

На правах рукописи

Доманская Татьяна Олеговна

**Математическое моделирование нелинейных упругих деформаций композитной плоскости с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками для гармонических материалов**

Специальность 01.02.04 —  
«Механика деформируемого твердого тела»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор  
**Мальков Вениамин Михайлович**

Официальные оппоненты: **Иванова Елена Александровна**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета Петра Великого

**Бригаднов Игорь Альбертович**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры информационных систем и вычислительной техники Санкт-Петербургского горного университета

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный морской технических университет

Защита состоится «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2019 г. в \_\_\_\_: \_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д 002.075.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук по адресу: 199178, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., д. 61.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОНТИ Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук и на сайте института по адресу <http://www.ipme.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 199178, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., д. 61, ученому секретарю диссертационного совета Д 002.075.01.

Автореферат разослан «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2019 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 002.075.01,

доктор технических наук, профессор

Владимир Васильевич Дубаренко

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Разрушение материалов и конструкций обычно происходит по причине образования трещин и их развития под влиянием внешней нагрузки. В настоящее время для оценки прочности и разрушения материалов и конструкций с трещинами используют критерии, основанные на решениях краевых задач линейной теории упругости. Линейная теория упругости использует предположение, что деформации малы по сравнению с единицей. Так как напряжения и деформации в окрестностях концов трещин и точек приложения сосредоточенных сил не ограничены по величине, то целесообразно подобные задачи решать с использованием уравнений нелинейной теории упругости. Этим обусловлена актуальность выполненных в диссертации исследований сингулярных задач на основе уравнений нелинейной теории упругости.

Поскольку точного закона упругости, связывающего напряжения с деформациями, в нелинейной теории упругости не существует, для решения конкретных нелинейных задач используют различные математические модели упругих материалов.

В диссертационной работе рассмотрены две модели гармонических материалов: Джона и полулинейный. С математической точки зрения, неоспоримое преимущество гармонических материалов состоит в том, что для этих моделей при решении нелинейных плоских задач упругости применимы методы комплексных функций. Эти методы позволяют получить точные аналитические решения сложных нелинейных задач о трещинах и сосредоточенных нагрузках. Экспериментальными исследованиями подтверждено, что обе модели материала позволяют описать большие деформации реальных материалов, в частности резиноподобных.

**Цель диссертационной работы** состоит в построении точных аналитических решений нелинейных плоских задач теории упругости для неоднородных и однородных материалов с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками, применении полученных решений для анализа напряженно-деформированного состояния тел для двух моделей упругих материалов (полулинейного и Джона).

**Методы исследования.** Основными методами решения рассматриваемых нелинейных задач являются методы функций комплексной переменной, а также методы математического и компьютерного моделирования, численные методы.

**Основные положения и результаты, выносимые на защиту:**

1. Точные аналитические решения нелинейных плоских задач (плоская деформация и плоское напряженное состояние) для неоднородных и однородных тел с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками для двух моделей гармонических материалов (Джона и полулинейного).

2. Асимптотический анализ номинальных (условных) напряжений, истинных напряжений Коши и перемещений в окрестностях особых точек (концов трещин и точек приложения сил).
3. Формулы, описывающие раскрытие берегов трещин, и коэффициенты интенсивности номинальных напряжений (КИН).
4. Численное моделирование с использованием пакета FreeFem++ решения задачи о трещине для модели полулинейного материала.
5. Сравнение результатов, полученных автором аналитическими методами для двух моделей гармонических материалов, с решениями аналогичных линейных задач и результатами численного моделирования.

**Научная новизна работы.** Для двух моделей гармонических материалов (полулинейного и Джона) впервые получены точные аналитические решения нелинейных плоских задач теории упругости для неоднородных и однородных тел с трещинами и сосредоточенными нагрузками. Для указанных задач в окрестностях особых точек (концов трещин и точек приложения сил) построены асимптотические разложения напряжений и перемещений. В случае межфазных трещин получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений и раскрытия берегов трещин. Разработана программа в пакете FreeFem++ для численного решения методом конечных элементов задачи для плоскости с трещиной в случае модели полулинейного материала. Данный пакет, по-видимому, впервые применен к нелинейной задаче о трещине для полулинейного материала.

Все результаты, изложенные в оригинальной части диссертационной работы, получены впервые и являются новыми.

**Практическая значимость работы.** Следует отметить, что в литературе мало работ, посвященных решению нелинейных задач теории упругости для неоднородных материалов с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками. Причем в большинстве работ использованы приближенные методы решения. Полученные в диссертации результаты имеют важное значение для развития математических моделей и методов нелинейной теории упругости, и для решения проблем прочности композитных материалов с трещинами.

Проводимые исследования были поддержаны грантами РФФИ (проект № 16-31-00065) и Правительства Санкт-Петербурга.

**Обоснованность и достоверность полученных результатов** обеспечивается строгой математической постановкой краевых задач и применяемым математическим аппаратом. Достоверность полученных результатов обоснована тем, что найдены точные аналитические решения рассматриваемых нелинейных задач. В диссертационной работе использованы две модели гармонических материалов: материал Джона и полулинейный. Экспериментальными исследованиями других авторов показано, что

обе модели материала позволяют описать большие деформации реальных материалов, в частности резиноподобных.

**Апробация результатов исследования.** Результаты, полученные в диссертации, были доложены и обсуждены на симпозиумах, научных семинарах, заседаниях научных школ, различных конференциях, в том числе на Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике в Монреале, Канада (XXIV International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. ICTAM-2016). Были сделаны устные доклады на Второй международной конференции «Деформирование и разрушение композитных материалов и конструкций» DFCMS-2016 (г. Москва, ИМАШ РАН, 2016 г.); 56-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе», Всероссийской молодежной научно-инновационной конференции «Физико-математические науки: актуальные проблемы и их решения» (г. Москва, г. Долгопрудный, МФТИ, 2013 г.); Всероссийской научной школе для молодежи «Прикладные математика и физика: от фундаментальных исследований к инновациям» (г. Москва, г. Долгопрудный, МФТИ, 2014 г.); 58-й научной конференции МФТИ с международным участием (г. Москва, г. Долгопрудный, МФТИ, 2015 г.); Международном молодежном научном форуме «ЛОМОНОСОВ-2015» (г. Москва, МГУ, 2015 г.); Международной научной конференции по механике «Седьмые Поляховские чтения» (СПб, СПбГУ, 2015 г.); Международной научной конференции по механике «Восьмые Поляховские чтения» (СПб, СПбГУ, 2018 г.); XLV international summer school-conference Advanced problems in mechanics. APM (Saint Petersburg, Russia, 2017); 44-й, 45-й, 46-й, 47-й, 48-й международных конференциях студентов и аспирантов «Процессы управления и устойчивость» (СПб, СПбГУ, 2013 г., 2014 г., 2015 г., 2016 г., 2017 г.);

Выступления с постерными докладами: Young Researchers in Vacuum Micro/Nano Electronics (VMNE-YR) (Saint Petersburg, Russia, 2016); Young Researchers in Vacuum Micro/Nano Electronics (VMNE-YR) (Saint Petersburg, Russia, 2017);

**Публикации.** По теме диссертации опубликована 21 работа, три из которых ([1], [2], [3]) – в изданиях, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией (ВАК) для публикации основных научных результатов диссертации. Публикации [2], [3], [13], [15] и [21] индексируются в базах данных Scopus и Web of Science. Список работ приведен в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 126 страниц, среди них 10 таблиц, 37 рисунков. Список литературы включает 82 наименования отечественных и зарубежных авторов.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность темы работы, сформулирована ее цель, указаны научная новизна, практическая и теоретическая значимость, перечислены выносимые на защиту научные результаты диссертации и дан обзор литературы по теме диссертации. Отмечено, что значительный вклад в исследования проблем механики трещин внесли В. В. Новожилов, Н. Ф. Морозов, А. И. Лурье, Г. П. Черепанов, Л. М. Зубов, К. Ф. Черных, Р. В. Гольдштейн, В. М. Мальков и др.

**В первой главе** представлены общие соотношения нелинейной теории упругости для плоской задачи (плоская деформация и плоское напряженное состояние), которые используются в диссертации. Отмечено, что для решения плоских задач для областей с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками, где напряжения и деформации не ограничены по величине в окрестностях особых точек, целесообразно использовать уравнения нелинейной теории упругости, наиболее эффективными методами решения уравнений являются методы, основанные на теории комплексных функций.

Рассмотрим уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций плоской задачи в комплексной форме:

$$(s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 = 0, \quad (g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 = 0, \quad (1)$$

штрих и индекс внизу означают частные производные по декартовым координатам  $(x_1, x_2)$  отсчетной конфигурации. Здесь  $s_{ij}$  — компоненты тензора номинальных напряжений,  $g_{ij}$  — компоненты градиента деформации,  $i, j = 1, 2$ . Уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций для обеих плоских задач являются точными, поскольку напряжения  $s_{31} = s_{32} = 0$  для рассматриваемых моделей материала.

Введем комплексные переменные отсчетной и текущей конфигураций  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$  и комплексную функцию номинальных напряжений  $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ . Уравнения (1) тождественно удовлетворяются, если подставить в них выражения

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, & s_{22} - is_{21} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \\ g_{11} + ig_{21} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, & g_{22} - ig_{12} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Комплексные функции  $\zeta(z, \bar{z})$  и  $\sigma(z, \bar{z})$  находятся из закона упругости и граничных условий задачи.

**Во второй главе** рассмотрены плоские задачи (плоская деформация) нелинейной теории упругости для неоднородных и однородных тел с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками для материала Джона. На языке Python3 разработаны и реализованы алгоритмы для

анализа и сравнения результатов решений, использовались библиотеки: SciPy/Numpy, Matplotlib.

Упругий потенциал (удельная энергия деформации) для гармонического материала Джона имеет вид:

$$\Phi = 2\mu[F(I) - k], \quad I = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|, \quad k = \lambda_1 \lambda_2, \quad (3)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — главные кратности удлинений,  $F(I)$  — некоторый функционал.

Закон упругости в комплексной форме плоской задачи:

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= 2\mu \left[ \frac{2}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right], \\ s_{22} - is_{21} &= 2\mu \left[ \frac{2}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $2\mu F'(I) = \frac{1}{4b} [I + \sqrt{I^2 - 16bc}]$ ,  $b, c$  — постоянные.

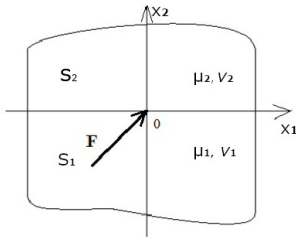


Рис. 1 — Двухкомпонентная плоскость.

Рассмотрим задачу о действии сосредоточенной силы на линии раздела материалов. В начале координат приложена внешняя сила  $F = F_1 + iF_2$  (рис. 1). Напряжения на бесконечности отсутствуют. Условия на линии раздела двух полуплоскостей имеют вид

$$[s_{22} - is_{21}]^+ - [s_{22} - is_{21}]^- = -iF\delta(t),$$

$$[g_{11} + ig_{21}]^+ - [g_{11} + ig_{21}]^- = 0,$$

где  $\delta(t)$  —  $\delta$ -функция Дирака.

Асимптотические разложения номинальных напряжений, истинных напряжений Коши и перемещений в окрестности точки приложения силы показали следующее: номинальные напряжения имеют особенность типа  $1/r$  при  $r \rightarrow 0$ , истинные напряжения Коши не имеют особенности в полюсе. Перемещения имеют логарифмическую особенность типа  $\ln r$  при  $r \rightarrow 0$ .

Как частный случай, из задачи о сосредоточенной силе в неоднородной плоскости, получены решения задачи о сосредоточенной силе на границе полуплоскости.

Решена нелинейная задача о межфазной трещине в неоднородной плоскости (рис. 2). Трещина расположена на промежутке  $[-a, a]$  линии сопряжения полуплоскостей. На бесконечности заданы напряжения  $s_{ij} \rightarrow s_{ij}^\infty$  (свои для каждой полуплоскости). Берега трещины свободны от напряжений:  $(s_{22} - is_{21})^+ = 0, (s_{22} - is_{21})^- = 0, |x_1| < a$ .

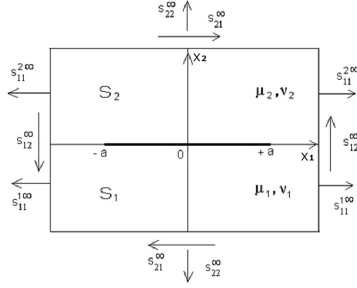


Рис. 2 — Неоднородная плоскость с межфазной трещиной.

Вычислены коэффициенты интенсивности номинальных напряжений (КИН) в окрестности концов трещины

$$K^\pm = \sqrt{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow \pm 1 \pm 0} [(\pm\tau - 1)^{0.5 \pm i\beta} (s_{22} - i s_{21})(\tau)] = \pm \sqrt{\pi} (1 \mp 2i\beta) 2^{\pm i\beta} (s_{22}^\infty - i s_{21}^\infty),$$

где  $\tau = x_1/a$  — безразмерная переменная на линии раздела. Такие же коэффициенты интенсивности были получены в линейной задаче о межфазной трещине.

Рассмотрен случай одноосного растяжения плоскости напряжениями  $s_{22}^\infty$ . Скачок перемещений находится по формуле

$$\Delta u_2(t) = \frac{\sqrt{(\mu_1 + 3\mu_2 - 4\nu_1\mu_2)(\mu_2 + 3\mu_1 - 4\nu_2\mu_1)}}{2\mu_1\mu_2} s_{22}^\infty \sqrt{1 - t^2} \cos \left[ \beta \ln \frac{1+t}{1-t} \right].$$

Оказалось, что формулы для скачка перемещений берегов трещины  $\Delta u_2(t)$  нелинейной и линейной задач полностью совпадают.

Исследованы перемещения берегов трещины при параметрах материала:  $\mu_1 = 10$  кгс/см<sup>2</sup>,  $\mu_2 = 50$  кгс/см<sup>2</sup>,  $\nu_1 = 0.48$ ,  $\nu_2 = 0.45$ . На графиках (рис. 3) представлены перемещения берегов при одноосном растяжении плоскости напряжениями  $s_{22}^\infty = 10$  кгс/см<sup>2</sup>,  $s_{22}^\infty = 30$  кгс/см<sup>2</sup> и  $s_{22}^\infty = 50$  кгс/см<sup>2</sup>.

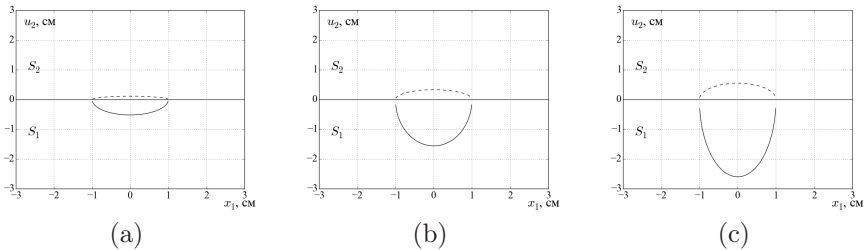


Рис. 3 — Перемещение  $u_2$  для верхней  $S_2$  (пунктирная линия) и нижней  $S_1$  (сплошная линия) полуплоскостей при  $s_{22}^\infty = 10$  кгс/см<sup>2</sup> (а),  $s_{22}^\infty = 30$  кгс/см<sup>2</sup> (б) и  $s_{22}^\infty = 50$  кгс/см<sup>2</sup> (с).



Как частный случай, из задачи о межфазной трещине в неоднородной плоскости, получено решение задачи о трещине в однородной плоскости.

**В третьей главе** рассмотрены плоские задачи (плоская деформация и плоское напряженное состояние) нелинейной теории упругости для неоднородных и однородных тел с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками для полулинейного материала. Аналогично Главе 2 разработаны и реализованы алгоритмы для анализа и сравнения результатов решений. Разработана программа с использованием пакета FreeFem++ и проведены вычислительные эксперименты по растяжению однородной пластины с трещиной для полулинейного материала.

Упругий потенциал для полулинейного материала имеет вид:

$$\Phi = 0,5\lambda \text{tr}^2(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I}) + \mu \text{tr}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I})^2,$$

где  $\lambda, \mu$  – параметры Ляме,  $\mathbf{\Lambda}$  – тензор кратностей удлинений.

Закон упругости плоской задачи

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= (\lambda + 2\mu)(g_{11} + ig_{21}) + \lambda(g_{22} - ig_{12}) + k e^{i\omega}, \\ s_{22} - is_{21} &= (\lambda + 2\mu)(g_{22} - ig_{12}) + \lambda(g_{11} + ig_{21}) + k e^{i\omega}, \\ s_{33} &= \lambda[(g_{11} + g_{22}) \cos \omega + (g_{21} - g_{12}) \sin \omega] + k + 2\mu\lambda_3, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $k = \lambda(\lambda_3 - 3) - 2\mu$ ,  $\lambda_3$  – кратность удлинения в поперечном направлении.

Решена задача о действии сосредоточенной силы на линии раздела материалов. В начале координат приложена внешняя сила  $F = F_1 + iF_2$  (рис. 1). Напряжения на бесконечности отсутствуют. Условия на линии раздела двух полуплоскостей имеют вид

$$[s_{22} - is_{21}]^+ - [s_{22} - is_{21}]^- = -iF\delta(t), \quad [g_{11} + ig_{21}]^+ - [g_{11} + ig_{21}]^- = 0.$$

Асимптотические разложения номинальных напряжений, истинных напряжений Коши и перемещений в окрестности точки приложения силы показали следующее: номинальные напряжения имеют особенность типа  $1/r$  при  $r \rightarrow 0$ , истинные напряжения Коши не имеют особенности в полюсе. Перемещения имеют логарифмическую особенность типа  $\ln r$  при  $r \rightarrow 0$ .

Как частный случай, из задачи о сосредоточенной силе в неоднородной плоскости, получены решения задачи о сосредоточенной силе на границе полуплоскости.

Решена нелинейная задача о межфазной трещине в неоднородной плоскости (рис. 2). Трещина расположена на промежутке  $[-a, a]$  линии сопряжения полуплоскостей. На бесконечности заданы напряжения  $s_{ij} \rightarrow s_{ij}^\infty$  (свои для каждой полуплоскости). Берега трещины свободны от напряжений:  $(s_{22} - is_{21})^+ = 0, (s_{22} - is_{21})^- = 0, |x_1| < a$ .

Коэффициенты интенсивности номинальных напряжений (КИН) в окрестности концов трещины определяются по формуле, аналогичной для модели материала Джона.

Рассмотрен случай одноосного растяжения плоскости напряжениями  $s_{22}^\infty$ . Касательные напряжения на бесконечности равны нулю. Скачок перемещений при плоской деформации находится по формуле

$$\Delta u_2(t) = \frac{\sqrt{(\mu_1 + \mu_2 - 2\nu_1\mu_2)(\mu_2 + \mu_1 - 2\nu_2\mu_1)}}{2\mu_1\mu_2} s_{22}^\infty \sqrt{1-t^2} \cos \left[ \beta \ln \frac{1+t}{1-t} \right].$$

Исследованы перемещения берегов трещины при параметрах материала:  $\mu_1 = 10$  кгс/см<sup>2</sup>,  $\mu_2 = 50$  кгс/см<sup>2</sup>,  $\nu_1 = 0.48$ ,  $\nu_2 = 0.45$ . На графиках (рис. 4) представлены перемещения берегов при одноосное растяжение плоскости напряжениями  $s_{22}^\infty = 10$  кгс/см<sup>2</sup>,  $s_{22}^\infty = 30$  кгс/см<sup>2</sup> и  $s_{22}^\infty = 50$  кгс/см<sup>2</sup>.

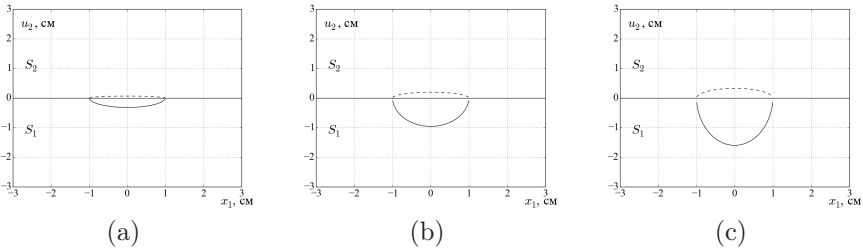


Рис. 4 — Перемещение  $u_2$  для верхней  $S_2$  (пунктирная линия) и нижней  $S_1$  (сплошная линия) полуплоскостей при  $s_{22}^\infty = 10$  кгс/см<sup>2</sup> (а),  $s_{22}^\infty = 30$  кгс/см<sup>2</sup> (б) и  $s_{22}^\infty = 50$  кгс/см<sup>2</sup> (с).

Как частный случай, из задачи о межфазной трещине в неоднородной плоскости, получено решение задачи о трещине в однородной плоскости.

Для модели полулинейного материала численно решена задача о трещине в однородной плоскости с помощью разработанной автором программы с использованием пакета FreeFem++ и проведены вычислительные эксперименты. Пакет FreeFem++ предназначен для решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью метода конечных элементов (МКЭ). В работах других авторов показаны возможности применения пакета к решению задач линейной теории упругости и нелинейным задачам для модели неогукковского материала. В диссертационной работе пакет, по-видимому, впервые применен к задачам о трещинах для модели полулинейного материала.

Рассмотрена нелинейная плоская задача (плоская деформация) о растяжении пластины с трещиной (разрезом) для модели полулинейного материала. Для решения задачи применяется метод конечных элементов, в основе которого лежит вариационный метод (начало возможных перемещений).

Алгоритм решения задачи состоит из основных этапов:

1. В исследуемой области строится треугольная сетка. На границах задается количество узлов. В качестве конечных элементов выбран класс  $P_1$  — симплексные конечные элементы с непрерывными линейными базисными функциями;
2. Формулируется вариационная задача нахождения  $\delta \mathbf{u}_{n+1}$ ;
3. Применяется метод Ньютона:
  - Задаются нулевые начальные перемещения.
  - На каждой итерации цикла решается вариационная задача по нахождению перемещения  $\delta \mathbf{u}_{n+1}$ .
  - Как только  $\delta \mathbf{u}_{n+1}$  становится достаточно малым, цикл прерывается.

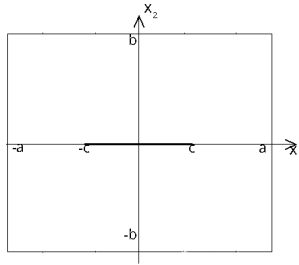


Рис. 5 — Однородная пластина с трещиной.

Область занимаемая пластиной:  $-2 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq 2$ , где  $x_1, x_2$  — декартовы координаты (рис. 5). Трещине соответствует промежуток:  $-1 \leq x_1 \leq 1, -0.02 \leq x_2 \leq 0.02$ . Трещина моделируется эллипсом с малым отношением полуосей  $k = 0.02$ .

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

при  $x_1 = \pm a$  имеем  $u_1 = u_2 = 0$ ;

при  $x_2 = \pm b$  имеем  $s_{22} = \Delta, s_{21} = 0$ ;

при  $-k \leq x_2 \leq k, -c \leq x_1 \leq c$  имеем  $s_{22} = s_{21} = 0$ .

Здесь  $u_2$  — перемещения,  $s_{ij}$  — напряжения,  $i, j = 1, 2, \Delta$  является заданной величиной, которая варьируется. Параметры материала:  $\lambda = 240$  кгс/см<sup>2</sup>,  $\mu = 10$  кгс/см<sup>2</sup>,  $\nu = 0.48$ .

Рисунок 6 (а): на границах задано количество узлов равное 40. Раскрытие берегов составляет 0.41 см при  $s_{22} = 4$  кгс/см<sup>2</sup>. Рисунок 6 (б): на внешней границе задано количество узлов равное 40, на внутренней границе задано количество узлов равное 20. Раскрытие берегов составляет 0.40 см при  $s_{22} = 4$  кгс/см<sup>2</sup>. Рисунок 6 (с): на границах задано количество узлов равное 20. Раскрытие берегов составляет 0.37 см при  $s_{22} = 4$  кгс/см<sup>2</sup>. Рисунок 7 (а): на границах задано количество узлов равное 40. Раскрытие берегов составляет 0.69 см при  $s_{22} = 8$  кгс/см<sup>2</sup>. Рисунок 7 (б): на внешней границе задано количество узлов равное 40, на внутренней границе

задано количество узлов равное 20. Раскрытие берегов составляет 0.66 см при  $s_{22} = 4$  кгс/см<sup>2</sup>. Рисунок 7 (с): на границах задано количество узлов равное 20. Раскрытие берегов составляет 0.64 см при  $s_{22} = 8$  кгс/см<sup>2</sup>.

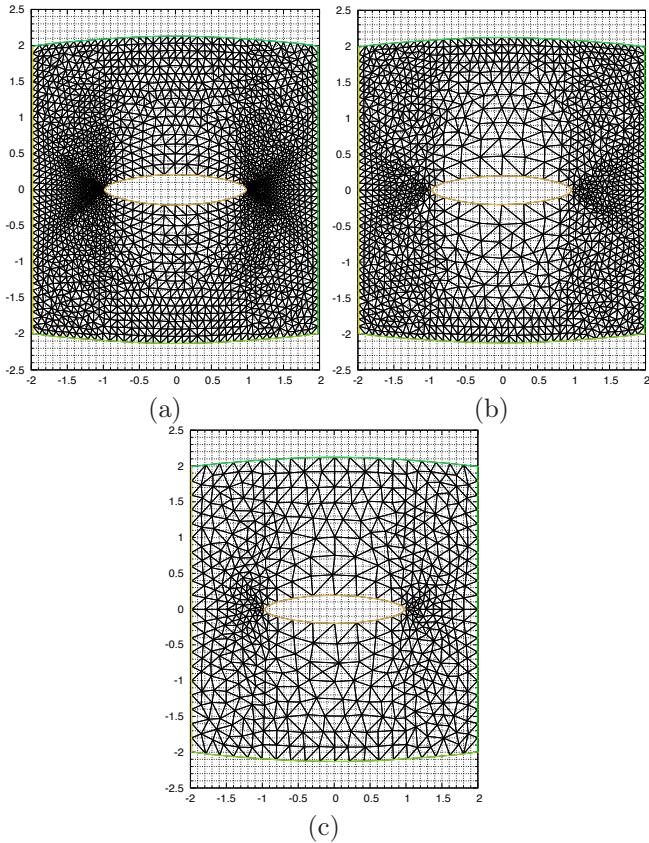


Рис. 6 — Раскрытие берегов трещины при  $s_{22} = 4$  кгс/см<sup>2</sup>.

Расчеты показали, что указанное количество узлов на границах является оптимальным. Максимальное раскрытие берегов трещины для однородной пластины размера 4x4 см достигается при максимально возможном напряжении  $s_{22} = 8$  кгс/см<sup>2</sup>, действующем на верхней и нижней границе пластины. При дальнейшем увеличении напряжения  $s_{22}$  для пластины, указанного размера, процесс становится неустойчивым. Расчеты проводились на сгущающихся конечно-элементных сетках, результаты, полученные на сетках с разным разбиением, существенно не различались. При этом изменяются нормы разности численных решений при последовательном измельчении сеток. Таким образом, в процессе вычислений показана сходимость метода и возможность использования

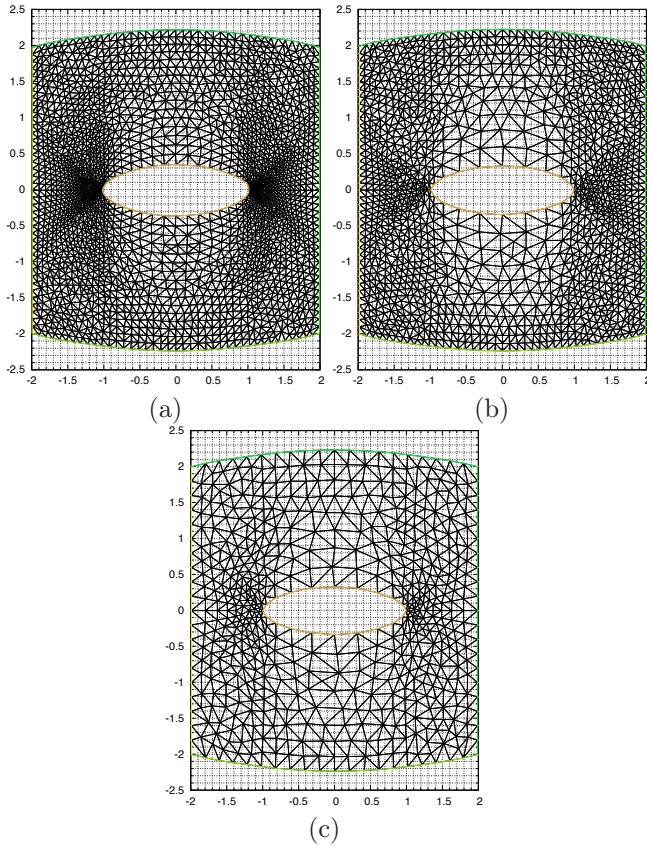


Рис. 7 — Раскрытие берегов трещины при  $s_{22} = 8 \text{ кг/см}^2$ .

написанной в FreeFem++ программы для решения плоских нелинейных задач. Устойчивость реализованного алгоритма МКЭ показана проводимыми вычислительными экспериментами.

**Четвертая глава** посвящена сравнению решений нелинейных плоских задач о сосредоточенных силах и межфазных трещинах для двух моделей упругого материала (полулинейного и Джона), полученных в предыдущих главах, между собой и с решениями аналогичных линейных задач. Проведено также сравнение результатов расчетов, полученных по аналитическому решению, с результатами численного моделирования в пакете FreeFem++ и результатами численного моделирования других авторов.

В задачах о действии сосредоточенной силы на линии раздела материалов и на границе полуплоскости установлено, что для двух моделей материала номинальные напряжения имеют особенность вида  $1/r$ , а перемещения —  $\ln r$  в окрестности точки приложения силы (при  $r \rightarrow 0$ ).

Такую же особенность имеют напряжения и перемещения аналогичных линейных задач.

Коэффициенты сингулярных членов в некоторых случаях совпадают, в других имеют отличия. Например, в нелинейных задачах Фламана главные члены асимптотических разложений номинальных напряжений для двух материалов совпадают, а в перемещениях отличаются в два раза.

Истинные напряжения Коши не имеют особенности в точке приложения силы. Это объясняется тем, что истинные напряжения представляют отношение силы к текущей площади, которая сама имеет особенность  $1/r$ .

Сравнение с решением линейной задачи Фламана показало, что напряжения и перемещения имеют одинаковый вид особенности в окрестности точки приложения силы: напряжения  $1/r$ , перемещения —  $\ln r$ , но коэффициенты при сингулярных членах в нелинейных и линейных задачах различны.

В нелинейных задачах о межфазных трещинах для двух моделей материала установлено, что асимптотические разложения номинальных напряжений имеют особенность  $1/\sqrt{r}$  при  $r \rightarrow 0$ , такая же особенность присутствует в асимптотических разложениях напряжений линейной задачи. Асимптотические разложения истинных напряжений Коши для этих моделей материала при плоской деформации не имеют особенности у концов трещины. Напряжения и перемещения содержат осцилляцию в окрестностях концов межфазной трещины, как и в линейной задаче.

Коэффициенты интенсивности номинальных напряжений и формулы раскрытия берегов трещины нелинейной (материал Джона) и линейной задач при одноосном растяжении плоскости полностью совпадают, а для полулинейного материала имеют отличия.

В задачах о трещинах в однородной плоскости установлено, что для двух моделей материалов (материал Джона и полулинейный материал) номинальные напряжения имеют особенность вида  $1/\sqrt{r}$  при  $r \rightarrow 0$ . Истинные напряжения Коши не имеют особенности у концов трещины. КИН для двух моделей материалов в нелинейных и линейных задачах полностью совпадают. Формулы раскрытия трещины нелинейной (материал Джона) и линейной задач совпадают. Для полулинейного материала формулы раскрытия берегов трещины отличаются постоянным множителем от формул раскрытия трещины в аналогичной линейной задаче.

Для однородной пластины с трещиной установлено, что результаты автора, полученные аналитическими методами, и результаты численного решения в FreeFem++ существенно не отличаются.

**В заключении** сформулированы основные результаты проведенного в диссертационной работе исследования:

1. Для двух моделей гармонических материалов (Джона и полулинейного) получены точные аналитические решения плоских нелинейных

задач (плоская деформация и плоское напряженное состояние) для неоднородных и однородных тел с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками.

2. Построены асимптотические разложения номинальных напряжений, истинных напряжений Коши и перемещений в окрестностях особых точек.

3. Получены формулы раскрытия берегов трещины под действием внешней нагрузки и вычислены коэффициенты интенсивности номинальных напряжений (КИН).

4. Разработана программа с использованием пакета FreeFem++ для решения задачи о трещине для модели полулинейного материала. Выполнены вычислительные эксперименты для однородной пластины с трещиной.

5. Проведено сравнение результатов, полученных автором аналитическими методами для двух моделей гармонических материалов, с решениями аналогичных линейных задач и результатами численного моделирования.

По результатам проведенных исследований могут быть даны рекомендации для оценки прочности и разрушения композитных материалов и конструкций с трещинами в условиях больших деформаций.

## **Публикации автора по теме диссертации**

### **Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:**

1. Мальков В. М., Малькова Ю. В., Доманская Т. О. Анализ напряжений двухкомпонентной плоскости и полуплоскости при действии сосредоточенной силы для двух моделей гармонического материала // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2016. — Вып. 1. — С. 38-52.

2. Доманская Т. О., Мальков В. М., Малькова Ю. В. Математическое моделирование деформации композитной плоскости с межфазной трещиной для гармонического материала Джона // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2017. — Том 13. — Вып. 4. — С. 372-383.

3. Доманская Т. О., Мальков В. М., Малькова Ю. В. Математическое моделирование больших деформаций композитной плоскости с межфазной трещиной для полулинейного материала // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2018. — Том 14. — Вып. 2. — С. 89-102.

### **Другие публикации:**

4. Доманская Т.О., Мальков В. М. Задача Мичела для полулинейного материала // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. — СПб.: Изд-во СПбГУ. — 2013. — С. 193-197.

5. Доманская Т. О., Мальков В. М. Задача Мичела для полулинейного материала // Материалы научно-практической конференции. Изд-во: Ульяновск, SIMJET. — 2013. — С. 56-59.

6. Доманская Т. О., Мальков В. М. Плоская задача Мичела для полулинейного материала // Научное творчество XXI века: Сб. трудов по итогам VII Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых / под ред. Я. А. Максимова. — Красноярск: Научно-инновационный центр. — 2013. — С. 306-312.

7. Доманская Т. О. Плоская задача Мичела для полулинейного материала // Труды 56-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе», Всероссийской молодежной научно-инновационной конференции «Физико-математические науки: актуальные проблемы и их решения». Аэрофизика и космические исследования. Изд-во: МФТИ. — 2013. — Т. 1. — С. 30-31.

8. Доманская Т. О., Мальков В. М. Нелинейная задача о сосредоточенной силе на межфазной границе двух полуплоскостей // Процессы управления и устойчивость: Труды 45-й международной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. — СПб.: Изд-во СПбГУ. — 2014. — С. 123-128.

9. Доманская Т. О., Мальков В. М. Сосредоточенная сила на межфазной границе двух полуплоскостей из материала Джона // Процессы управления и устойчивость. — 2015. — Т. 2. — № 1. — С. 143-148.

10. Доманская Т. О. Нелинейная задача о сосредоточенной силе в двухкомпонентной плоскости из материала Джона // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015» [Электронный ресурс] / Отв. ред. А. И. Андреев, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — М.: Изд-во МАКС Пресс. — 2015. — С. 1.

11. Доманская Т. О. Нелинейная задача о действии сосредоточенной силы для некоторых гармонических материалов // Тезисы 58-й научной конференции МФТИ с международным участием [Электронный ресурс]. Изд-во: МФТИ. — 2015. — С. 1-10.

12. Доманская Т. О., Мальков В. М. Нелинейная задача о сосредоточенной силе на межфазной границе двух полуплоскостей // Седьмые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике. — М.: Издатель И. В. Балабанов. — 2015. — С. 169.

13. Domanskaya T. O., Malkov V. M. The state of stress in a vicinity of the concentrated force on an interface of bi-material plate // International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov’s Reading. — 2015. — P. 1-4. IEEE. DOI: 10.1109/Polykhov.2015.7106724.



14. Доманская Т. О., Мальков В. М., Малькова Ю. В. Анализ напряженного состояния пластины с межфазной трещиной для гармонического материала Джона // Процессы управления и устойчивость. — 2016. — Т. 3. — № 1. — С. 168-172.

15. Domanskaya T. O., Malkov V. M., Malkova Yu. V. Singular problems for bi-material plane of John's harmonic material // 2016. Young Researchers in Vacuum Micro/Nano Electronics (VMNE-YR). — 2016. — P. 1-4. IEEE. DOI: 10.1109/VMNEYR.2016.7880401.

16. Доманская Т. О., Мальков В. М., Малькова Ю. В. Нелинейная задача для композитной пластины с межфазной трещиной для гармонического материала Джона // Труды Второй междунар. конф. «Деформирование и разрушение композитных материалов и конструкций». (DFCMS-2016). Изд-во: ИМАШ РАН. Москва. — 2016. — С. 33-35.

17. Tatiana Domanskaia, Venyamin Malkov, Yulia Malkova. Bi-material plane of John's harmonic material with a point force at interface // XXIV Intern. Congress of Theoret. and Appl. Mech. (ICTAM). — 2016. — P. 1958-1959.

18. Domanskaya T. O., Malkov V. M., Malkova Yu. V. The analysis of stress-strain state of a composite plane with interface crack for John's harmonic material // XLV international summer school-conference Advanced problems in mechanics (APM). — 2017. — P. 123-130.

19. Доманская Т. О., Мальков В. М., Малькова Ю. В. Анализ напряженного состояния плоскости с межфазной трещиной для полуплоскостного материала // Процессы управления и устойчивость. — 2017. — Т. 4. — № 1. — С. 101-105.

20. Т.О. Доманская, В.М. Мальков, Ю.В. Малькова. Неоднородная плоскость с межфазной трещиной для модели полуплоскостного материала. Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, VIII – Поляховские чтения. — СПб.: Изд-во СПбГУ. — 2018. — С. 199-200.

21. T. O. Domanskaya, V. M. Malkov, and Yu. V. Malkova. Bi-material plane with interface crack for the model of semi-linear material // International Conference on Mechanics – Eighth Polyakhov's Reading. AIP Conference Proceedings 1959, 070009. — 2018. — P. 1-8. DOI: 10.1063/1.5034684.

*Доманская Татьяна Олеговна*

Математическое моделирование нелинейных упругих деформаций композитной плоскости с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками для гармонических материалов

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать \_\_\_\_\_.\_\_\_\_\_.\_\_\_\_\_. Заказ № \_\_\_\_\_

Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ . Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография \_\_\_\_\_