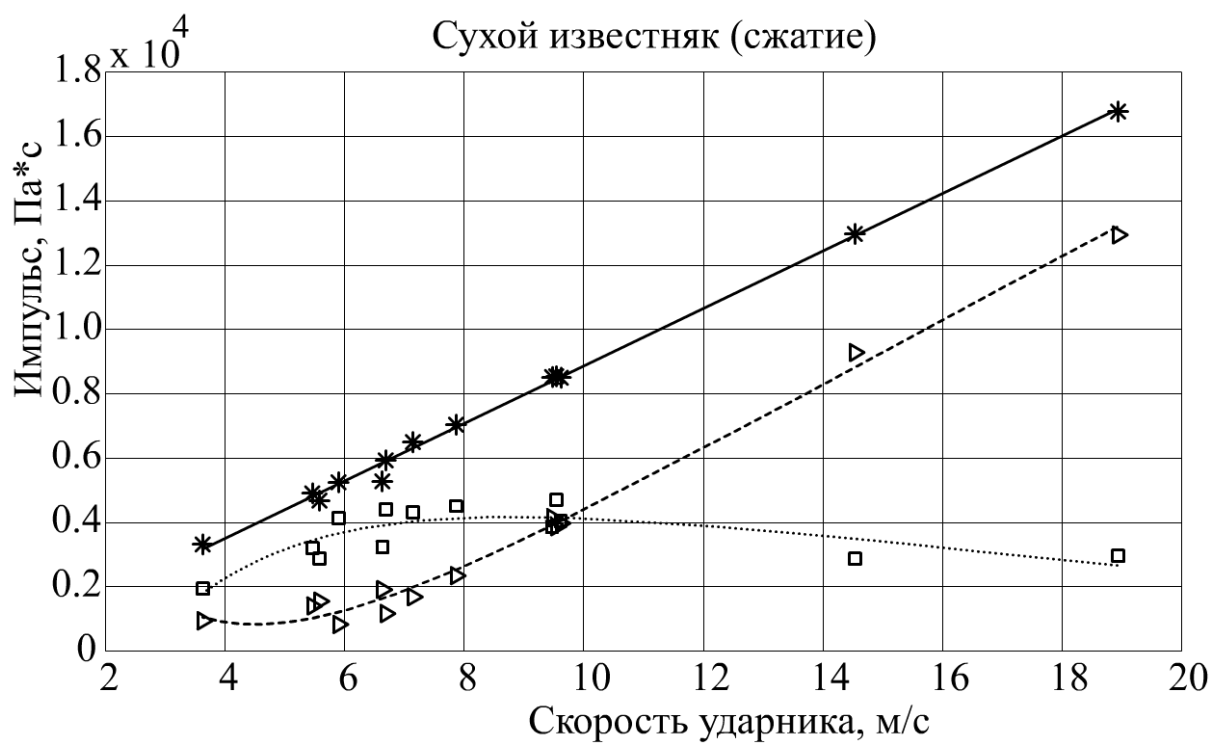


Рис. 5.7. б. Известняк сухой, сжатие.

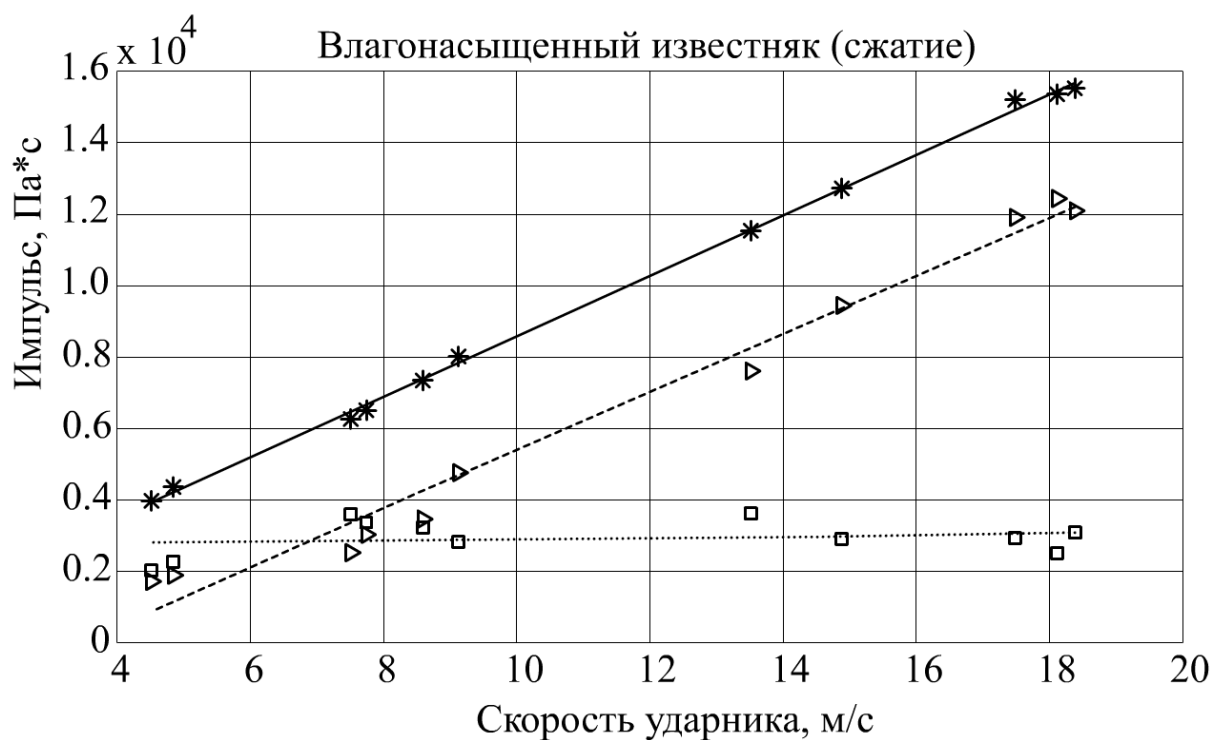


Рис. 5.7. в. Известняк влагонасыщенный, сжатие.

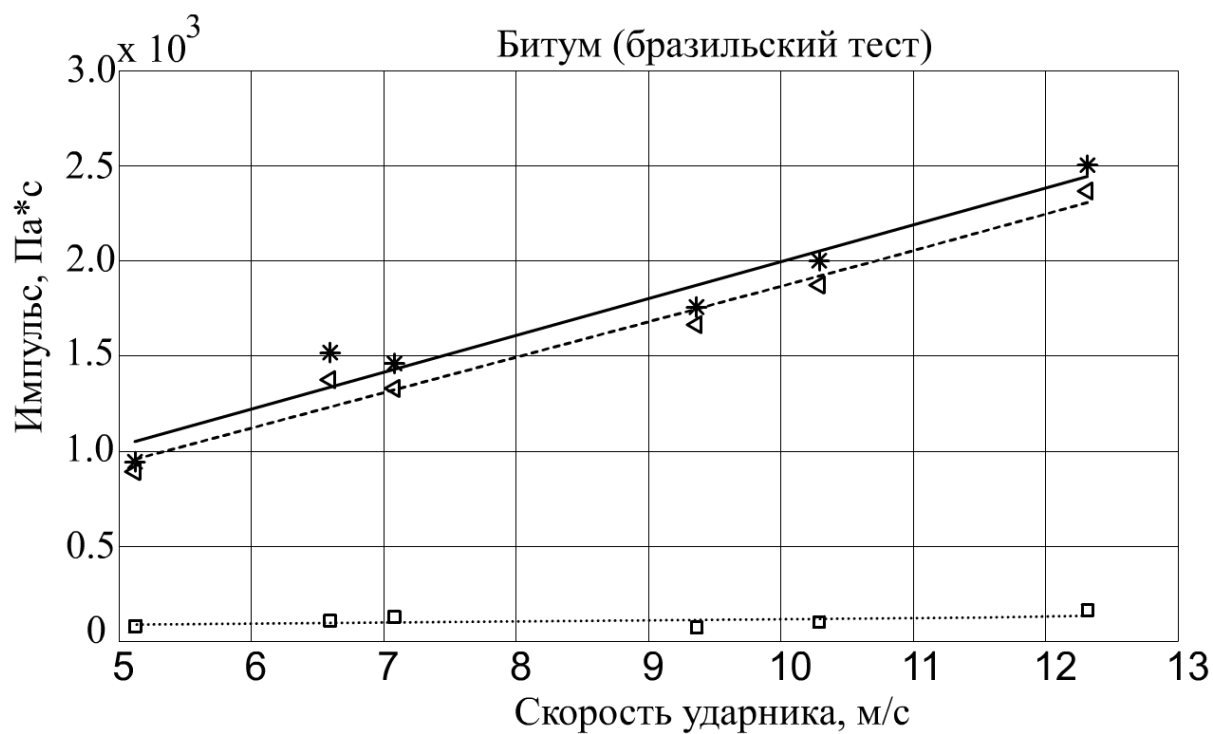


Рис. 5.7. г. Битум, бразильский тест.

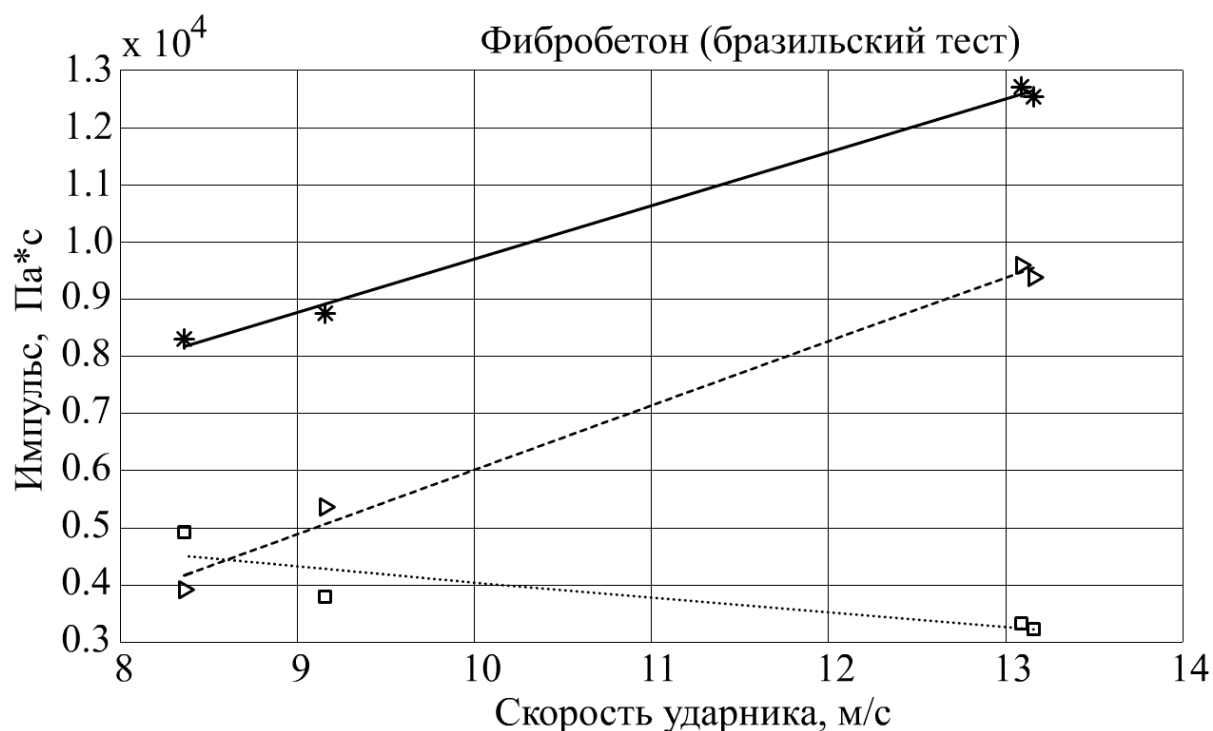


Рис. 5.7. д. Фибробетон, бразильский тест.

Рис. 5.7. Зависимости импульсов, рассчитанных по прошедшему, отраженному и нагружающему сигналам, зарегистрированных на тензодатчиках, от скорости ударника.

Как видно из графиков для каждого материала импульс, рассчитанный по прошедшему сигналу, измеренном в опорном стержне, изменяется от скорости ударника значительно меньше, чем импульсы, рассчитанные по нагружаемому и отраженному сигналам. Например, для битума и влагонасыщенного известняка импульс, рассчитанный по прошедшему сигналу, меняется вблизи некоторой константы, а для не разрушенных образцов меньше этой константы.

5.5. Анализ триады импульсов путём аппроксимации последовательностями радиально-базисных функций

Целью данной обработки является выделение характерных особенностей сигналов и зависимостей, которые в дальнейшем повлияют на выбор моделей процесса разрушения и методов идентификации его характеристик. Основная задача - это детальное исследование структуры

сигналов триады импульсов для определения составляющих сигналов ответственных за процесс разрушения и позволяющих идентифицировать начало данного процесса и его длительность.

Рассматриваются методы анализа уже подвергнутых оптимальной фильтрации измерительных сигналов с целью нахождения составляющих, которые должны быть использованы для расчёта характеристик динамической прочности и построения аналитических аппроксимаций в виде, не противоречащем физике происходящих процессов в исследуемом материале. Описанный метод направлен на уменьшение среднеквадратического отклонения (СКО) этих динамических характеристик и повышения точности их косвенного оценивания. Например, для параметра инкубационное время разрушения СКО при использовании расчёта согласно критерию определения этого параметра может составлять до 30%. Данная проблема является актуальной и до настоящего времени ещё не решена. Также не имеется зарегистрированной методики измерения этой величины, которая широко используется исследователями.

В качестве модели сигналов выбраны широко используемые разложения в ряды базисных функций $g_i(b_i, \varphi_i, t)$, так исходные сигналы f_j описываются следующим образом:

$$f_j(t) \approx \sum_{i=1}^N a_i g_i(b_i, \varphi_i, t), \quad (5.25)$$

где t - время, N - количество базисных функций, a_i - амплитуды базисных функций, g_i - базисные функции, b_i - масштабный параметр по времени, φ_i - фазовые сдвиги базовых функций.

Рассмотрим случай, когда базисные функции являются солитонными решениями волновых уравнений типа Кортевега — де Вриза, синус-Гордона и т.д. Для простоты изложения метода аппроксимируем эти решения функциями вида:

$$g_i(b_i, \varphi_i, t) = \sqrt{\frac{b_i}{\pi}} e^{-b_i(t-\varphi_i)^2}, \quad (5.26)$$

$$g_i(b_i, \varphi_i, t) = \frac{2b_i}{\text{ch}^2(4b_i\sqrt{b_i}t - b_i\sqrt{b_i}\varphi_i)}. \quad (5.27)$$

Определим выражения для характеристик базисных функций вида (5.26):

$$a_i = \lambda_i \sqrt{\frac{\pi}{b_i}}, \quad T_i = \sqrt{\frac{8}{b_i}}, \quad \varphi_i, \quad (5.28)$$

где λ_i - свободная переменная, $\lambda_i \geq 0$; параметр T_i является шириной базисной функции по времени и выбирается исходя из условий:

$$\int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} g_i dt \geq 0.95 \int_{-\infty}^{\infty} g_i dt, \quad T_i = 2n(t_1 - t_2), \quad \left. \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} \right|_{t_1, t_2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так для (5.26) получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{b_i}} \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} &= -2b_i \sqrt{\frac{b_i}{\pi}} e^{-b_i(t-\varphi_i)^2} + 4(t-\varphi_i)^2 b_i^2 \sqrt{\frac{b_i}{\pi}} e^{-b_i(t-\varphi_i)^2} = 0, \\ t^2 - 2t\varphi_i + \varphi_i^2 - \frac{1}{2b_i} &= 0, \quad t_{1,2} = \varphi_i \pm \sqrt{\frac{1}{2b_i}}, \quad n = 1, \\ T = 2(t_1 - t_2) &= \sqrt{\frac{8}{b_i}}, \quad \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} g_i dt \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} g_i dt = \text{erf}(\sqrt{2}) \approx 0.95. \end{aligned} \quad (5.29)$$

По аналогии с (5.28) получим характеристики базисных функций вида (5.27):

$$a_i = \frac{\lambda_i}{2b_i}, \quad T_i = \frac{2}{b_i\sqrt{b_i}} \text{arcth}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \varphi_i. \quad (5.30)$$

Так для (5.27) получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2b_i} \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} &= \frac{-2(4b_i\sqrt{b_i})^2 \text{ch}^2(4b_i\sqrt{b_i}t - b_i\sqrt{b_i}\varphi_i)}{\text{ch}^4(4b_i\sqrt{b_i}t - b_i\sqrt{b_i}\varphi_i)} - \\ &- \frac{-6(4b_i\sqrt{b_i})^2 \text{sh}^2(4b_i\sqrt{b_i}t - b_i\sqrt{b_i}\varphi_i)}{\text{ch}^4(4b_i\sqrt{b_i}t - b_i\sqrt{b_i}\varphi_i)} = 0, \end{aligned}$$

$$-\text{ch}^2(4b_i\sqrt{b_i}t - b_i\sqrt{b_i}\varphi_i) + 3\text{sh}^2(4b_i\sqrt{b_i}t - b_i\sqrt{b_i}\varphi_i) = 0, \quad (5.31)$$

$$t_{1,2} = \frac{\varphi_i}{4} \pm \frac{1}{4b_i\sqrt{b_i}} \text{arcth}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad n = 2,$$

$$T = 4(t_1 - t_2) = \frac{2}{b_i\sqrt{b_i}} \text{arcth}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} g_i dt \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} g_i dt = \text{th}\left(4\text{arcth}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \approx 0.99.$$

Используя параметры (5.28), (5.30) базисных функций рассчитанные для входных и выходных сигналов можно построить характеристики, которые будут аналогами ЛАХ и ЛФХ для линейных систем, например, зависимости $a(T)$ и $\varphi(T)$.

5.6. Алгоритм разложения сигналов в ряды базисных функций

Рассмотрим один из вариантов разложения сигналов по базисным функциям:

$$\int_0^{t_k} \left(f(t) - \sum_{i=1}^N a_i g_i(T_i, \varphi_i, t) \right)^2 dt \leq \varepsilon, \quad (5.31)$$

$$\int_0^{t_k} a_i g_i(T_i, \varphi_i, t) dt \geq \int_0^{t_k} a_{i+1} g_{i+1}(T_{i+1}, \varphi_{i+1}, t) dt, \quad a_i \geq 0, \quad \frac{T_i}{2} \leq \varphi_i \leq t_k - \frac{T_i}{2}, \quad 0 \leq T_i \leq t_k,$$

где $f(t)$ - раскладываемый сигнал, t_k - конечный момент времени, ε - погрешность представления сигнала рядом.

Условие $\int_0^{t_k} a_i g_i(T_i, \varphi_i, t) dt \geq \int_0^{t_k} a_{i+1} g_{i+1}(T_{i+1}, \varphi_{i+1}, t) dt$ может быть заменено на

более простое исходя из вида базисной функции так для (5.26) получим:

$a_i \geq a_{i+1}$, так как $a_i \int_{-\infty}^{\infty} g_i(T_i, \varphi_i, t) dt = a_i \sqrt{\frac{b_i}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b_i(t-\varphi_i)^2} dt = a_i$, а для (5.27) будет:

$$a_i \sqrt{b_i} \geq a_{i+1} \sqrt{b_{i+1}}, \quad \text{так как} \quad a_i \int_{-\infty}^{\infty} g_i(T_i, \varphi_i, t) dt = 2a_i \sqrt{b_i}. \quad \text{В случае (5.27)}$$

неравенства приобретают нелинейный вид, поэтому целесообразно выбирать базисные функции из соотношения $a_i \int_{-\infty}^{\infty} g_i(T_i, \varphi_i, t) dt = a_i$, и умножить базисную функцию (5.27) на коэффициент $\frac{1}{2\sqrt{b_i}}$.

С учётом изложенного задача (5.29) может быть сформулирована как задача математического программирования вида:

$$J = \min_{a_i, T_i, \varphi_i, N} \sum_{t=0}^{t_k} \left(f(t) - \sum_{i=1}^N a_i g_i(T_i, \varphi_i, t) \right)^2, \quad (5.32)$$

при ограничениях:

$$a_i \geq 0, a_i \geq a_{i+1}, \frac{T_i}{2} \leq \varphi_i \leq t_k - \frac{T_i}{2}, 0 \leq T_i \leq t_k, N \leq N_{\max}, J_{\min} \leq \varepsilon,$$

где $N_{\max}$ - максимальное число слагаемых ряда, $J_{\min}$ - минимальное значение целевой функции (5.32).

5.7. Анализ данных с помощью осреднённой модели образца

Решение задачи (5.32) не является однозначным для произвольного образца из-за разброса параметров и уникальности каждого эксперимента, что затрудняет сравнение и поиск особенностей поведения материала в разных режимах нагружения. Для серии экспериментов с одним и тем же типом образцов при сходных параметрах экспериментов можно ввести понятие осреднённой модели образца, что позволяет сформировать шкалы для параметров разложения, определить границы их изменения. Дальнейшее разложение выбранного произвольного образца должно выполняться таким образом, чтобы отклонение параметров от параметров модели осреднённого образца были минимальны. Данный подход позволяет выделить добавочные базисные функции (уединенные волны), которые могут отвечать за определенные процессы в материале, например, быть маркером разрушения. Для задачи диагностики разрушения могут быть использованы осреднённые модели, как для неразрушенных, так и разрушенных образцов. Если известны

диапазоны изменения параметров разложения для каждой из моделей, то эту информацию можно использовать для классификации на группы разрушенных и неразрушенных средствами вычислительной техники.

Построение осреднённой модели образца может быть выполнено по следующей методике:

1. Отбирается достаточное количество экспериментов с одним типом образцов при сходных параметрах экспериментов.

2. Разложение выполняется аналогично с (5.32), но необходимо ввести дополнительные условия:

$$\begin{aligned}
 J_{1,j} &= \min_{a_{j,i}, T_{j,i}, \varphi_{j,i}, N_j} \sum_{t=0}^{t_k} \left(f_j(t) - \sum_{i=1}^{N_j} a_{j,i} g_{j,i}(T_{j,i}, \varphi_{j,i}, t) \right)^2, \\
 J_2 &= \min_{a_{j,i}, T_{j,i}, \varphi_{j,i}} \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{N_j} \frac{(\bar{a}_i - a_{j,i})^2}{N_j}, \quad J_3 = \min_{a_{j,i}, T_{j,i}, \varphi_{j,i}} \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{N_j} \frac{(\bar{T}_i - T_{j,i})^2}{N_j}, \\
 J_4 &= \min_{a_{j,i}, T_{j,i}, \varphi_{j,i}} \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{N_j} \frac{(\bar{\varphi}_i - \varphi_{j,i})^2}{N_j}, \\
 \bar{a}_i &= \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K a_{j,i}, \quad \bar{T}_i = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K T_{j,i}, \quad \bar{\varphi}_i = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \varphi_{j,i}, \quad j = 1, 2, \dots, K,
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_i &\geq 0, \quad \bar{a}_i \geq a_{i+1}, \quad \frac{\bar{T}_i}{2} \leq \bar{\varphi}_i \leq t_k - \frac{\bar{T}_i}{2}, \quad 0 \leq \bar{T}_i \leq t_k, \quad N_j \leq N_{\max}, \quad J_{1,j,\min} \leq \varepsilon, \\
 a_{j,i} &\geq 0, \quad a_{j,i} \geq a_{j,i+1}, \quad \frac{T_{j,i}}{2} \leq \varphi_{j,i} \leq t_k - \frac{T_{j,i}}{2}, \quad 0 \leq T_{j,i} \leq t_k,
 \end{aligned}$$

где j – номер образца, K – количество образцов.

3. Полученные в пункте 2 параметры сортируются и представляются в виде шкал с учетом среднеквадратичных отклонений:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{J_2}{K}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{J_3}{K}}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\frac{J_4}{K}}. \tag{5.34}$$

На рисунке 5.8 приведены зависимости параметров моделей разрушенного (*) и неразрушенного (o) образцов для габбро-диабаз:

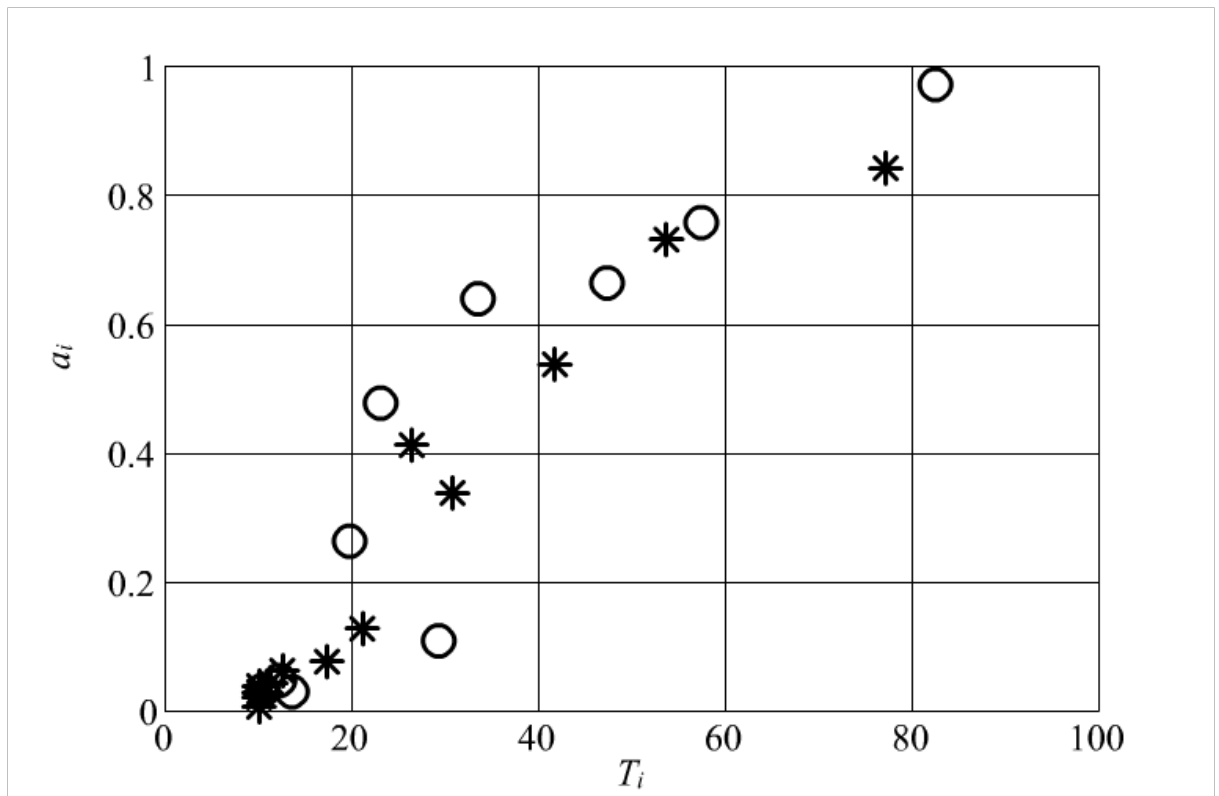


Рис.5.8. Осреднённые модели габбро-диабазы

При выбранной модели выполняется разложение данных экспериментов для текущего образца при фиксированных значениях $T_{j,i}$, которые выбираются согласно шкале:

$$J_{1,j} = \min_{a_{j,i}, \varphi_{j,i}, N_j} \sum_{t=0}^{t_k} \left(f_j(t) - \sum_{i=1}^{N_j} a_{j,i} g_{j,i}(\bar{T}_i, \varphi_{j,i}, t) \right)^2, \quad (5.35)$$

$$J_2 = \min_{a_{j,i}, \varphi_{j,i}} \sum_{i=1}^{N_j} \frac{(\bar{a}_i - a_{j,i})^2}{N_j}, \quad J_4 = \min_{a_{j,i}, \varphi_{j,i}} \sum_{i=1}^{N_j} \frac{(\bar{\varphi}_i - \varphi_{j,i})^2}{N_j}, \quad j = 1, 2, \dots, K,$$

при ограничениях:

$$a_{j,i} \geq 0, \quad a_{j,i} \geq a_{j,i+1}, \quad \frac{\bar{T}_{j,i}}{2} \leq \varphi_{j,i} \leq t_k - \frac{\bar{T}_{j,i}}{2}, \quad N_j \leq N_{\max}, \quad J_{1,j,\min} \leq \varepsilon.$$

Решение о том, что образец разрушен, может быть принято согласно результатам классификации по минимуму отклонения от параметров соответствующей модели.

5.8. Результаты разложения сигналов в ряды базисных функций

В разделе представлены результаты обработки сигналов прошедших импульсов на установке Гопкинсона для габбро-диабаз, сухого и влагонасыщенного известняка.

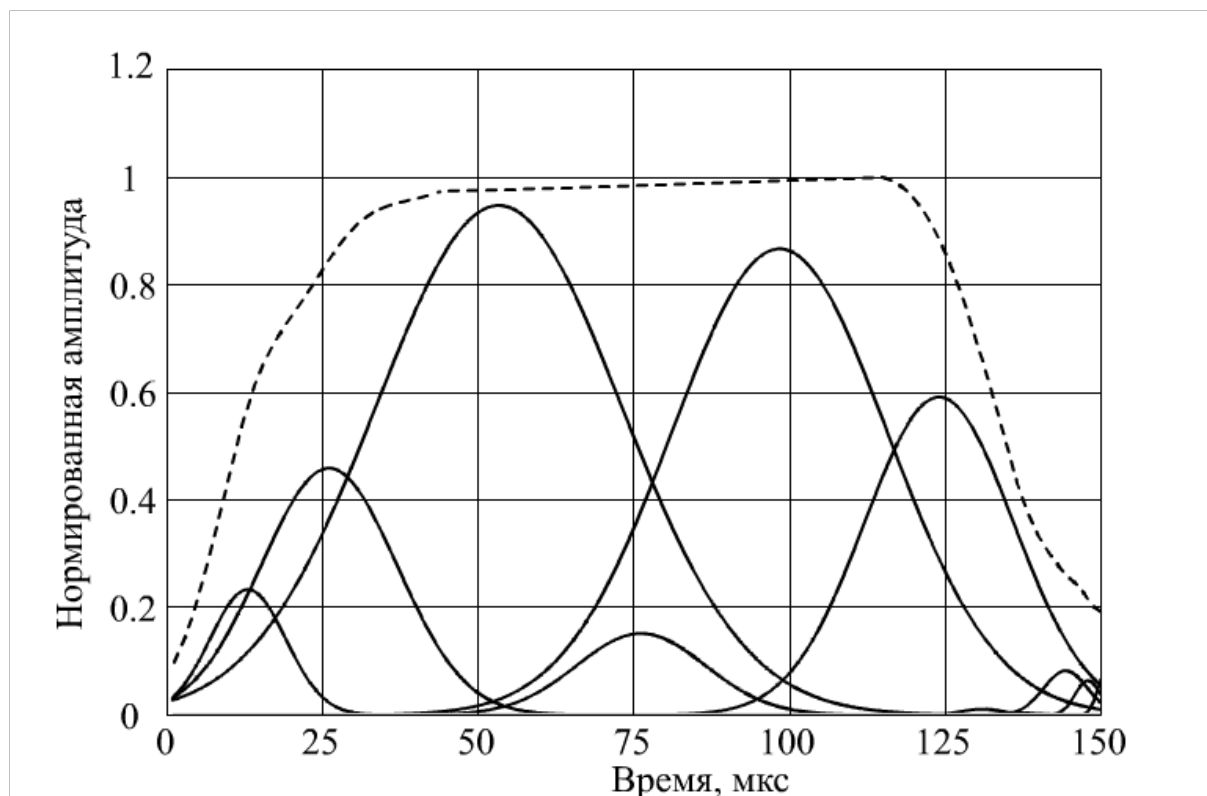


Рис.5.9., а. Габбро-диабаз неразрушенный, скорость 8.42 м/с, сжатие.
(--- - график отфильтрованного сигнала, зарегистрированного на опорном стержне)

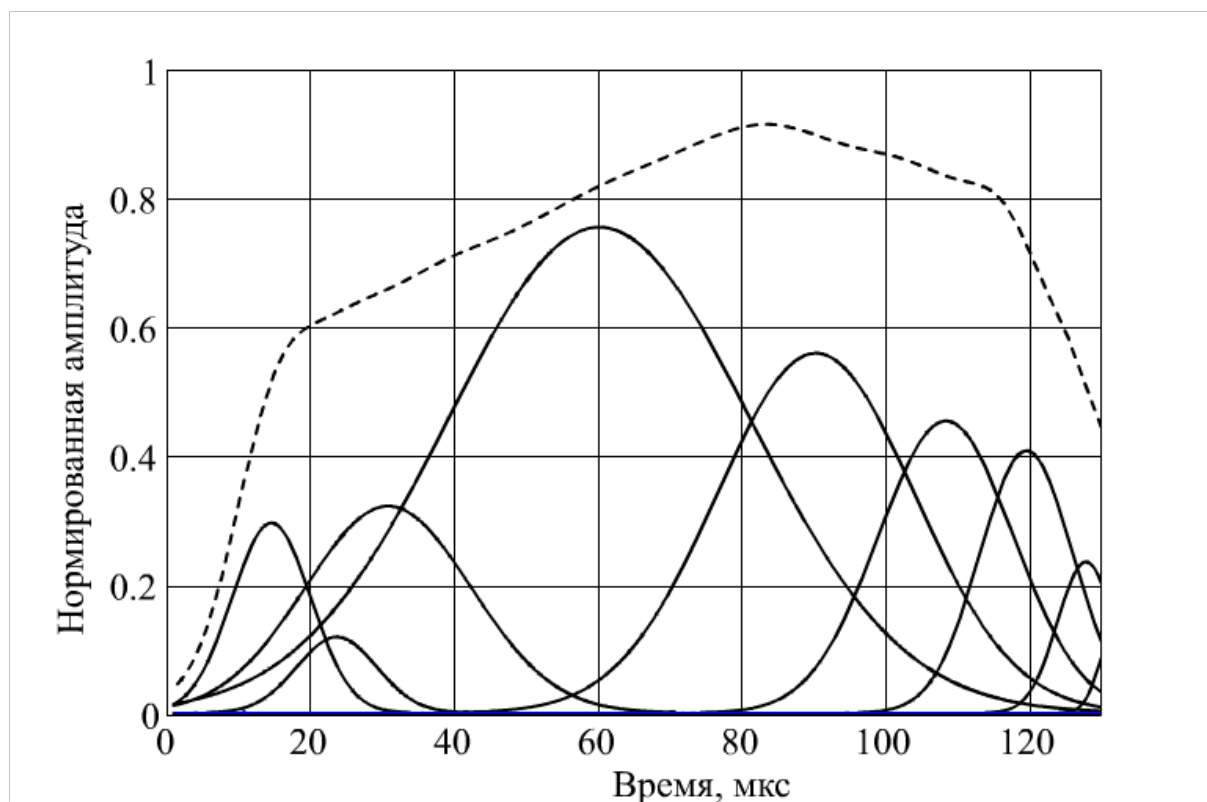


Рис.5.9, б. Габбро-диабаз разрушенный, скорость 12.26 м/с, сжатие.
 (--- - график отфильтрованного сигнала, зарегистрированного на опорном
 стержне)

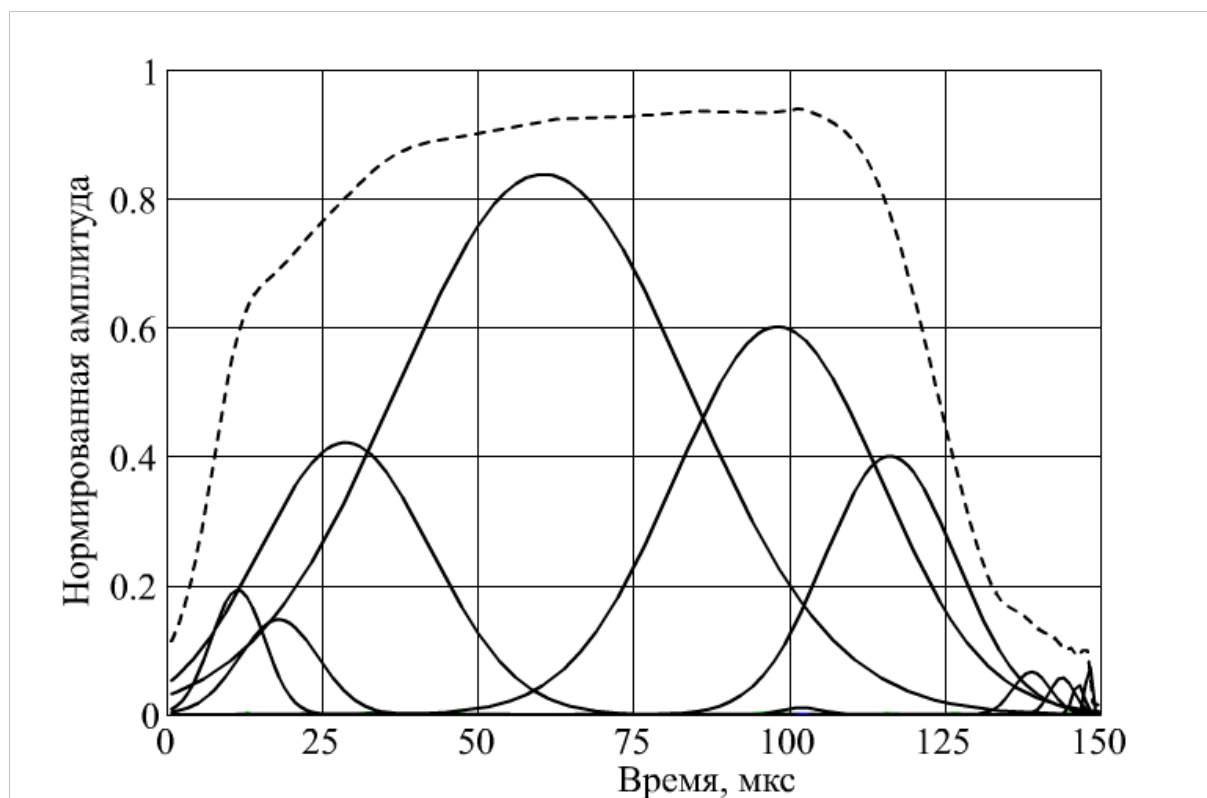


Рис. 5.9, в. Известняк, сжатие, скорость нагружения 3.24 м/с, неразрушенный, дополнительные импульсы отсутствуют (--- - график отфильтрованного сигнала, зарегистрированного на опорном стержне)

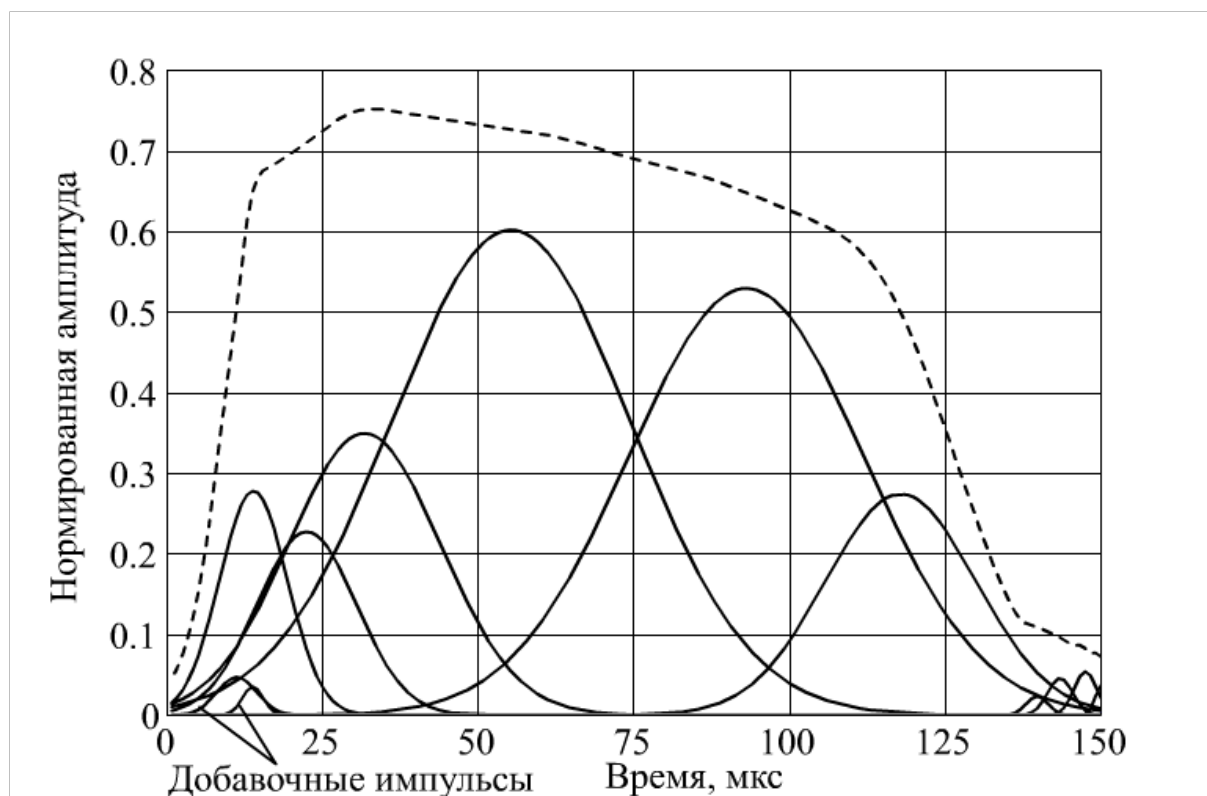


Рис. 5.9, г. Известняк, сжатие, скорость нагружения 6.68 м/с, разрушенный, присутствуют добавочные импульсы, параметры импульсов:
 импульс №1: фаза - 11.33 мкс, длительность - 12.0 мкс, амплитуда - 0.047;
 импульс №2: фаза - 13.85 мкс, длительность - 6.66 мкс, амплитуда - 0.035.
 (--- - график отфильтрованного сигнала, зарегистрированного на опорном стержне)

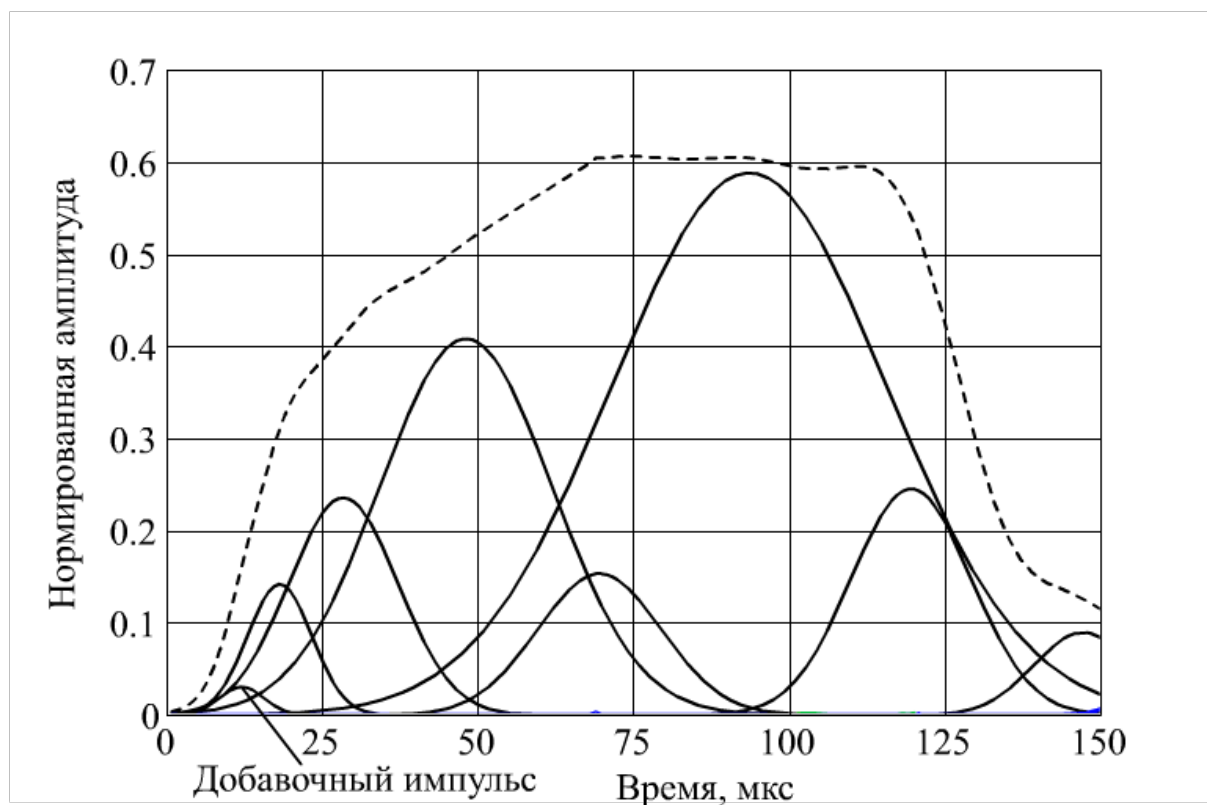


Рис. 5.9, д. Известняк, сжатие, разрушенный, скорость нагружения 3.62 м/с,
 присутствует добавочный импульс, параметры импульса:
 фаза - 12.09 мкс, длительность - 14.2 мкс, амплитуда - 0.031.
 (--- - график отфильтрованного сигнала, зарегистрированного на опорном
 стержне)

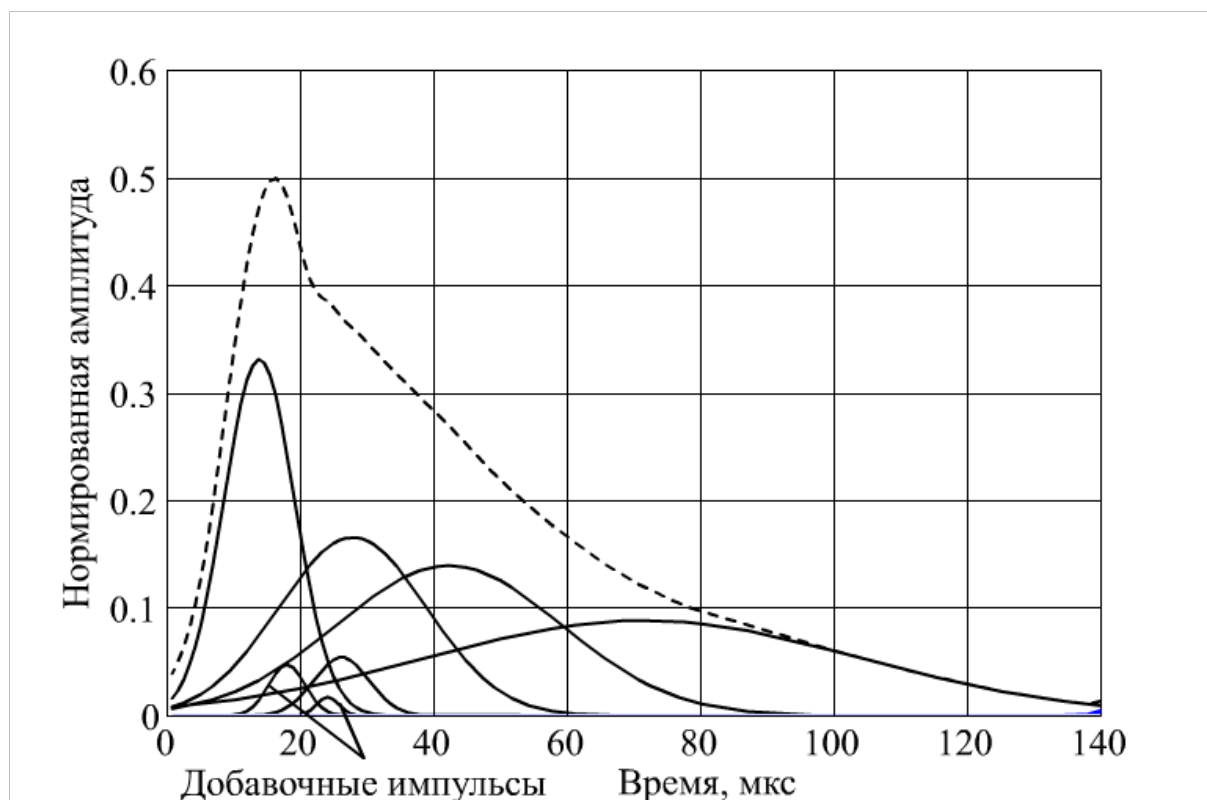


Рис. 5.9, е. Известняк, сжатие, разрушенный, скорость нагружения 14.54 м/с, присутствуют добавочные импульсы, параметры импульсов:
импульс №1: фаза - 18.04 мкс, длительность - 10.96 мкс, амплитуда - 0.047;
импульс №2: фаза - 24.16 мкс, длительность - 6.72 мкс, амплитуда - 0.017.
(--- - график отфильтрованного сигнала, зарегистрированного на опорном стержне)

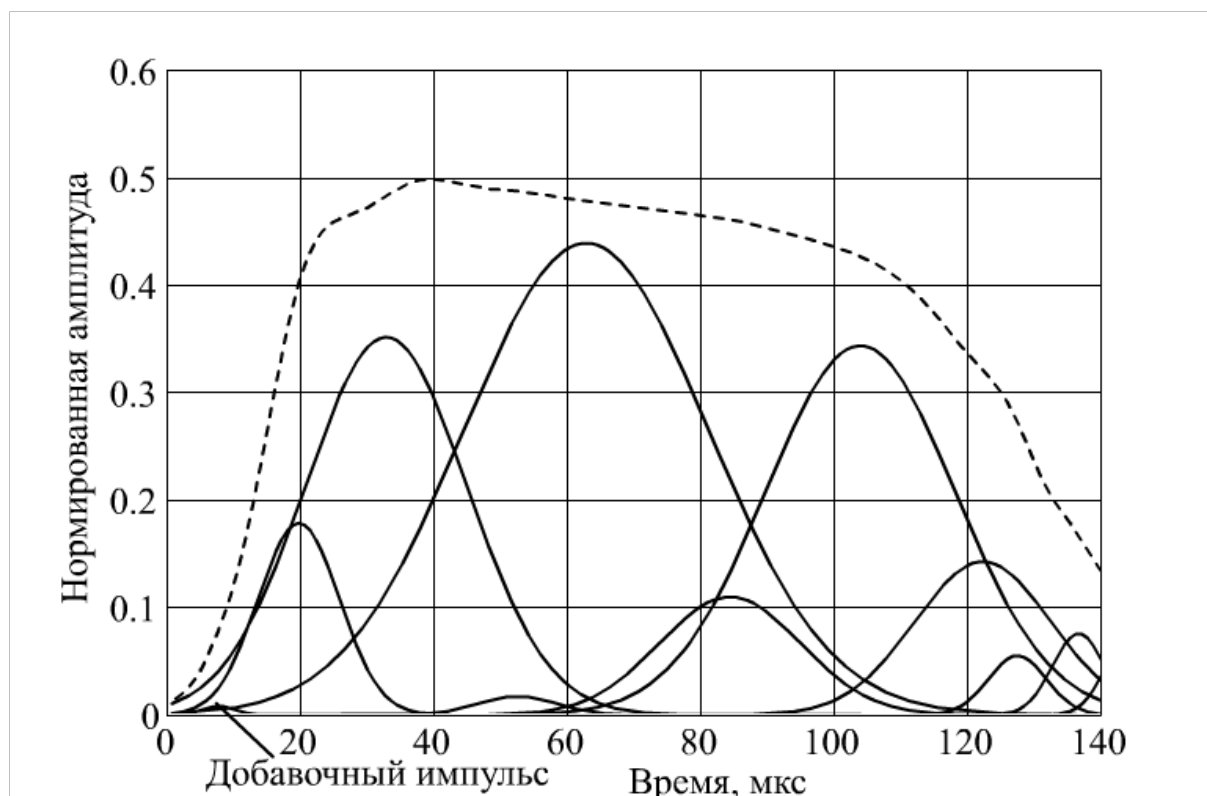


Рис. 5.9., ж. Известняк, сжатие, разрушенный, скорость нагружения 9.62 м/с, присутствует добавочный импульс, параметры импульса:
 импульс №1: фаза - 7.83 мкс, длительность - 9.33 мкс, амплитуда - 0.008.
 (--- - график отфильтрованного сигнала, зарегистрированного на опорном стержне).

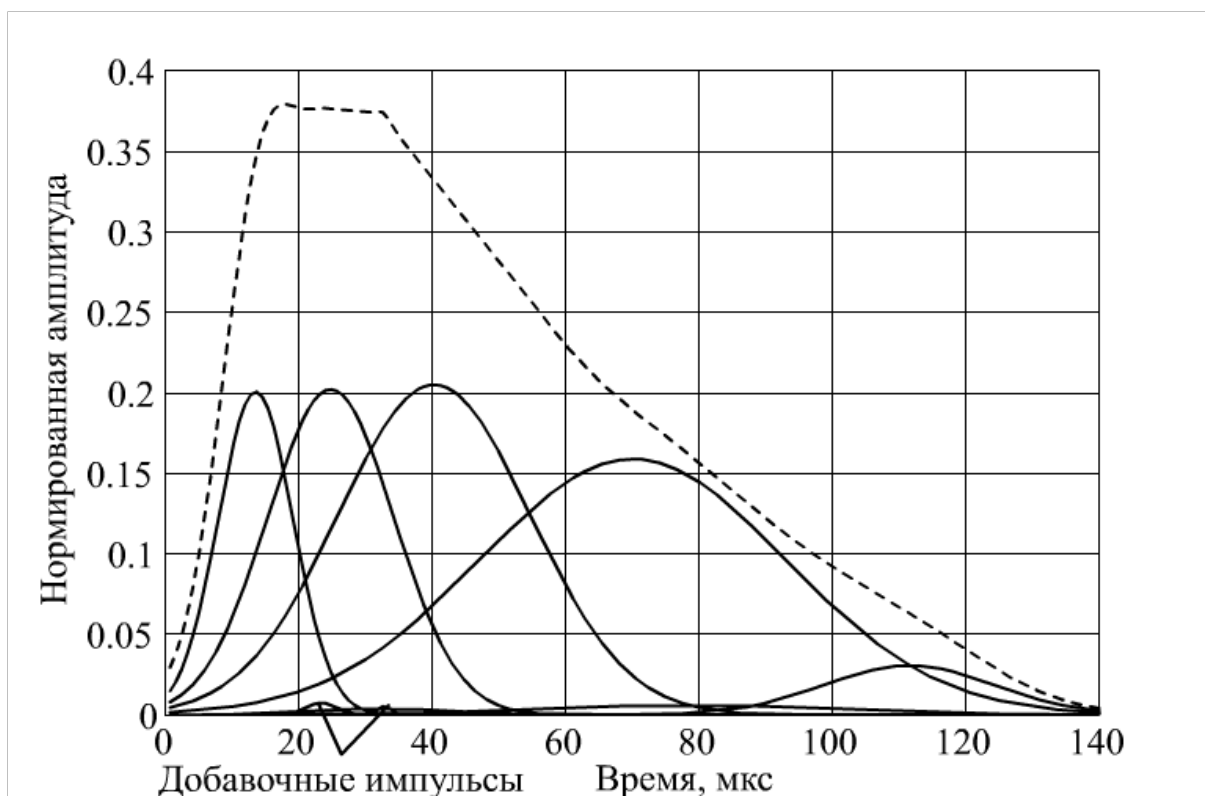


Рис. 5.9., з. Известняк влагонасыщенный, сжатие, разрушенный, скорость нагружения 14.88 м/с, присутствуют добавочные импульсы, параметры импульсов:

импульс №1: фаза - 23.48 мкс, длительность - 9.27 мкс, амплитуда - 0.008;

импульс №2: фаза - 32.88 мкс, длительность - 4.21 мкс, амплитуда - 0.006.

(--- - график отфильтрованного сигнала, зарегистрированного на опорном стержне).

При сравнении моделей сигналов импульсов разрушенных образцов с неразрушенными в большинстве случаев (Рис. 5.9, г- Рис. 5.9, з) в разложении сигналов присутствовали дополнительные базисные функции, которые могут характеризовать процесс разрушения в материале.

Выводы

Предложены эффективные алгоритмы совместных фильтрации и анализа экспериментальных сигналов, полученных на установке Гопкинсона. Показано, что данная задача может быть сформулирована как задача математического программирования и сводится к квадратичному

программированию при фильтрации взаимосвязанной триады нагружающего, отраженного и прошедшего импульсов, и описывается как последовательность задач квадратичного программирования в случае, когда выполняется и согласованная фильтрация импульсов, и расчет фазовых сдвигов между ними.

Предложенные алгоритмы фильтрации и анализа сигналов позволяют эффективно выделять осцилляционные составляющие сигналов, которые присутствуют как в нагружающем, так и в прошедшем, и отражённом сигналах и могут быть обусловлены влиянием экспериментальной установки. Удаление этих составляющих привело к существенному (>2 раза) уменьшению среднеквадратического отклонения экспериментальных данных от аппроксимации зависимостью (5.24) для характеристики $S(\sigma_t)$ (зависимость импульса разрушения от скорости роста напряжений).

В качестве дополнительных ограничений в алгоритмы фильтрации и анализа сигналов заложены соотношения, не противоречащие физике исследуемого материала, в частности закон сохранения импульса. Эти ограничения представляют собой модель материала, которая может быть улучшена.

Показано, что зависимость импульса разрушения от скорости роста напряжений описывается гиперболической зависимостью. Если постоянной составляющей в (5.24) можно пренебречь, то постоянной величиной является произведение импульса разрушения на скорость роста напряжений, таким образом, постоянна энергия разрушения.

Предложен метод анализа триады импульсов путём аппроксимации последовательностями радиально-базисных функций и построения осреднённых моделей сигналов разрушенного и неразрушенного образцов. В разложениях сигналов разрушенных образцов были выявлены добавочные базисные функции, которые могут свидетельствовать о процессах разрушения в материале и косвенно определять их начало и длительность.

Заключение

Основные научные и практические результаты диссертационной работы заключаются в следующих положениях:

1. Предложены методы синтеза статистических идентификаторов на основе метода наименьших квадратов для систем управления квазистационарными и нестационарными динамическими объектами типа ИЭМС, при ограничениях на их параметры и фазовые координаты, с применением матричного оператора сдвига во временной области. Отличительной особенностью методов является то, что для случая низкого отношения сигнал/шум синтез идентификаторов выполняется как решение системы неравенств на основе множественно-функционального подхода, позволяющего при использовании интервальной невязки между выходом идентификатора и реальным динамическим объектом проводить редукцию модели.

2. Предложен метод идентификации с использованием множественно-функционального подхода для нелинейной нестационарной системы типа ИЭМС, основанный на анализе типов асимптотических решений при учете физических закономерностей и соответствующих ограничений на параметры и фазовые координаты при сохранении физической адекватности модели протекающим в объекте процессам и реализуемости законов управления, сформулированный как решение задачи математического программирования.

3. Предложен метод математического программирования для решения задач идентификации и синтеза СУ, сформулированных как задачи математического программирования, целевые функции которых удовлетворяют свойствам метрики, эквивалентному при заданной точности множеству задач оптимизации при линейных ограничениях, путём аппроксимации произвольных ограничений кусочно-полиномиальными функциями или рациональными дробями. Показано, что данный метод эффективен при расчёте оптимальных траекторий движения базовых

модулей ИЭМС, так как он сводится к интервальным задачам от одной переменной, а именно времени переходного процесса.

4. Разработаны методы синтеза и идентификации сложных распределённых СУ, на основе модели базового блока ИЭМС как динамического объекта с параллельной кинематической схемой для управления элементами зеркальных систем больших полноповоротных радиотелескопов.

5. Разработаны методы идентификации параметров и характеристик в ИИС испытательных стендов на основе экспериментальных данных по динамической прочности материалов, полученных на установке с разрезным стержнем Гопкинсона-Кольского и стенде с газовой пушкой, с учетом влияния ИИС и сохранении адекватности физики процессов при удалении влияния сторонних факторов.

Список литературы

1. Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине, 2-е изд. М.: Сов. радио, 1968. - 326 с.
2. А. Л. Фрадков. Кибернетическая физика: принципы и примеры - СПб. : Наука, 2003. - 207 с.
3. Cyber-Physical Systems: Advances in Design & Modelling. Editors: Kravets Alla G., Bolshakov Alexander A., Shcherbakov Maxim (Eds.), Springer Nature Switzerland AG, 2020, - 347 p.
4. Куприяновский В. П., Намиот Д. Е., Синягов С. А. Киберфизические системы как основа цифровой экономики // International Journal of Open Information Technologies. 2016. №2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kiber-fizicheskie-sistemy-kak-osnova-tsifrovoy-ekonomiki> (дата обращения: 16.10.2021).
5. Городецкий А.Е. Интеллектуальные электромеханические системы [Smart Electromechanical Systems.] Шпрингер Интернационал Паблишинг Швейцария, 2016. — 277 с. (на английском языке).
6. Городецкий А.Е., Курбанов В.Г. Интеллектуальные электромеханические системы: центральная нервная система. [Smart Electromechanical Systems: The Central Nervous System.] Шпрингер Интернационал Паблишинг АГ, 2017. — 266 с. (на английском языке)
7. Глазунов В.А. Механизмы параллельной структуры и их применение: робототехнические, технологические, медицинские, обучающие системы / Отв. ред. академик Р.Ф. Ганиев. - М. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2018. – 1036 с.
8. Артеменко Ю. Н., Агапов В. А., Дубаренко В. В., Кучмин А. Ю. Групповое управление актуаторами контррефлектора радиотелескопа // Информационно-управляющие системы. 2012. № 4. С. 2–9.
9. С. В. Волкоморов, Ю. Т. Каганов, А. П. Карпенко Моделирование и оптимизация некоторых параллельных механизмов. Москва: Новые технологии, 2010 - 32 с.

10. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. М.: Наука,-1991. - 96 с.
11. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: МГТУ. -2004.- 480 с.
12. Merlet J.P. Parallel Robots (Solid Mechanics and Its Applications). . – Berlin: Springer. 2004.
13. Хейло С. В., Глазунов В. А., Палочкин С. В. Манипуляционные механизмы параллельной структуры. Динамический анализ и управление - М. : МГУДТ, 2014. - 86 с.
14. Агапов В.А., Городецкий А.Е., Кучмин А.Ю., Селиванова Е.Н. Медицинский микроробот. Патент на изобретение RUS 2469752 20.05.2011
15. Артеменко Ю.Н., Бадю Е.И., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Тарасова И.Л. Антенна радиотелескопа. Патент на изобретение RUS 2421765 09.02.2010.
16. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. - 549 с.
17. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах. Беспойсковые методы, М.: Наука, 1990. - 292 с.
18. <https://intuit.ru/studies/courses/46/46/lecture/1368> (обращение 16.10.2021)
19. Kuchmin A.Yu. Synthesis of Optimal Program Control for Synchronizing the Movements of a Group of SEMS Modules, Smart Electromechanical Systems Behavioral Decision Making, Editors: Gorodetskiy, Andrey E., Tarasova, Irina L. (Eds.), Springer Nature Switzerland AG, 2021, pp. 81-94.
20. Индейцев Д.А., Мещеряков Ю.И., Кучмин А.Ю., Вавилов Д.С. Многомасштабная модель распространения стационарных упругопластических волн. Доклады Академии наук. 2014. Т. 458. № 2. С. 165.
21. Indeitsev D.A., Meshcheryakov Y.I., Kuchmin A.Y., Vavilov D.S. Multi-scale model of steady-wave shock in medium with relaxation. Acta Mechanica. 2015. Т. 226. № 3. pp. 917-930.

22. Кучмин А.Ю., Абрамян А.К. Применение математического программирования для анализа экспериментальных данных. Информационно-управляющие системы. 2014. № 6 (73). С. 20-28.
23. Кучмин А.Ю., Абрамян А.К., Петров Ю.В., Смирнов И.В., Брагов А.М. Структурно-временные и импульсные характеристики динамического разрушения некоторых строительных материалов. Доклады Академии наук. 2017. Т. 472. № 1. С. 36-39.
24. Kuchmin AYu., Abramyan A.K Application of mathematical programming for analysis of experimental data obtained at the Hopkinson's stand. Proceedings of Intern. Symposium on Shock Waves (ISSW30). July 19-24, Tel-Aviv, Israel, (2015).
25. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965
26. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. – М.: Наука, 1969.
27. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. Пер. с англ. Серия: Теоретические основы технической кибернетики. М.: Наука. 1975г. 280 с.
28. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов 4-е изд., стереотипное. — М.: Наука, 1983. — 393 с.
29. Карабутов Н.Н. Структурная идентификация систем: Анализ динамических структур. — М.: МГИУ, 2008. – 160 с.
30. Изерман Р., Мюнхгоф М. Идентификация динамических систем. Введение и приложения [Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Applications]. Шпрингер. 2011. — 705 с. (на английском языке)
31. Мзик Г. Объединенная параметрически-непараметрическая идентификация блочно-ориентированных систем [Combined Parametric-Nonparametric Identification of Block-Oriented Systems]. Шпрингер. 2014. — 238 с. (на английском языке)

32. Буталис И., Зэодоридис Д., Коттас Т., Кристодоулоу М.А. Идентификация систем и адаптивное управление. Теория и приложения нейронечетких и нечетких когнитивных сетевых моделей [System Identification and Adaptive Control. Theory and Applications of the Neurofuzzy and Fuzzy Cognitive Network Models]. Шпрингер. 2014. — 313 с. (на английском языке)
33. Гроп Д. Методы идентификации систем. — М.: Мир, 1975. — 302 с.
34. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. — 432 с.
35. Гусев С.А. Параметрическая идентификация динамических объектов. Методические указания к выполнению лабораторных работ. СПб.: ГУАП, 1997 г. 24 с.
36. Жуманов И.И., Юсупов Н.Р. Оптимизация идентификации нестационарных объектов на основе инструментов мягких вычислений. Наука и мир. 2019. Т. 2. № 5 (69). С. 30-32.
37. Метод идентификации внешнего возмущающего воздействия на электроприводы крупного радиотелескопа. Белов М.П., Фьонг Ч.Х., Козлова Л.П. Электротехника. 2019. № 12. С. 44-49.
38. Прокопьев И.В., Софронова Е.А. Исследование метода идентификации модели и методов управления беспилотным транспортным средством по пространственной траектории. Надежность и качество сложных систем. 2020. № 3 (31). С. 99-111.
39. Misyurin S.Y., Kreinin G.V., Nosova N.Y., Nelyubin A.P. Selection of a friction model to take into account the impact on the dynamics and positioning accuracy of drive systems. Advances in Intelligent Systems and Computing. 2021. Т. 1310. С. 309-319.
40. Моторин А.В., Кошаев Д.А., Степанов О.А., Яшникова О.М. Идентификация модели и сглаживание горизонтальных компонент возмущения силы тяжести для решения задачи векторной гравиметрии. В сборнике: Материалы XXXII конференции памяти выдающегося

конструктора гироскопических приборов Н. Н. Острякова. Санкт-Петербург, 2020. С. 149-152.

41. Басин М.В., Степанов О.А., Литвиненко Ю.А., Васильев В.А., Тупысев В.А. Алгоритм полиномиальной фильтрации при наличии нелинейностей в уравнениях для измерений и вектора состояний. В сборнике: Материалы XXXII конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н. Н. Острякова. Санкт-Петербург, 2020. С. 316-321.

42. Васильев В.А., Степанов О.А., Тупысев В.А. Анализ эффективности алгоритма фильтрации дискретного марковского процесса, описываемого формирующим фильтром полиномиального типа. В сборнике: XXVIII Международная научно-техническая конференция "Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации". сборник трудов. 2019. С. 167-168.

43. Данг Х.Б., Пыркин А.А., Бобцов А.А., Ведяков А.А. Идентификация полиномиальных параметров нестационарных линейных систем. Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2021. Т. 64. № 6. С. 459-468.

44. Bobtsov A., Ortega R., Nikolaev N., Yi B. Adaptive state estimation of state-affine systems with unknown time-varying parameters. International Journal of Control. 2021.

45. Коротина М.М., Арановский С.В., Бобцов А.А. Оценивание параметров синусоидального сигнала со степенной функцией частоты. Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2020. Т. 63. № 6. С. 507-514.

46. Ле В.Т., Коротина М.М., Бобцов А.А., Арановский С.В., Во К.Д. Идентификация линейно изменяющихся во времени параметров нестационарных систем. Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. № 5. С. 259-265.

47. Цзянь В., Бобцов А.А., Колубин С.А., Пыркин А.А., Туан Л.В. Идентификация кусочно-линейных параметров регрессионных моделей нестационарных детерминированных систем. Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 71-82.

48. Первушин В. Ф. О непараметрической идентификации линейных динамических объектов. Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. №4(25) с. 95-104, 2013 г.
49. Кучмин А.Ю. Проблемы идентификации нестационарных динамических объектов // Информационно-управляющие системы. 2018. № 2. С. 18–25.
50. Kuchmin A.Yu. Dubarenko V.V. Definition of a Rigidity of a Hexapod. Smart Electromechanical Systems. Gorodetskiy A.E. (Ed.) Springer International Publishing Switzerland, 2016, pp. 159-163.
51. И. В. Бойков, Н. П. Кривулин Методы идентификации динамических систем. Программные системы: теория и приложения. No 5(23), 2014, с. 79–96
52. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат литературы, 1981. – 448 с.
53. А. Л. Фрадков. Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления, Автомат. и телемех., 1979, № 9, 90–101; Autom. Remote Control, 40:9 (1980), 1333–1342.
54. Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. Метод скоростного градиента и его приложения, Автомат. и телемех., 2021, № 9, 3–72.
55. R.E. Kalman, «A new approach to linear filtering and prediction problems». Journal of Basic Engineering, 1960, 82 (1): pp. 35—45
56. Копытин А. В., Копытина Е. А., Матвеев М. Г. Применение расширенного фильтра Калмана для идентификации параметров распределенной динамической системы // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. Воронеж, 2018. № 3. С. 44-50.
57. Красовский А. А. Оптимальные алгоритмы в задачах идентификации с адаптивной моделью // Автоматика и телемеханика. 1975. № 12. — С. 75-82.

58. Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрик В. С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. — М.: Наука, 1977. — 272 с.
59. Городецкий А.Е., Тарасова И. Л. Управление и нейронные сети. Изд-во СПбГПУ, 2005, 400с.
60. Аггарвал Чару. Нейронные сети и глубокое обучение: учебный курс. Пер. с англ. — СПб.: Диалектика, 2020. — 752 с.: ил.
61. Галушкин А.И. Нейронные сети: основы теории. М.: Горячая линия-Телеком, 2012. — 496 с.
62. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект. Современный подход. 2-е изд. — М.: Вильямс, 2007. — 1410 с.
63. Ходасевич Г.Б. Обработка экспериментальных данных на ЭВМ. Часть 2. Обработка многомерных данных. —СПб.: СПбГУТ, 2002.-250с.
64. Бокс Д., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление. Вып. 1. — М.: Мир, 1974. — 406 с.
65. Ершов А. А. Стабильные методы оценивания параметров (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1978. № 8. — С. 66-100.
66. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1999.
67. Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И. Многомерные статистические методы. — М.: Финансы и статистика, 1998.
68. Браверман Э.М., Мучник И.Б. Структурные методы обработки эмпирических данных. — М.: Наука, 1983.
69. С. Бочканов, О. Краснояров Преобразование Фурье и его свойства. Интернет ресурс <http://alglib.sources.ru/fft/fourier.php> (дата обращения 12.05.2018)
70. В.П. Дьяконов, И.В. Абраменковой. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник /С.-Пб.: Питер, 2002. - 608 с.
71. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. — М.: ДМК Пресс, 2005, с 304

72. Louis A.K., Maab P. and Rieder A. Wavelet Theory And Applications. John Wiley & Sons Press, Chichester (1997).
73. Хачиян Л.Г. Избранные труды. Сборник избранных трудов. — М.: МЦНМО, 2009. — 520 с.
74. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988, 128 с.
75. Gill P., Wong E. Convexification Schemes for SQP Methods // UCSD Center for Computational Mathematics Technical Paper. 2014. CCoM-14-06. P. 1–12.
76. Johnson J.N. and Barker L.M. (1969) Dislocation dynamics and steady plastic wave profiles in 6061-T6 aluminum J. Appl. Phys., Vol.40, No 11, 4321-4335.
77. Prieto F.E. and Renero C. (1973). Steady shock profile in solids, J. Appl. Phys. Vol. 44, No 9, 4013-401.
78. Swegle J.W. and Grady D.E. (1985). Shock viscosity and the prediction of shock-wave rise times J. Appl. Phys., Vol. 58, No 2, 692-701.
79. Grady D.E. (1986). Steady rise-time and spall measurement on Uranium (3-16 GPa). In: “Metallurgical Applications of Shock-Wave and High-Strain-Rate Phenomena” (Explomet-85), Ed. by L.E. Murr, K.R. Staudhammer, M.A. Meyers. Marcel Dekker. N.Y. 763-780.
80. Meshcheryakov Yu. I. (2000). In: “Shock Compression of Condensed Matter-1999”. Ed. by M.D. Furnish, L.C.Chhabildas, R.S. Nixon. (AIP Conference Proceedings-505. Melville, N. Y., 1065-1070.
81. Meshcheryakov Yu.I., Divakov A.K., Zhigacheva N.I, Makarevich I.P., Barakhtin B.K., (2008). Dynamic structures in shock-loaded copper. Physical Review B. 78, 64301-64316.
82. Мещеряков Ю.И. (2005). Об эволюционном и катастрофическом режимах энергообмена в динамически деформируемой среде. Доклады РАН. № 6, 765-768.
83. Абрамян А.К., Миранцев Л.В., Кучмин А.Ю. Моделирование течения куэтта простой жидкости в плоском канале наноразмерной высоты. Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 3-21.

84. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация, 1985. Пер. с англ., М.: «Мир» — 509 с.
85. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. Единый подход. Пер. с англ. — М.: «Сов. радио», 1973. — 312 с.
86. Растрингин Л.А. Случайный поиск в задачах оптимизации многопараметрических систем. — Рига: Зинатне, 1965, — 212 с.
87. Карпенко А.П. Методы повышения эффективности метаэвристических алгоритмов глобальной оптимизации. Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. 2017. Т. 1. С. 77-83.
88. Карпенко А.П. Эффективность гибридизации популяционных алгоритмов глобальной оптимизации. В сборнике: Гибридные и синергетические интеллектуальные системы Материалы III Всероссийской Пospelовской конференции с международным участием. Под редакцией А. В. Колесникова. 2016. С. 324-331.
89. Элияху М. Голдратт, Джефф Кокс. Цель. Процесс непрерывного совершенствования = англ. The Goal: A Process of Ongoing Improvement. — Минск: Попурри, 2009. — 496 с.
90. Детмер У. Теория ограничений Голдратта: Системный подход к непрерывному совершенствованию / Уильям Детмер; Пер. с англ. — 2-е изд. — М.: Альпина Бизнес Букс, 2008. — 444 с.
91. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. Учеб. пособие для вузов по специальности "Прикладная математика". — М.: Наука, 1978. — 351 с.: ил.
92. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. — М.: «Наука», 1971. — 424 с.
93. Хансен Э., Уолстер Дж. У. Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа. М.–Ижевск: ИКИ, 2012, 520 с.
94. Motzkin T., Raiffa H., Thompson G., Thrall R.M. The double description method. Contributions to the Theory of Games. Princeton: Princeton University Press. 1953. pp. 51–73.

95. Шевченко В.Н., Груздев Д.В. Модификация алгоритма Фурье–Моцкина для построения триангуляции. Дискр. анализ и исслед. операций. 2003. 10. № 1. С. 53–64.
96. Немировский А. С., Юдин Д. Б. Эффективные методы решения задач выпуклого программирования большой размерности // Экономика и математические методы, 1979, № 2, с. 135—152.
97. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. 2-е изд. — М.: Изд-во «УРСС», 2012. — 424 с.
98. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов 4-е изд., стереотипное. — М.: Наука, 1983. — 393 с.
99. Кучмин А.Ю. Об одном методе нелинейного программирования с произвольными ограничениями. Информационно-управляющие системы. 2016. Т. 81. № 2. С. 2-10.
100. Бухбергер Б. и др. Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления. Пер. с англ. Под ред. Б. Бухбергера, Дж. Коллинза, Р. Лооса, — М.: Мир, 1986. — 392 с., ил.
101. Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э. Компьютерная алгебра. — М.: Мир, 1991. — 352 с.
102. Кокс Д., Литл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. Пер. с англ. — М.: Мир, 2000. — 687 с.
103. Кучмин А.Ю. Анализ полиномиальных ограничений методом дерева решений // Информационно-управляющие системы. 2017. № 6(91). С. 9–14.
104. Бретт Лэнц. Машинное обучение с R. 2-й Выпуск. — Пакт Паблишинг. 2015. — 454 р.
105. М.Ю. Перминова, В.В. Кручинин, Д.В. Кручинин. Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях. Доклады ТУСУРа, № 4 (38), декабрь 2015.

106. Misyurin S.Y., Nelyubin A.P., Potapov M.A. Multicriteria approach to control a population of robots to find the best solutions. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020. Т. 948. С. 358-363.
107. Черноусько Ф.Л., Шматков А.М. Оптимальное управление поворотом твердого тела при помощи внутренней массы. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. 2019. № 3. С. 10-23.
108. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Мобильные роботы: проблемы управления и оптимизации движений. В сборнике: XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 67-78.
109. Городецкий А.Е., Курбанов В.Г., Юргенсон И.А. Городецкий А.Е. Адаптивный захват. Патент на изобретение RU 2675007 C1, 14.12.2018. Заявка № 2017138492 от 03.11.2017.
110. Городецкий А.Е., Курбанов В.Г., Тарасова И.Л. Адаптивный захват. Патент на изобретение RU 2624278 C1, 03.07.2017. Заявка № 2016128451 от 12.07.2016.
111. Tarasova I.L., Kurbanov V.G., Gorodetskiy A.E. Adaptive capture. *Studies in Systems, Decision and Control*. 2017. Т. 95. С. 119-142.
112. Kuchmin A.Yu., V.V. Dubarenko Linearized Model of the Mechanism with Parallel Structure. *Smart Electromechanical Systems: The Central Nervous System*. Gorodetskiy A.E., Kurbanov V.G. (Eds.) Springer International Publishing AG, DOI 10.1007/978-3-319-53327-8_13, 2017. pp 169-200.
113. Дубаренко В.В., Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Кучмин А.Ю., Курбанов В.Г. Радиотелескопы на основе механизмов с параллельными кинематическими связями. В сборнике: Материалы XXIX конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н.Острякова 2014. С. 367-371.
114. Дубаренко В.В., Артеменко Ю.Н., Кучмин А.Ю. Автоматическое управление динамикой многосвязных механизмов. В сборнике: Материалы

- XXX конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова Сборник докладов конференции. 2016. С. 281-287.
115. Дубаренко В.В., Артёменко Ю.Н., Кучмин А.Ю. Управление динамическими объектами на основе гексаподов. В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. 2015. С. 1229-1231.
116. Kuchmin A.Yu. Test Model of a Warehouse Loader Robot for Situational Control Analysis System. Smart Electromechanical Systems. Situational Control. Editors: Gorodetskiy, Andrey E., Tarasova, Irina L. (Eds.) Springer Nature Switzerland AG, DOI https://doi.org/10.1007/978-3-030-32710-1_19, 2019. - 245-258 pp.
117. Кучмин А.Ю. Моделирование эквивалентной жесткости адаптивных платформ с исполнительными механизмами параллельной структуры. Информационно-управляющие системы. 2014. № 3 (70). С. 30-39.
118. Гаврилов С.В., Коноплев В.А. Компьютерные технологии исследования многосвязных мехатронных систем. – СПб.: Наука, 2004. – 191с.
119. Kuchmin, Andrey Yu. Identification of Dynamics of Modules SEMS, Smart Electromechanical Systems. Group Interaction. Editors: Gorodetskiy, Andrey E., Tarasova, Irina L. (Eds.) Springer Nature Switzerland AG, DOI https://doi.org/10.1007/978-3-319-99759-9_16, 2018. — 193-202 pp.
120. Городецкий А. Е., Курбанов В. Г., Тарасова И. Л., Кучмин А. Ю. Электроприводы системы логического управления положением контррефлектора космического радиотелескопа // Антенны. 2011. №4. С. 52-55.
121. Городецкий А. Е., Курбанов В. Г., Тарасова И. Л., Кучмин А. Ю. Структура системы логического управления положением контррефлектора космического радиотелескопа // Антенны. 2011. № 4. С. 56-59.

122. Артеменко Ю. Н., Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Кучмин А. Ю., Тарасова И. Л. Проблемы создания систем адаптации космических радиотелескопов // Информационно-управляющие системы. 2010. № 3. С. 2-8.
123. Jeffrey S. Kingsley, Robert N. Martin, Victor L. Gasho. A Hexapod 12 m Antenna Design Concept for the MMA. MMA Memo 263. May 7,1999
124. Patrick M. Koch et al., The AMiBA Hexapod Telescope Mount. arXiv.org > astro-ph > arXiv:0902.2335v1, 13 Feb 2009, 10.1088/0004-637X/694/2/1670
125. Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Агапов В.А. Анализ динамики систем автоматического управления актуаторами контррефлектора космического радиотелескопа. Информационно-управляющие системы. 2011. № 6. С. 2-6.
126. Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Артеменко Ю.Н. Радиотелескопы; Ин-т проблем машиноведения Рос. акад. наук (ИПМаш РАН). — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2014. — 546 с.
127. В.В. Дубаренко, А.Ю. Кучмин, Ю.Н. Артёменко, В.Ф. Шишлаков. Радиотелескопы миллиметрового диапазона с регулируемыми поверхностями зеркал: монография.- СПб.: ГУАП, 2019. - 239 с. ISBN 978-5-8088-1378-6, DOI 10.17513/np.368
128. Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Метод повышения качества наведения большого радиотелескопа миллиметрового диапазона с адаптивной зеркальной системой / Информационно-управляющие системы - 2007. -№5 с. 14-19.
129. Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дорошенко М.С., Коновалов А.С., Кучмин А.Ю., Тарасова И.Л. Особенности выбора электроприводов зеркальной системы космических радиотелескопов. Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 1. С. 26-31.
130. Kuchmin, Andrey Yu. Group Interaction of SEMS Modules at Control of an Adaptive Surface of the Main Dish, Smart Electromechanical Systems. Group Interaction. Editors: Gorodetskiy, Andrey E., Tarasova, Irina L. (Eds.) Springer

Nature Switzerland AG, DOI https://doi.org/10.1007/978-3-319-99759-9_15, 2018.
— 183-192 pp.

131. Способ адаптации отражающих поверхностей антенны. Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Тарасова И.Л., Галушкин А.И., Агапов В.А. Патент на изобретение RU 2518398 C1, 10.06.2014. Заявка № 2012149627/07 от 20.11.2012

132. Gorodetskiy A.E., Kurbanov V.G., Tarasova I.L. The formation of the dish system of the space radio telescope antenna. Studies in Systems, Decision and Control. 2020. Т. 261. С. 103-115.

133. Городецкий А.Е., Курбанов В.Г., Тарасова И.Л. Способ формирования отражающих зеркальных поверхностей антенны космического радиотелескопа. Патент на изобретение RU 2694813 C1, 17.07.2019. Заявка № 2018135935 от 10.10.2018.

134. Архипов М.Ю., Телепнев П.П., Кузнецов Д.А. К вопросу о численном моделировании динамики конструкции космического аппарата «СПЕКТР-Р» // Вестник НПО ИМ. С.А. Лавочкина, 2014, №3 (24)б с. 96-99.

135. Бахрах Л. Д., Галимов Г. К. Зеркальные сканирующие антенны. Теория и методы расчета. М., Наука 1981 г., 300 с.

136. Виноградов И. С. Радиационное охлаждение зеркала крупногабаритного космического телескопа. В кн. Радиоастрономическая техника и методы. М.: ФИАН, 2000 (Труды ФИАН; Т.228).

137. Воскресенский Д.И., Канащенков А.И. Активные фазированные антенные решетки. М.: Радиотехника, 2004. 488 с: ил.

138. М. А. Гурбанязов. Современные проблемы построения зеркальных антенн / М. А. Гурбанязов, А. Н. Козлов, В. Б. Тарасов ; отв. ред. Л. Д. Бахрах ; АН Туркменистана, Науч.-производ. об-ние "Солнце", Ин-т математики и механики. - Ашхабад : Ылым, 1992. - 416 с.

139. П.Д. Калачев. Исследование упругих свойств полноповоротной параболической антенны радиотелескопа Текст.: / П.Д. Калачев, В.Е. Дьячков

- // Радиотелескопы. Субмиллиметровые и рентгеновские телескопы. Труды ФИАН. Т. 77. М.: Наука, 1974.
140. Борцов Ю. А. Автоматизированный электропривод с упругими связями / Ю.А. Борцов, Г.Г. Соколовский. СПб.: Энергоатомиздат, 1992. -288 с.
141. Управление электроприводом радиотелескопа с использованием упрощенного наблюдателя Текст. / Г.Г. Соколовский [и др.]. // Изв. ЛЭТИ. Сб. научн. трудов. Л.: Изд-во ЛЭТИ, 1984. - Вып. 344. - С. 23-33.
142. Белянский П.В. Управление наземными антеннами и радиотелескопами / П.В. Белянский, Б.Г. Сергеев. М.: Советское радио, 1980. - 279 с.
143. Поляк В. С. Эволюция разработки прецизионных конструкций радиотелескопов для радиоастрономии, дальней и спутниковой космической связи // ПГС : журнал. — М.: ПГС, 2005. — № 5. — С. 14.
144. Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Дорошенко М.С., Кучмин А.Ю. Проблемы обработки и передачи информации в локальной вычислительной сети системы управления радиотелескопа. Информационно-управляющие системы. 2009. № 4. С. 2-8.
145. Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю. Гироскопический гид системы наведения радиотелескопа. Гироскопия и навигация. 2006. № 4 (55). С. 99.
146. Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю. Идентификация сложных механических систем как объектов управления/ Региональный вестник молодых ученых: Сборник статей молодых ученых и аспирантов. М., 2006. - №2. – с.7-9.
147. Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю. Моделирование и идентификация сложных механических систем как объектов управления / Вестник молодых ученых: Сборник статей молодых ученых и аспирантов. СПб., 2007., с. 23 – 26.
148. Полянский И.С., Архипов Н.С., Мисюрин С.Ю. О решении проблемы оптимального управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной. Автоматика и телемеханика. 2019. № 1. С. 83-100.

149. Усик А.А., Коняхин И.А. Исследование многоматричной оптико-электронной системы контроля элементов радиотелескопа рт-70 "Суффа" Оптический журнал. 2013. Т. 80. № 12. С. 70-73.
150. Артеменко Ю. Н., Коняхин И. А., Панков Э.Д., Тимофеев А.Н. Оптико-электронные системы измерения деформаций элементов конструкции радиотелескопа миллиметрового диапазона РТ-70 (Суффа) // Изв. вузов. Приборостроение. 2008. Т.51. No9. С. 5–10.
151. Igor A. Konyakhin, Alexander N. Timofeev. Optic-Electronic Systems for Control the Angle and Line Positions of the Elements Unblocked Aperture Radio-Telescope //Key Engineering Materials. 2010. Vol. 437. P. 203–207 / Switzerland. Trans Tech Publications.
152. Konyakhin, I., Timofeev, A., Usik, A., Zhukov, D. The experimental research of the systems for measuring the angle rotations and line shifts of the large aperture radio-telescope components // Proc. of SPIE V. 7544. Sixth International Symposium on Precision Engineering Measurements and Instrumentation /Ed. by Jiubin Tan, Xianfang Wen / Bellingham. 2010. P. 75443
153. Идентификация системы наведения радиотелескопа РТ-70 как объекта управления. / Гимельман В.Г., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю. - Текст докл. V Международной конференции по теории и технике антенн, Киев, Национальный Технический Университет Украины "Киевский Политехнический Институт, 2005 г.
154. Акимов В. П., Глыбовский С. Б., Щесняк С. С. Коррекция фазовых ошибок параболического зеркала с помощью вторичного сетчатого рефлектора // Информатика, телекоммуникации и управление. 2012. №4 (152). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/korreksiya-fazovyh-oshibok-parabolicheskogo-zerkala-s-pomoschyu-vtorichnogo-setchatogo-reflektora> (дата обращения: 19.10.2021).
155. Методы расчета средств защиты радиоэлектронных систем от электромагнитного излучения. Андрющенко М.С., Гусаковский В.Е.,

- Штагер Е.А., Штагер Д.Е., Щесняк С.С. Под редакцией С.С. Щесняка. Санкт-Петербург, ООО "Издательство ВВМ", 2016. – 310 с.
156. Постников Ю.В., Туркин Д.Н. Пути достижения требуемого качества следящего электропривода при дискретизации входного сигнала. Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2019. № 5. С. 88-93.
157. Постников Ю.В., Туркин Д.Н. Сравнительный анализ динамических свойств редукторного высокоточного электропривода наведения с безредукторным аналогом. Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2017. № 6. С. 44-47.
158. Постников Ю.В., Туркин Д.Н. Разработка структуры и выбор параметров наблюдающего устройства для оценки момента нагрузки, действующего на радиотелескоп. Электротехника. 2009. № 8. С. 11-16.
159. Постников Ю.В., Туркин Д.Н. Повышение точности наведения радиотелескопа при действии ветрового момента. Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2009. № 1 (74). С. 43-46.
160. Eisenträger, P., Süß, M., Verification of the Active Deformation Compensation System of the LMT/GTM by End-to-end Simulation, SPIE's International Symposium on Astronomical Telescopes and Instrumentation, Munich, Germany, 2000.
161. Hans J. Kaercher¹, Karl Wandner, Martin Suess, Pointing Control through Flexible Body Compensation / MAN Technologie AG, 17-24 August, 2002, Maastricht.
162. Система автоматического наведения радиотелескопа / Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Артеменко Ю. Н., Парщиков А. А. Гиммельман В. Г., Кучинский Г. С., Мозгов А. П., Кучмин А. Ю., патент на изобретение (заявка №2006125897) ФИПС от 03 июля 2007.
163. Кучмин А.Ю. Управление зеркальной системой радиотелескопа миллиметрового диапазона. Диссертация на соискание степени кандидата технических наук по специальности 05.11.16, 2007, 180 с.

164. Исследование эффективности наведения радиотелескопа РТ-70 на космические источники радиоизлучения в миллиметровом диапазоне после модернизации конструкции зеркальной системы и системы управления / Шифр “Суффа-4”, этап №1, итоговый отчет.
165. Кучмин А.Ю. Прием и визуализация сигналов от удаленных космических объектов, излучающих в миллиметровом диапазоне радиоволн / Отчет о выполнении программы исследований, «Конкурс грантов для молодых ученых 2004», 9-я Санкт-Петербургская ассамблея молодых ученых и специалистов – СПб. 2004., с.56.
166. Попов М.П., Щесняк С.С., Расчет оптимальных размеров и параметров зеркальной системы и предварительная оценка допустимых погрешностей изготовления её элементов / Промежуточный отчет по НИР «Суффа» № 1/2005 от 01.03.05.
167. Проблемы визуализации космических источников радиоизлучения миллиметрового диапазона. / Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю. - Текст докл. V Международной конференции по теории и технике антенн, Киев, Национальный Технический Университет Украины "Киевский Политехнический Институт, 2005 г.
168. Gromov V., Kardashev N., Kuzmin L., "Submillimeter and millimeter wave sky mapping in space project Submillimetron". The 2K1BC Workshop "Experimental Cosmology at mm-waves" Breuil-Cervinia, Italy, July 9-13, 2001. Ed. M. De Petris, M. Gervasi.
169. "Superconducting TES Bolometer Arrays for Submillimeter Astronomy" / Bendford D., Moseley S., Chervenak J., Martinis J. et al. - Proc. of 11th Symposium on Space Terahertz Technology, pp 196-205, May 2000.
170. Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю. Адаптивная платформа облучателя. / Завалишинские чтения'07, СПб, ГУАП, 2007 г., с. 87-92.
171. Дубаренко В.В., Коновалов А.С., Кучмин А.Ю. Математические модели механических систем как объектов управления. Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению 220200 "Автоматизация и

управление"; Федеральное агентство по образованию, Гос. образовательное учреждение высш. проф. образования Санкт-Петербургский гос. ун-т аэрокосмического приборостроения. Санкт-Петербург, 2007.

172. Джунь В.И., Щесняк С.С. Адаптивные антенные системы с подавлением помех по главному лепестку диаграммы направленности // Зарубежная радиоэлектроника. – 1988. – № 4. – С. 3-15.

173. Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Артеменко Ю.Н. Управление адаптивной поверхностью большого наземного полноповоротного радиотелескопа. В сборнике: XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. 2019. С. 201-203.

174. Воробьев А. М., Дубаренко В. В., Перепеч В. М. Синтез системы управления антенной установкой с цифровым регулятором. //Численные методы анализа и их приложения. Иркутск: Изд-во Сиб. энергетич. ин-та СО АН СССР, 1988.

175. Воробьев А.М., Дубаренко В.В., Перепеч В.М. Проблемы построения систем управления антенными установками //Численные методы анализа и их приложения. Иркутск: Изд-во Сиб. энергетич. ин-та СО АН СССР, 1986.

176. Дубаренко В. В. Принципы логического управления динамическими объектами. Информационно-управляющие системы. 2003. № 5. С. 2–11.

177. Дубаренко В.В., Артеменко Ю.Н., Кучмин А.Ю. Эффективность гироскопических устройств в системе управления радиотелескопом. В сборнике: Материалы XXX конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова Сборник докладов конференции. 2016. С. 169-178.

178. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. - СПб.: Наука, 1999.

179. Dubarenko V.V. Increasing guidance accuracy problems for large gabarits antennas. //The Third International Conference on Problems of Physical Metrology FIZMET'98. Abstracts. Spb.: 1998.
180. Smirnov I., et al. Dynamic Strength of Limestone in Terms of the Incubation Fracture Time Criterion/ I. Smirnov, Y. Petrov, G. Volkov, A. Abramian, S. Verichev, A. Bragov, A. Konstantinov, D. Lamzin: 20th European Conf. on Fracture//Procedia Materials Science. 2014. N 3. P. 778–783.
181. Брагов, А.М. Использование метода Кольского для исследования процессов высокоскоростного деформирования материалов различной физической природы: монография / А.М. Брагов, А.К. Ломунов. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2017. 148 с.
182. Hopkinson B. A Method of Measuring the Pressure Produced in the Detonation of High Explosives or by the Impact of Bullets // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 1914. N 213. P. 437–456.
183. Kolsky H. An Investigation of Mechanical Properties of Materials at Very High Rates of Loading // Proc. of the Physics Society of London. 1949. N 62. P. 676–700.
184. Petrov Y. V. Incubation Time Criterion and the Pulsed Strength of Continua: Fracture, Cavitation, and Electrical Breakdown // Doklady Physics. 2004. N 49. P. 246–249.
185. Николаева Е. А. Особенности динамической калибровки стержня Гопкинсона — Кольского // Математическое моделирование систем и процессов. 2003. № 11. С. 87–93.