

На правах рукописи



Кучмин Андрей Юрьевич

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ
ОБЪЕКТАМИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Специальность: 05.11.16 – Информационно-измерительные и
управляющие системы (в машиностроении)
(технические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора технических наук

Санкт-Петербург – 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки
Институте проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН)

Официальные оппоненты: **Яковис Леонид Моисеевич**,
доктор технических наук, профессор Высшей школы
механики и процессов управления, ФГАОУ ВО «Санкт-
Петербургский политехнический университет Петра
Великого»

Карпенко Анатолий Павлович,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий
кафедрой «Системы автоматизированного проектирования»,
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана (национальный
исследовательский университет)»

Мисюрин Сергей Юрьевич,
доктор физико-математических наук, главный научный
сотрудник Лаборатории механики и систем управления
приводов, ФГБУН Институт машиноведения им
А.А. Благонравова Российской академии наук (ИМАШ РАН)

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный
исследовательский университет ИТМО»

Защита состоится 26 мая 2022 года в 14.00 в актовом зале на заседании диссертационного
совета Д002.075.02 при ИПМаш РАН по адресу: 199178, Санкт-Петербург, В.О., Большой
пр., д.61.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Институт проблем машиноведения Российской академии
наук и на сайте института по адресу <http://www.ipme.ru>

Автореферат разослан «____» _____ 2022 г.

Врио ученого секретаря
диссертационного совета Д002.075.02
доктор технических наук, профессор



Фуртат Игорь Борисович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

В современных технологиях анализа и синтеза высокоточных информационно-измерительных и управляющих систем (ИИУС) все шире используют методы идентификации и вычислительные методы оптимизации. Особенностью современных динамических робототехнических систем, например, интеллектуальных электромеханических систем (ИЭМС), является использование в контурах подобных систем «нежёстких» моделей, у которых структура, параметры и вектор состояния не задаются на стадии проектирования, а находятся в реальном масштабе времени при их функционировании.

Вопросы идентификации динамических систем рассматривались в работах Р. Изермана, В.А. Бесекерского, Д. Гропа, Л. Льюнга, Л. Заде, Р. Калмана, Д. Табака, Б. Куо, М. Мюнхгофа, Г. Мзика, И. Буталиса, Д.Зэодоридиса, Н.Н. Карабутова, Т. Коттаса, М.А. Кристодоулоу, О. А. Степанова, А.А. Бобцова и др.

При общей постановке задачи анализа и синтеза ИЭМС требуется управление описывать как многокритериальную задачу оптимального управления при большом количестве переменных и ограничений различного вида. Это не позволяет использовать такой подход для систем управления (СУ) динамическими объектами (ДО) типа ИЭМС из-за ограниченного быстродействия микропроцессорных средств управления и отсутствия быстрых методов решения, использующих не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности, которые позволили бы оценить время нахождения решения.

Идеи решения многомерных оптимизационных задач изложены в работах У.И. Зангвилла, Э. Голдрейта, Н.Н. Моисеева, Э. Хансена, Дж. У. Уолстера, Т. Моцкина, Д.Б. Юдина, Л.С. Понтрягина, Л.Г. Хачияна, В.А. Якубовича, А.П. Карпенко и др.

Адаптация уже существующих оптимизационных процедур для синтеза СУ ДО является одним из основных классических подходов, альтернативный подход – это поиск субоптимальных решений и сведение исходной задачи к поиску целевого множества, описываемого системами неравенств. Альтернативный подход развивался В.А. Якубовичем и его последователями и получил название метода рекуррентных целевых неравенств. В этой связи актуальность исследований в направлении развития методов как классического, так и альтернативного подходов синтеза высокоточных СУ ДО несомненна.

Чрезвычайный интерес в последнее время проявляется к исследованиям в области ИЭМС, которые состоят из базовых модулей с параллельной кинематической схемой и интегрированными ИИУС. Самоорганизация ИЭМС эффективна при реализации сложных распределённых систем управления. Перспективно использовать такие модули в области робототехники и управлении элементами зеркальных систем (ЗС) больших полноповоротных радиотелескопов (РТ). Актуальной проблемой является построение моделей динамики ИЭМС и разработка методов синтеза их СУ. Изучению структуры, кинематики и динамики устройств параллельной структуры посвящены работы В.А. Глазунова, В.М. Герасуна, Ф.М. Диментберга, А.Н. Евграфова, С.Л. Зенкевича, В.Л. Жавнера, А.Ш. Колисора, М.З. Коловского, А.И. Корендясева, А.Ф. Крайнева, В.И. Пындака, Л.А. Рыбака, Б.Л. Саламандры, А.В. Сергеева, Л.И. Тывеса, С.В. Хейло, С.Ю. Мисюрина, Е.И. Юревича, А.С. Ющенко, А.Е. Городецкого, В.В. Дубаренко и др.

Кроме того, в настоящее время ИИУС стали широко использоваться в испытательных и исследовательских стендах. Однако вопрос влияния сторонних факторов на анализ экспериментальных данных, например, по динамической прочности материалов является мало изученным. Основные подходы к выбору структуры модели эксперимента по-прежнему основываются на интуиции исследователя, что объясняется сложностью и разнообразием условий экспериментов, плохой изученностью процессов, протекающих в образце материала. Изучению данных вопросов посвящены труды Р. Дэвиса, А. Надаи,

Дж. Даффи, Дж. Тейлора, Г. Кольского, Дж. Кэмпбелла, У. Линдхольма, Дж. Белла, А. Кобаяси Н.Ф. Морозова, Ю.В. Петрова, Д.А. Индейцева, А.М. Брагова, Ю.И. Мещерякова, А.К. Абрамяна, Ю.В. Судьенкова, С.А. Новикова, Г.В. Степанова, А.П. Большакова и др. При этом основной проблемой является сохранение адекватности физики процессов в материале при удалении влияния сторонних факторов, что часто не соблюдается и приводит к появлению эффектов, обусловленных «артефактами».

Всё это отражает актуальность рассмотренных в диссертации задач.

Объект исследования

Высокоточные информационно-измерительные и управляющие системы и современные технологии их идентификации и синтеза.

Цель работы

Разработка методов идентификации и синтеза систем управления динамическими объектами, функционирующими в условиях ограничений, с использованием интеллектуальных электромеханических систем.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие **задачи**.

1. Провести анализ существующих типовых задач в областях синтеза, моделирования и идентификации сложных СУ динамическими объектами с ограничениями с целью разработки подхода в их описании как задач математического программирования (МП).
2. Разработать новые методы и быстрые алгоритмы решения полученных задач МП с помощью сведения исходной задачи многомерной условной оптимизации больших размерностей для случая, когда число ограничений многократно превосходит число варьируемых параметров, к эквивалентному при заданной точности конечному множеству систем неравенств, описывающих целевое множество.
3. Разработать методы моделирования, управления и идентификации ИЭМС.
4. Разработать новые методы синтеза сложных распределённых СУ на основе модели базового блока ИЭМС как динамического объекта с параллельной кинематической схемой на примере управления элементами зеркальных систем больших полноповоротных радиотелескопов.
5. Разработать информационно-измерительную систему (ИИС) анализа экспериментальных данных по динамической прочности материалов с учетом влияния измерительной системы и сохранения адекватности физики процессов в материале при удалении влияния сторонних факторов.

Методы исследования

В работе использовались методы теории оптимального управления, автоматического управления, методы математического моделирования и идентификации сложных физико-технических систем, а также методы прикладной и теоретической механики. Все расчётные исследования выполнены в системе MATLAB и её приложении Simulink, а также с использованием пакета разработанных программ на языке C++. В работе анализируются данные экспериментов по идентификации параметров гексапода фирмы PI H-810 и данные испытаний на ударную прочность на стенде Гопкинсона и стенде с газовой пушкой.

Научная новизна

Выполненная работа является комплексным исследованием по развитию современных технологий синтеза и анализа высокоточных систем управления динамическими объектами с ограничениями.

1. Предложены модификации статистических идентификаторов на основе метода наименьших квадратов для систем управления квазистационарными и нестационарными динамическими объектами с применением матричного оператора сдвига во временной области, что позволяет в математической, а не в алгоритмической форме описывать разностные фильтры с различной скважностью отсчетов, а также проводить выбор параметров серии отсчетов для обеспечения оптимальной информационной насыщенности данных. Для случая низкого отношения сигнал/шум дано описание процесса идентификации как решения системы неравенств на основе множественно-функционального подхода, позволяющего при использовании интервальной невязки между выходом идентификатора и реальным динамическим объектом проводить редукцию модели.

2. Предложен метод идентификации с использованием множественно-функционального подхода для нелинейной нестационарной системы управления, основанный на анализе типов асимптотических решений при учете физических закономерностей и соответствующих ограничений на параметры и фазовые координаты, при сохранении физической адекватности модели протекающим в объекте процессам и реализуемости законов управления.

3. Впервые показано, что для динамических объектов синтез и идентификация СУ, сформулированные как задачи математического программирования, могут быть сведены к эквивалентному при заданной точности множеству задач оптимизации при линейных ограничениях путём аппроксимации произвольных ограничений кусочно-полиномиальными функциями или рациональными дробями. Показано, что данный подход эффективен при расчёте оптимальных траекторий движения базовых модулей ИЭМС, так как он сводится к интервальным задачам от одной переменной, а именно времени переходного процесса. Подобные алгоритмы позволяют с применением простых минимаксных процедур найти решение задачи.

4. Разработаны новые методы синтеза и идентификации сложных распределённых СУ на основе модели базового блока ИЭМС как динамического объекта с параллельной кинематической схемой для управления элементами зеркальных систем больших полноповоротных радиотелескопов.

5. Разработаны методы анализа экспериментальных данных по динамической прочности материалов с учетом влияния информационно-измерительной системы и сохранении адекватности физики процессов в материале при удалении влияния сторонних факторов.

Практическая значимость

1. Проведенные исследования стали основой для создания системы управления большим РТ миллиметрового диапазона.
2. Проведенные исследования стали основой для создания универсального контроллера базового модуля ИЭМС.
3. В ходе работы был разработан пакет программ для фильтрации и анализа экспериментальных данных по динамической прочности материалов для различных типов стендов в том числе установки с разрезным стержнем Гопкинсона-Кольского и стенда с газовой пушкой.

Положения, выносимые на защиту

1. Метод синтеза статистических идентификаторов на основе метода наименьших квадратов для СУ квазистационарными и нестационарными динамическими объектами с применением матричного оператора сдвига во временной области, что позволяет в аналитической, а не в алгоритмической форме описывать разностные фильтры с различной скважностью отсчетов, а также проводить выбор параметров серии отсчетов для обеспечения оптимальной информационной насыщенности данных. Отличительной

особенностью данного метода является то, что для случая низкого отношения сигнал/шум синтез идентификатора выполняется как решение системы неравенств на основе множественно-функционального подхода, позволяющего при использовании интервальной невязки между выходом идентификатора и реальным динамическим объектом проводить редукцию модели.

2. Метод идентификации с использованием множественно-функционального подхода для нелинейной нестационарной системы, основанный на анализе типов асимптотических решений при учете физических закономерностей и соответствующих ограничений на параметры и фазовые координаты при сохранении физической адекватности модели протекающим в объекте процессам и реализуемости законов управления.

3. Метод сведения задач синтеза и идентификации СУ динамическими объектами, сформулированных как задачи математического программирования, к эквивалентному при заданной точности множеству задач оптимизации при линейных ограничениях путём аппроксимации произвольных ограничений кусочно-полиномиальными функциями или рациональными дробями. Показано, что данный метод эффективен при расчёте оптимальных траекторий движения базовых модулей ИЭМС, так как он сводится к интервальным задачам от одной переменной, а именно времени переходного процесса.

4. Методы синтеза и идентификации сложных распределённых СУ, на основе модели базового блока ИЭМС как динамического объекта с параллельной кинематической схемой для управления элементами зеркальных систем больших полноповоротных радиотелескопов.

5. Методы анализа экспериментальных данных по динамической прочности материалов, полученных на установке с разрезным стержнем Гопкинсона-Кольского и стенде на основе газовой пушки, с учетом влияния ИИС и сохранении адекватности физики процессов в материале при удалении влияния сторонних факторов.

Степень достоверности и апробации результатов определяется строгостью используемого в работе математического аппарата, обоснованным применением современного пакета для численного анализа MATLAB\Simulink и сравнительным анализом результатов, полученных в диссертационной работе, с имеющимися экспериментальными данными.

Публикации

По теме диссертации опубликовано:

- 14 статей в журналах из списка ВАК РФ
- 10 статей в Scopus
- главы в 2 совместных монографиях
- результаты апробированы на 8 международных и 8 Российских конференциях
- 4 патента РФ

Личный вклад автора

Работы [1, 7-11, 13, 14] написаны без соавторов; в работах [4, 15, 19] автору принадлежит постановка задачи и реализация метода решения, концептуальная постановка и обсуждение результатов проходило вместе с соавторами; в работах [2, 3, 5, 6, 12, 24] автору принадлежит постановка задачи идентификации и метод её решения; в работе [29] автору принадлежит 70% вклада в первой части монографии, в остальной части вклад делится между членами авторского коллектива в равной пропорции; в работе [30] разделы 2.3.3., 3 и 4.5 написаны лично автором, авторство по другим разделам делится между членами авторского коллектива в равной пропорции; в остальных публикациях вклад делится между членами авторского коллектива в равной пропорции.

Структура и объём работы.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 185 источников. Объём диссертации составляет 323 страницы, она содержит 40 рисунков и 22 таблицы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении

содержится обоснование актуальности темы диссертации, описываются объект, предмет и методы исследования. Отмечена научная новизна и практическая значимость результатов, приведены сведения об апробации и внедрении результатов.

В первой главе

Рассмотрены общие проблемы синтеза и идентификации СУ ДО. Дается критический анализ различных методов идентификации, и определяются подходы для увеличения их эффективности для СУ ДО с ограничениями.

Определены следующие основные факторы, препятствующие эффективному применению классических подходов, такие как нестационарность и нелинейность ДО, низкая информационная насыщенность измерительной информации, ограниченные выборки измерительной информации, наличие нестационарных помех, запаздывание в каналах передачи данных и устройствах цифровой обработки. Важным является сохранение физической адекватности модели протекающим в ДО процессам и реализуемости законов управления.

Все существующие подходы к идентификации можно разбить на три группы: множественно-функциональные, статистические и интеллектуальные. Такое деление обусловлено различиями в учёте возмущений, действующих на систему. Широко используемым является статистический подход, основанный на оценивании параметров и состояния ДО. «Нежесткость» учитывается случайным характером неопределённых факторов и помех, модели которых задаются в виде законов распределения, что (как следствие) приводит к необходимости использовать большие объёмы данных с высокой информационной насыщенностью. Большинство методов в своей основе опирается на различные модификации метода наименьших квадратов (МНК) и требует использования мощных вычислительных средств, разработки стабильных методов оценки вероятностных характеристик возмущений. Такие методы имеют малую эффективность для случая ограниченного объёма измерительной информации, нестационарных ДО и имеющих ограничения на диапазоны изменений оцениваемых параметров. В работе предлагаются модификации МНК-идентификаторов для преодоления подобных проблем в случае квазистационарных и нестационарных ДО с учётом различной скважности отсчётов. В качестве модели квазистационарного ДО используется стационарный разностный фильтр в предположении, что параметры ДО не меняются на ограниченной выборке. Уравнение стационарного разностного фильтра имеет вид:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} a_{i_1} x[t_k - \tau_{i_1}] = - \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_{3,i_2}} b_{i_2,i_3} u_{i_2}[t_k - \tau_{i_2,i_3}], \quad (1)$$

где a_{i_1}, b_{i_2,i_3} - коэффициенты фильтра, i_1, i_2, i_3 - соответствующие индексы, m_1, m_2, m_{3,i_2} - максимальные значения индексов, t_k - текущий момент времени, $\tau_{i_1}, \tau_{i_2,i_3}$ - временные сдвиги, x - выходная координата, u_{i_2} - управляющие воздействия.

На практике в цифровых системах с различной скважностью отсчётов для обработки измерительной информации используются стеки с линейной интерполяцией данных. Описание работы подобного устройства носит алгоритмический характер, который неудобен для синтеза МНК-идентификаторов. Предлагается математическое

описание стека с линейной интерполяцией данных в виде матричного оператора сдвига во временной области:

$$\mathbf{A}^\tau = \begin{cases} \mathbf{A}^{\text{fix}\left(\frac{\tau\omega_0}{2\pi}\right)} \left[1 - \frac{\tau\omega_0}{2\pi} + \text{fix}\left(\frac{\tau\omega_0}{2\pi}\right) \right] + \left(\frac{\tau\omega_0}{2\pi} - \text{fix}\left(\frac{\tau\omega_0}{2\pi}\right) \right) \mathbf{A}^{\text{fix}\left(\frac{\tau\omega_0}{2\pi}\right)+1}, & \tau \geq 0 \\ (\mathbf{A}^T)^{\text{fix}\left(-\frac{\tau\omega_0}{2\pi}\right)} \left[1 + \frac{\tau\omega_0}{2\pi} + \text{fix}\left(\frac{-\tau\omega_0}{2\pi}\right) \right] + \left(\frac{\tau\omega_0}{2\pi} + \text{fix}\left(\frac{-\tau\omega_0}{2\pi}\right) \right) (\mathbf{A}^T)^{\text{fix}\left(-\frac{\tau\omega_0}{2\pi}\right)+1}, & \tau < 0 \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

где τ – сдвиг во временной области, ω_0 – частота дискретизации по времени, $\text{fix}(\dots)$ – функция округления с отбрасыванием дробной части, n – число отсчётов в окне выборки.

После введения матричного оператора сдвига во временной области можно использовать компактную аналитическую запись (1), удобную для формирования целевой функции МНК-идентификатора $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p}$:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \mathbf{A}^{-\tau_{i_1}} \mathbf{x} a_{i_1} + \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_{3,i_2}} \mathbf{A}^{-\tau_{i_2,i_3}} \mathbf{u}_{i_2} b_{i_2,i_3} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{F} \mathbf{p} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \left[a_0, a_1, \dots, a_{m_1}, b_{1,0}, b_{1,1}, \dots, b_{m_2,m_{3,m_2}} \right]^T = \mathbf{p},$$

$$\left[\mathbf{A}^{-\tau_0} \mathbf{x}, \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x}, \dots, \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x}, \mathbf{A}^{-\tau_{1,0}} \mathbf{u}_1, \mathbf{A}^{-\tau_{1,1}} \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{A}^{-\tau_{m_2,m_{3,m_2}}} \mathbf{u}_{m_2} \right] = \mathbf{F}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{F}^T \mathbf{F},$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{u}_{i_2}, \boldsymbol{\varepsilon}$ – соответствующие вектора отсчётов выходной координаты, управляющих воздействий и невязок, $\mathbf{p}$ – вектор оцениваемых параметров. На небольших выборках измерительных данных на качество идентификации существенно оказывают влияние значения начальных условий ДО. Для учёта начальных условий предлагается введение матрицы $\mathbf{S}$, составленной из нулей и единиц, тогда матрица $\mathbf{H}$ будет иметь вид: $\mathbf{H} = \mathbf{F}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{F}$.

В ДО имеются ограничения, обусловленные режимами его функционирования и физическими законами, которые должны быть учтены при синтезе МНК-идентификатора. В общем случае в линейной постановке они имеют вид: $\mathbf{G} \mathbf{p} \geq \mathbf{R}$, где $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$ – матрицы постоянных коэффициентов. Тогда задача идентификации параметров модели ДО в виде стационарного разностного фильтра может быть сформулирована в виде задачи МП: $J = \min_{\mathbf{p}} \{ \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} \}$ при ограничениях $\mathbf{G} \mathbf{p} \geq \mathbf{R}$. При выборе значения первого коэффициента в $\mathbf{p}$ равным 1 с помощью замены можно перейти к известной задаче МП: $J = \min_{\mathbf{p}^*} \{ 0.5 \mathbf{p}^{*T} \mathbf{H}^* \mathbf{p}^* + \Phi \mathbf{p}^* + c \}$ при ограничениях $\mathbf{G}^* \mathbf{p}^* \geq \mathbf{R}^*$. Если матрица $\mathbf{H}^*$ является положительно определённой, то эта задача квадратичного программирования может быть решена стандартными методами, например, методом Вульфа.

В случае низкого соотношения сигнал/шум и низкой информационной насыщенности данных матрица $\mathbf{H}^*$ становится не положительно определённой, и целесообразно перейти к решению задачи методом неравенств. Тогда система линейных неравенств с учётом интервальной оценки β рассогласования $\mathbf{e}$ между измеренными значениями выходной координаты ДО и полученными с модели будет иметь вид:

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\beta_1) \mathbf{p} \geq 0 \\ \mathbf{F}(\beta_2) \mathbf{p} \leq 0 \end{cases}, \text{ при } \sum_{i_1=0}^{m_1} a_{i_1} \geq 0, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{F}(\beta_1) \mathbf{p} \leq 0 \\ \mathbf{F}(\beta_2) \mathbf{p} \geq 0 \end{cases}, \text{ при } \sum_{i_1=0}^{m_1} a_{i_1} \leq 0,$$

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \left[\mathbf{A}^{-\tau_{i_1}} \mathbf{x} + \mathbf{I} \mathbf{e} \right] a_{i_1} + \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_{3,i_2}} \mathbf{A}^{-\tau_{i_2,i_3}} \mathbf{u}_{i_2} b_{i_2,i_3} = 0, e_i \in \beta = [\beta_1 \quad \beta_2], \quad (2)$$

$$\mathbf{F}(\beta) = \left[\mathbf{A}^{-\tau_0} \mathbf{x} + \xi \beta, \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x} + \xi \beta, \dots, \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x} + \xi \beta, \mathbf{A}^{-\tau_{1,0}} \mathbf{u}_1, \mathbf{A}^{-\tau_{1,1}} \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{A}^{-\tau_{m_2,m_{3,m_2}}} \mathbf{u}_{m_2} \right],$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, ξ – вектор из единиц. При учёте ограничений $\mathbf{G} \mathbf{p} \geq \mathbf{R}$. Решение (2) может быть найдено с помощью метода эллипсоидов.

Предлагается МНК-идентификатор для нестационарных ДО, где в качестве модели используется нестационарный разностный фильтр. Аналитическое описание (1) может быть расширено на случай нестационарных фильтров:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} a_{i_1} [t_k] x[t_k - \tau_{i_1}] = - \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_{3,i_2}} b_{i_2,i_3} [t_k] u_{i_2} [t_k - \tau_{i_2,i_3}], \quad (3)$$

где нестационарные коэффициенты в (3) определяются как выходы динамических систем:

$$\sum_{j_1=0}^{m_4} \mu_{i_1,j_1} a_{i_1} [t_k - \tau_{j_1}] = 0, \quad \sum_{j_2=0}^{m_5} \mu_{i_2,i_3,j_2} b_{i_2,i_3} [t_k - \tau_{j_2}] = 0, \quad (4)$$

где j_1, j_2 - соответствующие индексы, а m_4, m_5 - их максимальные значения, $\mu_{i_1,j_1}, \mu_{i_2,i_3,j_2}$ - коэффициенты соответствующих фильтров, τ_{j_1}, τ_{j_2} - временные сдвиги. Тогда для МНК-идентификатора будем иметь выражение для целевой функции:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{p})^T \mathbf{H}_\Phi \Phi(\mathbf{p}), \quad (5)$$

где $\mathbf{H}_\Phi = \mathbf{F}_\Phi^T \mathbf{F}_\Phi$, $\mathbf{F}_\Phi = \text{diag} \left[\mathbf{A}^{-\tau_0} \mathbf{x}; \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x}; \dots; \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x}; \mathbf{A}^{-\tau_{1,0}} \mathbf{u}_1; \mathbf{A}^{-\tau_{1,1}} \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{A}^{-\tau_{m_2,m_3,m_2}} \mathbf{u}_{m_2} \right]$, а

$\Phi = \left[\Phi_0(\mu_0, \mathbf{a}_0); \dots; \Phi_{m_1}(\mu_{m_1}, \mathbf{a}_{m_1}); \Phi_{1,0}(\mu_{1,0}, \mathbf{b}_{1,0}); \dots, \Phi_{m_2,m_3,m_2}(\mu_{m_2,m_3,m_2}, \mathbf{b}_{m_2,m_3,m_2}) \right]$, компоненты которого являются полиномиальными функциями от элементов из $\mathbf{p}$, которые и определяются согласно:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \varphi_{i_1}(\mu_{i_1}, \mathbf{a}_{i_1}, t_k) x[t_k - \tau_{i_1}] + \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_{3,i_2}} \varphi_{i_2,i_3}(\mu_{i_2,i_3}, \mathbf{b}_{i_2,i_3}, t_k) u_{i_2} [t_k - \tau_{i_2,i_3}] = \varepsilon[t_k] \quad \text{и являются}$$

выходами моделей (4), а $\varepsilon[t_k]$ - текущая невязка, μ_{i_1}, μ_{i_2,i_3} - оцениваемые параметры фильтра, $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2,i_3}$ - начальные значения оцениваемых параметров в (4). Параметры $\mu_{i_1}, \mu_{i_2,i_3}, \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2,i_3}$ формируют вектор $\mathbf{p}$.

Тогда задача идентификации параметров модели ДО в виде нестационарного разностного фильтра может быть сформулирована в виде задачи МП: $J = \min_{\mathbf{p}} \left\{ \Phi(\mathbf{p})^T \mathbf{H}_\Phi \Phi(\mathbf{p}) \right\}$ при ограничениях $\mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{p} \geq \mathbf{R}$. Выбор метода решения зависит от вида целевой функции и ограничений. В работе использовались различные методы, например, метод последовательного квадратичного программирования, комплексный метод Бокса, генетический алгоритм и др.

Одним из использованных методов решения в диссертации был метод неравенств. Посредством введения интервальной оценки β рассогласования $\mathbf{e}$ между измеренными значениями выходной координаты ДО и полученными с модели, эта задача сводится к системе полиномиальных неравенств:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_\Phi(\beta_1)\Phi(\mathbf{p}) \leq 0 \\ \mathbf{F}_\Phi(\beta_2)\Phi(\mathbf{p}) \geq 0 \end{cases}, \text{ при } \sum_{i_1=0}^{m_1} \varphi_{i_1}(\mu_{i_1}, \mathbf{a}_{i_1}, t_k) \leq 0, \text{ или } \begin{cases} \mathbf{F}_\Phi(\beta_1)\Phi(\mathbf{p}) \geq 0 \\ \mathbf{F}_\Phi(\beta_2)\Phi(\mathbf{p}) \leq 0 \end{cases}, \text{ при } \sum_{i_1=0}^{m_1} \varphi_{i_1}(\mu_{i_1}, \mathbf{a}_{i_1}, t_k) \geq 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_\Phi(\beta) = \text{diag} \left[\mathbf{A}^{-\tau_0} \mathbf{x} + \xi \beta; \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x} + \xi \beta; \dots; \mathbf{A}^{-\tau_1} \mathbf{x} + \xi \beta; \mathbf{A}^{-\tau_{1,0}} \mathbf{u}_1; \mathbf{A}^{-\tau_{1,1}} \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{A}^{-\tau_{m_2,m_3,m_2}} \mathbf{u}_{m_2} \right].$$

Одним из практических подходов к упрощению задач (5) и (6) является использование масштабирования модельного времени (т.е. введение частоты квантования по времени как функции переменных масштабных коэффициентов). При данном подходе предполагается, что модель объекта описывает стационарный ДО, но отсчёты берутся через разные промежутки времени. Тогда выражения (5) и (6) преобразуются к виду, где функции в векторе Φ будут зависеть от переменных временных сдвигов и параметров стационарного фильтра. Например, в случае колебательных систем масштабные

коэффициенты могут быть рассчитаны по изменению периодов колебания на интервале времени, в котором определяются отсчёты «плавающего окна».

Альтернативным подходом являются множественно-функциональные методы идентификации. Их цель сводилась к нахождению параметров модели методами вариационного исчисления и численными методами оптимизации. В большинстве случаев идея подобных методов сводится к определению неизвестного набора параметров в результате максимизации (минимизации) некоего функционала (часто являющегося квадратичной формой между откликом реальной системы и выходом модели, параметры которой настраиваются) одним из известных методов оптимизации с учетом соответствующих ограничений, которые задают диапазоны изменения параметров системы и других величин, и используются для контроля правильности модели и её адекватности натуре.

Такие множественно-функциональные методы позволяют описывать нестационарность и стохастичность ДО посредством сведения к «нежестким» моделям, на основе интервальных методов и систем неравенств, в том числе и целевых.

Введём Φ – функцию оценки качества модели. Часто в качестве Φ выбирают квадратичную форму координат или параметров, описывающую отклонения модели от измеренных данных ДО, также Φ может быть выражена в виде энергетического критерия, а для задач управления Φ может быть функцией Ляпунова. Модель нелинейного нестационарного ДО определим в общем виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}), \quad (7)$$

где $\mathbf{x}$ – вектор состояния ДО, $\mathbf{p}$ – параметры ДО, $\mathbf{u}$ – управляющие воздействия, $\mathbf{f}$ – возмущающие воздействия. Выберем $\Phi = \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{y}_0)^T \mathbf{M}(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) dt$, где $\mathbf{C}$ – матрица

измеряемых выходных величин системы, $\mathbf{M}$ – нормировочная матрица, коэффициенты которой находятся по диапазону изменения компонентов вектора измеряемых величин $\mathbf{y}_0$. Для общего случая в (7) неизвестными являются как функция $\mathbf{F}$, так и часть компонент $\mathbf{x}$ и аргументы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{f}$. Одним из стандартных подходов является аппроксимация (7) некоторой сетевой структурой, организующей численное разложение в определённый ряд, однако остаётся открытым вопрос выбора топологии такой структуры, адекватность такого описания физическим закономерностям.

В случае, если матричная функция $\mathbf{F}$ известна, задача определения неизмеряемых компонент вектора состояния $\mathbf{x}$ и неизвестных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{f}$ формулируется следующим образом:

$$J = \min_{\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{f}} \left\{ \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{y}_0)^T \mathbf{M}(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) dt \right\}, \text{ при ограничениях обусловленных уравнениями}$$

модели ДО (7) и ограничениях, описывающих физическую адекватность модели $\mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{\max}, \mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max}, \mathbf{f}_{\min} \leq \mathbf{f} \leq \mathbf{f}_{\max}, G_i(\mathbf{p}, \mathbf{f}, \mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m$, где $\mathbf{p}_{\min}$ и $\mathbf{p}_{\max}$ – минимальные и максимальные значения параметров ДО, $\mathbf{x}_{\min}$ и $\mathbf{x}_{\max}$ – минимальные и максимальные значения компонент вектора состояния ДО, $\mathbf{f}_{\min}$ и $\mathbf{f}_{\max}$ – минимальные и максимальные значения внешних воздействий, действующих на ДО, G_i – функции ограничений.

Для численного решения исходная задача может быть преобразована к задаче МП:

$$J^* = \min_{\mathbf{p}, \mathbf{x}[0], \mathbf{f}} \left\{ \sum_{k=0}^N (\mathbf{C}\mathbf{x}[k] - \mathbf{y}_0[k])^T \mathbf{M}(\mathbf{C}\mathbf{x}[k] - \mathbf{y}_0[k]) \right\}, \quad (8)$$

при ограничениях дискретной модели ДО в виде: $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F}^*(\mathbf{p}[k], \mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k], \mathbf{f}[k])$ и ограничениях, описывающих физическую адекватность модели: $\mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{\max}, \mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max}, \mathbf{f}_{\min} \leq \mathbf{f} \leq \mathbf{f}_{\max}, G_i(\mathbf{p}, \mathbf{f}, \mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m$, где k – номер отсчёта по времени соответствующей величины или параметра ДО.

Предлагается метод решения задачи МП (8) на основе введения базисных функций, которые несут информацию как о параметрах системы, так и о её начальном состоянии, и внешних воздействиях. Базисные функции представляет собой аппроксимации решения системы дифференциальных уравнений, задающей модель ДО, при учёте физических закономерностей и соответствующих ограничениях на параметры $\mathbf{p}$ и $\mathbf{f}$, а также фазовые координаты $\mathbf{x}$. Выбор типов базисных функций и определение их параметров осуществляется по экспериментальным данным. Базисные функции в общем случае

имеют вид: $\mathbf{z}_i = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, t), \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\rho}_j(\boldsymbol{\mu}_i, t)$, где $\mathbf{z}_i$ – базисные функции,

аппроксимирующие $\mathbf{x}_i$ таким образом, что $\mathbf{x}_i = \mathbf{z}_i + \boldsymbol{\varepsilon}$, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – погрешность модели, $\boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, t)$ – аппроксимирующие функции решений (чаще полиномиальные, или аппроксимирующиеся полиномами на основании теоремы Вейерштрасса), $\mathbf{v}_i$ – базисные функции, аппроксимирующие $\mathbf{f}_i$ таким образом, что $\mathbf{f}_i = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\varepsilon}$, где $\boldsymbol{\rho}_j(\boldsymbol{\mu}_i, t)$ – аппроксимирующие функции модели внешних воздействий, $\boldsymbol{\mu}_i$ – соответствующие параметры. Представление $\mathbf{x}_i = \mathbf{z}_i + \boldsymbol{\varepsilon}$ подставляется в (8) и затем решается преобразованная задача МП. Задача (8) приводит к решению оптимизационной задачи высокой размерности и сложности, что требует создания и адаптации существующих оптимизационных процедур.

Описанные выше методы были апробированы на ряде задач идентификации динамических объектов. Были решены следующие задачи:

- проведена идентификация линейного электропривода исполнительного механизма контррефлектора радиотелескопа миллиметрового диапазона;
- проведена идентификация параметров профиля скорости свободной поверхности мишени при высокоскоростном ударе для ИИС стенда с газовой пушкой;
- проведены идентификация и анализ данных модельных расчётов наноразмерных систем методами молекулярной динамики на примере течения жидкости в наноразмерном канале.

Применение изложенных методов рассмотрим на примере идентификации параметров профиля скорости свободной поверхности мишени при высокоскоростном ударе для ИИС стенда с газовой пушкой. С использованием модели, предложенной Ю.И. Мещеряковым, описывающей дополнительный механизм пластической деформации так называемый мезоскопический масштабный уровень, занимающий промежуточное положение между макроуровнем и дислокационным уровнем.

Учёт мезоскопических эффектов приводит к уравнению:

$$u_{zz} - \left[\frac{2\gamma^* \mu}{c_0} - \frac{1}{ar} \right] u_z - \frac{\gamma^* \mu M}{ac_0^2} [a-4] u u_z + \frac{2\gamma^* \mu M r}{c_0^2} u_z^2 + \frac{\gamma^* \mu}{ac_0 r} [a-2] u - \frac{\gamma^* \mu M}{a^2 c_0^2 r} [a-2] u^2 = 0, \quad (9)$$

$$a = \frac{8\mu}{3\rho(c_l^2 - c_0^2)}, \quad r = \frac{3}{4}R, \quad \gamma^* = \frac{b^2 N_{m0}}{B}, \quad M = \frac{\alpha}{N_{m0}},$$

где u_{zz} – вторая производная от профиля скорости по координате z , u_z – первая производная от профиля скорости по координате z , μ – коэффициент Ляме, c_l – продольная скорость звука, b – значение вектора Бюргерса, B – константа вязкого торможения дислокаций, N_{m0} – начальная плотность подвижных дислокаций и α – коэффициент размножения дислокаций.

Определим диапазон изменения a из решения задачи оптимизации при ограничениях:

$$a_{\min} = -\frac{8}{3\rho} \min_y \left\{ \frac{y_1}{(y_2^2 - c_l^2)} \right\}, a_{\max} = -\frac{8}{3\rho} \max_y \left\{ \frac{y_1}{(y_2^2 - c_l^2)} \right\}, Ay \leq B,$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ c_0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2,55 \cdot 10^{11} \\ 2,8 \cdot 10^{11} \\ -5,26 \cdot 10^5 \\ 5,47 \cdot 10^5 \end{bmatrix}.$$

Используя стандартные методы оптимизации, получим, что $a_{\min} = 1,99$ и $a_{\max} = 2,66$.

Определим диапазон изменения η из решения задачи оптимизации при ограничениях:

$$\eta_{\min} = \frac{1}{2b^2} \min_v \left\{ \frac{v_2 v_3}{v_4 v_1 v_5} \right\}, \eta_{\max} = \frac{1}{2b^2} \max_v \left\{ \frac{v_2 v_3}{v_4 v_1 v_5} \right\}, Av \leq B, H(v) \leq 0,$$

$$v = \begin{bmatrix} \mu \\ c_0 \\ B \\ N_0 \\ r \\ \alpha \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2,55 \cdot 10^{11} \\ 2,8 \cdot 10^{11} \\ -5,26 \cdot 10^5 \\ 5,47 \cdot 10^5 \\ -10^{-4} \\ 10^{-3} \\ -10^6 \\ 10^8 \\ -2,25 \cdot 10^{-2} \\ 2,62 \cdot 10^{-2} \\ -10^7 \\ 10^9 \end{bmatrix},$$

$$H(v) = \begin{bmatrix} \frac{8}{3\rho v_6} \frac{v_1 v_2 v_4}{(v_2^2 - c_l^2)} + 2,5 \cdot 10^4 \\ -\frac{8}{3\rho v_6} \frac{v_1 v_2 v_4}{(v_2^2 - c_l^2)} - 3,7 \cdot 10^4 \end{bmatrix}.$$

Используя стандартные методы оптимизации, получим, что $\eta_{\min} = 0,14$ и $\eta_{\max} = 58,28$.

Чтобы оценить коэффициенты уравнения (9) исходя из экспериментальных данных, воспользуемся методами параметрической идентификации. Эта задача относится к разряду оптимизационных, постановка которой в данном случае описывается следующим образом:

$$J = \min_p \left\{ \frac{1}{z_n - z_0} \sum_{z=z_0}^{z_n} (u - u^*(p))^2 \right\}, p = (B \quad \mu \quad r \quad N_0 \quad \alpha \quad c_0)^T,$$

при ограничениях:

$$B_{\min} \leq B \leq B_{\max}, \mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}, r_{\min} \leq r \leq r_{\max}, N_{0\min} \leq N_0 \leq N_{0\max},$$

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, c_{0\min} \leq c_0 \leq c_{0\max},$$

$$a = \frac{8}{3\rho(c_l^2 - c_0^2)} \mu, a \in A, k_u = \frac{N_0 \mu |a-2| b^2}{aBr c_0}, u_\infty = \frac{c_0}{\alpha} N_0 a, \eta \in N,$$

$$\eta = \frac{B}{N_0 \mu r} \frac{c_0}{2b^2}, \lambda_{u_z} = 2r \frac{|a-\eta|}{|a-2|}, \lambda_{u_z u} = a \frac{|a-4|}{|a-2|} r, \lambda_{u_z^2} = \frac{2a^2}{|a-2|} r^2,$$

где J - функционал, u^* - выход модели, u - экспериментальные данные, p - вектор настраиваемых параметров, z_0, z_n - начальные и конечные значения переменной z , A, N - множества соответствующих параметров, выбираемых согласно режимам нагружения.

Задача аппроксимации профиля и определения его параметров осложняется наличием в сигнале как полезной, так и паразитных составляющих, которые представлены аддитивными и мультипликативными шумами. Для очистки сигнала от помех использовались алгоритмы вейвлет фильтрации.

Результаты параметрической идентификации приведены в таблицах №1 и №2.

Таблица 1.

№ образца	режим	$\lambda_{u_z},$ $\times 10^{-1}$	$\lambda_{u_z u},$ $\times 10^{-2}$	$\lambda_{u_z^2},$ $\times 10^{-4}$	$k_u,$ $\times 10^4$	u_∞ см/с	a	$\Delta, \%$
Д16(265)	7	0.15	0.63	0.29	1.32	216	2.66	4.78
Д16(315)	7	0.14	0.38	0.11	2.76	270	2.66	6.98
Д16(370)	7	0.11	0.40	0.12	3.01	310	2.66	7.10

Таблица 2.

№ образца	режим	$c_l,$ $\times 10^5$ см/с	$c_0,$ $\times 10^5$ см/с	$\alpha,$ $\times 10^9$	ρ г/см ³	$b,$ $\times 10^{-8}$ См	$\mu,$ $\times 10^{11}$ дин/см ²	$B,$ $\times 10^{-4}$ пз	$r,$ $\times 10^{-3}$ см	$N_0,$ $\times 10^7$ см ⁻²
Д16(265)	7	6.35	5.47	1.00	2.70	2.86	2.80	1.00	2,25	1.48
Д16(315)	7	6.35	5.47	1.00	2.70	2.86	2.80	1.00	2,25	1.86
Д16(370)	7	6.35	5.47	1.00	2.70	2.86	2.80	1.00	2,25	2.13

После идентификации параметров модели (9) были определены нестационарные высокочастотные составляющие профиля скорости. Так для меди МЗ при скорости ударника 319 м/с данные составляющие показаны на рисунке 1:

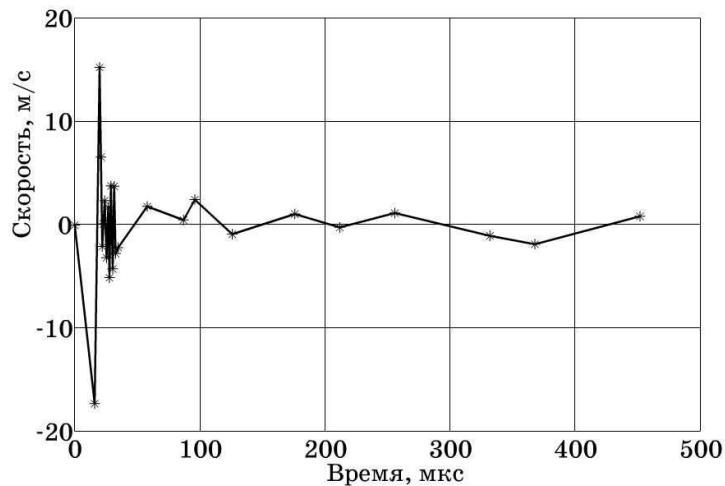


Рис.1. Высокочастотные составляющие профиля скорости (* - данные измерений, - выход идентифицирующей модели.)

Данные высокочастотные составляющие являются характеристикой поведения материала и не относятся к измерительным шумам. Подобные осцилляции предсказываются моделями механизмов пластической деформации на мезоуровне. Для определения их характеристик был применен линейный нестационарный идентификатор. Данная модель была реализована в среде MATLAB/Simulink. Поисковыми методами были определены коэффициенты разностных фильтров, а затем получены дискретные передаточные функции для каждого временного отсчёта. Путём преобразования дискретной системы в непрерывную получены передаточные функции непрерывной системы и определены собственные частоты фильтра и декременты затухания.

Во второй главе

Рассматриваются вопросы разработки нового метода оптимизации «Метод многомерных оболочек (ММО)» для решения современных задач в областях моделирования и идентификации нелинейных и нестационарных систем, а также при анализе и фильтрации данных экспериментов.

Развивая идеи, изложенные в работах У.И. Зангвилла, Э. Голдрайта, Н.Н.Моисеева, Э.Хансена, Дж. У. Уолстера, Т. Моцкина, Д.Б. Юдина, Л.С. Понтрягина, Л.Г. Хачияна, можно сделать вывод, что более эффективно использовать анализ ограничений и целевой функции в отдельности, а не переходить к безусловной оптимизации.

Отличительной особенностью этого метода является решение задачи без перехода к задаче безусловной оптимизации. Метод использует как необходимые, так и достаточные условия оптимальности для целевых функций, имеющих вид метрик.

Основой ММО является построение области допустимых решений путём анализа ограничений произвольного вида и их аппроксимации кусочно-полиномиальными ограничениями или рациональными дробями, что позволяет свести исходную задачу к набору взаимосвязанных подзадач квадратичного программирования, ограничения которых формируют выпуклые многомерные оболочки, что существенно сужает область поиска.

Предложенный ММО при нахождении оптимальных значений не использует операцию дифференцирования, что позволяет использовать его при анализе стохастических и интервальных данных.

В математической постановке задача минимизации или максимизации формулируется в следующем виде:

$$J = \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \text{ или } J = \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}),$$

при

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2 \mathbf{x} \leq \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{C}_2(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{L}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{L}_2(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0},$$

где J – критерий; $\mathbf{x}$ – вектор варьируемых переменных; f – целевая функция; $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2$, – матрицы линейных ограничений, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ – гладкие матричные функции от соответствующих аргументов, $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ – матричные функции с разрывами первого и второго рода от соответствующих аргументов.

Ограничения типа равенство можно использовать для редукции числа варьируемых переменных и исключения ограничений типа равенства, которые дублируют друг друга. Если число линейно независимых уравнений n_1 меньше количества переменных n , тогда необходимо определить базисные ограничения, а все линейно зависимые ограничения должны быть исключены. Полученная система уравнений позволяет определить линейную замену варьируемых переменных и сократить их число до $n - n_1$. Замена переменных может быть выполнена по рекуррентной формуле:

$$z_{n-n_1+k} = b_k - \sum_{i=1}^{n-n_1} a_{k,i} z_i - \sum_{j=1}^{k-1} a_{k,n-n_1+j} z_{n-n_1+j}, \quad (11)$$

где $a_{k,i}$ и b_k – коэффициенты нижней треугольной матрицы $\mathbf{A}_{1z}$ и столбца $\mathbf{B}_{1z}$ соответственно, полученных из матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{B}_1$ методом Гаусса и перестановками столбцов: $\mathbf{A}_{1z} \mathbf{z} = \mathbf{B}_{1z}$, $\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$, где $\mathbf{z}$ – вектор $\mathbf{x}$ с изменённым порядком следования компонентов, $\mathbf{T}$ – матрица перестановок, $\mathbf{B}_{1z}$ – преобразованный вектор $\mathbf{B}_1$. Переход к исходной системе ограничений осуществляется линейной заменой: $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{z}_{n-n_1} + \mathbf{T} \mathbf{\beta}_1$,

где $\mathbf{\Lambda}_1$ – матрица размерностью $n \times (n - n_1)$, коэффициенты которой находятся согласно (11); $\mathbf{z}_{n-n_1}$ – новый вектор варьируемых переменных; $\mathbf{\beta}_1$ – вектор размерностью $n \times 1$, коэффициенты которого находятся согласно (11).

Построение области кандидатов в решения методом анализа линейных ограничений типа неравенство может быть осуществлено с помощью метода Моцкина-Бургера, позволяющего исключать одинаковые ограничения.

Другой широко распространенный вид ограничений – это полиномиальные. Следует отметить, что полиномиальные аппроксимации могут быть использованы для описания с некоторой точностью более сложных нелинейных ограничений в выбранной области аргументов. Это позволяет сводить для некоторых областей значений аргумента задачу условной оптимизации с произвольными нелинейными ограничениями к задачам условной оптимизации с полиномиальными ограничениями при заданной точности решения.

Полиномиальные ограничения встречаются 2-х видов: полиномиальные равенства и неравенства соответственно, которые также имеют и различные методы в решении. Универсальным подходом в анализе ограничений и первого, и второго вида может считаться разложение на множители порядка не старше 2 полинома ограничения ϕ . Видно, что ограничение с полиномом (13) сводится к системе линейных и квадратичных ограничений, что приводит к разделению исходной задачи на несколько подзадач, которые могут решаться независимо.

Рассмотрим случай систем ограничений, приводимых к треугольному виду:

$$\begin{cases} v_1^{m_1} + \varphi_1(v_1, v_2, \dots, v_k) = 0 \\ v_2^{m_2} + \varphi_2(v_2, v_3, \dots, v_k) = 0 \\ \dots \\ v_k^{m_k} + \varphi_k(v_k) = 0 \end{cases}, \mathbf{v} = \mathbf{T}_v \mathbf{x} + \mathbf{B}_v, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_k]^T, k \leq n, \quad (12)$$

где $\mathbf{T}_v, \mathbf{B}_v$ – матрицы параметров, $m_1, m_2, \dots, m_k$ – степени, соответствующих переменных, k – количество уравнений, φ_i – полиномы от переменных $v_1, \dots, v_k$, причём показатели при переменной v_i в многочлене φ_i меньше, чем m_i .

В последнее уравнение в (12) входит только v_k , и существуют эффективные алгоритмы нахождения корней полинома одной переменной. Рассматриваются только вещественные корни полинома уравнения k , которые могут быть подставлены в уравнение $k-1$, которое после замены станет зависеть от переменной v_{k-1} , и его корни могут быть найдены аналогично уравнению k и т.д. Если все корни хотя бы одного из уравнений в (12) комплексные, то задача (10) не имеет решения. Множество вещественных корней системы (12) формирует наборы линейных ограничений и разделяет исходную задачу на несколько параллельно решаемых подзадач: $\mathbf{T}_v \mathbf{x} + \mathbf{B}_v = \Lambda_{v,i}$, где $\Lambda_{v,i}$ – i -ый набор вещественных корней системы (12). Наиболее простой способ разбиения системы исходных ограничений может быть выполнен с помощью метода деревьев решений, который применимо к (12) используется следующим образом:

Слою 1 дерева соответствует уравнение k в (12), в которое входит только v_k . Находим корни полинома одной переменной уравнения k . Каждому узлу слоя соответствует вещественный корень λ_{i_1} полинома уравнения k .

Слой 2 соответствует уравнению $k-1$ в (12). Выбирается родительский узел в слое 1, и связанный с ним корень подставляется в уравнение $k-1$, которое после замены станет зависеть от переменной v_{k-1} . Аналогично слою 1 рассчитываются вещественные корни λ_{i_1, i_2} для полученного уравнения $k-1$ одной переменной. Эта процедура выполняется для всех родительских узлов. Все вещественные корни λ_{i_1, i_2} являются узлами слоя 2 и будут родительскими для следующего слоя, и должны быть подставлены в следующее уравнение.

Построение дерева будет происходить до слоя k включительно. Число индексов узла равно номеру слоя. Номер текущего узла составляется из номера родительского узла и порядкового номера потомка. Если рост дерева завершился раньше слоя k , то это означает, что система ограничений несовместна.

Число эквивалентных систем линейных ограничений типа равенство, на которые разбиваются исходные уравнения (12), равно числу узлов в слое k . Эти системы формируются по номеру узла $\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k}$ в слое k следующим образом:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k} \\ \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}} \\ \vdots \\ \lambda_{i_1, i_2} \\ \lambda_{i_1} \end{bmatrix},$$

где $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k$ – соответствующие индексы узлов в каждом слое.

В общем случае используется полиномиальное приближение произвольных ограничений и поэтому изначально удобно искать их аппроксимации в виде:

$$\begin{cases} a_1 \prod_i \prod_j (v_i - \lambda_{1,i,j}) \leq 0 \\ a_2 \prod_i \prod_j (v_i - \lambda_{2,i,j}) \leq 0 \\ \dots \\ a_s \prod_i \prod_j (v_i - \lambda_{s,i,j}) \leq 0 \end{cases}, \mathbf{v} = \mathbf{T}_v \mathbf{x} + \mathbf{B}_v, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_k]^T, \quad (13)$$

Для анализа этого случая используем следующую процедуру:

1. Необходимо найти слагаемые с вещественными корнями $\lambda_{s,i,j}$, где s - номер неравенства, i - номер переменной v , j - номер вещественного корня полинома. Если вещественные корни отсутствуют, то необходимо проанализировать ограничение на непротиворечивость, рассмотрев знак a_s . Так при $a_s = -1$ неравенство справедливо при любых $\mathbf{x}$, и его можно исключить, а при $a_i = 1$, задача не имеет решения.

2. Построить произведение линейных сомножителей, которые образованы только вещественными корнями: $a_s \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} (v_i - \lambda_{s,i,j}) \leq 0$, где p_i - число вещественных корней для переменной v_i . С каждым сомножителем связать переменную u_j , которая может принимать значение 1 при $v_i - \lambda_{i,j} \geq 0$, и значение, равное -1 , при $v_i - \lambda_{i,j} \leq 0$. Для вершины дерева введём переменную $u_0 = a_i$. Таким образом, дерево имеет вид бинарного: одна ветвь определяет отрицательный переход, а другая – положительный. В узлах дерева будем хранить произведения соответствующих u_j . Нумерация узлов сквозная, по уровням слева направо.

Построение дерева выполняется до уровня $\sum_{i=1}^k p_i + 1$ включительно.

3. На уровне $\sum_{i=1}^k p_i + 1$ выбираются узлы с отрицательными значениями. По номеру выбранного узла строится система линейных неравенств, для этого номер узла представляется в бинарном виде, удаляется старшая единица. Номер символа в бинарном коде m соответствует номеру линейного слагаемого $v_i - \lambda_{s,i,j}$, нулю соответствует неравенство $v_i - \lambda_{s,i,j} \leq 0$, а единице - слагаемое $-v_i + \lambda_{s,i,j} \leq 0$.

Часто встречающийся на практике тип ограничений – это ограничения с разрывами. К ним относятся ограничения в виде кусочно-линейных функций, дробей, полиномов (например, гипербола) и т.д. Наиболее удобным способом представления таких ограничений является описание в виде систем равенств или неравенств, заданных на интервалах, границами которых являются особые точки, например, переход с одной ветви функции на другую. Рассмотрим случай ограничений с разрывами в особых точках. Одним из вариантов таких ограничений являются рациональные дроби. Случай систем подобных уравнений сводится к задаче решения систем полиномиальных уравнений, в результате которого находятся списки корней числителя и знаменателя, которые можно сформировать в системы линейных уравнений и системы неравенств, которые определяют особые области.

Как и в предыдущем случае, аппроксимацию произвольных ограничений удобно искать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \frac{\prod_{i,j} (v_i - \lambda_{1,i,j})}{\prod_{i,l} (v_i - \lambda_{1,i,l})} \leq 0 \\ a_2 \frac{\prod_{i,j} (v_i - \lambda_{2,i,j})}{\prod_{i,l} (v_i - \lambda_{2,i,l})} \leq 0, \mathbf{v} = \mathbf{T}_v \mathbf{x} + \mathbf{B}_v, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_k]^T, \\ \dots \\ a_s \frac{\prod_{i,j} (v_i - \lambda_{s,i,j})}{\prod_{i,l} (v_i - \lambda_{s,i,l})} \leq 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

Для этого случая можно использовать следующую процедуру:

1. Необходимо найти слагаемые с вещественными корнями $\lambda_{s,i,j}$ и $\lambda_{s,i,l}$, где s - номер неравенства, i - номер переменной v , j - номер вещественного корня полинома числителя, l - номер вещественного корня полинома знаменателя. Если вещественные корни отсутствуют, то необходимо проанализировать ограничение на непротиворечивость, рассмотрев знак a_s . Так при $a_s = -1$ неравенство справедливо при любых x , и его можно исключить, а при $a_i = 1$ задача не имеет решения.

2. Построить дробь из линейных слагаемых, которые образованы только

вещественными корнями: $a_s \frac{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} (v_i - \lambda_{s,i,j})}{\prod_{i=1}^k \prod_{l=1}^{d_i} (v_i - \lambda_{s,i,l})} \leq 0$, где n_i - число вещественных корней

числителя для переменной v_i , d_i - число вещественных корней знаменателя для переменной v_i . С каждым сомножителем числителя и знаменателя нужно связать переменную u_j , которая может принимать значение 1 при $v_i - \lambda_{i,j} \geq 0$, и значение, равное -1 , при $v_i - \lambda_{i,j} \leq 0$. Для вершины дерева введём переменную $u_0 = a_i$. Таким образом, дерево имеет вид бинарного: одна ветвь определяет отрицательный переход, а другая положительный. В узлах дерева будем хранить произведения соответствующих u_j . Нумерация узлов сквозная, по уровням слева направо. Построение дерева выполняется до уровня $\sum_{i=1}^k (n_i + d_i) + 1$ включительно.

3. На уровне $\sum_{i=1}^k (n_i + d_i) + 1$ выбираются узлы с отрицательными значениями. По номеру выбранного узла строится система линейных неравенств, для этого номер узла представляется в бинарном виде, удаляется старшая единица. Номер символа в бинарном коде m соответствует номеру линейного слагаемого $v_i - \lambda_{s,i,j}$ или $v_i - \lambda_{s,i,l}$, нулю соответствует неравенство $v_i - \lambda_{s,i,j} \leq 0$ или $v_i - \lambda_{s,i,l} \leq 0$, а единице - слагаемое $-v_i + \lambda_{s,i,j} \leq 0$ или $-v_i + \lambda_{s,i,l} \leq 0$.

4. Вещественные корни знаменателя формируют особые области $v_i - \lambda_{s,i,l} = 0$, которые удобно представить в виде двух строгих неравенств, которые формируют разбиение на несколько независимых областей:

$$v_i - \lambda_{s,i,l} < 0, \quad v_i - \lambda_{s,i,l} > 0.$$

Точки особых областей также должны быть проверены как кандидаты на оптимальные решения. Для вычислительных процедур удобнее использовать выражение при заданной точности вычислений:

$$v_i - \lambda_{s,i,l} + \varepsilon \leq 0, \quad v_i - \lambda_{s,i,l} - \varepsilon \geq 0,$$

где ε - погрешность расчётов.

Анализ ограничений с разрывами должен выполняться после всех других типов ограничений, так как в этом случае повышается вероятность исключения подобных ограничений или областей аргументов, которые соответствуют разрывам.

После построения границы области допустимых решений и определения её узлов путём анализа ограничений необходимо определить оптимальные значения целевой функции, которые принадлежат области допустимых решений.

1. Если глобальный минимум (максимум) находится в области допустимых значений, образованной ограничениями, тогда аргумент, соответствующий этому минимуму (максимуму), является решением поставленной задачи.

2. Если область допустимых решений – это пустое множество, тогда поставленная задача не имеет решения.

3. Если глобальный минимум (максимум) находится вне области допустимых значений, образованной ограничениями, тогда решение задачи будет находиться на границе области допустимых решений или это будут аргументы локальных минимумов (максимумов), которые находятся внутри области допустимых решений. В данном случае задача может иметь несколько решений, которые будут соответствовать одинаковым минимальным (максимальным) значениям целевой функции.

Обычно целевая функция имеет простой вид, и её оптимумы известны, поэтому проверка пунктов 1 и 2 не вызывает трудностей. Для произвольной целевой функции проверка пункта 3 очень трудоёмка даже на небольшой области допустимых решений, для этого могут быть использованы стандартные методы поиска, например, метод сеток, методы управляемого случайного поиска.

Рассмотрим случай, когда целевая функция является метрикой и имеет не более одного экстремума, а также все точки, в которых эта функция имеет одинаковое значение, ограничивают фигуру таким образом, что отрезок, соединяющий любые две точки её поверхности, принадлежит этой фигуре, а также выполняются соотношения:

$$\rho = q(\mathbf{x}), \quad \rho \geq 0, \quad \text{если } \rho(\mathbf{x}(i)) = \rho_i = \text{const}, \quad \text{то } f(\mathbf{x}(i)) = \text{const},$$

$$\text{если } J = \min(f), \quad \text{то } f(\rho_0) = \max, \quad f(\rho_0) > f(\rho_1) > \dots > f(\rho_n), \quad \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_n,$$

$$\text{если } J = \max(f), \quad \text{то } f(\rho_0) = \min, \quad f(\rho_0) < f(\rho_1) < \dots < f(\rho_n), \quad \rho_0 > \rho_1 > \dots > \rho_n.$$

Тогда решением будут узлы, в которых целевая функция имеет максимальное/минимальное значение для задачи максимизации/минимизации.

В случае, если выполняются условия:

$$\rho = q(\mathbf{x}), \quad \rho \geq 0, \quad \text{если } \rho(\mathbf{x}(i)) = \rho_i = \text{const}, \quad \text{то } f(\mathbf{x}(i)) = \text{const},$$

$$\text{если } J = \min(f), \quad \text{то } f(\rho_0) = \min, \quad f(\rho_0) < f(\rho_1) < \dots < f(\rho_n), \quad \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_n,$$

$$\text{если } J = \max(f), \quad \text{то } f(\rho_0) = \max, \quad f(\rho_0) > f(\rho_1) > \dots > f(\rho_n), \quad \rho_0 > \rho_1 > \dots > \rho_n,$$

решением будут узлы или точки граней, если эти грани являются касательными к поверхности ρ в этих точках, где целевая функция имеет максимальное/минимальное значение для задачи максимизации/минимизации.

Метод многомерных оболочек был применён для расчёта траектории движения модулей ИЭМС, где была продемонстрирована его эффективность перед стандартными методами нелинейного программирования.

В случае n -пода выходными данными планировщика траекторий модуля SEMS является выработка законов выдвигания штоков каждого актуатора с учетом быстродействия приводов актуаторов, инерции n -пода и ограничений на фазовые координаты и геометрию перемещений.

Траектория движения n -пода задается в базовой системе координат (БСК) как три линейных и три угловых перемещения контрольной точки (КТ). Требования к динамике, точности и качеству переходного процесса для модуля ИЭМС как замкнутой системы задаётся с помощью линейной эталонной динамической модели в отклонениях от желаемого состояния (цели управления). Законы изменения линейных η_r и угловых η_ϕ ошибок наведения КТ в БСК, определяемые данной моделью, учитывают динамику электроприводов и инерцию n -пода через постоянную времени модуля ИЭМС и имеют вид:

$$\eta_r = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{T_h - T_1} \left[T_h e^{-\frac{t}{T_h}} - T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} \right] \\ \frac{a_2}{T_h - T_2} \left[T_h e^{-\frac{t}{T_h}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \\ \frac{a_3}{T_h - T_3} \left[T_h e^{-\frac{t}{T_h}} - T_3 e^{-\frac{t}{T_3}} \right] \end{bmatrix}, \quad \eta_\phi = \begin{bmatrix} \frac{a_4}{T_h - T_4} \left[T_h e^{-\frac{t}{T_h}} - T_4 e^{-\frac{t}{T_4}} \right] \\ \frac{a_5}{T_h - T_5} \left[T_h e^{-\frac{t}{T_h}} - T_5 e^{-\frac{t}{T_5}} \right] \\ \frac{a_6}{T_h - T_6} \left[T_h e^{-\frac{t}{T_h}} - T_6 e^{-\frac{t}{T_6}} \right] \end{bmatrix},$$

где a_i - начальное рассогласование по соответствующей координате, T_h - постоянная времени модуля ИЭМС, T_i - постоянные времени замкнутой системы с регулятором, t - время. Величины T_h и a_i - рассчитываются с учётом перемещений всей системы, исходя из кинематической и динамической моделей многомодульного механизма и области допустимых перемещений.

Выходными данными планировщика траекторий модуля ИЭМС являются удлинения Δl_j и скорости удлинений $\dot{\Delta l}_j$ актуаторов, которые зависят от рассогласований η_r и η_ϕ . Таким образом, необходимо найти оптимальные значения времени переходного процесса $T_{п.п.}$ и постоянных времени T_i регулятора замкнутой системы при заданной точности наведения по каждой координате соответственно δ_i и упрощенных ограничениях на максимальные длины, скорости выдвигания актуаторов, при ограничениях на координаты, скорости перемещения и ускорения модуля ИЭМС, пересчитанные в относительные перемещения.

В математическом виде поиск оптимальной траектории формулируется как задача максимального быстродействия при наличии нелинейных ограничений:

$$J = \min_x \{x_1\},$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} k_1 T_h \leq x_1 \leq T_{\max}, \quad 0 < x_{i+1} \leq \frac{k_2}{T_h}, \quad x_{i+7} > 0, \quad x_1 - x_{i+7} > 0, \quad -\lambda_i^{\max} \leq \frac{-a_i}{T_h} x_{i+1} \leq \lambda_i^{\max}, \\ e^{-x_1 x_{i+1}} - \left(T_h e^{-\frac{x_1}{T_h}} - \frac{\text{sign}(a_i) \delta_i T_h}{a_i} \right) x_{i+1} - \frac{\text{sign}(a_i) \delta_i}{a_i} = 0, \quad \frac{a_i}{T_h - 1} \left(\frac{1}{T_h} e^{-\frac{x_{i+7}}{T_h}} - x_{i+1} e^{-x_{i+7} x_{i+1}} \right) = 0, \\ -v_i^{\max} \leq \frac{-a_i}{T_h - 1} \left(e^{-\frac{x_{i+7}}{T_h}} - e^{-x_{i+7} x_{i+1}} \right) \leq v_i^{\max}, \quad \Delta l_j + l_{0j} \leq l_{\max j}, \quad |\dot{\Delta l}_j| \leq \dot{l}_{\max j}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{x}$ – вектор варьируемых переменных, $x_1 = T_{п.п.}$; T_{max} – максимальное значение времени переходного процесса, $x_{i+1} = \frac{1}{T_i}$; x_{i+7} – моменты времени, в которые скорости изменения линейных и угловых ошибок наведения имеют максимальные по модулю значения; k_1, k_2 – весовые коэффициенты; λ_i^{max} – максимальное значение ускорений изменения линейных и угловых рассогласований; v_i^{max} – максимальное значение скоростей изменения линейных и угловых рассогласований; $i = 1..6$; $l_{max j}$ – максимальная длина j -ого актуатора, $\dot{l}_{max j}$ – максимальная скорость удлинения j -ого актуатора, l_{0j} – начальное значение длины актуатора, $j = 1..n$.

Для решения задачи можно воспользоваться ММО, описанным выше, основная идея которого заключается в следующем: если целевая функция является монотонной, а система ограничений образует замкнутую область, оптимальное решение следует искать на границе данной области. Предлагается выразить переменные x_{i+1} через x_1 , используя ограничения, для этого вводится замена $w_i = x_1 x_{i+1}$, тогда:

$$e^{-w_i} = -\mu_i w_i + \sigma_i, \quad \sigma_i = \frac{\text{sign}(a_i) \delta_i}{a_i}, \quad \mu_i = \frac{\text{sign}(a_i) \delta_i T_h}{a_i x_1} - \frac{T_h}{x_1} e^{\frac{-x_1}{T_h}}, \quad \mu_i > 0, \quad \sigma_i > 0.$$

Тогда переменные x_{i+1} находятся из соотношения:

$$x_{i+1} = \frac{\sigma_i}{\mu_i(x_1) x_1} + \frac{1}{x_1} f^{-1} \left(-\frac{1}{\mu_i(x_1)} e^{\frac{-\sigma_i}{\mu_i(x_1)}} \right) = g_i(x_1),$$

$$\mu_i(x_1) > 0, \quad \mu_i(x_1) - \mu_i(x_1) \ln \mu_i(x_1) - \sigma_i < 0,$$

где f^1 – функция Ламберта.

Не трудно заметить, что переменные x_{i+7} могут быть выражены через $g(x_1)$:

$$x_{i+7} = \frac{1}{\frac{1}{T_h} - g_i(x_1)} \ln \left(\frac{1}{T_h g_i(x_1)} \right) = h_i(x_1).$$

В результате выполненных преобразований исходная задача многомерной оптимизации с 13 переменными сводится к задаче одномерного поиска при ограничениях:

$$k_1 T_h \leq x_1 \leq T_{max}, \quad \varepsilon \leq g_i(x_1) \leq \frac{k_2}{T_h}, \quad h_i(x_1) \geq \varepsilon, \quad x_1 - h_i(x_1) \geq \varepsilon, \quad -\lambda_i^{max} \leq \frac{-a_i}{T_h} g_i(x_1) \leq \lambda_i^{max},$$

$$-v_i^{max} \leq \frac{-a_i}{T_h - \frac{1}{g_i(x_1)}} \left(e^{\frac{-h_i(x_1)}{T_h}} - e^{-h_i(x_1) g_i(x_1)} \right) \leq v_i^{max}, \quad \Delta l_j(x_1) + l_{0j} \leq l_{max j}, \quad -\dot{l}_{max j} \leq \Delta \dot{l}_j(x_1) \leq \dot{l}_{max j},$$

$$\mu_i(x_1) \geq \varepsilon, \quad \mu_i(x_1) - \mu_i(x_1) \ln \mu_i(x_1) - \sigma_i \leq \varepsilon, \quad \sigma_i(x_1) \geq \varepsilon,$$

ε – малая положительная величина, определяющая точность вычислений.

Каждое ограничение представляет собой неравенство от одной переменной x_1 . Эти неравенства могут решаться независимо. Решением каждого неравенства является система интервалов для x_1 , границы которых в общем случае определяются сложными нелинейными выражениями. Решением задачи оптимизации является наименьшая граница одного из интервалов при условии, что существует интервал или число, удовлетворяющие системе ограничений. Численная реализация метода поиска переменной x_1 имеет высокий коэффициент распараллеливания вычислений и на стадии проектирования или в высокопроизводительном контроллере может решаться в исходном виде.

Для быстрых вычислений границы интервалов могут быть аппроксимированы на интервале $k_1 T_h \leq x_1 \leq T_{max}$ дробями, показатели полиномов числителей и знаменателей которых не превышают 4. В таком случае ограничения описываются адекватными

системами линейных неравенств от одной переменной x_1 . Такая задача была описана как интервальная и свелась к нахождению верхней и нижней оценок для x_1 . Решением задачи максимального быстродействия будет нижняя оценка для x_1 .

В отличие от стандартных методов предложенный алгоритм не использует операцию дифференцирования, имеет высокий коэффициент распараллеливания и находит решение или выявляет его отсутствие за прогнозируемое число шагов во всём рабочем диапазоне изменяемых параметров и состояния модуля ИЭМС. При численных экспериментах алгоритм находил решение или доказывал их отсутствие в 95% случаев.

Численно-аналитические исследования задачи с помощью ММО позволили создать более простой алгоритм поиска решения, заключающийся в том, что можно выделить ряд критических точек границ области допустимых решений, которые могут быть решением задачи. Данный алгоритм может быть использован при поиске траектории вблизи полученной с помощью алгоритма из предыдущего раздела.

Алгоритм поиска постоянных времени T_i и времени переходного процесса $T_{п.п.}$:

1. Начало.
2. Ввод исходных данных.
3. Рассчитываются нижние границы значений постоянных времени по быстродействию привода: $T_{i,1} = \frac{T_h}{k_2}$.

4. Рассчитываются нижние границы значений постоянных времени по максимальным ускорениям: $T_{i,2} = \frac{|a_i|}{\lambda_i^{\max} T_h}$.

5. Рассчитываются нижние границы значений постоянных времени по максимальным скоростям: $T_{i,3} = \ln \left(\frac{v_i^{\max} T_h}{|a_i|} \right) \frac{T_h}{f^{-1} \left(\ln \left(\frac{v_i^{\max} T_h}{|a_i|} \right) \frac{v_i^{\max} T_h}{|a_i|} \right)}$.

6. Рассчитываются максимальные значения соответствующих постоянных времени: $T_{i,4} = \max(T_{i,1}, T_{i,2}, T_{i,3})$.

7. Расчёт максимального времени переходного процесса с использованием ограничений $e^{-x_1 x_{i+1}} - \left(T_h e^{\frac{-x_1}{T_h}} - \frac{\text{sign}(a_i) \delta_i T_h}{a_i} \right) x_{i+1} - \frac{\text{sign}(a_i) \delta_i}{a_i} = 0$, при значениях постоянных времени $T_{i,4}$ и ограничений $\Delta l_j + l_{0j} \leq l_{\max j}$, $|\Delta \dot{l}_j| \leq \dot{l}_{\max j}$, определяемых из модели механики модуля ИЭМС.

8. Расчёт итоговых постоянных времени:

$$T_{i,5} = \left(\frac{\sigma_i^*}{\mu_i^* T_{п.п.}} + \frac{1}{T_{п.п.}} f^{-1} \left(-\exp \left(-\frac{\sigma_i^*}{\mu_i^*} \right) \frac{1}{\mu_i^*} \right) \right)^{-1}, \quad \sigma_i^* = \frac{\delta_i}{|a_i|}, \quad \mu_i^* = \frac{\delta_i T_h}{|a_i| T_{п.п.}} - \frac{T_h}{T_{п.п.}} e^{\frac{-T_{п.п.}}{T_h}}.$$

9. Проверка ограничений. Если все выполняются, то решение найдено, значение времени переходного процесса определено в пункте 7, а постоянные времени – в пункте 8. Если хотя бы одно ограничение не выполняется, то задача не имеет решения.

10. Конец.

Несмотря на отказ от чистого одномерного поиска и возврат к многомерной оптимизации, предложенный алгоритм в пунктах 3-6, 8 имеет простые аналитические формулы для расчёта искомых переменных, что повышает скорость и точность вычислений.

В третьей главе

Рассматриваются задачи построения моделей кинематики и механики на базе интеллектуальных электромеханических модулей ИЭМС. В современной робототехнике получили распространение модули ИЭМС, которые позволяют строить модульные робототехнические системы параллельной структуры. Одним из вопросов исследования подобных ИЭМС является создание их моделей как объектов управления. Подобную задачу можно разделить на следующие этапы: расчёт оптимальной траектории движения базового блока ИЭМС (ББ ИЭМС) с учётом всех ограничений, линеаризация модели динамики относительно найденной траектории разложением в ряд Тейлора в стационарной точке.

Одной из особенностей конструкций с параллельными кинематическими схемами является нестационарность их параметров, например, меняются моменты инерции, массы (присоединённые грузы), коэффициенты жёсткости, что является важным при управлении подобными конструкциями. Если моменты инерции могут быть рассчитаны на стадии проектирования и загружены в управляющую ЭВМ, то коэффициенты жёсткости должны определяться в результате натурных испытаний на стенде. Методика испытаний предусматривает два подхода. Первый – это определение эквивалентной жёсткости при статическом нагружении по закону Гука, определяется деформация конструкции при известном законе нагружения по формуле: $\mathbf{F} = \mathbf{C}_{eq}\mathbf{q}$, где $\mathbf{F}$ – известный закон нагружения, $\mathbf{C}_{eq}$ – эквивалентная матрица жёсткости, $\mathbf{q}$ – деформации по каждой из координат. Второй подход – это определение жёсткостей по собственным частотам системы по формуле: $\text{eig}(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}_{eq}) = \mathbf{\Omega}$, где $\mathbf{J}$ – матрица инерции, $\mathbf{\Omega}$ – спектр системы. Матрица $\mathbf{C}_{eq}$ имеет внедиагональные элементы, и её значения меняются в зависимости от ориентации элементов базового модуля. Воспользуемся готовой, полученной в диссертации формулой для определения эквивалентной жёсткости через парциальную, считая, что они одинаковы для каждого исполнительного элемента:

$$\mathbf{C}_{eq} = \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{C}_i \mathbf{T}_i^T, \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^T \langle \mathbf{r}_i \rangle \mathbf{c}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}}_i = C \frac{\mathbf{c}_b^T \mathbf{r}_{l_i} \mathbf{r}_{l_i}^T \mathbf{c}_b}{(l_i)^2},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – матрица Эйлера, $\mathbf{r}_i$ – координаты крепления шарниров верхней платформы в системе координат верхней платформы, $\mathbf{c}$ – матрица вращения, C – парциальная жёсткость исполнительного элемента, $\mathbf{c}_b$ – матрица вращения, определяющая начальное положение верхней платформы, l_i – длина i -ого исполнительного механизма, $\mathbf{r}_{l_i}$ – вектор, определяющий координаты верхних шарниров i -ого исполнительного механизма относительно нижних шарниров, $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Тогда определение жёсткости можно свести к нахождению парциальной жёсткости исполнительных элементов по формуле:

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}_{eq} \mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{C}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q} = C \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{c}_b^T \mathbf{r}_{l_i} \mathbf{r}_{l_i}^T \mathbf{c}_b}{(l_i)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда задача идентификации C может быть записана как:

$$J = \min_c \{ \Phi \}, C_{\min} \leq C \leq C_{\max},$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^T \mathbf{F}_j - 2C \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^T \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q}_j + C^2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i^T \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i \mathbf{q}_j^T \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q}_j,$$

где $\mathbf{F}_j$ – j -ое измерение нагружающей силы, $\mathbf{q}_j$ – j -ое измерение упругих деформаций, $C_{\min}$ и $C_{\max}$ – минимальные и максимальные значения парциальной жёсткости соответственно. Тогда решением задачи будет аргумент при

$$\Phi = \min_{C_{\min} \leq C \leq C_{\max}} \left\{ \Phi(C_{\min}), \Phi(C_{\max}), \Phi \left(\frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^T \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q}_j}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i^T \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i \mathbf{q}_j^T \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^T \mathbf{q}_j} \right) \right\} \quad \text{в диапазоне}$$

$C_{\min} \leq C \leq C_{\max}$.

При найденной парциальной жёсткости исполнительного элемента могут быть рассчитаны эквивалентные жёсткости для произвольных положений.

Для программной траектории в работе была получена линеаризованная модель ББ ИЭМС:

$$\mathbf{A}_3 \ddot{\mathbf{x}} + [\mathbf{A}_2 + \mathbf{D}_2 + \boldsymbol{\mu}_2] \dot{\mathbf{x}} + [\mathbf{A}_1 + \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_1 + \boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\mu}_1] \mathbf{x} = \mathbf{P}_3 \mathbf{z} + [\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3] \mathbf{w} - \\ - \mathbf{B}_3 \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{B}_2 \dot{\mathbf{y}} + [\mathbf{G}_1 - \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2] \mathbf{y} + [\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0 + \mathbf{G}_0 + \mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_0 + \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\Pi}_0],$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – соответствующие отклонения от опорной траектории верхнего и нижнего оснований: а $\mathbf{z}$ – отклонения нагрузок от значений в стационарной точке, равные $\mathbf{z} = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_{fix}$, $\mathbf{w}$ – отклонения управляющих воздействий от соответствующих значений в стационарной точке, равные $\mathbf{w} = \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{fix}$, а матрицы параметров модели:

$\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B}_i$ – инерциальные слагаемые, $\mathbf{C}_i$ – жесткостные параметры, $\mathbf{D}_i$ – параметры демпфирования, $\mathbf{G}_i$ – гравитационные составляющие, $\boldsymbol{\Pi}_i$ – составляющие внешней нагрузки, $\mathbf{H}_i$ – составляющие управления, $\boldsymbol{\mu}_i$ – параметры трения.

Четвёртая глава

Посвящена задачам управления зеркальными системами (ЗС) полноповоротных радиотелескопов с адаптивной поверхностью главного зеркала (ГЗ) на базе ИЭМС.

Создание больших полноповоротных радиотелескопов (РТ), способных работать в миллиметровых и субмиллиметровых волнах, напрямую связано с совершенствованием систем активной коррекции профилей поверхностей зеркальных систем (ЗС) РТ. Поэтому модули ИЭМС могут быть использованы для этих целей, что связано с конструктивными и экономическими преимуществами их использования. Для антенн небольшого и среднего диаметра (до 25 метров) опорно-поворотное устройство может быть выполнено на адаптивной платформе, которое обеспечивает как угловые, так и линейные перемещения антенны по шести степеням свободы, что может быть использовано, например, для компенсации качки, если антенна установлена на корабле, такая антенна не имеет мёртвых секторов и может обеспечивать непрерывное сопровождение космических объектов при больших углах места. Следующий уровень адаптации – это использование активных методов коррекции отражающих поверхностей. Существуют действующие антенны с адаптивными рефлекторами, щиты которых перемещаются с помощью адаптивных платформ Гью-Стюарта, например, как это реализовано в 500-метровом радиотелескопе FAST. Также подобные системы используются для позиционирования зеркал Нейсмита и контррефлекторов (GTM, РТ-13 и др.). Помимо этого существуют реализации опорно-поворотных устройств на платформе Гью-Стюарта, например, массив анизотропии реликтового излучения им. Ли Юаньчжэ, радиоинтерферометр из 13 элементов (с возможностью расширения до 19) на поворотной 6-метровой платформе, проект ММА, космический радиотелескоп «Миллиметрон» и др.

Вопросы создания крупных РТ и управления ими отражены в работах учёных и конструкторов: М.Ю. Архипова, У. Христиансена, Л.Д. Бахраха, И. Хёгбома, И.С. Виноградова, Д.И. Воскресенского, М.А. Гурбанязова, П.Д. Калачева, А.Н. Козлова, Г.Г. Соколовского, П.В. Белянского, С. Хорнера, В.С. Поляка, В.Б. Тарасова, А.Е. Городецкого, В.В. Дубаренко, С.Ю. Мисюрина, И.А. Коняхина, В.Г. Гимельмана, Ю.Н. Артёменко, С.С. Щесняка, Ю.В. Постникова и др.

Стремление корректно сформулировать цель управления привело к необходимости анализа типовых режимов работы РТ и исследования электродинамических свойств ЗС РТ мм диапазона для получения оценок влияния деформаций ее элементов на распределение электромагнитного поля в области вторичного фокуса, где установлен облучатель. Для этого была разработана электродинамическая модель (ЭДМ) ЗС, основанная на принципах геометрической оптики.

Для усовершенствования ЗС предлагается использовать контррефлектор (КР) и главное зеркало (ГЗ) с адаптивными поверхностями. По значениям положений щитов ГЗ для каждого щита строят аппроксимирующий параболоид так, чтобы фокусное расстояние и положение основания каждого параболоида минимально отличалось от соседнего и при этом разности между их фокусными расстояниями были кратны длине волны принимаемого радиоизлучения. Вычисляются отклонения каждого щита от соответствующего параболоида, после окончания перемещений щитов ГЗ измеряют положения каждого щита КР. С помощью ЭДМ ЗС строят ходы лучей, отраженных от щитов ГЗ в сторону КР, и положения отражающих поверхностей щитов КР. Вычисляются рассогласования крайних лучей с положениями соответствующих краев отражающих поверхностей щитов КР, и с помощью системы автоматического управления перемещают каждый щит КР в сторону уменьшения рассогласований так, чтобы положения их фокусов минимально расходились между собой и с положением вторичного фокуса ЗС и с положением приемника излучения при условии, что длины лучей от первичного фокуса до отражающих поверхностей щитов КР, а также длины лучей от отражающих поверхностей щитов КР до вторичного фокуса, и расхождения в обоих случаях были кратны длине волны принимаемого излучения.

Предлагается система управления, состоящая из 5 контуров:

1. Контур управления ГЗ. Наведение ГЗ осуществляется по углу азимута и углу места с помощью электроприводов так, чтобы эквивалентная фокальная ось (ЭФО) ГЗ, совместилась с линией визирования космического источника радиоизлучения (КИР). Эквивалентная фокальная ось ГЗ строится таким образом, чтобы фокальные оси аппроксимирующих параболоидов, рассчитанные для каждого щита, имели относительно ЭФО ГЗ минимальные угловые рассогласования.
2. Контур управления КР. Контррефлектор устанавливается на исполнительный механизм в виде гексапода. Положение КР изменяется так, чтобы эквивалентный фокус (ЭФ) ГЗ и ЭФО ГЗ и ЭФ КР и ЭФО КР совместились с минимальными ошибками. Эквивалентный фокус ГЗ выбирается так, чтобы фокусы аппроксимирующих параболоидов, рассчитанные для каждого щита, имели относительно ЭФ ГЗ минимальные линейные рассогласования с учётом кратности длины волны принимаемого радиоизлучения. Аналогичным образом рассчитывается ЭФ КР. Для каждого щита КР строится свой аппроксимирующий эллипсоид, для него определяется фокальная ось и фокус. Эквивалентный фокус КР определяется так, чтобы фокусы аппроксимирующих эллипсоидов, рассчитанные для каждого щита КР, имели относительно ЭФ КР минимальные линейные рассогласования с учётом кратности длины волны принимаемого радиоизлучения. Эквивалентная фокальная ось КР строится таким образом, чтобы фокальные оси аппроксимирующих эллипсоидов, рассчитанные для каждого щита, имели относительно ЭФО КР минимальные угловые рассогласования.
3. Контур управления адаптивной поверхностью ГЗ. Каждый щит ГЗ устанавливается на исполнительный механизм типа гексапод. Все щиты ГЗ механически развязаны, каждый щит перемещается своим исполнительным механизмом. Профиль поверхности щита и положение щита, и зазоры между соседними щитами контролируются локальной телевизионной измерительной системой (ЛТИС). Привязка ЛТИС групп щитов к системе координат ГЗ осуществляется лазерной измерительной системой верхнего уровня (ЛаИС). Для каждого щита по результатам измерения ЛТИС и ЛаИС строится аппроксимирующий параболоид (АП) так, чтобы фокусное расстояние и положение основания каждого

параболоида минимально отличалось от соседнего и при этом разности между их фокусными расстояниями были кратны длине волны принимаемого радиоизлучения. После измерений каждый щит перемещается так, чтобы обеспечить минимальное отклонение от АП. Контроль перемещений осуществляется ЛТИС. После перемещения щита при необходимости его поверхность корректируется с помощью системы пьезоактуаторов, чтобы обеспечить требуемое СКО реальной поверхности щита от АП.

4. Контур управления адаптивной поверхностью КР. Каждый щит КР устанавливается на исполнительный механизм типа гексапод. Все щиты КР механически развязаны, каждый щит передвигается своим исполнительным механизмом. Контроль положения и профиля щитов КР и зазоров между ними обеспечивается ЛТИС КР. После окончания перемещений щитов ГЗ измеряют положения каждого щита КР. По результатам измерений ЛТИС строятся аппроксимирующие эллипсоиды (АЭ) для каждого щита. При необходимости поверхность каждого щита корректируется системой пьезоактуаторов. С помощью ЭДМ ЗС строятся ходы лучей, отраженных от щитов ГЗ в сторону КР, и положения отражающих поверхностей щитов КР. Вычисляются рассогласования крайних лучей с положениями соответствующих краев отражающих поверхностей щитов КР, и с помощью системы автоматического управления перемещают каждый щит КР в сторону уменьшения рассогласований так, чтобы положения их фокусов минимально расходились между собой и с положением вторичного фокуса ЗС и (или) с положением приемника излучения при условии, что длины лучей от первичного фокуса до отражающих поверхностей щитов КР, а также длины лучей от отражающих поверхностей щитов КР до вторичного фокуса, и расхождения в обоих случаях были кратны длине волны принимаемого излучения.

5. Контур автофокусировки приёмника. По данным о координатах КИР и взаимном положении элементов ЗС с измерительной системы и наблюдателя пространственной металлоконструкции с помощью ЭДМ ЗС рассчитываются координаты фазового центра (ФЦ) в близи вторичного фокуса ЗС. Затем определяется управление, выдаваемое на привод перископического зеркала либо на привод подвижного приёмника, чтобы система координат (СК) приемника совместилась с СК ФЦ.

Подобную систему предполагается использовать на 70-метровом радиотелескопе РТ-70, который предполагается построить на плато Суффа в Узбекистане.

Для расчета удлинений штоков актуаторов адаптивной поверхности главного зеркала необходимо рассчитать аппроксимирующий параболоид (АП) ГЗ, использованием метода наименьших квадратов. В результате измерений поверхности ГЗ получено множество точек, которые характеризуются координатами $x_{0,i}$, $y_{0,i}$ и $z_{0,i}$ в БСК, через которые необходимо провести параболоид и выбрать его числовые параметры, так чтобы сумма квадратов отклонений вычисленных точек была минимальна с учётом конечной величины хода штоков актуаторов и линии их действия.

Основной задачей адаптивной поверхности является обеспечение требуемого среднеквадратичного отклонения поверхности ГЗ от поверхности, сформированной за счёт принципа гомологии. С другой стороны, необходимо обеспечивать физическую реализуемость данного АП, так как величина перемещения щитов ограничена, и следует предусмотреть, чтобы данные перемещения происходили вблизи юстировочных значений выдвиганий штоком актуаторов. Поэтому целесообразно выбрать в качестве критериев следующие: минимум среднего отклонения ошибок АП от измеренного поля точек по нормали к поверхности АП ГЗ и минимум суммы ходов штоков актуаторов:

$$J_1 = \min_{\mathbf{p}} \xi_n^2(\mathbf{p}), \quad J_2 = \min_{\mathbf{p}} \sum_{j=1}^m l_{a,j}^2(\mathbf{p}),$$

где ξ_n^2 - сумма квадратов невязок по нормали к АП ГЗ, $l_{a,j}^2$ - квадрат длины j-ого актуатора, $\mathbf{p}$ - вектор параметров АП ГЗ: $\mathbf{p} = [x_v \quad y_v \quad z_v \quad \beta \quad \theta \quad a_p]^T, |p_i| \leq p_i^{\max}$.

$\mathbf{v}_0 = [x_v, y_v, z_v]$ – координаты вершины в БСК, β, θ – углы ориентации фокальной оси в БСК, a_p – фокусное расстояние.

В качестве ограничений выбирается модель АП, который задаётся системе координат АП (СК АП) каноническим уравнением параболоида:

$$\mathbf{x}_{p,i}^T \mathbf{A}_p \mathbf{x}_{p,i} + 2a_p \mathbf{B}_p^T \mathbf{x}_{p,i} = 0, \mathbf{x}_{p,i} = \begin{bmatrix} x_{p,i} \\ y_{p,i} \\ z_{p,i} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{x}_{p,i}$ – координаты точки параболоида в СК АП. Так как измеренные координаты точек поверхности задаются в БСК удобнее воспользоваться представлением АП в БСК:

$$\mathbf{x}_{p,i} = \mathbf{c}(\beta, \theta)^T [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0], [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0]^T \mathbf{A}_0 [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0] + 2a_p \mathbf{B}_0^T [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0] = 0, \\ \mathbf{A}_0 = \mathbf{c} \mathbf{A}_p \mathbf{c}^T, \mathbf{B}_0^T = \mathbf{B}_p^T \mathbf{c}^T,$$

где $\mathbf{x}_{p,0,i}$ – координаты точки параболоида в БСК.

Чтобы рассчитать невязки между точками поверхности ГЗ и АП, необходимо ввести нормаль к АП, которая определяется уравнением в БСК:

$$\mathbf{B}_p^T \mathbf{x}_{p,i} - \mathbf{B}_p^T \mathbf{c}^T [\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{v}_0] + a_p \sqrt{\frac{[\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{v}_0]^T \mathbf{c} \mathbf{A}_p \mathbf{c}^T [\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{v}_0]}{\mathbf{x}_{p,i}^T \mathbf{c} \mathbf{A}_p \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{p,i}}} = 0,$$

$\mathbf{x}_{0,i}$ – координаты точки поверхности главного зеркала. Тогда уравнение невязки по нормали имеет вид:

$$\xi_n^2 = \sum_i [\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{c}^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{x}_{p,i}]^T [\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{c}^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{x}_{p,i}].$$

Необходимо определить ограничения на ход штоков актуаторов. Линия действия актуаторов задается в БСК в параметрическом виде следующим образом: $\mathbf{x}_{p,b0,j} = \mathbf{x}_{b0,j} + l_{a,j} \mathbf{e}_{a0,j}$, где $\mathbf{x}_{p,b0,j}$ – точка пересечения линии действия актуатора с АП ГЗ, $\mathbf{x}_{b0,j}$ – координаты юстировочного положения базы актуатора, $l_{a,j}$ – длина штока актуатора, $\mathbf{e}_{a0,j}$ – орт линии действия актуатора. Выражение для длин штоков актуаторов имеет вид:

$$[\mathbf{e}_{a0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_{a0,j}] l_{a,j}^2 + [2\mathbf{e}_{a0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{b0,j} - 2\mathbf{e}_{a0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_0 + 2a_p \mathbf{B}_0^T \mathbf{e}_{a0,j}] l_{a,j} + \\ + [\mathbf{x}_{b0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{b0,j} - 2\mathbf{x}_{b0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^T \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_0 + 2a_p \mathbf{B}_0^T \mathbf{x}_{b0,j} - 2a_p \mathbf{B}_0^T \mathbf{v}_0] = 0.$$

Ход штока актуатора должен находиться в диапазоне $0 \leq l_{a,j} \leq l_{a,j}^{\max}$, где $l_{a,j}^{\max}$ – максимальное значение хода штока актуатора.

Обычно на практике задаются ошибки отклонения реальной поверхности от АП ГЗ, что позволяет перейти к одной целевой функции, введя дополнительные ограничения, тогда получим следующую постановку задачи построения АП ГЗ:

$$J_2 = \min_{\mathbf{p}} \sum_{j=1}^m l_{a,j}^2(\mathbf{p})$$

при ограничениях:

$$\mathbf{x}_{p,i} = \mathbf{c}(\beta, \theta)^T [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0], [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0]^T \mathbf{A}_0 [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0] + 2a_p \mathbf{B}_0^T [\mathbf{x}_{p,0,i} - \mathbf{v}_0] = 0,$$

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{c} \mathbf{A}_p \mathbf{c}^T, \mathbf{B}_0^T = \mathbf{B}_p^T \mathbf{c}^T, \mathbf{B}_p^T \mathbf{x}_{p,i} - \mathbf{B}_p^T \mathbf{c}^T [\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{v}_0] + a_p \sqrt{\frac{[\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{v}_0]^T \mathbf{c} \mathbf{A}_p \mathbf{c}^T [\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{v}_0]}{\mathbf{x}_{p,i}^T \mathbf{c} \mathbf{A}_p \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{p,i}}} = 0,$$

$$\xi_n^2 = \sum_i [\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{c}^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{x}_{p,i} - \mathbf{x}_{s,i}]^T [\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{c}^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{x}_{p,i} - \mathbf{x}_{s,i}] \leq \varepsilon^2,$$

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{e}_{a0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_{a0,j} \right] l_{a,j}^2 + \left[2\mathbf{e}_{a0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{b0,j} - 2\mathbf{e}_{a0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_0 + 2a_p \mathbf{B}_0^T \mathbf{e}_{a0,j} \right] l_{a,j} + \\ & + \left[\mathbf{x}_{b0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{b0,j} - 2\mathbf{x}_{b0,j}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^T \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_0 + 2a_p \mathbf{B}_0^T \mathbf{x}_{b0,j} - 2a_p \mathbf{B}_0^T \mathbf{v}_0 \right] = 0, \end{aligned}$$

$\mathbf{x}_{s,i}$ – координаты точек подвинутых щитов, ε – СКО поверхности. Выдвижения штоков $l_{a,j}$ рассчитываются как функции параметров АП ГЗ.

Рассмотрена методика аппроксимации оптимального управления приводами элементов ЗС с помощью прямого метода Ляпунова, позволяющая учитывать линейные ограничения на перемещения этих элементов путем добавления в классическую функцию Ляпунова штрафных функций от расстояний до ограничений.

Основной проблемой при слежении РТ за КИР в целевом множестве является предельно малый временной интервал, в течение которого необходимо определить управляющее воздействие. Хорошо разработаны методы управления, основанные на прямом методе Ляпунова, например, метод скоростного градиента и его модификации, подробно изложенные в работах А.Л. Фрадкова. Классические функции Ляпунова как целевые функции не учитывают ограничения. Метод штрафных функций позволяет свести задачу минимизации при ограничениях к задаче минимизации без ограничений добавлением в исходную целевую функцию функций, удовлетворяющих следующим свойствам:

1. Внутри области фазового пространства, очерченного ограничениями, значение штрафной функции стремится к нулю;
2. При приближении к ограничениям значение штрафной функции увеличивается;
3. Так как V является метрикой фазового пространства, то и модифицированная V также должна быть метрикой, поэтому штрафные функции должны быть больше или равны нулю при всех значениях состояния системы.

Этим условиям удовлетворяют функции вида:

$$\begin{aligned} G_i^{\max}(y_i) &= \exp\left[\delta_i^y (y_i - y_i^{\max})\right] > 0, \quad G_i^{\min}(y_i) = \exp\left[\delta_i^y (y_i^{\min} - y_i)\right] > 0, \\ Q_i^{\max}(\dot{y}_i) &= \exp\left[\delta_i^v (\dot{y}_i - v_i^{\max})\right] > 0, \quad Q_i^{\min}(\dot{y}_i) = \exp\left[\delta_i^v (v_i^{\min} - \dot{y}_i)\right] > 0, \end{aligned}$$

где $G_i^{\max}(y_i)$ и $G_i^{\min}(y_i)$ – штрафные функции минимальных и максимальных значений обобщенных координат; $Q_i^{\max}(\dot{y}_i)$ и $Q_i^{\min}(\dot{y}_i)$ – штрафные функции минимальных и максимальных значений обобщенных скоростей; δ_i^y и δ_i^v – положительные весовые коэффициенты.

Для удобства выразим $G_i^{\max}(y_i)$, $G_i^{\min}(y_i)$, $Q_i^{\max}(\dot{y}_i)$ и $Q_i^{\min}(\dot{y}_i)$ через $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}_g$:

$$\begin{aligned} W_i^{\max}(z_i) &= \exp\left[\delta_i^z (z_i + x_{g,i} - x_i^{\max})\right] > 0, \quad W_i^{\min}(z_i) = \exp\left[\delta_i^z (x_i^{\min} - x_{g,i} - z_i)\right] > 0, \\ \delta^z &= \text{diag}(\delta_1^y, \delta_2^y, \dots, \delta_s^y, \delta_1^v, \delta_2^v, \dots, \delta_s^v), \quad \mathbf{x}^{\max} = [\mathbf{y}^{\max}; \dot{\mathbf{y}}^{\max}], \quad \mathbf{x}^{\min} = [\mathbf{y}^{\min}; \dot{\mathbf{y}}^{\min}]. \end{aligned}$$

Модифицированная функция Ляпунова имеет вид:

$$V(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \delta \mathbf{z} + \sum_{i=1}^{2s} W_i^{\max}(z_i) + \sum_{i=1}^{2s} W_i^{\min}(z_i) > 0,$$

где δ – положительно определенная матрица коэффициентов.

Найдем производную по времени от функции Ляпунова:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{z}) &= \mathbf{z}^T (\mathbf{A}_z^T \delta + \delta \mathbf{A}_z) \mathbf{z} + 2\mathbf{u}^T \mathbf{B}_z^T \delta \mathbf{z} + (\mathbf{A}_z \mathbf{z} + \mathbf{B}_z \mathbf{u} + \dot{\mathbf{x}}_g)^T \delta^z [\mathbf{W}^{\max} - \mathbf{W}^{\min}], \\ \mathbf{W}^{\max} &= [W_1^{\max}, W_2^{\max}, \dots, W_{2s}^{\max}]^T, \quad \mathbf{W}^{\min} = [W_1^{\min}, W_2^{\min}, \dots, W_{2s}^{\min}]^T. \end{aligned}$$

тогда релейный алгоритм управления будет:

$$\mathbf{u} = -\text{diag}(\mathbf{u}^{\max}) \Psi \left(\mathbf{B}_z^T \delta \mathbf{z} + \mathbf{B}_z^T \delta^z \left[\mathbf{W}^{\max} - \mathbf{W}^{\min} \right] \right),$$

$$\Psi(a_1, a_2, \dots, a_m) = [\text{sign}(a_1), \text{sign}(a_2), \dots, \text{sign}(a_m)]^T.$$

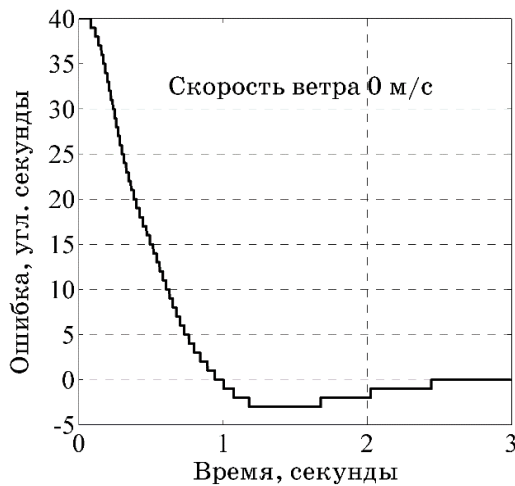
В качестве примера объекта управления выбран привод азимута ГЗ в составе асинхронного двигателя, блока управления им и упрощённой модели механики пространственной металлоконструкции, описывающей её первый резонансный тон, который существенным образом влияет на качество управления.

На упрощённой модели отработаны основные принципы синтеза систем управления ГЗ РТ, созданная модель позволяет дать оценки точности позиционирования ГЗ при наличии нелинейного элемента, ограничивающего управляющий сигнал, а также при ограничениях на фазовые координаты привода, такие как ток и скорость поворота антенны и т.д. Модель ПМК может быть расширена путём увеличения числа масс и упругих связей.

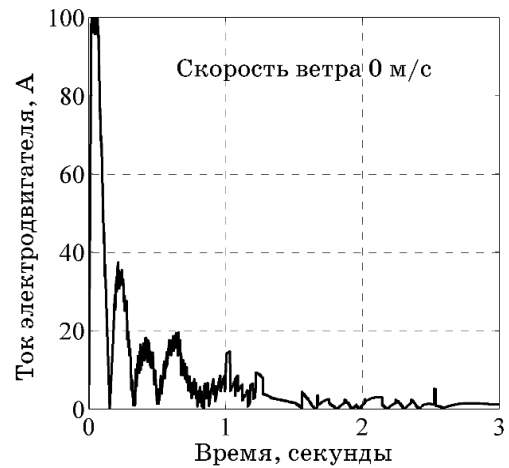
Привод азимута имеет один управляющий вход, исходя из принципа управления по прямому методу Ляпунова, управление ищется в виде:

$$u = -u^{\max} \text{sign} \left(\mathbf{p}_1 \mathbf{z} + \int_t \mathbf{p}_2 \mathbf{z} + \mathbf{B}_z^T \delta^z \left[\mathbf{W}^{\max} - \mathbf{W}^{\min} \right] \right),$$

где $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ – векторы коэффициентов обратных связей. Выбор структуры управляющего воздействия обусловлен тем, что матрица объекта $\mathbf{A}_z$ имеет нулевой корень, и определение коэффициентов δ не может быть выполнено через решение уравнения Ляпунова. Для поиска коэффициентов $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ по качеству переходного процесса использовалась оптимизационная процедура NCD пакета Matlab. Наличие интегратора в законе управления обусловлено необходимостью увеличения астатизма синтезируемой системы с целью более эффективного компенсирования внешнего воздействия.



а



б

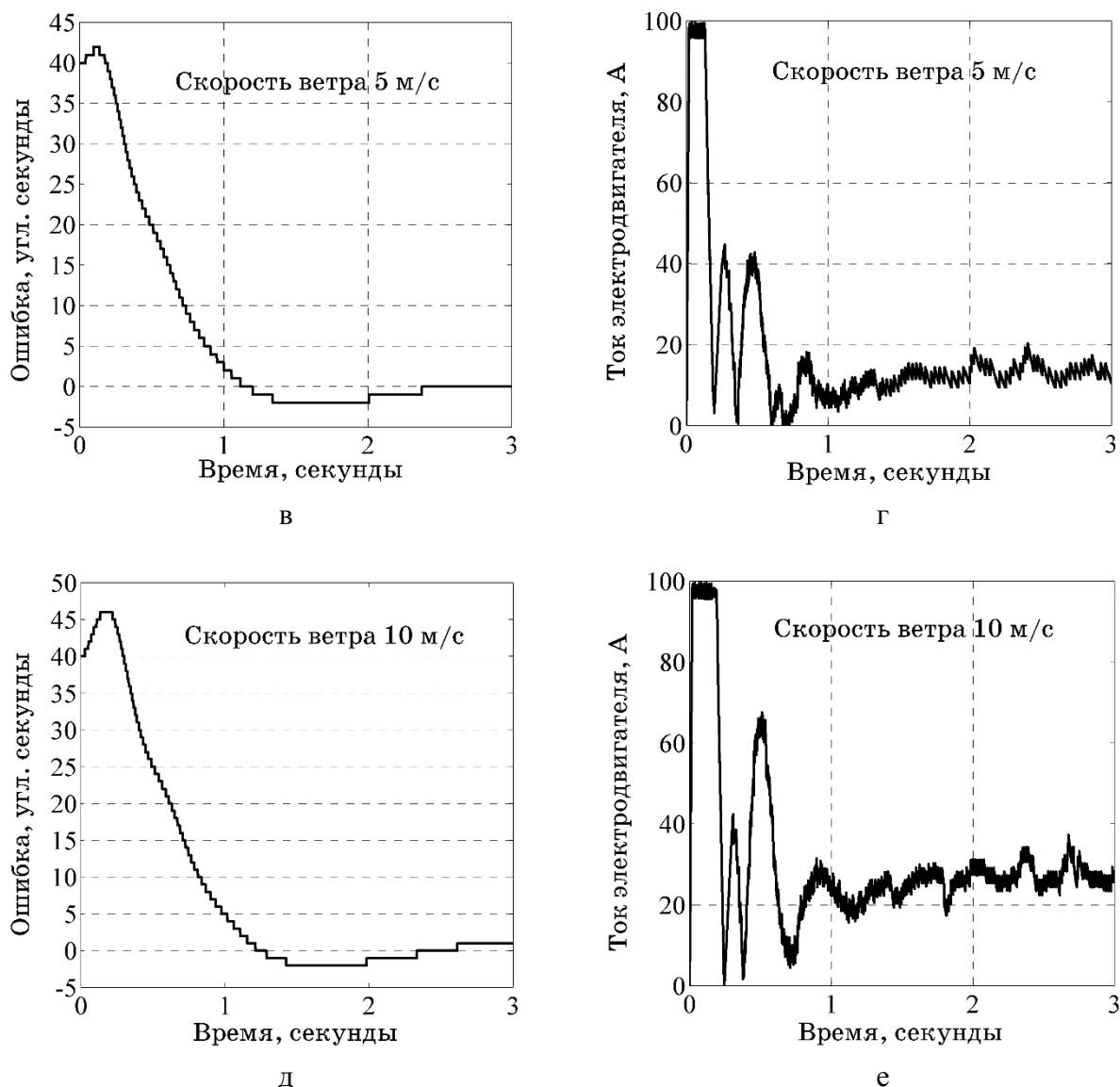


Рис. 2. Результаты моделирования системы управления наведением радиотелескопа по углу азимута при разной скорости ветра.

В пятой главе

Развитые методы прошли апробацию и использовались для анализа динамических систем на прочность в ИИС стенда Гопкинсона. Исследованию подвергались экспериментальные данные по динамической прочности известняка, битума и фибробетона, габбро-диабазы, полученные на установке Гопкинсона под руководством А.М. Брагова. Основной проблемой при построении характеристик динамической прочности строительных материалов явились: анализ экспериментальных данных из-за наличия разных масштабов и значений амплитуд данных для каждого из экспериментов, осцилляционные составляющие в фиксируемых сигналах, а также погрешности, внесённые системой единого времени установки (СЕВ) – несогласованные фазовые сдвиги между нагружающим, отражённым и прошедшими сигналами с датчиков.

На основе экспериментальных данных обнаружен новый эффект, возникающий при динамическом разрушении некоторых строительных материалов, — импульс, рассчитанный по прошедшему сигналу, измеренному в опорном стержне Гопкинсона — Кольского, практически не изменяется в зависимости от скорости ударника. Для обнаружения этого эффекта был использован новый метод цифровой обработки сигналов в экспериментах по разрушению на основе фильтрации и анализа экспериментальных

данных как взаимосвязанной триады нагружающего, отраженного и прошедшего импульсов. Проведенный анализ экспериментальных данных о деформации как функции времени t для нагружающего и прошедшего импульсов позволяет выделить три характерных участка для отфильтрованного импульса: 1) производная от импульса монотонно возрастает; 2) производная от импульса монотонно убывает; 3) производная от импульса монотонно возрастает.

Данное свойство сигнала можно использовать как критерий для фильтрации, в частности, для определения плавающего среднего величины деформации. В математической форме критерий для разделения на осцилляции и плавающее среднее может быть записан в виде задачи квадратичного программирования. Фильтрация триады импульсов (нагружающего, отраженного и прошедшего) осложняется наличием взаимосвязей между ними, такими как закон сохранения энергии и импульса. Поэтому необходимо проводить фильтрацию этих сигналов согласованно и вводить дополнительные ограничения. Важной проблемой при фильтрации триады является наличие фазового сдвига во временной области импульсов относительно друг друга. Нагружающий импульс является опорным сигналом, относительно которого будут рассчитываться фазовые сдвиги отраженного τ_o и прошедшего τ_n сигналов. Тогда фильтрация триады сигналов с учетом фазовых сдвигов может быть записана как задача математического программирования в следующем виде:

$$J = \min_{\tau_n, \tau_o} \{ \Phi(\tau_n, \tau_o) \},$$

при ограничениях: $\tau_{\min} \leq \tau_n \leq \tau_{\max}$, $\tau_{\min} \leq \tau_o \leq \tau_{\max}$, где $\Phi(\tau_n, \tau_o)$ – функция, вычисляемая как решение задачи квадратичного программирования, при фиксированных τ_o и τ_n :

$$\Phi(\tau_n, \tau_o) = \min_{\bar{y}_n, \bar{y}_n, \bar{y}_o} \{ \mathbf{x}[\tau_n, \tau_o]^T \mathbf{H} \mathbf{x}[\tau_n, \tau_o] \},$$

при ограничениях $\Lambda \mathbf{x}[\tau_n, \tau_o] \geq \Lambda \mathbf{y}[\tau_n, \tau_o]$, где

$$\mathbf{x}[\tau_n, \tau_o] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_n[\tau_n] \\ \mathbf{x}_o[\tau_o] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n \\ \mathbf{y}_n[\tau_n] - \bar{\mathbf{y}}_n \\ \mathbf{y}_o[\tau_o] - \bar{\mathbf{y}}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n \\ \mathbf{A}^{\tau_n} \mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n \\ \mathbf{A}^{\tau_o} \mathbf{y}_o - \bar{\mathbf{y}}_o \end{bmatrix}, \mathbf{y}[\tau_n, \tau_o] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_n \\ \mathbf{A}^{\tau_n} \mathbf{y}_n \\ \mathbf{A}^{\tau_o} \mathbf{y}_o \end{bmatrix},$$

где искомые последовательности отсчетов нагружающего, отраженного и прошедшего импульсов $\bar{\mathbf{y}}_n, \bar{\mathbf{y}}_o$ и $\bar{\mathbf{y}}_n$; $\mathbf{A}^{\tau_n}$, $\mathbf{A}^{\tau_o}$ – операторы временного сдвига; Λ – матрица постоянных коэффициентов; $\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_o$ и $\mathbf{y}_n$ – измеренные последовательности отсчетов нагружающего, отраженного и прошедшего импульсов.

Анализ сигналов показал, что осцилляционные составляющие, характеризующие второй и последующие всплески на прошедшем импульсе, присутствуют также и в нагружающем импульсе, и в данном случае эти составляющие могут быть отнесены к шумам самой экспериментальной установки и, как следствие, их влияние на расчёт динамических характеристик должно учитываться отдельно. Для определения такой характеристики динамической прочности, как инкубационное время разрушения, необходимо знать положение максимума и момент времени ему отвечающий. В необработанном сигнале таких составляющих может быть несколько, а после фильтрации остается только один, который и используется для расчёта характеристик динамической прочности. Следует отметить, что положение максимума в исходном и фильтрованном сигналах могут отличаться.

На рисунке 3 приведены зависимости импульсов от скорости нагружения. Как следует из графиков, для каждого из испытанных материалов, импульс, рассчитанный по прошедшему сигналу, измеренному в опорном стержне, практически не изменяется в зависимости от скорости ударника в отличие от импульсов, рассчитанных по

нагружаемому и отражённому сигналам. Можно сказать, что в результате разрушения образца в опорный стержень излучается один и тот же «квант» импульса. В случае, когда образец не разрушался, импульс, измеренный в опорном стержне, имел ту же тенденцию поведения, что и импульсы, рассчитанные по нагружаемому и отражённому сигналам. Данные экспериментов были использованы для построения характеристики, показывающей зависимость импульса разрушения S от скорости роста напряжений σ_t . Расчет проводился по следующей методике:

1. Вычисляем импульс разрушения по формуле: $S = \int_{t_0}^{t_{\sigma_{\max}}} \sigma(t) d\tau$, где $t_{\sigma_{\max}}$ – время, когда напряжение достигает максимума.
2. Вычисляем скорость роста напряжений по формуле: $\sigma_t = \frac{\sigma_{\max}}{t_{\sigma_{\max}}}$, $\sigma_{\max}$ – максимальное значение напряжения.
3. Строим график зависимости $S(\sigma_{\max})$ другого, большего.

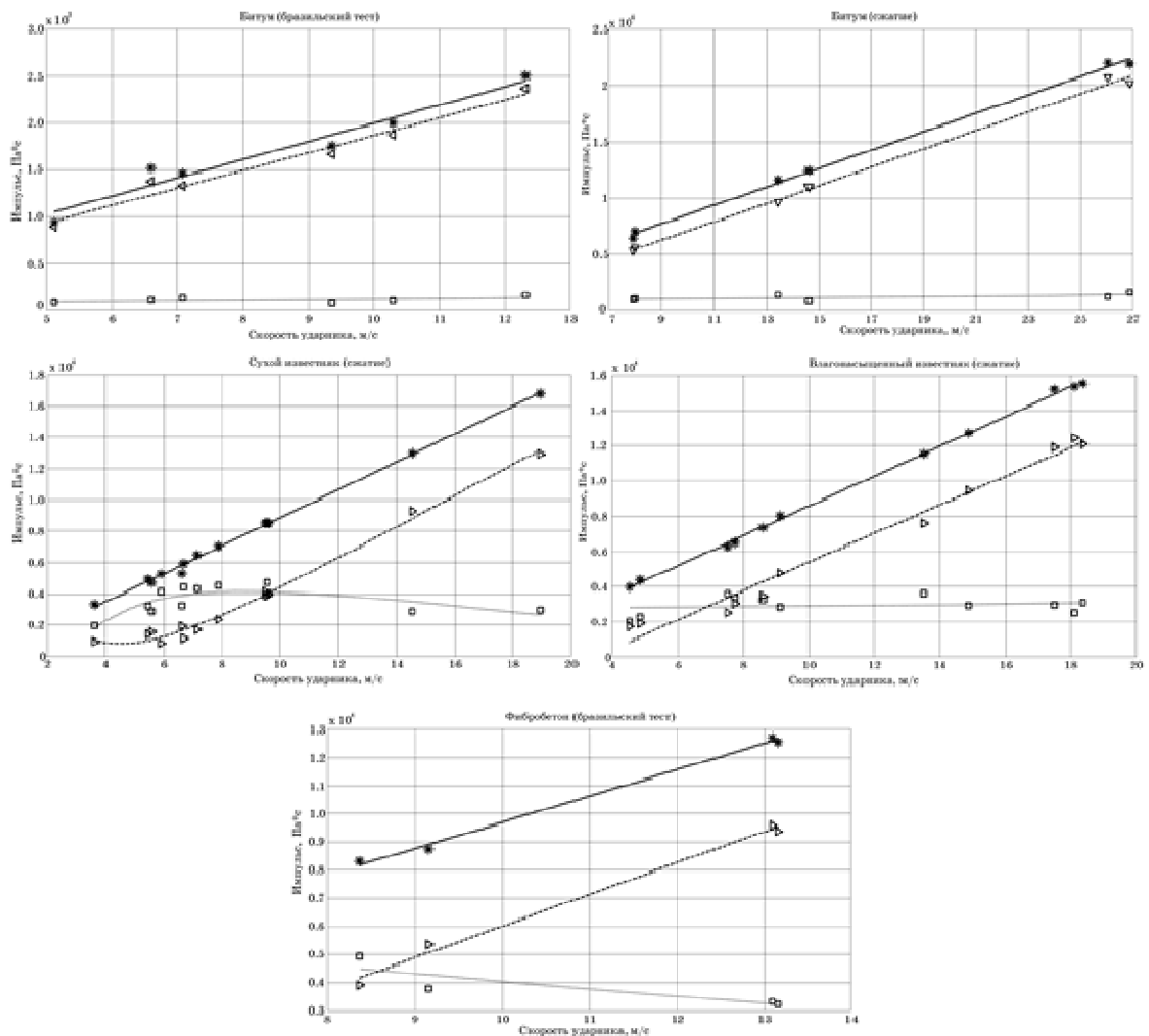


Рис. 3. Зависимости импульсов, рассчитанных по прошедшему (обозначено $*$, а $—$ - аппроксимация), отраженному (обозначено Δ , а $- - -$ - аппроксимация) и нагружающему сигналам (обозначено $\square$, а $\dots$ - аппроксимация), зарегистрированных на тензодатчиках, от скорости удара для разных материалов.

Были исследованы зависимости $S(\sigma_{\max})$ для исходных данных сухого и влагонасыщенного известняка. Исходя из расчётов, импульс разрушения для большинства образцов из влагонасыщенного материала меньше, чем для сухого материала при малых скоростях роста напряжений, хотя для отдельных случаев и незначительно. Данные зависимости для известняка и битума были аппроксимированы с использованием метода наименьших квадратов и описываются выражением:

$$S(\sigma_t) = \frac{a_1}{\sigma_t} + a_0.$$

Для нефiltroванных данных среднеквадратическое отклонение от аппроксимации приведённой зависимостью в 2 раза больше, чем для отфильтрованных, и составило 26.7% и 11.9% соответственно.

Была определена разница между нагружающим импульсом системы и суммой импульсов прошедшего и отражённого сигналов ΔS . Зависимость этой величины от скорости ударника для сухого и влагонасыщенного известняков были аппроксимированы формулой вида: $\Delta S = b_0 + b_1 (v_{\text{уд.}} - b_2) e^{-b_3(v_{\text{уд.}} - b_4)^2} + \frac{b_5}{e^{-b_6(v_{\text{уд.}} - b_7)} + 1}$, где b_i – постоянные

коэффициенты. Исходя из расчётов определено, что при скоростях ударника меньших 8.3 м/с величина ΔS находится в окрестности постоянной величины, при скорости ударника выше 8.3 м/с величина ΔS также находится в окрестности другой постоянной величины, значение которой увеличивается почти вдвое. Таким образом, можно утверждать, что существует пороговое значение скорости, при которой меняется величина ΔS от одного постоянного значения до другого.

Заключение

Содержит сведения об основных результатах диссертации.

Основные результаты работы:

Основные научные и практические результаты диссертационной работы заключаются в следующих положениях:

1. Предложены методы синтеза статистических идентификаторов на основе метода наименьших квадратов для систем управления квазистационарными и нестационарными динамическими объектами типа ИЭМС при ограничениях на их параметры и фазовые координаты с применением матричного оператора сдвига во временной области. Отличительной особенностью методов является то, что для случая низкого отношения сигнал/шум синтез идентификаторов выполняется как решение системы неравенств на основе множественно-функционального подхода, позволяющего при использовании интервальной невязки между выходом идентификатора и реальным динамическим объектом проводить редукцию модели.

2. Предложен метод идентификации с использованием множественно-функционального подхода для нелинейной нестационарной системы типа ИЭМС, основанный на анализе типов асимптотических решений при учете физических закономерностей и соответствующих ограничений на параметры и фазовые координаты при сохранении физической адекватности модели протекающим в объекте процессам и реализуемости законов управления, сформулированный как решение задачи математического программирования.

3. Предложен метод сведения задач синтеза и идентификации СУ динамическими объектами, сформулированных как задачи математического программирования, к эквивалентному при заданной точности множеству задач оптимизации при линейных ограничениях путём аппроксимации произвольных ограничений кусочно-полиномиальными функциями или рациональными дробями. Показано, что данный метод

эффективен при расчёте оптимальных траекторий движения базовых модулей ИЭМС, так как он сводится к интервальным задачам от одной переменной, а именно времени переходного процесса.

4. Разработаны методы синтеза и идентификации сложных распределённых СУ на основе модели базового блока ИЭМС как динамического объекта с параллельной кинематической схемой для управления элементами зеркальных систем больших полноповоротных радиотелескопов.

5. Разработаны методы идентификации параметров и характеристик в ИИС испытательных стендов на основе экспериментальных данных по динамической прочности материалов, полученных на установке с разрезным стержнем Гопкинсона-Кольского и стенде с газовой пушкой, с учетом влияния ИИС и сохранении адекватности физики процессов при удалении влияния сторонних факторов.

Список основных публикаций по теме диссертации

Scopus

1. Кучмин А.Ю. Проблемы идентификации нестационарных динамических объектов // Информационно-управляющие системы. 2018. № 2. С. 18–25.

2. Индейцев Д.А., Мещеряков Ю.И., Кучмин А.Ю., Вавилов Д.С. Многомасштабная модель распространения стационарных упругопластических волн. Доклады Академии наук. 2014. Т. 458. № 2. С. 165.

3. Indeitsev D.A., Meshcheryakov Y.I., Kuchmin A.Y., Vavilov D.S. Multi-scale model of steady-wave shock in medium with relaxation. Acta Mechanica. 2015. Т. 226. № 3. pp. 917-930.

4. Kuchmin A.Yu., V.V. Dubarenko Linearized Model of the Mechanism with Parallel Structure. Smart Electromechanical Systems: The Central Nervous System. Gorodetskiy A.E., Kurbanov V.G. (Eds.) Springer International Publishing AG, DOI 10.1007/978-3-319-53327-8_13, 2017. pp. 169-200.

5. Kuchmin A.Yu. Dubarenko V.V. Definition of a Rigidity of a Hexapod. Smart Electromechanical Systems. Gorodetskiy A.E. (Ed.) Springer International Publishing Switzerland, 2016. pp. 159-163.

6. Кучмин А.Ю., Абрамян А.К., Петров Ю.В., Смирнов И.В., Брагов А.М. Структурно-временные и импульсные характеристики динамического разрушения некоторых строительных материалов. Доклады Академии наук. 2017. Т. 472. № 1. С. 36-39.

7. Kuchmin, Andrey Yu. Group Interaction of SEMS Modules at Control of an Adaptive Surface of the Main Dish, Smart Electromechanical Systems. Group Interaction. Editors: Gorodetskiy, Andrey E., Tarasova, Irina L. (Eds.) Springer Nature Switzerland AG, DOI https://doi.org/10.1007/978-3-319-99759-9_15, 2018. — 183-192 pp.

8. Kuchmin, Andrey Yu. Identification of Dynamics of Modules SEMS, Smart Electromechanical Systems. Group Interaction. Editors: Gorodetskiy, Andrey E., Tarasova, Irina L. (Eds.) Springer Nature Switzerland AG, DOI https://doi.org/10.1007/978-3-319-99759-9_16, 2018. — 193-202 pp.

9. Kuchmin A.Yu. Test Model of a Warehouse Loader Robot for Situational Control Analysis System. Smart Electromechanical Systems. Situational Control. Editors: Gorodetskiy, Andrey E., Tarasova, Irina L. (Eds.) Springer Nature Switzerland AG, DOI https://doi.org/10.1007/978-3-030-32710-1_19, 2019. - 245-258 pp.

10. Kuchmin A.Yu. Synthesis of Optimal Program Control for Synchronizing the Movements of a Group of SEMS Modules Smart Electromechanical Systems. Behavioral Decision Making. Editors: Gorodetskiy, Andrey E., Tarasova, Irina L. (Eds.) Springer Nature Switzerland AG, 2021, pp. 81-94.

Список ВАК Минобрнауки РФ

11. Кучмин А.Ю. Моделирование эквивалентной жесткости адаптивных платформ с исполнительными механизмами параллельной структуры // Информационно-управляющие системы. 2014. № 3(70). С. 30–39.
12. Абрамян А.К., Миранцев Л.В., Кучмин А.Ю. Моделирование течения куэтта простой жидкости в плоском канале наноразмерной высоты. Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 3-21.
13. Кучмин А.Ю. Об одном методе нелинейного программирования с произвольными ограничениями. Информационно-управляющие системы. 2016. Т. 81. № 2. С. 2-10.
14. Кучмин А.Ю. Анализ полиномиальных ограничений методом дерева решений // Информационно-управляющие системы. 2017. № 6(91). С. 9–14.
15. Артеменко Ю. Н., Агапов В. А., Дубаренко В. В., Кучмин А. Ю. Групповое управление актуаторами контррефлектора радиотелескопа // Информационно-управляющие системы. 2012. № 4. С. 2–9.
16. Городецкий А. Е., Курбанов В. Г., Тарасова И. Л., Кучмин А. Ю. Электроприводы системы логического управления положением контррефлектора космического радиотелескопа // Антенны. 2011. №4. С. 52-55.
17. Городецкий А. Е., Курбанов В. Г., Тарасова И. Л., Кучмин А. Ю. Структура системы логического управления положением контррефлектора космического радиотелескопа // Антенны. 2011. № 4. С. 56-59.
18. Артеменко Ю. Н., Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Кучмин А. Ю., Тарасова И. Л. Проблемы создания систем адаптации космических радиотелескопов // Информационно-управляющие системы. 2010. № 3. С. 2-8.
19. Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Метод повышения качества наведения большого радиотелескопа миллиметрового диапазона с адаптивной зеркальной системой / Информационно-управляющие системы - 2007. -№5 с. 14-19.
20. Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Дорошенко М.С., Кучмин А.Ю. Проблемы обработки и передачи информации в локальной вычислительной сети системы управления радиотелескопа. Информационно-управляющие системы. 2009. № 4. С. 2-8.
21. Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дорошенко М.С., Коновалов А.С., Кучмин А.Ю., Тарасова И.Л. Особенности выбора электроприводов зеркальной системы космических радиотелескопов. Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 1. С. 26-31.
22. Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Агапов В.А. Анализ динамики систем автоматического управления актуаторами контррефлектора космического радиотелескопа. Информационно-управляющие системы. 2011. № 6. С. 2-6.
23. Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю. Гироскопический гид системы наведения радиотелескопа. Гироскопия и навигация. 2006. № 4 (55). С. 99.
24. Кучмин А.Ю., Абрамян А.К. Применение математического программирования для анализа экспериментальных данных. Информационно-управляющие системы. 2014. № 6 (73). С. 20-28.

Патенты:

25. Система автоматического наведения радиотелескопа / Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Артеменко Ю. Н., Парщиков А. А. Гиммельман В. Г., Кучинский Г. С., Мозгов А. П., Кучмин А. Ю., патент на изобретение (заявка №2006125897) ФИПС от 03 июля 2007.
26. Агапов В.А., Городецкий А.Е., Кучмин А.Ю., Селиванова Е.Н. Медицинский микроробот. Патент на изобретение RUS 2469752 20.05.2011

27. Артеменко Ю.Н., Бадю Е.И., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Тарасова И.Л. Антенна радиотелескопа. Патент на изобретение RUS 2421765 09.02.2010.
28. Способ адаптации отражающих поверхностей антенны. Артеменко Ю.Н., Городецкий А.Е., Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Тарасова И.Л., Галушкин А.И., Агапов В.А. Патент на изобретение RU 2518398 C1, 10.06.2014. Заявка № 2012149627/07 от 20.11.2012

Монографии:

29. Дубаренко В.В., Кучмин А.Ю., Артеменко Ю.Н. Радиотелескопы; Ин-т проблем машиноведения Рос. акад. наук (ИПМаш РАН). — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2014. — 546 с.
30. В.В. Дубаренко, А.Ю. Кучмин, Ю.Н. Артёменко, В.Ф. Шишлаков. Радиотелескопы миллиметрового диапазона с регулируемыми поверхностями зеркал: монография - СПб.: ГУАП, 2019. - 239 с. ISBN 978-5-8088-1378-6, DOI 10.17513/np.368