

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт проблем машиноведения Российской академии наук

На правах рукописи

Федотов Александр Васильевич



**Гашение колебаний в распределенных упругих системах с  
использованием пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов**

05.11.16 – Информационно-измерительные и управляющие системы  
(в машиностроении)

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,  
член-корреспондент РАН  
Александр Константинович Беляев

Санкт-Петербург – 2020

## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Теоретические основы управления колебаниями балок с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов .....</b>	<b>18</b>
1.1. Современные подходы к задаче активного управления упругими системами.....	18
1.2. Основы модального управления упругими системами .....	22
1.3. Работа систем управления с одной и двумя обратными связями.....	27
1.3.1. Система управления с одним контуром.....	28
1.3.2. Система управления с двумя контурами .....	33
1.4. Работа пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов.....	35
1.4.1. Балка Бернулли-Эйлера с пьезоэлементами: связанная теория .....	38
1.4.2. Работа прямоугольных сенсоров и актуаторов .....	46
<b>Глава 2. Подготовка эксперимента по локальному и модальному управлению изгибными колебаниями балки .....</b>	<b>52</b>
2.1. Постановка эксперимента .....	54
2.1.1. Схема установки и методика измерений .....	54
2.1.2. Характеристики использованных приборов и материалов.....	58
2.2. Расстановка сенсоров и актуаторов и определение модальных матриц .....	62
2.2.1. Расстановка сенсоров и актуаторов.....	62
2.2.2. Колебания балки с пьезоэлементами .....	69
2.2.3. Метод идентификации для определения модальных матриц.....	77
<b>Глава 3. Экспериментальное сравнение локальных и модальных систем управления изгибными колебаниями балки.....</b>	<b>89</b>
3.1. Фильтры, используемые при синтезе законов управления .....	91

3.2. Локальные системы управления с одним контуром .....	96
3.3. Локальные системы управления с двумя контурами .....	101
3.4. Модальная система управления с двумя контурами .....	109
<b>Глава 4. Численное исследование локальных и модальных систем управления и различных вариантов моделирования пьезоэлементов .....</b>	<b>117</b>
4.1. Алгоритм численного решения задачи о колебаниях шарнирно-опертой балки .....	119
4.1.1. Постановка задачи.....	119
4.1.2. Численное решение задачи о колебаниях балки с управлением.....	120
4.2. Сравнение различных моделей балки без управления.....	123
4.2.1. Исследование разных способов учета момента, создаваемого пьезосенсорами.....	123
4.2.2. Сравнение моделей балки в ANSYS и Matlab.....	128
4.3. Исследование эффективности различных систем управления .....	131
4.4. Влияние модели пьезоэлементов на эффективность системы управления	143
<b>Глава 5. Воспроизведение результатов эксперимента с помощью численного моделирования и проектирование новых систем управления .....</b>	<b>154</b>
5.1. Получение результатов управления на основе снятых экспериментально характеристик объекта.....	155
5.1.1. Алгоритм получения результатов управления.....	156
5.1.2. Численное получение результатов управления в сравнении с экспериментом.....	157
5.2. Конечно-элементное моделирование экспериментальной установки .....	160
5.2.1. Описание конечно-элементных моделей.....	160
5.2.2. Сравнение частотных характеристик, полученных экспериментально и численно.....	164

5.3. Вычисление результатов управления на основе полученных численно характеристик объекта.....	170
5.3.1. Разделение форм в модальной системе управления.....	170
5.3.2. Создание модальной системы управления №2 .....	173
5.3.3. Сравнение результатов работы различных систем управления.....	175
<b>Заключение.....</b>	<b>182</b>
<b>Литература.....</b>	<b>185</b>

## Введение

### Актуальность темы исследования

Настоящая диссертационная работа посвящена проблеме активного управления колебаниями распределенных механических систем. Данная проблема на протяжении последних десятилетий является одной из ключевых в технике. Вибрации в механических системах возникают повсеместно под воздействием как внутренних источников возбуждения, связанных с циклическим движением подвижных частей механизмов (например, турбины, двигатели машин), так и нагрузок, обусловленных воздействиями внешней среды (например, при движении автомобилей, летательных аппаратов, сейсмических колебаниях земной поверхности). Зачастую возникающие вибрации являются нежелательными и даже опасными для конструкций и машин, они могут вызывать погрешности в их работе, приводить к их износу и разрушению, а также создавать ненужный шум.

Для борьбы с нежелательными вибрациями могут быть использованы как пассивные элементы (демпферы), так и активные элементы управления, предполагающие управление с обратной связью. Активное управление колебаниями является одной из задач мехатроники – современной области науки, включающей в себя механику, электронику, информационные технологии и теорию управления. Мехатроника стремительно развивается в последние двадцать-тридцать лет. В круг перспективных задач мехатроники и активного гашения колебаний входит управление такими объектами, как:

- 1) Роботы и робототехнические системы
- 2) Медицинские приборы
- 3) Высокоточные обрабатывающие станки
- 4) Автомобили и летательные аппараты
- 5) Легкие конструкции (объекты «lightweight design»)
- 6) Здания, мосты и другие инженерные сооружения

Механические системы, включающие в себя элементы активного управления (сенсоры и актуаторы) и способные изменять свое поведение в зависимости от

внешних условий с целью соответствия заданным требованиям, в литературе получили название «умных конструкций» (“smart structures”); материалы, входящие в данные конструкции и обеспечивающие управление их поведением, по аналогии называются «умными материалами» (“smart materials”). В качестве «умных материалов» зачастую применяются пьезоэлектрики. Распространенность пьезоэлектрических элементов объясняется их высокими эксплуатационными характеристиками – легкий вес, простота в использовании, возможность придания им любой требуемой формы и широкий частотный диапазон их работы. В исследованиях, изложенных в настоящей работе, в качестве элементов управления используются именно пьезоэлектрические преобразователи.

Специфика управления системами с распределенными параметрами состоит в том, что такие системы имеют формально бесконечное число степеней свободы, следовательно, они не являются полностью управляемыми и наблюдаемыми. Кроме того, распределенные системы имеют бесконечное число резонансов, причем именно резонансные колебания представляют для работы данных систем наибольшую опасность.

Среди общепринятых подходов к активному управлению колебаниями распределенных систем можно выделить локальный и модальный. Локальный, или децентрализованный, подход подразумевает, что управляющее воздействие, приложенное в некоторой точке системы, зависит исключительно от деформаций или смещений системы, измеренных в данной точке, таким образом, используются локальные связи сенсор-актуатор. Модальный же подход предполагает раздельное управление различными формами колебаний упругого объекта, при этом для управления каждой из форм используется весь массив имеющихся сенсоров и актуаторов. Указанные подходы к управлению принципиально различны, при этом каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Идеология модального подхода несколько сложнее, чем локального, поскольку он требует определенной настройки контуров для раздельного управления формами колебаний объекта.

Целью данной работы является теоретическое и экспериментальное воплощение модального подхода к управлению, его сравнение с локальным и

определение наиболее эффективных методов управления распределенными системами.

### **Степень разработанности темы исследования**

Текущее состояние мехатроники характеризуется большим разнообразием используемых для целей управления материалов и систем. Обзор функциональных материалов дан в работах [16, 66], где пьезоэлектрические и магнитострикционные материалы рассматриваются наряду со сплавами с памятью формы. Проблемам активного управления колебаниями посвящены работы [11, 24, 57]. В то же время широкое применение получили различные полуактивные и гибридные системы, содержащие как активные, так и пассивные элементы. Обзор таких систем, применяемых главным образом для управления вибрациями в зданиях и инженерных сооружениях, приведен в статьях N.R. Fisco и H. Adeli [21, 22]. В настоящее время активно развивается также биомехатроника, объектом изучения которой является взаимодействие биологических организмов и мехатронных систем. Различным проблемам биомехатроники, в частности, работе интеллектуальных ортезов, посвящены работы В.М. Мусалимова с соавторами [4, 49, 50].

Что касается выбора структуры управления, в задачах используется ряд методов оптимального управления, в числе которых наиболее распространенными являются линейно-квадратичный (LQR),  $H_2$  и  $H_\infty$ -методы. Применение указанных методов в задачах управления колебаниями балок и балочных конструкций анализируется в работах G.E. Stavroulakis с соавторами [62, 63], где последние два метода признаются наиболее предпочтительными благодаря их большей робастности. Обзор различных стратегий управления, включая линейно-квадратичную, линейно-квадратичную гауссовскую, а также контроллеров, использующих нейронные сети и нечеткую логику, в приложении к задачам управления колебаниями строительных конструкций дается в [22]. В работе R. Kumar [45] рассматривается экспериментальное применение адаптивного линейно-квадратичного гауссовского алгоритма и нейронных сетей к задачам управления колебаниями балочных конструкций.

Большинство систем активного управления колебаниями распределенных объектов основано на одном из двух альтернативных подходов: локальном или модальном. Применение локального подхода к управлению к задачам виброизоляции освещается в статьях S.J. Elliott и др. [19, 37, 60]. Главным недостатком локального подхода является проблема взаимного влияния различных контуров управления, связанных через упругий объект, что осложняет задачу дизайна законов управления для каждого контура.

Модальный подход предполагает независимое управление различными формами колебаний упругого объекта. Изначально идея модального управления появилась в химической промышленности, а затем данный подход был сформулирован для задач механики L.A. Gould и M.A. Murray-Lasso [25] и получил дальнейшее развитие в работах L. Meirovitch [47, 48]. Примеры успешного использования модального подхода к управлению колебаниями пластин и оболочек с использованием пьезоэлектрических преобразователей приведены в работах [30, 64, 68]. Пассивное мультимодальное демпфирование колебаний распределенных систем с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов, соединенных с внешней электрической цепью, рассматривается в работе [7]. В статьях А.К. Беляева, Д.Г. Арсеньева, В.А. Полянского и В.В. Котова с соавторами [1, 2, 5] предлагается развитие модального подхода – биоморфный подход, предполагающий динамическое изменение числа форм колебаний объекта, по которым ведется управление, в зависимости от требований точности рассматриваемой задачи.

Основной проблемой, возникающей при модальном управлении, является перетекание энергии с низших, управляемых, на высшие, неуправляемые, формы колебаний. В англоязычной литературе данная проблема носит название «spillover». Для борьбы со spillover-эффектом необходимо правильным образом формировать систему сенсоров и актуаторов, а также определенным образом задавать законы управления: в рабочей частотной области усиление для наибольшей эффективности управления должно быть максимальным, а в области высоких частот для сохранения устойчивости системы – наоборот, минимальным.

В этом проявляется неизбежное противоречие между эффективностью управления и устойчивостью замкнутой системы, вызывающее необходимость поиска компромисса между двумя данными задачами. Проблема spillover-эффекта при модальном управлении распределенной системой подробно рассмотрена в статье М.Ж. Balas [12]. В данной статье делается вывод о том, что замкнутая система остается устойчивой при выполнении определенных энергетических ограничений на величину spillover-эффекта.

Для того, чтобы реализовать модальный подход к управлению, необходимо расположить на объекте сенсоры и актуаторы таким образом, чтобы они могли эффективно отслеживать и управлять конкретными формами колебаний объекта. Использование распределенных сенсоров и актуаторов в качестве модальных фильтров обсуждается в статьях А. Donoso и С.-К. Lee [17, 46]. Альтернатива распределенным элементам управления – массивы дискретных сенсоров и актуаторов. Для таких систем сигналы сенсоров преобразуются в оценки возбуждения форм колебаний, а управляющие сигналы подаются на актуаторы в определенных пропорциях, соответствующих отдельным формам колебаний. Данные проблемы детально рассматриваются в работах [24, 28, 31, 57].

В настоящей работе теоретически и экспериментально изучаются локальные и модальные системы управления изгибными колебаниями балок, при этом решаются задачи расстановки сенсоров и актуаторов, разделения форм колебаний в контурах модальной системы и синтеза законов управления. За основу принимается теория работы пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов, изложенная в статьях Н. Irschik и М. Krommer [33-36, 39-41]. В данных работах рассматриваются задачи как контроля перемещений (shape control), так и контроля напряжений (stress control) для балок, описываемых моделями Бернулли-Эйлера и Тимошенко. Кроме этого, теория работы пьезоэлементов для управления изгибными колебаниями как балок, так и оболочек изложена в книге А. Preumont [56].

## **Цели и задачи работы**

Целью настоящей работы является совершенствование методов синтеза систем управления колебаниями упругих тел с обратной связью, в том числе модальных систем, осуществляющих раздельное управление различными формами колебаний упругого объекта. В рамках достижения данной цели синтезируются различные локальные и модальные системы, и результаты их работы сравниваются между собой теоретически и экспериментально. При этом формулируются и решаются следующие задачи:

1) Экспериментальное воплощение локального и модального подходов к управлению колебаниями распределенной системы для модельной задачи, предполагающей управление изгибными колебаниями тонкой металлической балки с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Данная задача предполагает создание экспериментальной установки, идентификацию объекта управления, определение оптимальных мест расположения сенсоров и актуаторов на объекте и синтез законов управления, определяющих работу контроллера.

2) Разработка и применение процедуры экспериментальной идентификации, позволяющей обеспечить раздельное управление различными формами колебаний балки при использовании модальной системы управления.

3) Сравнение эффективности работы созданных локальных и модальных систем управления в применении к задаче гашения вынужденных резонансных колебаний металлической балки, а также объяснение полученных результатов.

4) Проведение численного исследования работы локальных и модальных систем в применении к модельной задаче управления колебаниями шарнирно-опертой балки в разложении по собственным формам колебаний и определение влияния используемой при синтезе систем управления модели работы пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов на эффективность управления.

5) Численное воспроизведение результатов эксперимента по управлению изгибными колебаниями балки посредством создания конечно-элементной модели объекта управления.

б) Синтез законов управления для модальной системы управления колебаниями балки на основе результатов конечно-элементного моделирования с использованием алгоритмов, позволяющих определять оптимальные параметры передаточных функций в контурах обратной связи, и сравнение полученных результатов управления с результатами систем, созданных в рамках экспериментального исследования.

### **Методика исследований**

Настоящее исследование включает в себя как экспериментальную, так и теоретическую части. Методика численного исследования связана с декомпозиционным подходом к описанию поведения распределенной системы, т.е., с представлением динамики системы в виде разложения по собственным формам колебаний. Для описания поведения объекта управления применяются методы теории стержней, при этом используется модель балки Бернулли-Эйлера. Для работы с декомпозиционной моделью балки в рамках численного исследования используется вычислительный пакет Matlab.

В рамках эксперимента создаются системы управления изгибными колебаниями тонкой металлической балки, закрепленной в одной точке, с обратной связью, включающие сенсоры, актуаторы и дискретный контроллер. Цель управления состоит в том, чтобы погасить вынужденные колебания балки, возникающие вследствие вибрации опоры. В процессе создания систем управления снимаются и анализируются амплитудно- и фазочастотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) объекта управления, получаемые в результате воздействия на объект входного сигнала с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) и применения к результатам измерения быстрого преобразования Фурье (Fast Fourier Transformation, FFT). Генерация и обработка сигналов производятся с помощью установки Polytec Scanning Vibrometer PSV-400, эта же установка включает в себя лазерный виброметр, измеряющий скорость колебаний различных точек балки.

Синтез законов управления осуществляется в вычислительном пакете Matlab с помощью частотных методов теории автоматического управления, исходя из цели обеспечения наиболее эффективного управления на тех резонансных частотах

балки, вынужденные колебания на которых необходимо погасить. Генерация управляющих сигналов в цепи обратной связи выполняется дискретным контроллером dSPACE DS1103 PPC Controller Board в соответствии с заданными законами управления. Эффективность созданных систем определяется посредством сравнения АЧХ объекта при включенном и отключенном управлении.

Конечно-элементное моделирование объекта управления осуществляется в программном комплексе ANSYS, для получения АЧХ и ФЧХ проводится гармонический анализ системы с приложением внешнего воздействия в заданном частотном диапазоне.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Результаты проведенного исследования свидетельствуют о преимуществе модального подхода к управлению перед локальным в тех случаях, когда необходимо бороться с вынужденными колебаниями механической системы в диапазоне частот, содержащем несколько резонансных частот данной системы. В процессе исследования предложена методика идентификации объекта с целью разделения различных форм колебаний в системе управления, данная процедура является необходимым элементом при реализации модального подхода к управлению распределенными системами. Результаты исследования могут быть применены при создании активных систем управления распределенными упругими объектами в таких областях, как робототехника, строительство, автомобиле- и самолетостроение.

### **Научная новизна**

1) Разработан и применен метод экспериментальной идентификации распределенного объекта, позволяющий определить оптимальные параметры линейного преобразования измеренных и управляющих сигналов, которое обеспечивает раздельное управление различными формами колебаний объекта в рамках модального подхода.

2) Проведено экспериментальное и численное сравнение эффективности локального и модального подходов к управлению в применении к задаче гашения вынужденных изгибных колебаний тонкой металлической балки.

Продемонстрировано преимущество модального подхода перед локальным, выражающееся в том, что данный подход позволяет эффективно снижать амплитуду вынужденных колебаний балки на нескольких резонансных частотах.

3) Установлено, что при синтезе системы управления колебаниями распределенного объекта необходимо использовать полную модель работы сенсоров и актуаторов, учитывающую влияние данных элементов на собственные формы колебаний объекта, в противном случае эффективность управления значительно снижается.

4) Разработана методика проектирования модальных систем управления распределенным упругим объектом, осуществляющих гашение вынужденных резонансных колебаний данного объекта. Данная методика включает в себя определение матриц – синтезатора и анализатора форм, обеспечивающих раздельное управление различными формами колебаний объекта, а также синтез регуляторов для отдельных контуров управления, обеспечивающих эффективную работу системы управления на резонансных частотах, соответствующих указанным формам колебаний.

#### **Положения, выносимые на защиту**

1) Метод экспериментальной идентификации, позволяющий определить оптимальные параметры линейного преобразования измеренных и управляющих сигналов, которое обеспечивает раздельное управление различными формами колебаний распределенного объекта в рамках модального подхода.

2) Локальные и модальные системы управления, синтезированные в рамках экспериментального и численного сравнения эффективности двух альтернативных подходов к управлению в применении к задаче гашения вынужденных изгибных колебаний тонкой металлической балки. Продемонстрировано преимущество модального подхода, выражающееся в том, что он позволяет снижать амплитуду вынужденных колебаний балки на 16-18 дБ на нескольких резонансных частотах, в отличие от локального подхода, демонстрирующего подобную эффективность только на одном из резонансов.

3) Конечно-элементные модели металлической балки, упруго защемленной в промежуточном сечении, с закрепленными на ней пьезоэлементами, как объекта управления, верифицированные по экспериментальным частотным характеристикам.

4) Методика проектирования модальных систем управления распределенным упругим объектом, осуществляющих гашение вынужденных резонансных колебаний данного объекта. Данная методика включает в себя определение матриц – синтезатора и анализатора форм, обеспечивающих раздельное управление различными формами колебаний объекта, а также синтез регуляторов для отдельных контуров управления. Эффективность указанной методики продемонстрирована численно на примере гашения вынужденных колебаний тонкой металлической балки, закрепленной в одной точке, с помощью двух пьезоэлектрических сенсоров и двух актуаторов: снижение амплитуды колебаний балки на первом и втором резонансах составило 29 дБ.

#### **Достоверность результатов**

Достоверность результатов, полученных в настоящей работе, обеспечивается строгостью используемых методов математики, механики и автоматического управления, применением теоретически обоснованного метода конечных элементов, а также сравнением результатов, полученных экспериментально, с численными результатами, произведенным в заключительной главе данной работы.

#### **Личный вклад автора**

Все приведенные в работе результаты получены автором лично. Автор лично занимался как проведением экспериментальных исследований, так и аналитическим и численным моделированием рассматриваемых механических систем в программных комплексах Matlab и ANSYS, а также подготовкой материалов для публикаций.

#### **Апробация работы и публикации**

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 13 работах:

1) Бе́ляев А.К., Полянский В.А., Смирнова Н.А., Федотов А.В. Теоретические и экспериментальные исследования биоморфных алгоритмов управления распределенными системами // Сборник трудов 7-й Российской мультikonференции по проблемам управления: конференция «Управление в морских и аэрокосмических системах», 2014, с. 96-105

2) Федотов А.В., Бе́ляев А.К. Экспериментальное исследование различных подходов к управлению распределенными системами // Сборник трудов научного форума с международным участием XLIII «Неделя науки СПбПУ», 2014, с. 61-64

3) Belyaev A.K., Fedotov A.V., Polyanskiy V.A., Smirnova N.A. Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems // International Symposium Automated Systems and Technologies, 2015, p. 73-80.

4) Федотов А.В. Проблемы идентификации при биоморфном управлении распределенными системами // Сборник трудов XVIII Конференции молодых ученых с международным участием «Навигация и управление движением», 2016, с. 271-278

5) Fedotov A.V. Biomorphic approach in application to vibration control of continuous systems // The International Conference "Advanced Problems in Mechanics – 2016", p. 107-118

6) Полянский В.А., Смирнова Н.А., Федотов А.В. Развитие модального подхода к синтезу алгоритмов управления распределенными системами // Сборник трудов 9-й Российской мультikonференции по проблемам управления: конференция «Управление в морских и аэрокосмических системах», 2016, с. 72-82

7) Федотов А.В. Экспериментальное сравнение локального и модального подходов к управлению распределенными системами // Сборник трудов IV Научно-технической конференции молодых ученых и специалистов АО «КБСМ» «Старт в будущее – 2017»

8) Бе́ляев А.К., Полянский В.А., Смирнова Н.А., Федотов А.В. Процедура идентификации при модальном управлении распределенным упругим объектом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, 2017, 10(2), с. 69-81. DOI: 10.18721/JPM.10207

9) Belyaev A.K., Fedotov A.V., Irschik H., Nader M., Polyanskiy V.A., Smirnova N.A. Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems // *Structural Control and Health Monitoring*, 2018, 25(2), e2105. DOI: 10.1002/stc.2105

10) Polyanskiy V.A., Belyaev A.K., Smirnova N.A., Fedotov A.V. Influence of Sensors and Actuators on the Design of the Modal Control System. In: Matveenko V., Krommer M., Belyaev A., Irschik H. (eds) *Dynamics and Control of Advanced Structures and Machines*, 2019, Springer, Cham, p. 127-135. DOI: 10.1007/978-3-319-90884-7\_14

11) Федотов А.В. Численное моделирование гашения колебаний распределенной системы с помощью пьезоэлементов // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*, 2019, 12(1), с. 142-155. DOI: 10.18721/JPM.12112

12) Fedotov A.V. Active vibration suppression of Bernoulli-Euler beam: experiment and numerical simulation // *Cybernetics and Physics*, 2019, 8(4), p. 228-234. DOI: 10.35470/2226-4116-2019-8-4-228-234

13) Федотов А.В. Применимость упрощенных моделей пьезоэлементов в задаче активного гашения колебаний // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*, 2020, 63(2), с. 126-132. DOI: 10.17586/0021-3454-2020-63-2-126-132

Результаты диссертации докладывались на трех российских и двух международных конференциях (7-я и 9-я Российские мультikonференции по проблемам управления: конференция «Управление в морских и аэрокосмических системах», УМАС-2014 и УМАС-2016; XVIII Конференция молодых ученых с международным участием «Навигация и управление движением»; XLIV Международная летняя школа – конференция «Advanced Problems in Mechanics», АРМ-2016; IV Научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов АО «КБСМ» «Старт в будущее – 2017»), научном форуме с международным участием XLIII «Неделя науки СПбПУ», международном симпозиуме *Automated Systems and Technologies (AST-2015)*, а также на семинарах в Институте проблем

машиноведения РАН и Университете информационных технологий, механики и оптики.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 191 страницах и содержит 108 рисунков и 14 таблиц. Список литературы содержит 68 наименований.

## **Глава 1. Теоретические основы управления колебаниями балок с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов**

В первой главе даются теоретические основы проводимых в работе исследований. В разделе 1.1 рассматриваются современные подходы к управлению упругими системами, в том числе обсуждаются основные принципы построения локальных и модальных систем управления. В разделе 1.2 раскрывается понятие модального управления и более подробно описывается работа таких систем. Раздел 1.3 посвящен рассмотрению функционирования систем управления с одной и двумя обратными связями, в том числе в нем формулируется критерий устойчивости для замкнутой системы в последнем случае. Наконец, в разделе 1.4 анализируется работа пьезоэлектрических преобразователей в задаче управления колебаниями тонких балок.

### **1.1. Современные подходы к задаче активного управления упругими системами**

Настоящая работа посвящена проблеме создания систем с обратной связью, управляющими колебаниями упругих тел. Простейшая схема работы такой системы представлена на Рисунке 1.1. В данную схему входит упругий объект управления, подверженный колебаниям, вызываемым внешним воздействием  $d$ ; датчики, или сенсоры, отслеживающие состояние объекта и генерирующие вектор выходных сигналов  $y$ ; исполнительные устройства, или актуаторы, прикладывающие на объект управляющее воздействие в виде вектора  $u$ ; контроллер, преобразующий вектор невязки, полученный вычитанием вектора измерений  $y$  из вектора желаемых выходных переменных  $y^d$ , в вектор управляющих воздействий  $u$ . Актуаторы, сенсоры и контроллер вместе образуют систему управления с обратной связью.

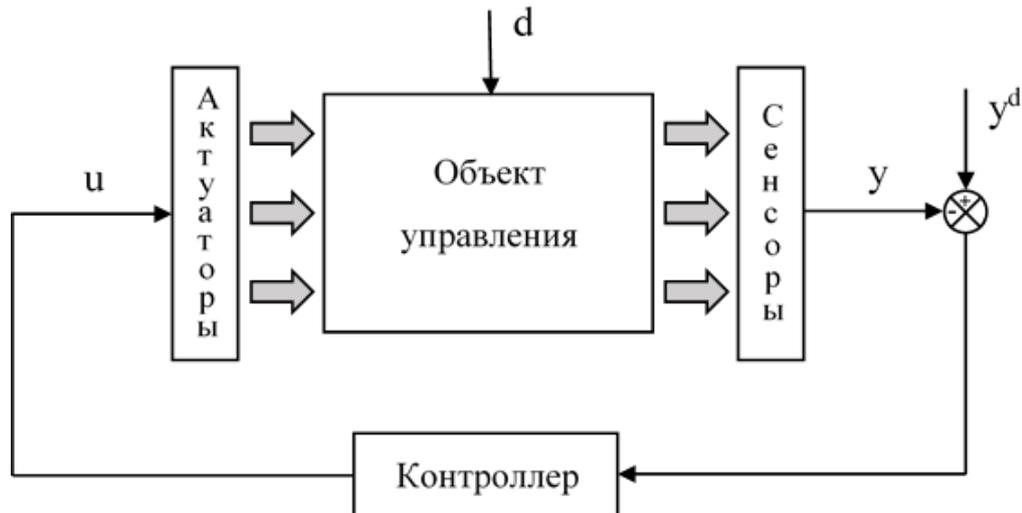


Рисунок 1.1. Схема системы управления колебаниями упругого тела с обратной связью

Исходя из структуры системы управления, представленной на Рисунке 1.1, задачу проектирования такой системы можно разделить на две части: во-первых, необходимо выбрать используемые сенсоры и актуаторы и определить оптимальные места их расположения на объекте; во-вторых, следует задать алгоритм работы контроллера, то есть закон, в соответствии с которым измеренные сигналы преобразуются в управляющие воздействия. Обе данные задачи предполагают предварительное изучение и идентификацию упругого объекта, для чего может потребоваться как выполнение определенных экспериментов, так и численное моделирование объекта управления. В настоящей работе в качестве упругого объекта в экспериментальной части исследования выступает металлическая балка, упруго заземленная в промежуточном сечении, совершающая изгибные колебания, а для управления используются пьезоэлектрические сенсоры и актуаторы. Задача их размещения на балке рассматривается в главе 2, в то время как глава 3 посвящена проблеме синтеза законов управления, определяющих алгоритм работы контроллера для каждого контура управления.

Все системы управления, создаваемые в рамках настоящей работы, имеют одну цель – снижение уровня вынужденных колебаний упругого объекта,

вызванных действием на данный объект внешних возмущений. Это означает, что желаемое состояние, к которому система управления стремится привести упругий объект, есть состояние покоя, или нулевых перемещений. Таким образом, для всех рассматриваемых в работе систем управления вектор желаемых выходных переменных  $y^d$  из схемы на Рисунке 1.1 тождественно равен нулю и может быть исключен из схемы. В литературе задача компенсации вибраций распределенного объекта носит название *shape control* (контроль формы) и традиционно формулируется как проблема программного управления, осуществляемого при известных внешних возмущениях как функциях времени. Впервые данная задача была сформулирована в 1985 году в работе [27], обзор статического и динамического контроля формы с использованием пьезоэлектрических элементов управления дается в [33]. Теоретическое рассмотрение данных проблем в применении к задаче об изгибных колебаниях тонких балок можно найти в [35, 36], а их практическое решение в рамках экспериментальных исследований представлено в [51], где рассматривается как программное управление, так и управление с обратной связью.

Более широко задача контроля формы формулируется следующим образом: необходимо с помощью системы управления обеспечить заданное поле перемещений в зависимости от времени для всех точек упругого тела, однако для данной формулировки общепринятым является уже другой термин – не *shape control*, а *displacement tracking* (воспроизведение перемещений). Примеры теоретического и экспериментального исследования проблемы воспроизведения перемещений применительно к изгибным колебаниям балок и пластин можно найти в работах [29, 43], причем в [29] наряду с программным управлением рассматривается также управление с обратной связью.

В настоящей работе используется два принципиально различных варианта построения систем управления: локальный и модальный. Схемы обоих указанных вариантов представлены на Рисунках 1.2 и 1.3, при этом для наглядности в обоих случаях рассмотрена система управления с двумя контурами, включающая два сенсора и два актуатора. Здесь  $y_1$  и  $y_2$  – сигналы сенсоров,  $u_1$  и  $u_2$  – управляющие

воздействия, подаваемые на актуаторы,  $R_1(s)$  и  $R_2(s)$  – передаточные функции контроллера в первом и втором контурах управления. В локальной системе каждый контур включает в себя один сенсор и один актуатор, расположенные в одной и той же области на упругом объекте. В модальной же системе как измеренные, так и управляющие сигналы подвергаются линейному преобразованию, заданному с помощью матриц  $T$  и  $F$ : матрица – анализатор форм  $T$  преобразует сигналы сенсоров в оценки интенсивности возбуждения двух форм колебаний системы  $\tilde{q}_1$  и  $\tilde{q}_2$ , а матрица – синтезатор форм  $F$  преобразует управляющие воздействия на данные формы колебаний  $\tilde{Q}_1$  и  $\tilde{Q}_2$  в управляющие сигналы, подаваемые на актуаторы. Таким образом, каждый контур управления соответствует своей форме колебаний объекта, что позволяет управлять различными формами колебаний независимо друг от друга.



Рисунок 1.2. Схема локальной системы управления

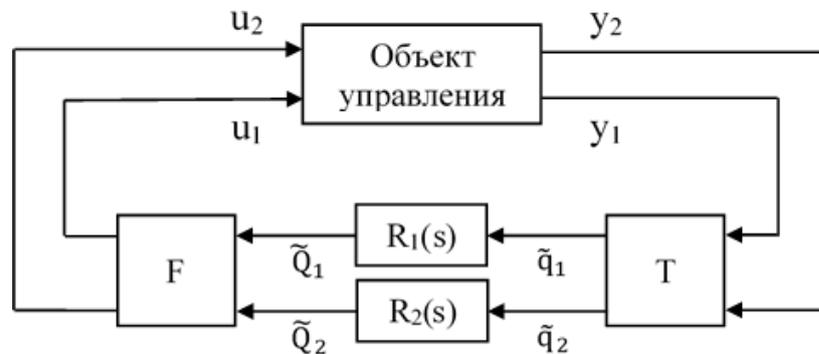


Рисунок 1.3. Схема модальной системы управления

Примеры использования локального управления для решения задачи виброизоляции можно найти в работах [19, 37, 60], модальное управление в

применении к задачам о снижении уровня колебаний балок, пластин и оболочек и рассматривается в [14, 30, 58, 64, 68]. В работе [53] проводится сравнение двух указанных подходов применительно к задаче о гашении колебаний станка. Сравнивая два данных принципа управления, необходимо отметить, что с точки зрения воплощения локальный подход является более простым, однако он зачастую приводит к тому, что различные контуры управления сильно влияют друг на друга через упругий объект. Модальный подход является более трудоемким, поскольку он, в отличие от локального, предполагает линейное преобразование сигналов с помощью матриц  $T$  и  $F$  (анализатора и синтезатора форм). Однако от модального подхода стоит ожидать более высоких результатов, поскольку он позволяет обеспечить более четкую специализацию каждого контура управления, за счет чего данные контуры могут эффективно решать каждый свою задачу и слабо влияют друг на друга. В настоящей работе осуществляется сравнение двух указанных подходов в рамках экспериментального (главы 2 и 3) и численного (глава 4) исследований. Определение матриц – анализатора и синтезатора форм для модальной системы в экспериментальном исследовании производится в главе 2, а синтез законов управления для всех рассмотренных систем – в главе 3.

## 1.2. Основы модального управления упругими системами

Так сложилось, что в термин «модальное управление» (modal control) вкладывается два близких, но, тем не менее, несколько различных смысла. Изначально модальный подход был сформулирован как метод, позволяющий отдельно управлять корнями характеристического полинома системы, или же собственными числами матрицы системы в пространстве состояний  $A$ :

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.1)$$

где  $x$  – вектор переменных состояния, полностью описывающий состояние системы в каждый момент времени,  $u$  – вектор управляющих воздействий,  $A$  – матрица объекта, а  $B$  – матрица управления. Отдельное управление каждым из собственных

чисел матрицы  $A$  позволяет полностью привести поведение системы к нужному виду.

Для корректного использования данного метода необходимо, чтобы был известен весь вектор состояния системы, по которому и осуществляется управление, и объект являлся полностью наблюдаемым и управляемым, для этого объект управления должен иметь конечную размерность. При этом термин «объект управления», как правило, подразумевается в более широком смысле, нежели в классической теории управления, а именно, в объект входят все исполнительные устройства, усилители и преобразователи. В случае, если для наблюдения доступны не все переменные состояния, необходимо использовать наблюдательные устройства, по измеренным значениям наблюдаемых переменных восстанавливающие значения остальных переменных состояния. Изложение модального управления в указанном смысле для систем с сосредоточенными параметрами можно найти в [55], с распределенными параметрами – в [25] (здесь динамика объекта ограничивается некоторым конечным числом форм), а из русскоязычных источников по данной теме можно указать книгу [6].

Дальнейшим развитием модального подхода было его распространение на управление колебаниями упругих тел. В работах L. Meirovitch с соавторами [47, 48] получил развитие способ описания динамики упругих тел как совокупности движения различных не связанных между собой форм колебаний, и таким образом модальный подход был переформулирован из пространства состояний в физическое пространство [32], то есть его целью стало отдельное управление различными формами колебаний упругого объекта. При этом весь упругий объект разбивается на набор подсистем второго порядка, соответствующих различным формам колебаний. Данный метод получил название *independent modal-space control* (IMSC, независимое управление в пространстве форм). Поскольку объект является упругой системой, он имеет бесконечное число форм колебаний, управление же осуществляется некоторым конечным набором форм. В связи с этим возникает проблема активизации в процессе управления высших, неуправляемых форм колебаний объекта, носящая название *spillover-эффекта* (более подробно о

данном эффекте будет рассказано ниже). В настоящей работе модальное управление понимается в указанном смысле. В данном разделе будут рассмотрены основные принципы реализации такого подхода к управлению.

Модальный подход к управлению базируется на гипотезе, что движение упругой системы может быть представлено в виде суперпозиции независимых форм колебаний, динамика каждой из которых описывается отдельным уравнением:

$$\ddot{q}_k + 2\xi_k\Omega_k\dot{q}_k + \Omega_k^2q_k = Q_k, \quad (1.2)$$

где  $q_k$ ,  $\Omega_k$ ,  $\xi_k$  и  $Q_k$  – соответствующие  $k$ -й форме колебаний главная координата, собственная частота, коэффициент демпфирования и обобщенная сила.

Формально система с распределенными параметрами имеет бесконечное число собственных форм колебаний, однако в зависимости от поставленной задачи, как правило, можно ограничиться некоторым конечным числом форм. В данном изложении ограничимся рассмотрением  $n$  низших собственных форм колебаний системы.

Пусть модальное управление осуществляется по  $m$  низшим собственным формам объекта, а сама система управления содержит  $r$  сенсоров и  $r$  актуаторов. При этом для независимого управления  $m$  формами количество сенсоров и актуаторов должно быть не меньше количества управляемых форм:  $r \geq m$ .

Обобщенные силы включают в себя как внешние возмущающие силы  $Q_k^d$ , так и управляющие воздействия  $Q_k^c$ , которые, в свою очередь, зависят от управляющих сигналов  $U_i$ , подаваемых на актуаторы:

$$Q_k = Q_k^d + Q_k^c = Q_k^d + \sum_{i=1}^r \Theta_{ki}^a U_i, \quad (1.3)$$

где  $\Theta_{ki}^a$  – коэффициент влияния  $i$ -го актуатора на  $k$ -ю собственную форму объекта.

Вектор сигналов сенсоров  $Y_{r \times 1}$  может быть представлен в виде слагаемого, включающего первые  $m$  главных координат, и вектора  $\tilde{Y}_{r \times 1}$ , содержащего высшие координаты:

$$Y_{r \times 1} = \Theta_{r \times m}^s q_{m \times 1} + \tilde{Y}_{r \times 1}. \quad (1.4)$$

Здесь  $\Theta_{r \times m}^s$  – весовая матрица,  $i$ -ая строка которой показывает, в каких пропорциях на показания  $i$ -ого сенсора влияют первые  $m$  главных координат (здесь и далее нижний индекс показывает размерность матричного объекта).

При использовании пропорционального закона управления вектор управляющих сигналов  $U$  связан с вектором сигналов сенсоров  $Y$  с помощью матрицы  $G_{r \times r}$ :

$$U = G_{r \times r} Y. \quad (1.5)$$

Система уравнений (1.1) для  $m$  низших главных координат с учетом (1.2–1.4) в матричной форме будет иметь следующий вид:

$$\ddot{q}_{m \times 1} + 2\xi_{m \times m} \Lambda_{m \times m} \dot{q} + \Lambda^2 q = Q_{m \times 1}^d + \Theta_{m \times r}^a G_{r \times r} \Theta_{r \times m}^s q_{m \times 1} + \Delta_{m \times 1}, \quad (1.6)$$

где  $\Lambda_{m \times m} = \text{diag}\{\Omega_k\}$  – диагональная матрица собственных частот упругого объекта;  $\xi_{m \times m} = \text{diag}\{\xi_k\}$  – диагональная матрица коэффициентов демпфирования;  $Q_{m \times 1}^d$  – вектор внешних воздействий, объединяющий компоненты  $Q_k^d$ ; вектор  $\Delta_{m \times 1}$  не содержит компонент вектора  $q_{m \times 1}$ , а только высшие гармоники.

В случае локального подхода, являющегося стандартным при управлении упругими системами, сенсоры и актуаторы расположены попарно на различных участках упругого объекта, а матрица управления  $G$  является диагональной, то есть каждый сенсор связан с единственным расположенным в той же области актуатором. При этом каждый контур управления оказывается связан со множеством собственных форм объекта, возбуждая их и реагируя на их активизацию, вследствие чего сильным становится взаимное влияние контуров, и их совместная настройка представляет собой сложную задачу.

Для независимого управления первыми  $m$  формами колебаний объекта необходимо, чтобы  $m$  уравнений системы (1.6) разделялись. Для этого все матрицы перед вектором  $q_{m \times 1}$  и его производными должны быть диагональными: данное требование выполняется для левой части уравнений, в правой же части присутствует матрица  $\Theta^a G \Theta^s$ . Она будет диагональной в том случае, если матрица управления  $G$  имеет следующую структуру:

$$G_{r \times r} = F_{r \times m} K_{m \times m} T_{m \times r}, \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} F = \Theta^{aT} (\Theta^a \Theta^{aT})^{-1} \\ T = (\Theta^{sT} \Theta^s)^{-1} \Theta^{sT} \end{cases} \quad (1.8)$$

Матрицы  $F$  и  $T$  – модальные матрицы, обеспечивающие разделение  $m$  низших форм в системе управления, в работах [24, 25] они названы синтезатором и анализатором форм. Матрица  $T$  (анализатор форм) преобразует сигналы сенсоров  $Y_{r \times 1}$  в вектор оценок  $m$  первых собственных форм  $\tilde{q}_{m \times 1}$ , а матрица  $F$  (синтезатор форм) преобразует вектор желаемых воздействий на формы  $\tilde{Q}_{m \times 1}^c$  в вектор управляющих сигналов, подаваемых на актуаторы  $U_{r \times 1}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{m \times 1} &= T_{m \times r} Y_{r \times 1} = T_{m \times r} \Theta_{r \times m}^s q_{m \times 1} + T_{m \times r} \tilde{Y}_{r \times 1} = q_{m \times 1} + T \tilde{Y} \\ Q_{m \times 1}^c &= \Theta_{m \times r}^a U_{r \times 1} = \Theta_{m \times r}^a F_{r \times m} \tilde{Q}_{m \times 1}^c = \tilde{Q}_{m \times 1}^c = K_{m \times m} \tilde{q}_{m \times 1} = K q_{m \times 1} + K T \tilde{Y}. \end{aligned}$$

$K_{m \times m}$  – диагональная матрица коэффициентов усиления. Каждый диагональный элемент данной матрицы соответствует отдельному контуру управления. Таким образом, система управления включает в себя  $m$  контуров, каждый из которых представляет собой обратную связь по своей форме колебаний упругого объекта. В случае пропорционального управления элементы матрицы  $K$  – константы, в общем же случае каждый её элемент является функцией комплексной переменной  $s$  и задает передаточную функцию для своего контура управления.

Обозначенная в формулах (1.6, 1.7) структура управления позволяет разделить первые  $m$  форм, приводя уравнение (1.6) к виду:

$$\ddot{q} + 2\xi\Lambda\dot{q} + \Lambda^2 q = Q^d + Kq + K T \tilde{Y}. \quad (1.9)$$

Однако, несмотря на то, что первые  $m$  форм отделены друг от друга, на динамику данных форм оказывает влияние слагаемое  $K T \tilde{Y}$ , содержащее высшие гармоники объекта. Управляющие воздействия также возбуждают, помимо низших, и высшие формы колебаний. Наличие высших гармоник является основной проблемой при применении модального управления, нежелательное возбуждение данных гармоник в процессе управления носит название spillover-эффекта.

При управлении упругими системами, склонными к колебаниям, spillover-эффект представляет собой серьезную проблему. Однако в последние десятилетия благодаря развитию технологий «умных» материалов и удешевлению элементов управления появилась возможность использовать в упругой конструкции целые массивы сенсоров и актуаторов, что позволяет точнее выделять необходимые формы колебаний системы и минимизировать воздействие на высшие формы. Помимо увеличения количества сенсоров и актуаторов, для борьбы с активизацией высших форм передаточные функции в контурах управления синтезируются таким образом, чтобы усиливать воздействие на управляемые формы и ослаблять возбуждение неуправляемых форм.

Таким образом, для создания модальной системы управления необходимо последовательно осуществить три этапа. Во-первых, требуется выбрать оптимальное расположение на объекте управления сенсоров и актуаторов, позволяющее наиболее эффективно измерять и воздействовать на требуемые формы колебаний объекта. Во-вторых, необходимо задать модальные матрицы  $T$  и  $F$ , обеспечивающие разделение низших форм, в соответствии с формулой (1.8), для чего требуется определить матрицу коэффициентов влияния  $\Theta^a$  и весовую матрицу  $\Theta^s$ . И, в-третьих, необходимо синтезировать передаточную функцию для каждого контура управления, обеспечивающую наиболее эффективное воздействие на управляемые формы и сохранение устойчивости высших (неуправляемых) форм.

### **1.3. Работа систем управления с одной и двумя обратными связями**

В данном разделе рассматривается общая схема работы систем управления упругим объектом с одной и двумя обратными связями и формулируются принципы, которым должны удовлетворять передаточные функции в контурах управления. Предполагается, что цель системы управления состоит в снижении уровня колебаний объекта в некотором диапазоне частот, содержащем резонансные частоты объекта. Рассматриваются критерии устойчивости замкнутой

системы с одной и двумя обратными связями, а также влияние системы управления на поведение объекта вблизи резонансов.

### 1.3.1. Система управления с одним контуром

Схема системы управления с одной обратной связью представлена на Рисунке 1.4.

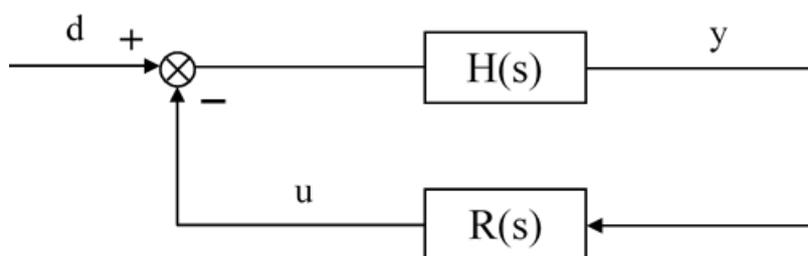


Рисунок 1.4. Схема замкнутой системы управления с одним контуром

Здесь  $H(s)$  – передаточная функция объекта управления;  $R(s)$  – передаточная функция контроллера, определяющая зависимость управляющего воздействия  $u$  от измеряемого сигнала  $y$ ;  $d$  – внешнее возбуждение упругой системы.

Измеряемый сигнал  $y$  связан с внешним возбуждением  $d$  следующим образом:

$$y = H(s)(d - u) = H(s)(d - R(s)y) = H(s)d - H(s)R(s)y,$$

$$y = \frac{H(s)}{1 + H(s)R(s)} d = H_c(s)d,$$

$$H_c(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)R(s)}, \quad (1.10)$$

где  $H_c(s)$  – передаточная функция замкнутой системы.

Цель управления состоит в том, чтобы за счет выбора передаточной функции  $R(s)$  генерировать такое управляющее воздействие  $u$ , которое бы компенсировало внешнее воздействие  $d$ , минимизируя измеряемую величину  $y$ .

На Рисунке 1.5 показана схема разомкнутой системы, то есть системы с отключенной обратной связью. Здесь  $H(s)$  и  $R(s)$  – передаточные функции объекта управления и контроллера,  $u$  – управляющее воздействие,  $y$  – выходной сигнал объекта;  $y^d$  – желаемое значение выходного сигнала.

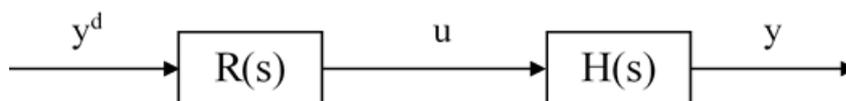


Рисунок 1.5. Схема разомкнутой системы управления

Передаточная функция разомкнутой системы  $H_o(s)$  имеет следующий вид:

$$y = H(s)u = H(s)R(s)y^d = H_o(s)y^d,$$

$$H_o(s) = H(s)R(s). \quad (1.11)$$

Самое первое требование, которому должна удовлетворять система управления – она не должна вызывать неустойчивость, то есть замыкание обратной связи не должно приводить к самовозбуждению в получившейся системе. Такое самовозбуждение приводит к неконтролируемому росту колебаний в системе даже при отсутствии внешнего воздействия и очень опасно для любой конструкции. Замкнутая система устойчива в том случае, если все полюса передаточной функции  $H_c(s)$  лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости переменной  $s$ . Однако для определения устойчивости в реальных системах удобнее анализировать передаточную функцию не замкнутой, а разомкнутой системы  $H_o(s)$ .

Для анализа устойчивости замкнутой системы по частотному отклику разомкнутой системы используется годограф Найквиста – линия на комплексной плоскости, которую описывает значение функции  $H_o(i\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ . Эта кривая начинается в некоторой точке на вещественной оси (если функция  $R(s)$  не содержит интегрирующего звена) и заканчивается в начале координат. Критерий Найквиста утверждает, что в случае устойчивости разомкнутой системы для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы данный годограф не охватывал на комплексной плоскости точку  $(-1; 0)$ , лежащую на вещественной оси.

Помимо устойчивости замкнутой системы, годограф Найквиста позволяет также проанализировать, насколько эффективно система управления снижает колебания упругого объекта. Чем дальше от точки  $(-1; 0)$  лежат точки годографа, тем сильнее управление снижает амплитуду сигнала  $y$  на соответствующих данным

точкам частотах колебаний системы. Если же точки годографа попадают внутрь единичной окружности с центром в точке  $(-1; 0)$ , то на соответствующих частотах управление не уменьшает, а наоборот, усиливает колебания в системе.

Задача системы управления состоит в том, чтобы снижать уровень вибраций упругого объекта, вызванных внешним возбуждением. При этом наибольшую опасность для конструкции представляют резонансные колебания, поскольку они имеют наибольшую амплитуду, и именно с ними система управления должна бороться в первую очередь. Рассмотрим, как система управления с одним контуром влияет на колебания упругой системы вблизи резонансов.

Будем рассматривать совместную работу упругого объекта и системы управления в узком диапазоне частот в окрестности некоторой резонансной частоты объекта  $\Omega$ . Такое ограничение позволяет использовать упрощенные модели объекта и системы управления: во-первых, будем считать, что объект управления имеет всего одну степень свободы – форму колебаний, соответствующую данному резонансу, и пренебрежем остальными формами колебаний объекта; во-вторых, примем, что передаточная функция контроллера представляет собой константу, выраженную некоторым комплексным числом.

Таким образом, поведение объекта описывается уравнением:

$$\ddot{q} + 2\Omega\xi\dot{q} + \Omega^2q = Q.$$

Пусть для простоты измеряемый сигнал  $y$  равен главной координате  $q$ , а обобщенная сила  $Q$  представляет собой входной сигнал, подаваемый на объект:  $Q = d - u$ . Тогда передаточная функция объекта будет иметь следующий вид:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\Omega\zeta s + \Omega^2}. \quad (1.12)$$

Передаточная функция контроллера является константой:

$$R(s) = R(i\Omega) = ke^{i\Delta\varphi}, \quad (1.13)$$

где  $k$  – вещественный коэффициент усиления, а  $\Delta\varphi$  – фазовый сдвиг управляющего сигнала по сравнению с измеренным.

В общем случае внешнее воздействие всегда может быть представлено в виде суперпозиции гармоник с разными частотами. Поэтому будем считать, что внешнее воздействие является гармоническим:

$$d = D e^{i\omega t}.$$

В отсутствие управляющего воздействия уравнение колебаний записывается следующим образом:

$$\ddot{y} + 2\Omega\xi\dot{y} + \Omega^2 y = d = D e^{i\omega t}. \quad (1.14)$$

Для установившихся колебаний в системе при заданном гармоническом воздействии имеем:

$$y = Y e^{i(\omega t + \varphi)} = \frac{D e^{i\omega t}}{-\omega^2 + 2\Omega\xi i\omega + \Omega^2},$$

$$Y = \frac{D}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + (2\Omega\xi\omega)^2}}. \quad (1.15)$$

Рассмотрим самый простой случай, когда демпфирование в системе мало:  $\xi \ll 1$ . Тогда амплитуда колебаний будет максимальна на частоте, близкой к собственной частоте  $\Omega$ :

$$\omega^* = \Omega \sqrt{1 - 2\xi^2} \approx \Omega.$$

Амплитуда резонансных колебаний приближенно находится по формуле:

$$Y^* = \frac{D}{2\xi\Omega^2}. \quad (1.16)$$

Теперь проанализируем, какой эффект на резонансные колебания оказывает управление с передаточной функцией (1.13). Уравнение колебаний в системе с управлением при гармоническом воздействии:

$$\ddot{y} + 2\Omega\xi\dot{y} + \Omega^2 y = d - u = D e^{i\omega t} - k e^{i\Delta\varphi} y. \quad (1.17)$$

Для установившихся колебаний получим:

$$y = Y e^{i(\omega t + \varphi)} = \frac{D e^{i\omega t}}{\Omega^2 - \omega^2 + k \cos \Delta\varphi + i(2\Omega\xi\omega + k \sin \Delta\varphi)},$$

$$Y = \frac{D}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2 + k \cos \Delta\varphi)^2 + (2\Omega\xi\omega + k \sin \Delta\varphi)^2}}. \quad (1.18)$$

Из (1.18) видно, что в результате действия управления меняются как резонансная частота, так и резонансная амплитуда. Будем считать, что демпфирование низкое ( $\xi \ll 1$ ), а коэффициент усиления в контуре управления мал по сравнению с квадратом частоты ( $k \ll \Omega^2$ ). В этом случае резонансная частота и амплитуда выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}\omega^* &= \sqrt{\Omega^2 + k \cos \Delta\varphi} \approx \Omega, \\ Y^* &= \frac{D}{2\Omega^2\xi + k \sin \Delta\varphi}.\end{aligned}\quad (1.19)$$

Для того, чтобы система управления снижала резонансные колебания эффективно, необходимо, во-первых, как можно более высокое значение коэффициента усиления  $k$ , а во-вторых – значение фазы управляющего сигнала  $\Delta\varphi$ , близкое к  $\frac{\pi}{2}$ . В том случае, если  $\sin \Delta\varphi < 0$ , система управления вместо подавления усиливает резонансные колебания объекта. Полученный результат легко объяснить: для эффективной борьбы с резонансными колебаниями управляющий сигнал должен компенсировать внешнее воздействие, для этого они должны иметь одинаковую фазу. На резонансах фаза колебаний системы отстает от фазы воздействия на  $\frac{\pi}{2}$ , значит, в цепи управления данный фазовый сдвиг должен компенсироваться, то есть фаза должна подниматься на те же  $\frac{\pi}{2}$ .

Таким образом, мы рассмотрели, каким требованиям должна удовлетворять передаточная функция системы управления, чтобы ее работа была наиболее эффективной. Однако при синтезе закона управления неизменно возникает дилемма между качеством подавления колебаний на низших резонансах системы и ее устойчивостью на высших частотах. Дело в том, что система управления не может снижать уровень колебаний на всем частотном диапазоне от нуля до бесконечности. Вследствие запаздывания в канале управления с ростом частоты неизбежно растет и фазовый сдвиг, а поскольку упругая система имеет бесконечное число резонансов, какие-то из них обязательно попадают в ту частотную область, в которой система управления вследствие фазового сдвига не снижает, а усиливает колебания. В этом случае увеличение коэффициента усиления в канале управления

усугубляет данный эффект, что рано или поздно приводит к неустойчивости на высших собственных частотах упругого объекта. Следовательно, неустойчивость на высших частотах ограничивает эффективность управления. Обозначенная проблема делает синтез оптимальных передаточных функций в контурах управления сложной и нестандартной задачей, которая решается за счет тщательного подбора фильтров в законах управления.

### 1.3.2. Система управления с двумя контурами

В настоящей работе присутствуют как теоретическая, так и экспериментальная части, в которых анализируется работа систем управления с двумя контурами обратной связи. Анализ работы такой системы можно найти в статье [52]. Рассмотрим работу данной системы и критерии ее устойчивости. Ее схема изображена на Рисунке 1.6.

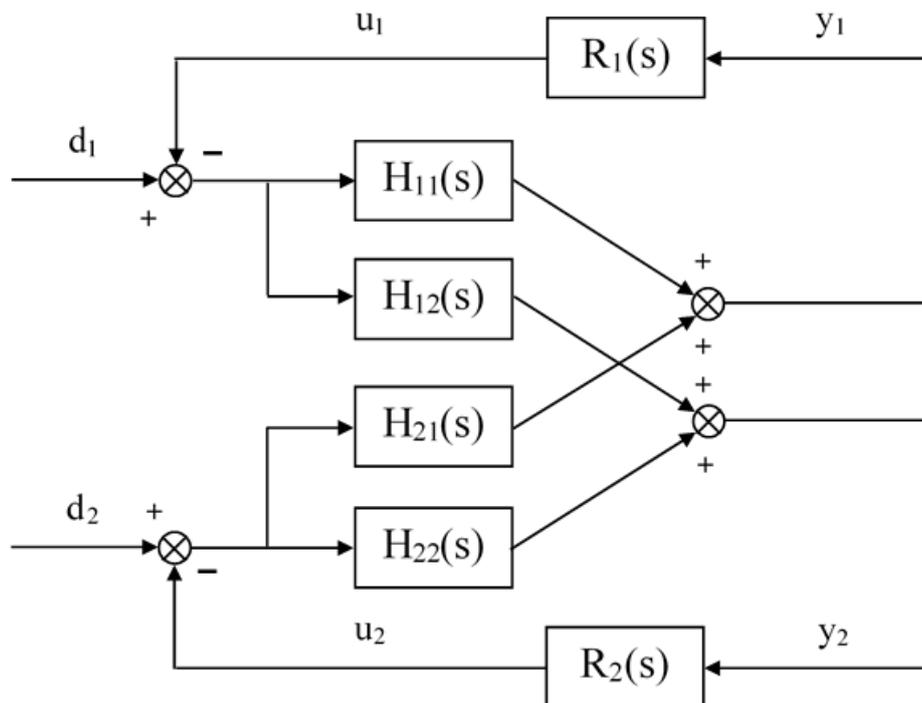


Рисунок 1.6. Схема замкнутой системы управления с двумя контурами

Здесь  $y_1$  и  $y_2$  – два измеряемых сигнала,  $u_1$  и  $u_2$  – два управляющих сигнала,  $H_{11}(s)$ ,  $H_{12}(s)$ ,  $H_{21}(s)$ ,  $H_{22}(s)$  – передаточные функции объекта управления, соответствующие разным комбинациям управляющего и измеряемого сигналов;

$R_1(s)$  и  $R_2(s)$  – передаточные функции контроллеров, задающие зависимость управляющих воздействий от измеренных сигналов;  $d_1$  и  $d_2$  – внешнее возбуждение упругой системы.

Величина измеряемых сигналов зависит от внешнего возбуждения и передаточных функций контроллеров:

$$y_1 = \frac{\left( H_{11}(s) + (H_{11}(s)H_{22}(s) - H_{12}(s)H_{21}(s))R_2(s) \right) d_1 + H_{21}(s)d_2}{\left( 1 + H_{11}(s)R_1(s) \right) \left( 1 + H_{22}(s)R_2(s) \right) - H_{12}(s)H_{21}(s)R_1(s)R_2(s)}, \quad (1.20)$$

$$y_2 = \frac{\left( H_{22}(s) + (H_{11}(s)H_{22}(s) - H_{12}(s)H_{21}(s))R_1(s) \right) d_2 + H_{12}(s)d_1}{\left( 1 + H_{11}(s)R_1(s) \right) \left( 1 + H_{22}(s)R_2(s) \right) - H_{12}(s)H_{21}(s)R_1(s)R_2(s)}. \quad (1.21)$$

Для устойчивости данной системы необходимо, чтобы нули функции, стоящей в знаменателе полученных дробей, лежали в левой полуплоскости комплексной переменной  $s$ .

Знаменатель полученных дробей в формулах (1.20) и (1.21) может быть переписан в виде  $1 + H_o(s)$ :

$$H_o(s) = H_{11}(s)R_1(s) + H_{22}(s)R_2(s) + (H_{11}(s)H_{22}(s) - H_{12}(s)H_{21}(s))R_1(s)R_2(s). \quad (1.22)$$

Это означает, что для анализа устойчивости замкнутой системы с двумя контурами можно так же, как и в случае управления с одним контуром, применить критерий устойчивости Найквиста. Для этого необходимо проанализировать функцию  $H_o(s)$ : считая, что все передаточные функции объекта  $H_{ij}(s)$  и контроллера  $R_j(s)$  устойчивы, получим, что для устойчивости замкнутой системы годограф функции  $H_o(s)$  не должен охватывать на комплексной плоскости точку  $(-1; 0)$ .

В системе с двумя контурами управления оба управляющих воздействия влияют на каждый из измеряемых сигналов. Таким образом, контуры управления оказываются связаны между собой через перекрестные передаточные функции системы  $H_{12}(s)$  и  $H_{21}(s)$ . В том случае, если данные функции тождественно равны нулю, система распадается на два независимых контура, для каждого из которых может быть отдельно подобран свой закон управления.

Идея модального управления состоит именно в том, чтобы разделить имеющиеся контуры управления, минимизировав перекрестные передаточные функции  $H_{12}(s)$  и  $H_{21}(s)$ . Эта проблема решается за счет выбора мест установки сенсоров и актуаторов на объекте и задания модальных матриц – синтезатора и анализатора форм  $T$  и  $F$  в соответствии с формулой (1.8). Однако даже при самом оптимальном выполнении данных этапов перекрестные передаточные функции не могут обратиться в ноль во всем частотном диапазоне, и некоторое взаимное влияние контуров управления все равно остается. Таким образом, контуры управления не являются полностью независимыми, и синтез законов управления для каждого необходимо производить совместно.

#### **1.4. Работа пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов**

В последние десятилетия область применения пьезоэлектрических материалов для решения задач мехатроники стремительно растет. Благодаря наличию как прямого, так и обратного пьезоэффекта пьезоэлементы могут быть использованы и как сенсоры, и как актуаторы, при этом они сочетают в себе простоту и удобство использования с высокими эксплуатационными характеристиками [65]. Благодаря данным качествам пьезоэлектрики в качестве элементов управления приобрели большую популярность в том числе у исследователей как составные части создаваемых и анализируемых экспериментальных установок.

В настоящей работе рассматривается использование пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов для управления изгибными колебаниями тонких балок. Подробное теоретическое описание работы пьезоэлементов для управления колебаниями балок дается в статьях Х. Иршика и М. Кроммера с соавторами [33-36, 39-41]. Учитывается как прямой, так и обратный пьезоэлектрический эффект, в результате возникает собственная деформация в пьезослоях, входящая в виде дополнительного слагаемого в определяющие уравнения для деформации балки, а также модифицируются модули упругости балки. Приводятся уравнения,

описывающие работу сенсоров и актуаторов для случая произвольного количества пьезоэлектрических слоев. Рассматриваются различные варианты электрических граничных условий: задание на электродах пьезоэлементов как напряжения, так и распределенного заряда, также учитывается возможность для электродов покрывать не всю поверхность пьезослоя, а только некоторую ее часть. В работе [34] в определяющих уравнениях пьезоматериала помимо электромеханических учитываются также термомеханические эффекты, вызванные заданным распределением температуры в пьезоматериале.

В статьях [34-36, 39] в качестве упругой системы рассматривается балка Бернулли-Эйлера, при этом учитывается либо только изгиб, либо изгиб и растяжение. В работах [40, 41] рассматривается модель балки Тимошенко, учитывающая также сдвиговые деформации балки. При этом учитываются вызывающие сдвиг продольные компоненты напряженности электрического поля и электрического смещения; данные продольные компоненты связаны с поперечными, вызывающими продольную деформацию пьезоматериала; таким образом, растяжение, изгиб и сдвиг оказываются связаны между собой.

В указанных статьях предлагается использовать актуаторы и сенсоры нужной формы для отслеживания требуемых величин и приложения определенного воздействия на балку. Форма пьезоэлементов для компенсации внешнего воздействия должна соответствовать распределению по длине балки изгибающего момента, вызываемого данным внешним воздействием. Например, для компенсации точечной поперечной силы, приложенной к концевому сечению консольно закрепленной балки, необходимо использовать треугольный актуатор, основание которого расположено в месте заделки, а острый конец – на свободном конце балки [36]. Сенсор такой же треугольной формы будет измерять поперечное смещение точки на свободном конце балки.

Как альтернатива указанному подходу в статьях [43, 44] предлагается использовать массивы сенсоров и актуаторов, где воздействие и измерение будет осуществляться в определенных пропорциях в соответствии с весовыми коэффициентами. Данный подход более гибок и технологичен, так как в случае

массива элементов управления, расположенных по всей длине балки, можно отслеживать разные величины, используя разные весовые коэффициенты, и на основе данного подхода возможно организовать модальное управление.

В статьях [34-36] для статически неопределимых систем получены так называемые «нулевые» функции формы пьезоэлементов, соответствующие статически допустимому распределению изгибных моментов по длине балки. Актуаторы, имеющие данную форму, не вызывают деформаций балки при данных условиях закрепления, а показания сенсоров данной формы при соответствующих условиях всегда нулевые. Например, в случае, когда оба конца балки заделаны, такой «нулевой» функцией будет являться любая линейная по длине балки функция. Подобные сенсоры предлагается использовать для отслеживания целостности конструкций (health monitoring), поскольку отличие сигнала данных сенсоров от нуля свидетельствует о повреждении механической системы.

В работах [34, 36, 67] предлагается использовать пьезоэлементы, совмещающие в себе одновременно функции как сенсора, так и актуатора, и описывается работа такого элемента. Функции актуатора могут выполняться за счет задания на электродах пьезоэлемента определенной разности потенциалов, а функции сенсора – за счет измерения заряда, протекшего по электрической цепи, в которую включен пьезоэлемент. При такой схеме работы пьезоэлемента его функции как сенсора и актуатора взаимосвязаны, а именно, сигнал сенсора пропорционален той механической характеристике, на которой совершает работу актуатор: например, в случае, если конструкция элемента такова, что сенсор измеряет поперечное перемещение балки в некоторой точке, действие актуатора будет эквивалентно поперечной силе, приложенной к балке в данной точке. Однако на практике реализация идеи совмещения в одном элементе функций сенсора и актуатора затруднена, поскольку сложно обеспечить соответствующие электрические граничные условия. Вместо этого для обеспечения аналогичной согласованной работы сенсора и актуатора используют следующий подход: актуатор и сенсор, имеющие одинаковую форму, прикрепляются к балке симметрично с обеих сторон. При этом актуатор и сенсор включены каждый в свою

электрическую цепь: на электроды актуатора подается управляющее напряжение, а напряжение на электродах сенсора снимается в качестве измеряемого сигнала. При таком расположении пьезоэлементов деформации, испытываемые сенсором и актуатором при изгибе балки, равны по модулю и противоположны по значению. Однако в случае, если помимо изгиба существенную роль в деформациях балки играет продольное растяжение, описанная согласованность в работе сенсора и актуатора нарушается.

В отличие от статей [35, 36, 43], где рассматривается проблема контроля формы (*shape control*), в работе [59] ставится проблема контроля напряжений (*stress control*), поскольку именно напряжения в материале при многоцикловых нагрузках ответственны за повреждение и разрушение. В рассмотренной теоретически и экспериментально задаче пьезоэлектрический стержень с массой на конце подвергается внешнему возбуждению, вызывающему продольные колебания, в резонансном режиме без управления приводящие к разрушению пьезоматериала. В результате приложения к электродам, покрывающим пьезостержень, электрического напряжения в рамках программного управления удается значительно снизить амплитуду колебаний и защитить стержень от разрушения.

#### **1.4.1. Балка Бернулли-Эйлера с пьезоэлементами: связанная теория**

Рассмотрим работу пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов для управления изгибных колебаний тонкой балки. При этом ограничимся рассмотрением модели балки Бернулли-Эйлера.

Пусть балка расположена вдоль оси  $x$ , и ширина балки, отсчитываемая вдоль оси  $y$ , значительно превышает ее толщину, отсчитываемую вдоль оси  $z$ , и при этом мала по сравнению с ее длиной, так что балка может испытывать изгиб в плоскости  $xz$  (см. Рисунок 1.7).

Пусть балка состоит из  $N$  слоев, имеющих постоянную толщину  $h^k$  и переменную ширину  $b^k(x)$ , среди которых есть слои как из пьезоэлектрического, так и из обычного материала. Каждый пьезослой покрыт с обеих сторон

электродами, имеющими ширину  $b_e^k(x)$ . Таким образом, электроды могут покрывать не всю поверхность пьезоматериала. Будем считать, что расположение слоев по обеим сторонам балки симметрично, так что каждое поперечное сечение балки симметрично относительно линии  $z = 0$ , и изгиб в нем происходит относительно данной линии.

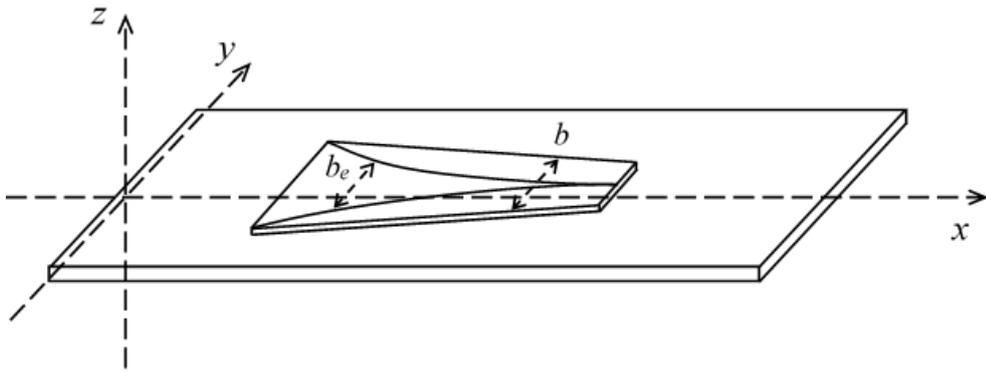


Рисунок 1.7. Расположение пьезоэлементов на балке

В модели балки Бернулли-Эйлера учитывается изгиб и не учитывается сдвиг в сечениях балки, при этом все сечения считаются плоскими. Из всех компонент тензоров напряжений и деформаций преобладающими считаются продольные компоненты  $\sigma_{xx}$  и  $\varepsilon_{xx}$ , остальные считаются малыми и не учитываются. Балка считается тонкой, а деформации – малыми, таким образом, толщина сечения мала по сравнению с радиусом кривизны изгиба балки. Помимо изгиба будем учитывать также продольное растяжение балки. При сделанных допущениях перемещения всех точек балки будут определяться через продольное и поперечное перемещение средней линии балки  $u_0$  и  $w_0$ :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial}{\partial x} w_0(x, t),$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, t),$$

где  $u$  и  $w$  – перемещения точек балки вдоль осей  $x$  и  $z$ , соответственно. Следовательно, продольные деформации будут иметь вид:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_0 - z \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0. \quad (1.23)$$

Растяжение и изгиб в балке связаны с действием в каждом из сечений балки продольной силы  $N$  и изгибающего момента  $M$ :

$$N = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_{xx}^k b^k dz, \quad (1.24)$$

$$M = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_{xx}^k b^k z dz. \quad (1.25)$$

Силовые факторы связаны с кинематическими характеристиками через определяющие соотношения:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{B} & -\bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0' \\ w_0'' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N^p \\ M^p \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Здесь  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{D}$  – модули жёсткости балки,  $N^p$  и  $M^p$  – внутренние сила и момент, возникающие в пьезоматериале благодаря обратному пьезоэлектрическому эффекту и наличию в нём электрического поля.

Динамическое поведение балки определяется следующими уравнениями:

$$\begin{cases} N' + p_x = \rho^{(0)} \ddot{u}_0 \\ M'' + p_z = \rho^{(0)} \ddot{w}_0 \end{cases}. \quad (1.27)$$

Здесь  $p_x$  и  $p_z$  – приложенные к балке внешние распределенные продольная и поперечная силы, а  $\rho^{(0)}$  – линейная плотность балки:

$$\rho^{(0)} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^k b^k dz. \quad (1.28)$$

На концах балки ( $x = 0, l$ ) должны быть заданы или кинематические, или силовые граничные условия:

$$\begin{aligned} u_0 &= \hat{u} \text{ или } N = \hat{N}, \\ w_0 &= \hat{w} \text{ или } M' = \hat{Q}, \\ w_0' &= \hat{\varphi} \text{ или } M = \hat{M}. \end{aligned}$$

Рассмотрим поведение входящих в конструкцию балки пьезоэлектрических слоев. Благодаря прямому и обратному пьезоэлектрическому эффекту механические и электрические характеристики в пьезоматериале связаны между

собой. Эта связь описывается определяющими соотношениями, которые в тензорном виде выглядят следующим образом:

$$\sigma = Y\varepsilon - eE, \quad (1.29)$$

$$D = \eta E + e\varepsilon. \quad (1.30)$$

Здесь  $E$  и  $D$  – векторы напряжённости электрического поля и электрического смещения,  $Y$  – тензор жёсткости, а  $\eta$  и  $e$  – тензоры пьезоэлектрических постоянных материала. Уравнение (1.29) описывает обратный пьезоэлектрический эффект – собственную деформацию пьезоматериала при наличии электрического поля, а уравнение (1.30) – прямой пьезоэффект – возникновение электрического поля в материале при его деформации.

Пьезоэлектрические постоянные зависят от направления поляризации пьезоматериала. В рассматриваемой системе материал поляризован вдоль оси  $z$ , таким образом, продольная компонента механического напряжения  $\sigma_{xx}$  связана с поперечной компонентой напряжённости электрического поля  $E_z$ , а поперечная компонента электрического смещения  $D_z$  связана с продольной компонентой деформации  $\varepsilon_{xx}$ . Поскольку все слои балки являются тонкими, в рамках данного исследования учитываются только поперечные компоненты векторов напряжённости электрического поля и электрического смещения  $E_z$  и  $D_z$ , а остальные компоненты считаются равными нулю. Таким образом, определяющие соотношения для пьезоматериала принимают следующий вид:

$$\sigma_{xx}^k = Y^k(\varepsilon_{xx} - \bar{\varepsilon}_{xx}^k), \quad (1.31)$$

$$\bar{\varepsilon}_{xx}^k = d^k E_z^k, \quad (1.32)$$

$$D_z^k = \eta^k(E_z^k - \bar{E}_z^k), \quad (1.33)$$

$$\bar{E}_z^k = -\frac{e^k}{\eta^k} \varepsilon_{xx}. \quad (1.34)$$

Здесь  $Y^k$  – модуль Юнга материала  $k$ -го слоя,  $\eta^k$  – его проводимость,  $d^k$  и  $e^k$  – его пьезоэлектрические постоянные, связанные соотношением:

$$d^k = \frac{e^k}{Y^k}.$$

Электрическое смещение в пьезоматериале связано с объемной плотностью заряда  $\rho^e$ :

$$\nabla \cdot D = \rho^e. \quad (1.35)$$

Поскольку заряд появляется только на электродах, а из компонент электрического смещения учитывается только поперечная компонента  $D_z$ , внутри каждого из пьезослоев данная формула принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} D_z^k = 0. \quad (1.36)$$

На верхней и нижней границе каждого пьезослоя задаются электрические граничные условия. Это может быть либо заданное напряжение (например, равно нулю, если электроды закорочены), либо заданный электрический заряд (равный нулю, если электроды разомкнуты), либо отсутствие электродов. Будем считать, что на напряженность электрического поля и электрическое смещение в каждом из пьезослоев, составляющих балку, влияют исключительно условия на покрывающих этот слой электродах, и не влияют заряды на электродах других слоев. Данное предположение объясняется тем, что электроды, покрывающие каждый пьезослой сверху и снизу, одинаковы, и заряды на них противоположны, а сами пьезослои достаточно тонкие, поэтому поля, создаваемые каждой парой электродов снаружи от соответствующего пьезослоя, компенсируют друг друга.

В тех частях пьезослоев, которые не покрыты электродами, электрическое смещение равно нулю, а напряженность электрического поля появляется как следствие деформации благодаря прямому пьезоэлектрическому эффекту:

$$E_z^k = \bar{E}_z^k = -\frac{e^k}{\eta^k} \varepsilon_{xx}. \quad (1.37)$$

Рассмотрим участки пьезослоев, покрытые электродами. Как известно, напряженность электрического поля связана с электрическим потенциалом  $\varphi$ :

$$E_z^k = -\frac{\partial \varphi^k}{\partial z}.$$

Таким образом, электрическое поле внутри пьезослоя зависит от разности потенциалов на электродах  $V^k$ :

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} E_z^k dz = V^k.$$

С учетом (1.33) и (1.36) электрическое смещение внутри участков слоев, покрытых электродами, будет иметь следующий вид:

$$D_z^k = \frac{1}{h^k} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \eta^k (E_z^k - \bar{E}_z^k) dz = \eta^k \left( \frac{V^k}{h^k} - \frac{1}{h^k} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{E}_z^k dz \right). \quad (1.38)$$

Отсюда выводится выражение для напряженности электрического поля в  $k$ -м пьезослое:

$$E_z^k = \frac{V^k}{h^k} + \left[ \bar{E}_z^k - \frac{1}{h^k} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{E}_z^k dz \right]. \quad (1.39)$$

Заметим, что благодаря неравномерным по толщине слоя продольным деформациям при изгибе балки создаваемое ими электрическое поле  $\bar{E}_z^k$  также неравномерно по толщине пьезослоя.

В более сложной теории, в которой используется модель балки Тимошенко, учитывающая сдвиг, необходим также учет продольных компонент векторов напряженности электрического поля и электрического смещения, поскольку данные компоненты связаны со сдвиговой деформацией  $\tau_{xy}$ . В свою очередь, наличие продольных компонент данных векторных величин влияет и на их поперечные компоненты, таким образом, явления сдвига и изгиба с растяжением оказываются связаны между собой. Подробная теория, учитывающая данные эффекты, развивается в статьях [40, 41]. В [41] теория выводится на основе предположений о равенстве нулю продольной компоненты либо напряженности электрического поля, либо электрического смещения. В [40] приводится более продвинутая теория, в которой удается отказаться от данных предположений, и учесть обе продольные компоненты. Вместо этого делается предположение, что поперечная компонента электрического поля изменяется по толщине пьезослоя не линейно, как это было бы в случае использования теории без учета сдвига, а параболически. Данный подход приводит к более точным результатам при анализе собственных частот изгибных колебаний балок, чем подходы, изложенные в [41].

Теории, изложенные в [40, 41], следует применять в тех случаях, когда сдвиговые деформации в балке становятся существенными. Влияние сдвиговых деформаций тем заметнее, чем выше толщина пьезослоев, а также чем более высокие частоты колебаний рассматриваются в задаче. В рамках данного изложения считается, что балка является тонкой, и сдвиг не учитывается.

Получим выражение для показания пьезосенсора. Для этого выразим электрический заряд, натекший на электроды  $k$ -го пьезослоя, через электрическое смещение, используя формулу (1.35):

$$Q^k = \int_{A_e^k} D_z^k dA_e^k = \int_0^l D_z^k b_e^k dx. \quad (1.40)$$

Здесь  $A_e^k$  – площадь участка  $k$ -го слоя, покрытого электродами.

Подставив (1.38) в (1.40), получим:

$$Q^k = C^k V^k - \frac{\eta^k}{h^k} \int_0^l \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{E}_z^k dz \right] b_e^k dx. \quad (1.41)$$

Здесь  $C^k$  – электрическая емкость  $k$ -го пьезослоя:

$$C^k = \frac{\eta^k A_e^k}{h^k}.$$

Используя формулы (1.39) и (1.41), для напряженности электрического поля внутри слоя в случае, если на электродах задан заряд, будем иметь:

$$E_z^k = \frac{Q^k}{\eta^k A_e^k} + \frac{1}{A_e^k h^k} \int_0^l \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{E}_z^k dz \right] b_e^k dx + \left[ \bar{E}_z^k - \frac{1}{h^k} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{E}_z^k dz \right]. \quad (1.42)$$

Из (1.41) получим выражения для показаний сенсора. В том случае, если электроды пьезосенсора закорочены (то есть разность потенциалов между электродами равна нулю), а сенсор измеряет протекающий между электродами заряд, выражение для показаний сенсора имеет следующий вид:

$$Q^k = -\frac{\eta^k}{h^k} \int_0^l \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{E}_z^k dz \right] b_e^k dx. \quad (1.43)$$

Если же электроды пьезосенсора разомкнуты (то есть заряд на них остается равным нулю), а сенсор измеряет напряжение, то его показания определяются следующей формулой:

$$V^k = \frac{1}{A_e^k} \int_0^l \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{E}_z^k dz \right] b_e^k dx. \quad (1.44)$$

Получим определяющие соотношения для балки с пьезоэлементами, связывающие силовые факторы – продольную силу  $N$  и изгибающий момент  $M$  – с кинематическими характеристиками – растяжением и изгибом балки (1.26). Для этого подставим в (1.24) и (1.25) выражение для продольной компоненты напряжения (1.31), учитывая при этом, что электродами покрыта только часть площади пьезослоев. Для непокрытой части слоев напряженность электрического поля задается выражением (1.37), а для покрытой части она описывается либо формулой (1.39) в случае, когда на электродах задано напряжение, либо формулой (1.42) – в случае, если на электродах задан заряд. Зависимость электрического поля от продольной деформации определяется соотношением (1.34), а зависимость деформации от кинематических характеристик балки задается формулой (1.22). В результате использования перечисленных формул и несложных выкладок получим следующий вариант определяющих соотношений для балки:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{B} & -\bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_0 \\ w''_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N^{e(v,q)} \\ M^{e(v,q)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N^f \\ M^f \end{bmatrix}, \quad (1.45)$$

где жесткостные коэффициенты имеют следующий вид:

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^N \left[ Y^k \left( 1 + \frac{d^k e^k}{\eta^k} \right) b^k h^k - \frac{Y^k d^k e^k}{\eta^k} b_e^k h^k \right], \quad (1.46)$$

$$\bar{B} = \sum_{k=1}^N \left[ Y^k \left( 1 + \frac{d^k e^k}{\eta^k} \right) b^k h^k z_m^k - \frac{Y^k d^k e^k}{\eta^k} b_e^k h^k z_m^k \right], \quad (1.47)$$

$$\bar{D} = \sum_{k=1}^N \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} Y^k \left( 1 + \frac{d^k e^k}{\eta^k} \right) b^k z^2 dz - \frac{Y^k d^k e^k}{\eta^k} b_e^k h^k (z_m^k)^2 \right]. \quad (1.48)$$

Здесь  $z_m^k$  – координата средней линии  $k$ -го слоя по оси  $z$ :

$$z_m^k = \frac{z_{k-1} + z_k}{2}.$$

Силы и моменты, возникающие благодаря обратному пьезоэффекту:

$$N^p = N^{e(V,Q)} - N^f,$$

$$M^p = M^{e(V,Q)} - M^f,$$

$$N^{e(V,Q)} = \sum_{k=1}^N \left[ e^k b_e^k \left( V^k \kappa_V^k + \frac{h^k Q^k \kappa_Q^k}{\eta^k A_e^k} \right) \right], \quad (1.49)$$

$$M^{e(V,Q)} = \sum_{k=1}^N \left[ e^k b_e^k z_m^k \left( V^k \kappa_V^k + \frac{h^k Q^k \kappa_Q^k}{\eta^k A_e^k} \right) \right], \quad (1.50)$$

$$N^f = \sum_{k=1}^N \kappa_Q^k \frac{Y^k d^k e^k}{\eta^k} b_e^k h^k \left[ \frac{1}{A_e^k} \int_0^l (u'_0 - z_m^k w_0'') b_e^k dx \right], \quad (1.51)$$

$$M^f = \sum_{k=1}^N \kappa_Q^k \frac{Y^k d^k e^k}{\eta^k} b_e^k h^k z_m^k \left[ \frac{1}{A_e^k} \int_0^l (u'_0 - z_m^k w_0'') b_e^k dx \right]. \quad (1.52)$$

Здесь  $\kappa_V^k$  и  $\kappa_Q^k$  – коэффициенты, равные нулю или единице в зависимости от того, что задано на электродах  $k$ -го пьезослоя – напряжение  $V^k$  или заряд  $Q^k$ ;  $N^f$  и  $M^f$  – нелокальные сила и момент, зависящие не только от растяжения и изгиба в данном сечении балки, но и от деформаций в балке по всей площади пьезослоя, покрытой электродами. Данные силовые факторы присутствуют в том случае, если на электродах пьезослоя задан заряд, а не напряжение, поскольку заряд на пластине электрода перераспределяется в зависимости от деформации пьезослоя по всей его длине.

#### 1.4.2. Работа прямоугольных сенсоров и актуаторов

Рассмотрим подробнее работу пары пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов в важном частном случае, когда сенсор и актуатор представляют собой одинаковые прямоугольные пластинки длиной  $l_p$ , шириной  $b_p$  и толщиной  $h_p$ , наклеенные на балку симметрично с обеих сторон между сечениями  $x = x_1$  и  $x = x_2$ :  $x_2 - x_1 = l_p$ . Пьезослои полностью покрыты электродами. Балка имеет

постоянное сечение шириной  $b$  и толщиной  $h$ . Геометрия рассматриваемой задачи изображена на Рисунке 1.8.

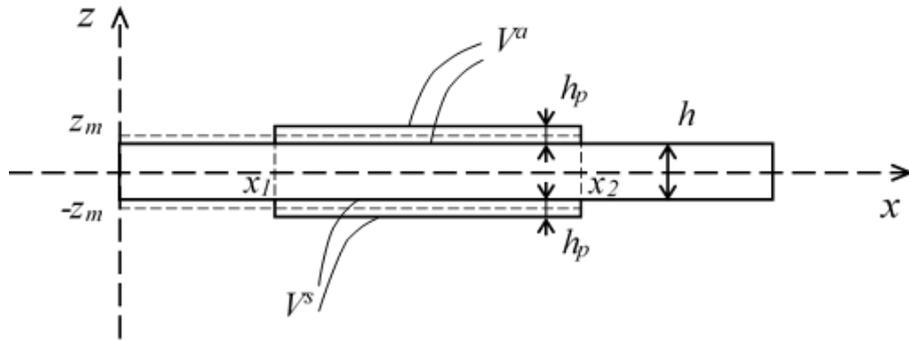


Рисунок 1.8. Расположение пьезоэлементов на балке, вид сбоку

Здесь  $z_m$  – расстояние между средними линиями каждого из пьезоэлементов и всей балки:

$$z_m = \frac{h + h_p}{2}.$$

Сенсор закреплен внизу балки ( $-\frac{h}{2} - h_p \leq z \leq -\frac{h}{2}$ ), а актуатор – наверху ( $\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_p$ ). На электроды актуатора подается управляющее напряжение  $V^a$ , а напряжение на электродах сенсора  $V^s$  измеряется в качестве выходного сигнала. Для простоты будем учитывать только изгибную деформацию балки, и не учитывать растяжение и сдвиг. В случае, если в электрической цепи сенсора ток не течет, сигнал сенсора (1.44) будет иметь вид:

$$V^s = -\frac{e h_p z_m}{\eta l_p} \int_{x_1}^{x_2} w_0'' dx = -\frac{e h_p z_m}{\eta l_p} \Delta\varphi, \quad (1.53)$$

где  $e$  и  $\eta$  – пьезоэлектрические постоянные материала сенсора, а  $\Delta\varphi$  – разность углов поворота сечений балки  $x = x_1$  и  $x = x_2$ .

Уравнение изгиба балки (1.26) будет иметь следующий вид:

$$M = -\bar{D}w_0'' - M^p, \quad (1.54)$$

$$M^p = M^a + M^s,$$

где  $M^a$  – момент, создаваемый актуатором, а  $M^s$  – момент, создаваемый сенсором. Подставив параметры рассматриваемой задачи в формулу (1.48), для изгибной жесткости  $\bar{D}$  получим:

$$\bar{D} = Y \frac{bh^3}{12} + 2Y_p b_p h_p z_m^2 + Y_p \left(1 + \frac{de}{\eta}\right) \frac{b_p h_p^3}{6}. \quad (1.55)$$

Здесь  $Y$  и  $Y_p$  – модули Юнга материала балки и пьезоматериала,  $d$  – пьезоэлектрическая постоянная пьезоматериала. Момент, создаваемый актуатором вследствие приложения к его электродам напряжения  $V^a$ , находится в соответствии с формулой (1.50):

$$M^a = e b_p z_m V^a. \quad (1.56)$$

Момент, создаваемый сенсором, связан с напряжением на электродах сенсора, зависящим от деформации пьезослоя. Он может быть найден по формуле (1.52), или же подстановкой (1.53) в (1.50):

$$M^s = -e b_p z_m V^s = \frac{e^2 b_p h_p z_m^2}{\eta l_p} \Delta\varphi. \quad (1.57)$$

Таким образом, действие актуатора и сенсора прямоугольной формы на балку эквивалентно паре изгибающих моментов, равных по модулю и противоположных по направлению, приложенных в сечениях  $x = x_1$  и  $x = x_2$ , как показано на Рисунке 1.9 [56].

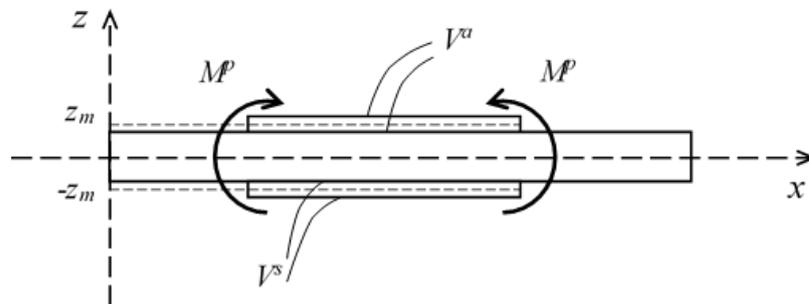


Рисунок 1.9. Действие прямоугольных пьезоэлементов на балку

Рассмотрим подробнее работу пьезоэлектрического сенсора в реальных условиях, когда электроды сенсора не разомкнуты, а подключены к измерителю напряжения (вольтметру). При этом по электрической цепи может течь ток,

соответственно, на электроды сенсора натекает заряд. Этот заряд влияет на показания вольтметра – выходной сигнал сенсора.

Электрическая схема сенсора с измерителем напряжения изображена на Рисунке 1.10. Здесь сенсор представлен в виде последовательно расположенных источника напряжения  $V^p$  и емкости  $C$ .  $R$  – сопротивление вольтметра, а  $V^s$  – измеряемое им напряжение.

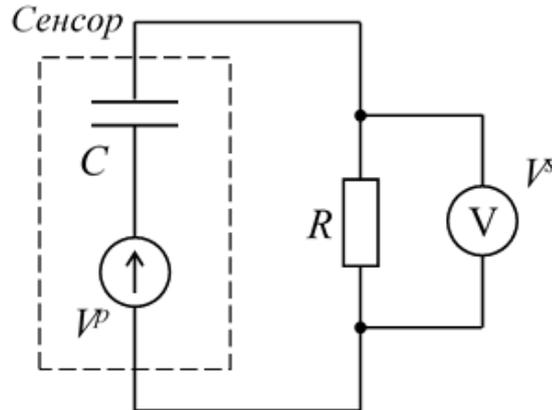


Рисунок 1.10. Схема электрической цепи сенсора

Здесь напряжение  $V^p$  – напряжение, создаваемое деформацией сенсора, определяемое по формуле (1.53) и равное показанию сенсора в случае, если заряд на электродах сенсора равен нулю:

$$V^p = -\frac{e h_p z_m}{\eta l_p} \Delta\varphi. \quad (1.58)$$

Измеряемое напряжение  $V^s$  зависит как от напряжения  $V^p$ , так и от заряда  $Q^s$ , натекшего на электроды сенсора:

$$V^s = \frac{Q^s}{C} + V^p = \frac{Q^s}{C} - \frac{e h_p z_m}{\eta l_p} \Delta\varphi.$$

Заряд  $Q^s$  связан с током  $I$ , протекающим по электрической цепи:

$$\dot{Q}^s = -I = -\frac{V^s}{R}.$$

Таким образом, напряжения  $V^s$  и  $V^p$  связаны следующим уравнением:

$$\dot{V}^s + \frac{V^s}{RC} = \dot{V}^p. \quad (1.59)$$

Получим передаточную функцию рассматриваемой системы. Пусть генерируемое сенсором напряжение  $V^p$  изменяется по гармоническому закону:

$$V^p = \bar{V}^p e^{i\omega t}.$$

Тогда в установившемся режиме измеряемое напряжение  $V^s$  также будет изменяться гармонически:

$$V^s = \bar{V}^s e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Из (1.58) получим выражение для модуля и фазы измеряемого сигнала  $\bar{V}^s$  и  $\varphi$ :

$$\bar{V}^s e^{i\varphi} = \frac{1}{1 - \frac{i}{RC\omega}} \bar{V}^p,$$

$$\bar{V}^s = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 C^2 \omega^2}}} \bar{V}^p = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \bar{V}^p, \quad (1.60)$$

$$\varphi = \arctg \frac{1}{RC\omega}. \quad (1.61)$$

Графики полученных функций для значений сопротивления вольтметра  $R = 1$  МОм и емкости сенсора  $C = 45$  нФ изображены на Рисунке 1.11.

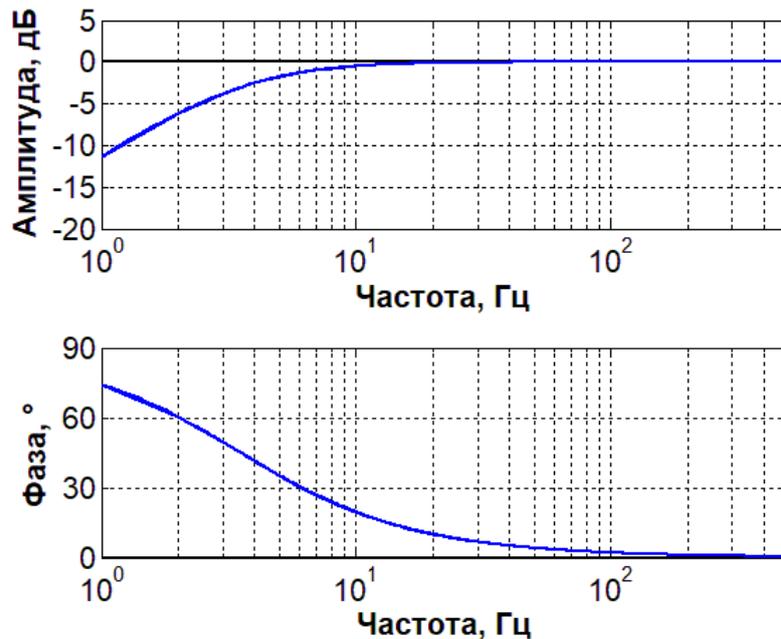


Рисунок 1.11. Амплитудно- и фазочастотная характеристики пьезосенсора

Таким образом, на низких частотах пьезосенсор не работает – его показания стремятся к нулю, поскольку на электроды сенсора натекает заряд и нивелирует измеряемое напряжение (при этом фаза сигнала стремится к  $\frac{\pi}{2}$ ). Отметим, что данный эффект проявляется тем слабее, чем выше емкость сенсора  $C$  и сопротивление измерителя напряжения  $R$ . На высоких частотах, наоборот, заряд не успевает натекает на электроды сенсора, и его показания близки к величине напряжения, генерируемого пьезослоем в результате его деформации.

Итак, в данной главе были рассмотрены:

- схемы локальной и модальной систем управления и разница между ними;
- основные принципы работы модальных систем управления: разделение форм колебаний за счет выбора модальных матриц, основные этапы создания модальных систем управления, а также причины возникновения spillover-эффекта – перетекания энергии на высшие формы колебаний;
- работа системы управления с одним и двумя контурами, основные требования к передаточным функциям контуров управления: критерии устойчивости, действие системы управления на резонансных режимах колебаний;
- работа пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов для модели балки Бернулли-Эйлера с учетом растяжения и изгиба: изменение упругих модулей, появляющиеся вследствие обратного пьезоэффекта продольная сила и изгибающий момент, сигнал сенсоров при различных условиях на электродах;
- работа пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов в простейшем случае, то есть при прямоугольной форме пьезоэлементов и учете только изгиба без растяжения; работа сенсора в реальных условиях при измерении напряжения вольтметром с конечным сопротивлением.

## **Глава 2. Подготовка эксперимента по локальному и модальному управлению изгибными колебаниями балки**

Главы 2 и 3 данной работы посвящены изложению экспериментального исследования, включающего в себя воплощение как локального, так и модального подхода к управлению колебаниями упругих систем и их сравнение между собой. В качестве модельного объекта выступает тонкая металлическая балка, упруго заземленная в промежуточном сечении, совершающая изгибные колебания. Основные этапы проведенного исследования изложены в работе [13].

Все рассматриваемые локальные и модальные системы управления используют один и тот же набор пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов, расположенных попарно по обеим сторонам балки. Различные варианты систем управления отличаются использованными в контурах управления передаточными функциями. Задача указанных систем – подавление резонансных колебаний балки, вызванных внешним возбуждением, в частотном диапазоне, включающем две низших собственных частоты изгибных колебаний балки. Цель исследования состоит в том, чтобы сравнить эффективность локального и модального управления при решении поставленной задачи.

Процесс создания системы управления включает в себя такие этапы, как установка на балке сенсоров и актуаторов, для модальной системы – определение модальных матриц – анализатора и синтезатора форм, а также задание закона управления для каждого контура. В данной главе рассматриваются первые два этапа указанного экспериментального исследования. Результаты использования полученных локальных и модальных систем управления в задаче подавления вынужденных изгибных колебаний балки сравниваются между собой в главе 3.

При решении задач контроля формы (shape control) правильность расстановки на упругом объекте сенсоров и актуаторов имеет ключевое значение для эффективности управления. Наиболее распространенные критерии оптимизации расположения данных элементов в задаче об активном управлении колебаниями рассматриваются в работе [26]. При модальном управлении именно

расположение на объекте сенсоров и актуаторов ответственно за возникновение spillover-эффекта, то есть перетекания энергии с низших на высшие, неуправляемые формы колебаний упругой системы, вызывающего неустойчивость по данным формам и ограничивающего работоспособность системы управления. Погрешность наблюдения (observation spillover) обусловлена неидеальностью системы сенсоров, поскольку к измеряемым сенсорами обобщенным координатам, связанным с управляемыми формами колебаний объекта, примешиваются составляющие, соответствующие неуправляемым формам (это отражено в формуле (1.4)). Кроме этого, возникает погрешность управления (control spillover), вызванная тем, что актуаторы возбуждают не только нужные, но и остальные (высшие) формы колебаний объекта.

Для борьбы с указанной проблемой необходимо определенным образом создавать систему сенсоров и актуаторов. Стремление создать идеальные сенсоры и актуаторы для модального управления упругой системой отражено в концепции модальных фильтров (modal filters), предполагающей, что данные элементы распределены по всей площади объекта и их форма соответствует распределению деформаций в объекте для нужной формы колебаний [17, 46]. Однако применение данного подхода на практике ограничено из-за неудобства реализации и невозможности отслеживать таким образом большое количество форм. Более гибкий и практичный подход предполагает использование массивов дискретных элементов управления [29, 51, 68]. Их число может быть большим, при этом они могут занимать всю площадь объекта управления и позволять отдельно отслеживать и воздействовать на большое количество собственных форм. В настоящем исследовании используются именно наборы дискретных сенсоров и актуаторов, позволяющие осуществить как локальное, так и модальное управление.

При создании систем управления колебаниями упругих тел зачастую используется концепция «совмещенных» (collocated) сенсоров и актуаторов. Она предполагает, что сенсор измеряет те же деформации объекта, на которых совершает работу актуатор. Данная схема применима как к отдельным сенсорам и актуаторам (они располагаются попарно), так и к целым группам данных

элементов: при этом измеренный сигнал складывается из сигналов отдельных сенсоров с определенными весовыми коэффициентами, а управляющий сигнал распределяется по отдельным актуаторам (парным указанным сенсорам) в тех же самых пропорциях. Описанный подход используется при управлении колебаниями тонких балок и пластин в работах [29, 51], он же применяется и в настоящей работе.

После выбора мест расположения на балке сенсоров и актуаторов необходимо решить задачу определения модальных матриц – синтезатора и анализатора форм, задающих преобразование измеряемых и управляющих сигналов в модальной системе управления (см. формулу (1.7)). Для решения указанной задачи предлагается процедура экспериментальной идентификации, изложенная в заключительном разделе данной главы, данная процедура подробно разбирается в работе [3].

## **2.1. Постановка эксперимента**

В данном разделе описывается экспериментальная установка, созданная с целью отработки локального и модального подходов к управлению упругим объектом. Эксперимент был проведен в Лаборатории Мехатроники Института Технической Механики Университета Иоганна Кеплера, г. Линц, Австрия.

### **2.1.1. Схема установки и методика измерений**

Объект управления представляет собой алюминиевую балку длиной 70 см с прямоугольным сечением  $3 \times 35$  мм. Схема экспериментальной установки изображена на Рисунке 2.1. Балка расположена вертикально и закреплена в одной точке с помощью болтов на массивном основании, для этого в балке на оси проделано небольшое сквозное отверстие. Точка закрепления находится на расстоянии 10 см от нижнего конца балки.

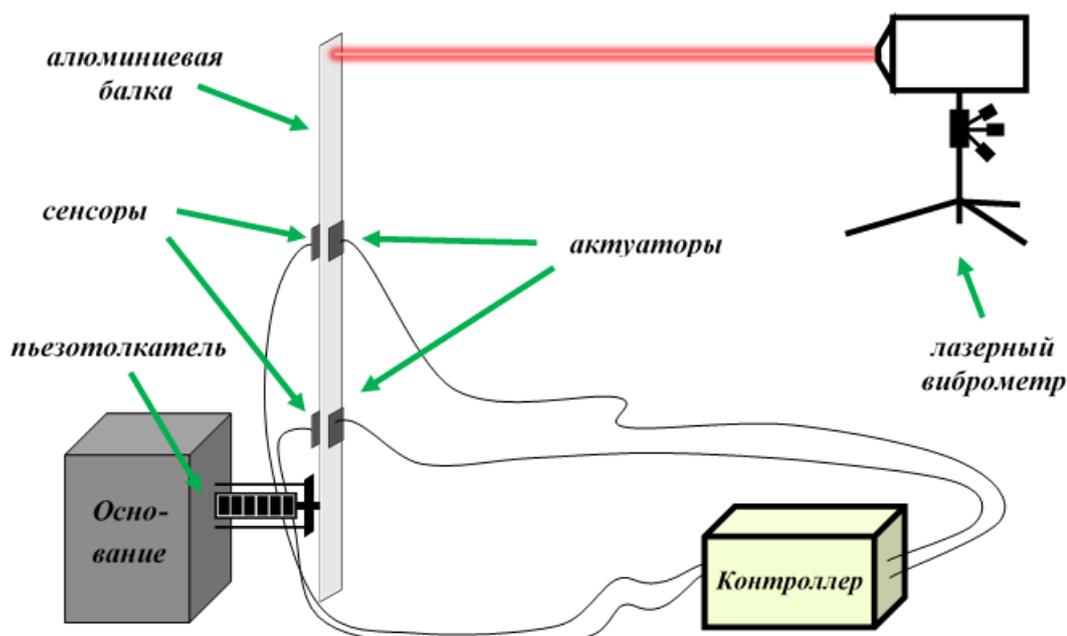


Рисунок 2.1. Схема экспериментальной установки

Способ внешнего возбуждения изгибных колебаний балки был выбран из соображений удобства практической реализации: в качестве основного элемента конструкции закрепления выступает пьезоэлектрический стержень-толкатель, растягивающийся и сжимающийся в продольном направлении в результате приложения к нему электрического напряжения. Данная схема позволяет вызывать поперечные колебания точки закрепления балки в широком частотном диапазоне. В состав конструкции закрепления входят также дополнительные элементы, соединяющие балку с основанием – болты и металлическая пластина (см. Рисунки 2.1, 2.2). Данные элементы нужны для того, чтобы воспринимать вес балки и таким образом освобождать пьезотолкатель от излишней поперечной нагрузки, которая может привести к его повреждению, при этом они не препятствуют продольным колебаниям пьезотолкателя. Фотографии конструкции закрепления балки приведены на Рисунке 2.2.

Для управления изгибными колебаниями балки используется четыре прямоугольных пьезоэлемента: два сенсора и два актуатора. Работа данных элементов подробно рассмотрена в пункте 1.4.2. Целью системы управления является снижение уровня вибраций балки на первой и на второй резонансных

частотах изгибных колебаний, таким образом, система должна уменьшать изгибные колебания балки по первой и по второй формам. По этой причине в целях максимизации воздействия на данные формы пары сенсор-актуатор расположены в местах балки, имеющих для данных форм наибольшую кривизну.



Рисунок 2.2. Закрепление балки с помощью пьезотолкателя

Сенсоры и актуаторы соединены через контроллер, генерирующий управляющее воздействие в зависимости от измеренных сигналов в соответствии с заданным законом управления. Кроме этого, в цепь управления входят дополнительные элементы: усилитель, увеличивающий амплитуду управляющего сигнала перед его подачей на актуаторы, и фильтры нижних частот (ФНЧ), сглаживающие высокочастотную составляющую электрического сигнала и предохраняющие оборудование от высоких значений входного напряжения. Общая схема цепи управления изображена на Рисунке 2.3.

Сигнал, подаваемый на пьезотолкатель, также предварительно проходит через усилитель, увеличивающий амплитуду данного сигнала в 100 раз.



Рисунок 2.3. Схема системы управления с обратной связью

Для отслеживания амплитуды поперечных колебаний отдельных точек балки используется лазерный виброметр. Он измеряет длину волны отраженного от поверхности балки лазерного луча, определяя таким образом поперечную скорость соответствующей точки балки, затем из скорости вычисляется амплитуда колебаний данной точки. Отслеживаемая с помощью виброметра интенсивность колебаний точки на верхнем конце балки используется для определения эффективности работы тестируемых систем управления. Выбор данной точки обусловлен тем, что для форм колебаний, подаваемых с помощью созданных систем управления, амплитуда колебаний именно этой точки максимальна среди всех точек балки. Кроме того, лазерный виброметр используется для определения форм колебаний балки: для этого измеряется интенсивность поперечных колебаний группы точек по всей длине балки.

Используемая в проводимом эксперименте аппаратура позволяет снимать амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) балки: при воздействии как на актуаторы, так и на пьезотолкатель, и при измерении как сигнала сенсоров, так и сигнала виброметра. Для этого на вход системы подается сигнал с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-сигнал), частота которого может пробегать значения от долей Гц до десятков КГц, а измеренный временной сигнал подвергается преобразованию Фурье. На основе измеренных частотных характеристик системы, полученных с использованием сенсоров и актуаторов, производится дизайн передаточных функций для различных контуров управления, а по частотным характеристикам, полученным с использованием пьезотолкателя и виброметра, определяется эффективность работы создаваемых систем управления.

### 2.1.2. Характеристики использованных приборов и материалов

В данном пункте приводятся характеристики материалов и приборов, используемых в эксперименте.

Балка имеет размеры  $3 \times 35 \times 700$  мм, материал балки – алюминий. Характеристики материала приведены в Таблице 2.1.

Рабочая часть конструкции пьезоэлектрического толкателя – стержень, выполненный из пьезокерамики PZT-5A, состоящий из 365 слоев, имеющий длину 30 мм и круглое поперечное сечение площадью  $49 \text{ мм}^2$ . Характеристики материала пьезотолкателя также приведены в Таблице 2.1. Рабочий диапазон прикладываемых напряжений для пьезотолкателя составляет от 0 до 160 В.

Для управления колебаниями в эксперименте используются пьезоэлектрические сенсоры и актуаторы PI Ceramic DuraAct P-876.A15, их конструкция изображена на Рисунке 2.4. Данные элементы представляют собой слой пьезокерамики PZT (PIC 255), имеющий прямоугольную форму с размерами  $50 \times 30 \times 0.5$  мм, покрытый сверху и снизу электродами и заключенный в полимерную изоляцию. Весь пьезоэлемент имеет размеры  $61 \times 35 \times 0.8$  мм. Параметры пьезоматериала приведены в Таблице 2.1. Рабочий диапазон прикладываемых напряжений для пьезоактуатора составляет от -250 до 1000 В.

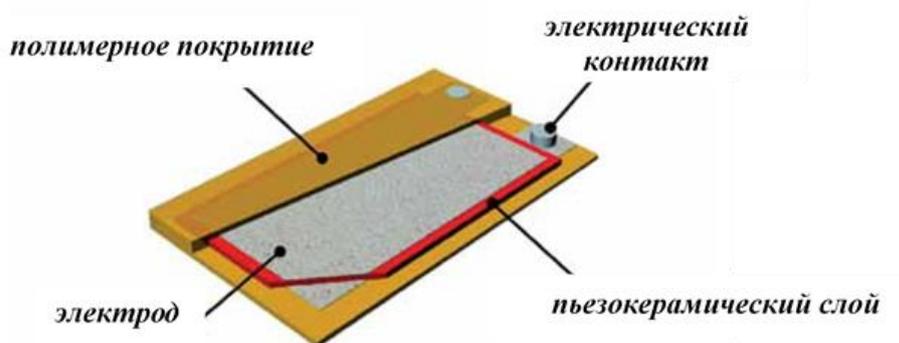


Рисунок 2.4. Схема пьезоэлементов, использующихся в качестве сенсоров и актуаторов

Колебания отдельных точек балки отслеживаются с помощью лазерного виброметра Polytec Scanning Vibrometer PSV-400. Кроме самого виброметра, данная установка включает в себя аппаратуру, использующуюся для генерации

возбуждающего сигнала, подаваемого на пьезотолкатель или пьезоактуаторы, и анализа измеряемого сигнала от виброметра или пьезосенсоров. Используемое программное обеспечение позволяет строить амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики, а также анализировать формы колебаний балки при измерении колебаний группы точек по всей ее длине. Фотографии лазерного виброметра с подключенной к нему аппаратурой приведены на Рисунке 2.5.

Таблица 2.1.

## Характеристики используемых материалов

Балка, алюминий	
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	2700
Модуль Юнга $Y$ , ГПа	70
Пьезотолкатель, пьезоматериал	
Плотность $\rho^s$ , кг/м <sup>3</sup>	10000
Модуль Юнга $Y^s$ , ГПа	50
Пьезоэл. коэффициент $d_{33}^s$ , Кл/Н	$7 \times 10^{-10}$
Сенсоры и актуаторы, пьезоматериал	
Плотность $\rho^p$ , кг/м <sup>3</sup>	7800
Модуль Юнга $Y^p$ , ГПа	62
Пьезоэл. коэффициент $d_{31}^p$ , Кл/Н	$1.8 \times 10^{-10}$
Проводимость $\eta_3^p$ , Ф/м	$1.55 \times 10^{-8}$
Емкость $C^p$ , нФ	45

Для генерации управляющих воздействий на основании измеренных сигналов во всех системах управления используется дискретный контроллер dSPACE DS1103 PPC Controller Board. Для того, чтобы задавать закон управления, а также отслеживать входящие и исходящие сигналы, контроллер соединен с компьютером. Задание алгоритма работы контроллера осуществляется с помощью программного пакета MATLAB Simulink. Для всех тестируемых систем управления частота работы контроллера составляет 10 КГц.

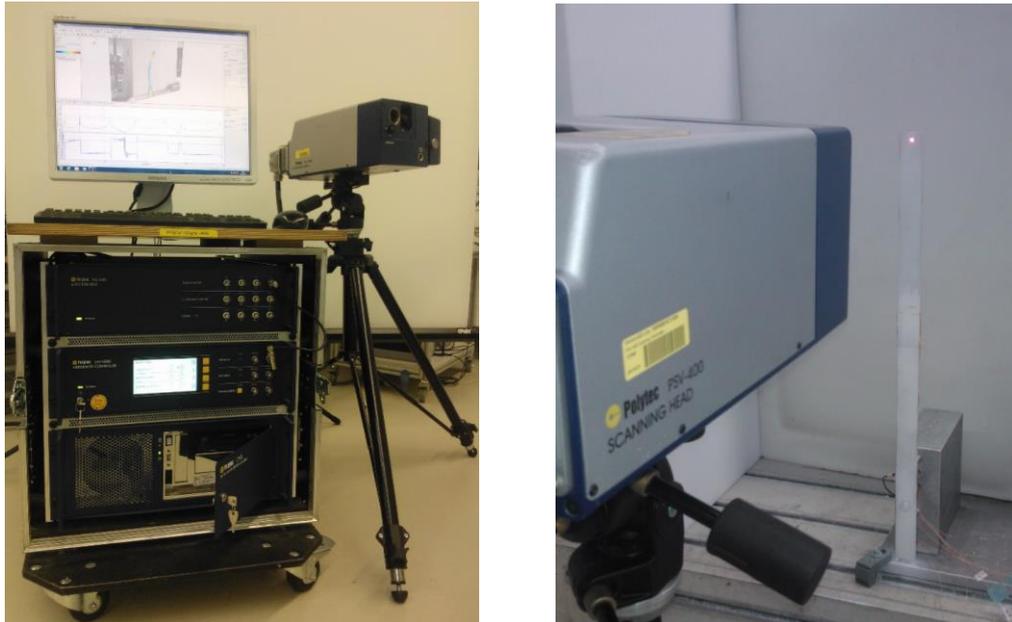


Рисунок 2.5. Отслеживание колебаний балки с помощью лазерного виброметра

В цепи управления используются два фильтра нижних частот Dewetron DAQP-V Module: один расположен перед контроллером, другой – после него. Из-за того, что контроллер работает дискретно, он вносит в управляющий сигнал дополнительную высокочастотную составляющую, которая может приводить к возникновению в системе с управлением неустойчивых колебаний. Фильтры нижних частот снижают высокочастотные составляющие сигнала и таким образом улучшают устойчивость системы, при этом слабо влияя на работу системы управления в области низких частот. Кроме этого, фильтр, расположенный перед контроллером, ограничивает величину электрического сигнала и таким образом обеспечивает защиту контроллера от слишком высоких значений входного напряжения.

В процессе исследования тестировались различные варианты настроек ФНЧ и частоты работы контроллера. В результате были выбраны такие значения данных параметров, которые обеспечивают наилучшую работу созданных систем управления в требуемом частотном диапазоне. Выбранное значение частоты среза ФНЧ составило 1 КГц. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристика используемых фильтров в диапазоне от 1 Гц до 5 КГц приведены на Рисунке 2.6.

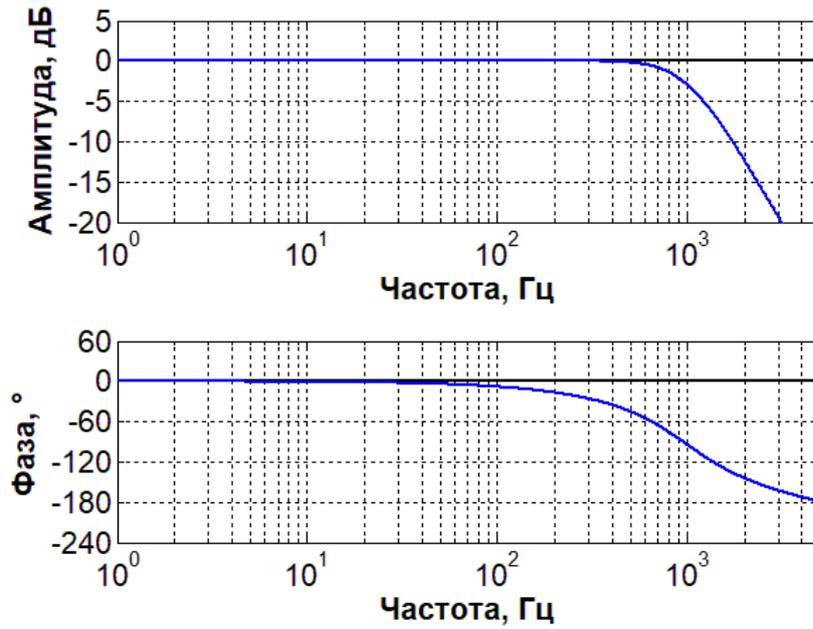


Рисунок 2.6. АЧХ и ФЧХ фильтра с частотой среза 1 кГц

Перед подачей управляющего сигнала на актуаторы данный сигнал проходит через усилитель, увеличивающий его амплитуду в 25 раз. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристика данного усилителя в диапазоне от 1 Гц до 5 КГц приведены на Рисунке 2.7.

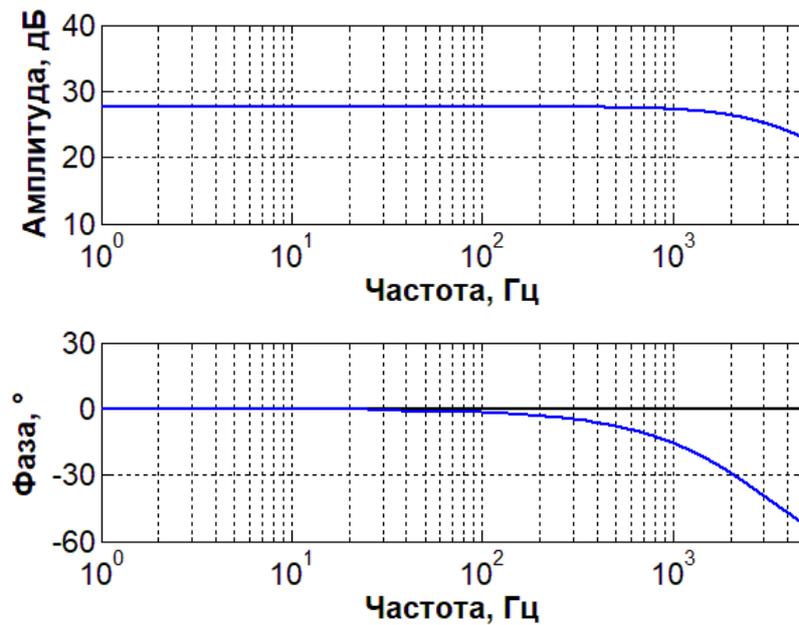


Рисунок 2.7. АЧХ и ФЧХ усилителя

Из Рисунков 2.6 и 2.7 видно, что на частотах до 100 Гц ни усилитель, ни фильтр практически не изменяют фазу сигнала, и амплитуда сигнала в данном частотном диапазоне постоянна. На высоких частотах (выше 1 КГц) и фаза, и амплитуда сигналов понижаются.

## **2.2. Расстановка сенсоров и актуаторов и определение модальных матриц**

Данный пункт посвящен изложению начальной стадии создания систем управления, которая сводится к расстановке на балке сенсоров и актуаторов, а также определению модальных матриц (синтезатора и анализатора форм) для модальной системы управления. Вопрос оптимального размещения на упругой системе пьезоэлементов с целью гашения вынужденных колебаний рассматривается в работе [61]. Для того, чтобы выбрать места расположения на балке пьезоэлементов, необходимо проанализировать те формы колебаний балки, с возбуждением которых система управления должна будет бороться – это первая и вторая формы изгибных колебаний балки. Данные формы получаются как экспериментально, так и численно. Затем, после закрепления на балки пьезоэлементов, измеряются частотные характеристики балки, получаемые с помощью сенсоров и актуаторов – они необходимы для дальнейшего синтеза законов управления. Наконец, в соответствии с изложенным алгоритмом идентификации определяются модальные матрицы, обеспечивающие разделение первой и второй форм колебаний балки в модальной системе управления.

### **2.2.1. Расстановка сенсоров и актуаторов**

Для того, чтобы выбрать места расположения пьезоэлементов на балке, необходимо получить графики кривизны (то есть второй производной) первых двух форм изгибных колебаний балки. Поскольку актуаторы совершают работу именно на второй производной поперечного смещения балки, а сенсоры измеряют среднее значение данной величины по своей длине, для наиболее эффективного

функционирования пьезоэлементы следует расставлять на те участки балки, где кривизна первой и второй форм изгибных колебаний принимает максимальные значения.

Получить формы колебаний балки можно двумя способами: либо экспериментально, измерив с помощью лазерного виброметра, либо теоретически. Однако при вычислении второй производной полученных экспериментально функций ошибки измерения могут сильно сказаться на результате, поэтому для данной цели используется второй путь – численное решение. Формы и частоты изгибных колебаний балки, полученные численно, сравниваются с результатами эксперимента, таким образом проверяется адекватность выбранной модели, затем вычисляются требуемые функции кривизны форм колебаний, на основе которых определяются позиции сенсоров и актуаторов.

Получим численное решение задачи о собственных колебаниях балки. Для этого рассмотрим балку, закрепленную в соответствии с условиями, приведенными в пункте 2.1.1 в рамках описания постановки эксперимента. Схема данной задачи приведена на Рисунке 2.8.



Рисунок 2.8. Модель балки на неподвижной опоре

Будем считать для простоты, что балка закреплена в точке с продольной координатой  $x = s = 10$  см на неподвижной опоре, то есть жесткость опоры на смещение бесконечна. Свободному повороту балки в точке закрепления препятствует пружина жесткостью  $c_\varphi$ . Ось  $x$  направлена вдоль оси балки, а поперечное смещение точек балки при изгибе происходит вдоль оси  $z$ . Поскольку балка является тонкой, ограничимся самой простой моделью балки Бернулли-Эйлера, учитывающей только изгиб и не учитывающей растяжение и сдвиг.

Непосредственное измерение значения жесткости пружины на поворот  $c_\varphi$  представляет собой достаточно трудную задачу, поэтому данный параметр в модели подбирается из условия наилучшего соответствия результатов теории и эксперимента.

Уравнения, описывающие динамику балки Бернулли-Эйлера, рассмотрены в пункте 1.4.1. Для решения задачи поиска собственных частот и форм изгибных колебаний балки подставим второе уравнение системы (1.26) во вторую формулу системы (1.27). При этом будем считать равными нулю деформацию растяжения  $u'_0$ , приложенную к балке внешнюю силу  $p_z$  и момент  $M^p$ , вызванный действием пьезоактуаторов. Получим следующее уравнение:

$$\rho^{(0)}\ddot{w}_0 + \bar{D}w_0^{IV} = 0. \quad (2.1)$$

Обозначим поперечное смещение балки как  $w$ , а линейную плотность и изгибную жесткость балки перепишем в соответствии со следующими формулами:

$$\rho^{(0)} = \rho A, \quad (2.2)$$

$$\bar{D} = EI, \quad (2.3)$$

где  $\rho$  и  $E$  – плотность и модуль упругости материала балки, а площадь сечения балки  $A$  и его момент инерции  $I$  находятся из геометрических характеристик сечения:

$$A = bh, \quad (2.4)$$

$$I = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.5)$$

Здесь  $b$  и  $h$  – ширина и толщина балки, соответственно. С учетом (2.2) и (2.3) уравнение (2.1) принимает следующий вид:

$$\rho A \ddot{w} + EI w^{IV} = 0. \quad (2.6)$$

Граничные условия на концах балки при  $x = 0, l$ :

$$M = 0 \Rightarrow w'' = 0, \quad (2.7)$$

$$Q = 0 \Rightarrow w''' = 0. \quad (2.8)$$

Условия сопряжения в точке закрепления балки для  $x = s$ :

$$w_+ = w_- = 0, \quad (2.9)$$

$$\Delta M = EI\Delta w'' = EI(w_+'' - w_-'' ) = c_\varphi w_+' = c_\varphi w_-'. \quad (2.10)$$

Будем искать собственные колебания в виде:

$$w(x, t) = w(x)e^{i\Omega t}. \quad (2.11)$$

Подставим (2.11) в уравнение (2.6):

$$-\rho A\Omega^2 w + EIw^{IV} = 0. \quad (2.12)$$

Введем обозначение:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}}\Omega. \quad (2.13)$$

С учетом (2.13) выражение (2.12) переписывается в следующем виде:

$$w^{IV} - \lambda^4 w = 0. \quad (2.14)$$

Решение данного уравнения для каждого участка балки представимо в виде суперпозиции гармонических и гиперболических функций:

$$0 \leq x \leq s: \quad w_1 = A_1 \sin \lambda x + B_1 \cos \lambda x + C_1 \operatorname{sh} \lambda x + D_1 \operatorname{ch} \lambda x; \quad (2.15)$$

$$s \leq x \leq l: \quad w_2 = A_2 \sin \lambda(l - x) + \\ + B_2 \cos \lambda(l - x) + C_2 \operatorname{sh} \lambda(l - x) + D_2 \operatorname{ch} \lambda(l - x). \quad (2.16)$$

Из граничных условий на концах балки (2.7) и (2.8) следует:

$$B_1 = D_1, \quad A_1 = C_1, \quad (2.17)$$

$$B_2 = D_2, \quad A_2 = C_2. \quad (2.18)$$

Введем обозначение:  $d = (l - s)$ . С учетом (2.15 – 2.18) условия сопряжения (2.9) и (2.10) переписываются в виде:

$$\begin{aligned} A_1(\sin \lambda s + \operatorname{sh} \lambda s) + B_1(\cos \lambda s + \operatorname{ch} \lambda s) &= 0, \\ A_2(\sin \lambda d + \operatorname{sh} \lambda d) + B_2(\cos \lambda d + \operatorname{ch} \lambda d) &= 0, \\ A_1(\cos \lambda s + \operatorname{ch} \lambda s) + B_1(\operatorname{sh} \lambda s - \sin \lambda s) + \\ + A_2(\cos \lambda d + \operatorname{ch} \lambda d) + B_2(\operatorname{sh} \lambda d - \sin \lambda d) &= 0, \\ \lambda[A_2(\operatorname{sh} \lambda d - \sin \lambda d) + B_2(\operatorname{ch} \lambda d - \cos \lambda d) - A_1(\operatorname{sh} \lambda s - \sin \lambda s) - \\ - B_1(\operatorname{ch} \lambda s - \cos \lambda s)] &= \frac{c_\varphi}{EI}[A_1(\cos \lambda s + \operatorname{ch} \lambda s) + B_1(\operatorname{sh} \lambda s - \sin \lambda s)]. \end{aligned}$$

Последние четыре уравнения можно переписать в матричном виде:

$$\mathcal{M}(\lambda) \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.19)$$

Здесь матрица  $\mathcal{M}$  является функцией параметра  $\lambda$  и имеет следующий вид:

$$\mathcal{M}(\lambda) = \begin{bmatrix} \sin \lambda s + \operatorname{sh} \lambda s & \cos \lambda s + \operatorname{ch} \lambda s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \lambda d + \operatorname{sh} \lambda d & \sin \lambda d + \operatorname{sh} \lambda d \\ \cos \lambda s + \operatorname{ch} \lambda s & \operatorname{sh} \lambda s - \sin \lambda s & \cos \lambda d + \operatorname{ch} \lambda d & \operatorname{sh} \lambda d - \sin \lambda d \\ \mathcal{M}_{41}(\lambda) & \mathcal{M}_{42}(\lambda) & \lambda(\operatorname{sh} \lambda d - \sin \lambda d) & \lambda(\operatorname{ch} \lambda d - \cos \lambda d) \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

при этом компоненты матрицы  $\mathcal{M}_{41}(\lambda)$  и  $\mathcal{M}_{42}(\lambda)$  определяются в соответствии с формулами:

$$\mathcal{M}_{41}(\lambda) = \lambda(\sin \lambda s - \operatorname{sh} \lambda s) - \frac{c_\varphi}{EI}(\cos \lambda s + \operatorname{ch} \lambda s), \quad (2.21)$$

$$\mathcal{M}_{42}(\lambda) = \lambda(\cos \lambda s - \operatorname{ch} \lambda s) + \frac{c_\varphi}{EI}(\sin \lambda s - \operatorname{sh} \lambda s). \quad (2.22)$$

Для решения уравнения (2.19) необходимо найти такие значения параметра  $\lambda$ , которые обращают в ноль определитель матрицы  $\mathcal{M}$ :

$$\det \mathcal{M}(\lambda_k) = 0.$$

Данные значения параметра  $\lambda$  находятся численно с помощью математического пакета Matlab. Каждое из найденных значений  $\lambda_k$  соответствует своей частоте собственных изгибных колебаний балки  $\Omega_k$ ; собственные частоты вычисляются по формуле, следующей из выражения (2.13):

$$\Omega_k = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \lambda_k^2. \quad (2.23)$$

Постоянные  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  и  $B_2$ , определяющие собственные формы колебаний балки  $w_k(x)$  для каждой из собственных частот  $\Omega_k$ , находятся численно как собственные векторы матрицы  $\mathcal{M}(\lambda_k)$ , соответствующие нулевому собственному числу. Найденные собственные формы нормируются в соответствии с условием:

$$\int_0^l w_k^2 dx = l. \quad (2.24)$$

Полученные численно собственные частоты и формы изгибных колебаний балки сравниваются с результатами, полученными экспериментально при возбуждении колебаний с помощью пьезотолкателя и измерении скоростей колебаний точек по всей длине балки с помощью лазерного виброметра. Сравнение пяти низших собственных частот приведено в Таблице 2.2, а первых двух собственных форм – на Рисунке 2.9. Значение жесткости пружины, препятствующей повороту балки в точке закрепления,  $c_\varphi$ , в численной модели было выбрано из условий наилучшего соответствия результатов теории и эксперимента и составило 400 Н·м/рад.

Таблица 2.2.

Сравнение полученных экспериментально и теоретически собственных частот изгибных колебаний балки

Номер	Эксперимент, Гц	Теория, Гц
1	6.5	6.56
2	41.5	41.21
3	114.25	115.08
4	179.5	199.22
5	242.75	237.58

Проанализировав данные, представленные в Таблице 2.2 и на Рисунке 2.9, можно сделать вывод о том, что использованная модель с большой точностью описывает две низших формы изгибных колебаний балки. С ростом номера формы погрешность теоретических результатов увеличивается. Особенно сильно результаты теории и эксперимента расходятся для четвертой собственной частоты – расхождение составляет около 10%. Данное расхождение связано с недостаточно точным моделированием конструкции закрепления. Однако, для своей цели, а именно – для описания первой и второй форм изгибных колебаний, выбранная модель полностью подходит, поэтому для определения мест расположения

сенсоров и актуаторов будем использовать функции кривизны форм колебаний, полученные с использованием данной модели.

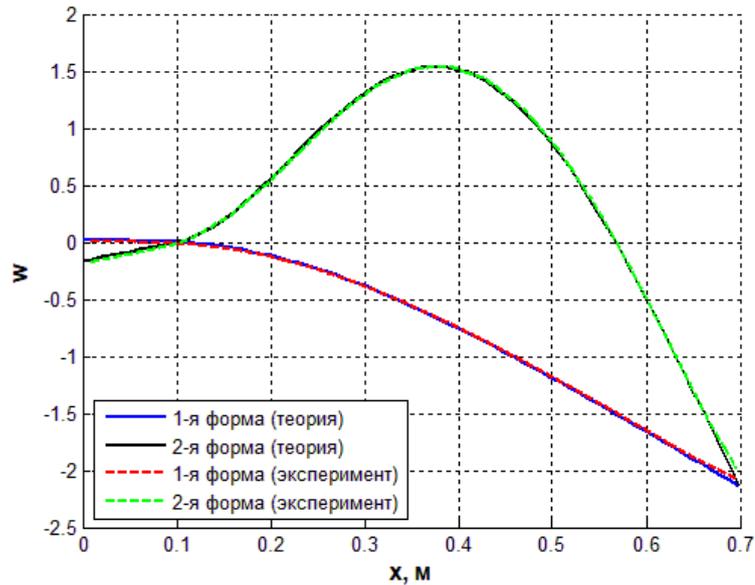


Рисунок 2.9. Первая и вторая формы изгибных колебаний балки: сравнение теории и эксперимента

На Рисунке 2.10 представлены графики второй производной полученных теоретически форм колебаний балки, а также отмечены выбранные позиции закрепления пьезоэлементов.

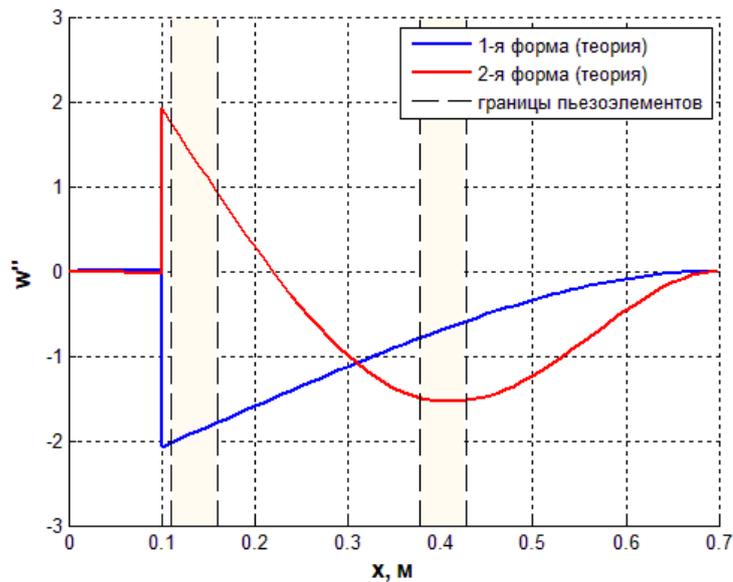


Рисунок 2.10. Вторая производная первой и второй форм изгибных колебаний балки (теория)

Первая пара сенсор-актуатор располагается на участке балки, где кривизна исследуемых форм колебаний принимает максимальные значения – вплотную над точкой закрепления балки, настолько близко, насколько позволяет гайка, удерживающая балку, координаты данного участка:  $108 \text{ мм} \leq x \leq 169 \text{ мм}$ . При этом сам пьезоматериал первого сенсора и первого актуатора занимает позицию с координатой в пределах  $110.5 \text{ мм} \leq x \leq 160.5 \text{ мм}$ . Расположение второй пары пьезоэлементов выбрано в зоне локального экстремума кривизны второй формы колебаний – на участке с координатой  $375 \text{ мм} \leq x \leq 436 \text{ мм}$ , при этом пьезоматериал находится в зоне с координатой  $377.5 \text{ мм} \leq x \leq 427.5 \text{ мм}$ .

### 2.2.2. Колебания балки с пьезоэлементами

В результате наклеивания на балку пьезоэлементов собственные частоты и формы колебаний балки должны несколько измениться. Данные изменившиеся характеристики были получены теоретически, а также измерены экспериментально после установки пьезоэлементов.

Рассмотрим аналитическую постановку задачи о колебаниях балки с двумя парами пьезоэлементов. Схема такой системы представлена на Рисунке 2.11.

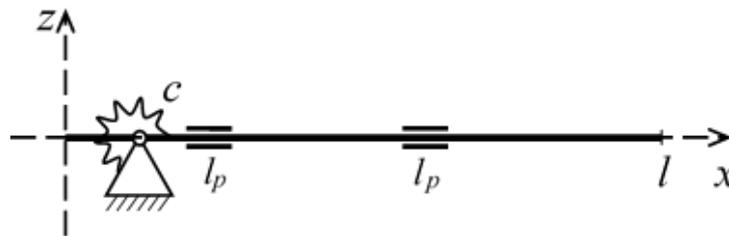


Рисунок 2.11. Модель балки с двумя парами пьезоэлементов

Сенсоры и актуаторы здесь моделируются как слои пьезоматериала, без учета электродов и изоляции, поскольку именно слой пьезоматериала создает основную массу и жесткость пьезоэлемента. Данные элементы имеют длину  $l_p = 50 \text{ мм}$  и расположены на участках с продольной координатой, изменяющейся в пределах  $p_1 \leq x \leq p_1 + l_p$  и  $p_2 \leq x \leq p_2 + l_p$ ,  $p_1 = 110.5 \text{ мм}$ ,  $p_2 = 377.5 \text{ мм}$ .

Будем считать, что электроды сенсоров и актуаторов закорочены, таким образом, напряжение на электродах каждого пьезоэлемента равно нулю. Это означает, что появляющийся вследствие обратного пьезоэффекта момент  $M^p$  из формулы (1.26) равен нулю.

Пьезоэлементы влияют на такие характеристики сечения балки, как линейная плотность и изгибная жесткость, данное влияние описывается формулами (1.28) и (1.55). Подставив в данные соотношения параметры рассматриваемой задачи, получим значения, представленные в Таблице 2.3.

Таблица 2.3.

Характеристики сечения участков балки с пьезоэлементами и без

	Линейная плотность $\rho^{(0)}$ , кг/м	Изгибная жесткость $\bar{D}$ , Н·м <sup>2</sup>
Без пьезоэлементов	0.284	5.51
С пьезоэлементами	0.518	12.3

Из Таблицы 2.3 видно, что влияние пьезоэлементов на характеристики сечения на тех участках балки, где они приклеены, существенное: линейная плотность растет на 80%, а изгибная жесткость – на 120%. Такие результаты дают основания ожидать, что собственные формы и частоты при наклеивании на балку пьезоэлементов также должны заметно измениться.

Формулировка математической задачи о собственных изгибных колебаниях балки с пьезоэлементами аналогична формулировке задачи для балки без сенсоров и актуаторов: решается то же уравнение (2.1), в качестве граничных условий на концах балки выступают те же выражения (2.7) и (2.8). Однако вследствие неравномерных характеристик сечения по длине балки, уравнение (2.1) преобразуется в два разных выражения для поиска собственных форм. На участках без пьезоэлементов оно совпадает с уравнением (2.14) с параметром  $\lambda$ , определяемым по формуле:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho_b^{(0)}}{\bar{D}_b}} \Omega^2, \quad (2.25)$$

где  $\rho_b^{(0)}$  и  $\bar{D}_b$  – линейная плотность и изгибная жесткость участков балки без пьезоэлементов. На участках с пьезоэлементами уравнение (2.1) преобразуется к следующему виду:

$$w^{IV} - \lambda_p^4 w = 0, \quad (2.26)$$

$$\lambda_p = \sqrt[4]{\frac{\rho_p^{(0)}}{\bar{D}_p}} \Omega^2, \quad (2.27)$$

где  $\rho_p^{(0)}$  и  $\bar{D}_p$  – линейная плотность и изгибная жесткость участков балки с пьезоэлементами.

Рассматриваемая балка состоит уже не из двух, а из шести участков, разделенных значениями продольной координаты  $x = s, p_1, p_1 + l_p, p_2, p_2 + l_p$ , перемещение на каждом из которых описывается функциями  $w_1 \dots w_6$ . В местах сопряжения данных участков задаются следующие условия:

$$\begin{aligned} x = s: \quad & w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \\ & w_1' = w_2', \quad \bar{D}_b(w_2'' - w_1'') = c_\varphi w_1'; \\ x = p_1: \quad & w_2 = w_3, \quad w_2' = w_3', \\ & \bar{D}_b w_2'' = \bar{D}_p w_3'', \quad \bar{D}_b w_2''' = \bar{D}_p w_3'''; \\ x = p_1 + l_p: \quad & w_3 = w_4, \quad w_3' = w_4', \\ & \bar{D}_p w_3'' = \bar{D}_b w_4'', \quad \bar{D}_p w_3''' = \bar{D}_b w_4'''; \\ x = p_2: \quad & w_4 = w_5, \quad w_4' = w_5', \\ & \bar{D}_b w_4'' = \bar{D}_p w_5'', \quad \bar{D}_b w_4''' = \bar{D}_p w_5'''; \\ x = p_2 + l_p: \quad & w_5 = w_6, \quad w_5' = w_6', \\ & \bar{D}_p w_5'' = \bar{D}_b w_6'', \quad \bar{D}_p w_5''' = \bar{D}_b w_6'''. \end{aligned}$$

Далее в численном решении перемещение на каждом из участков балки формулируется в виде суперпозиции гармонических и гиперболических функций, а система уравнений для коэффициентов к этим функциям получается из

подстановки данных функций в граничные условия и условия сопряжения. Система уравнений записывается в виде, аналогичном (2.19), после этого аналогичным образом численно находятся собственные частоты и формы колебаний балки.

Полученные таким образом результаты вычислений сравниваются с результатом эксперимента по определению собственных частот и форм изгибных колебаний балки при возбуждении колебаний пьезотолкателем и измерении с помощью лазерного виброметра. При этом во время эксперимента электроды каждого пьезоэлемента закорочены. Значения полученных теоретически и экспериментально пяти низших собственных частот приведены в Таблице 2.4, при этом для сравнения указаны также аналогичные результаты для балки без сенсоров и актуаторов. Результаты для первых двух собственных форм изгибных колебаний балки приведены на Рисунках 2.12 и 2.13.

Таблица 2.4.

Сравнение полученных экспериментально и теоретически собственных частот изгибных колебаний балки с пьезоэлементами и без

Номер	Без пьезоэл-тов (эксп.), Гц	Без пьезоэл-тов (теория), Гц	С пьезоэл-тами (эксп.), Гц	С пьезоэл-тами (теория), Гц
1	6.5	6.56	7.14	7.15
2	41.5	41.21	42.7	44.9
3	114.25	115.08	113.9	117.5
4	179.5	199.22	175.4	202.3
5	242.75	237.58	249.7	251.2

Сравнение теоретических результатов показывает, что после наклеивания пьезоэлементов все рассмотренные собственные частоты должны вырасти на несколько процентов, причем больше всего (на 9%) увеличивается первая собственная частота, остальные частоты растут незначительно. Полученный значение первой частоты хорошо согласуется с экспериментом. Результаты же эксперимента показывают, что среди собственных частот после присоединения

пьезоэлементов есть как увеличившиеся, так и уменьшившиеся на несколько процентов. Тем не менее, данные эксперимента достаточно хорошо согласуются с результатами численного решения, для всех рассмотренных частот, кроме четвертой – для нее отличие составляет около 15%.

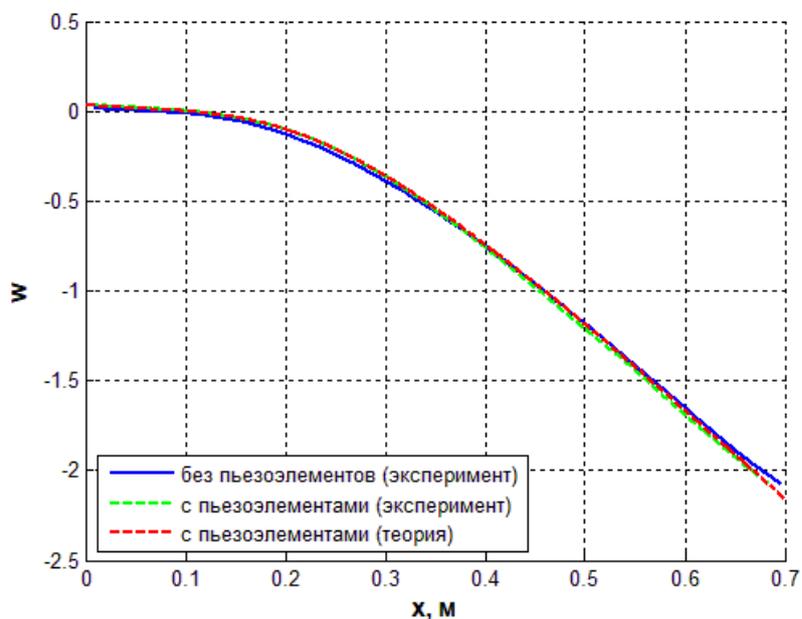


Рисунок 2.12. Сравнение теории и эксперимента для первой формы изгибных колебаний балки с пьезоэлементами и без

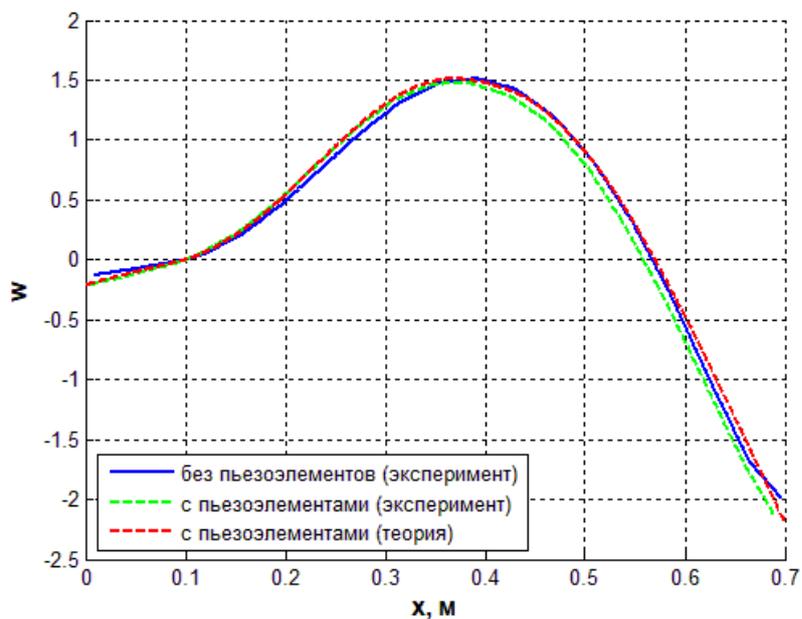


Рисунок 2.13. Сравнение теории и эксперимента для второй формы изгибных колебаний балки с пьезоэлементами и без

Теоретически, в рамках эксперимента на собственные частоты помимо появления пьезоэлементов могло повлиять изменение жесткости закрепления балки на поворот: дело в том, что данная величина зависит от силы затягивания гаек, удерживающих балку, а эта сила могла измениться, так как для установки сенсоров и актуаторов балка снималась со своей опоры и затем закреплялась на ней вновь. Однако исследование показывает, что лучшее соответствие результатов теории и эксперимента после закрепления пьезоэлементов по-прежнему достигается при выборе значения жесткости закрепления на поворот  $c_\varphi = 400$  Н·м/рад.

Сравнивая собственные формы изгибных колебаний балки, представленные на Рисунках 2.12 и 2.13, можно сделать вывод о том, что изменение первой и второй форм после наклеивания на балку пьезоэлементов незначительно, и численные результаты хорошо совпадают с экспериментальными.

Для того, чтобы иметь возможность синтезировать законы управления, необходимо измерить амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики объекта управления, то есть балки с пьезоэлементами. Всего данных характеристик четыре: они соответствуют разным случаям воздействия на балку с помощью одного из двух актуаторов и измерения сигнала с помощью одного из двух сенсоров. При проведении данных экспериментов в схему измерений были включены как фильтры нижних частот, так и усилители сигнала, изображенные в схеме работы системы с обратной связью на Рисунке 2.3. Данные приборы впоследствии будут входить в схему управления наряду с контроллером. Таким образом, ФНЧ и усилитель в представленных экспериментах отнесены к объекту управления, и при анализе разомкнутой системы к измеренной передаточной функции достаточно добавить передаточную функцию контроллера.

Полученные амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики системы в диапазоне от 2 до 2000 Гц приведены на Рисунках 2.14-2.17.

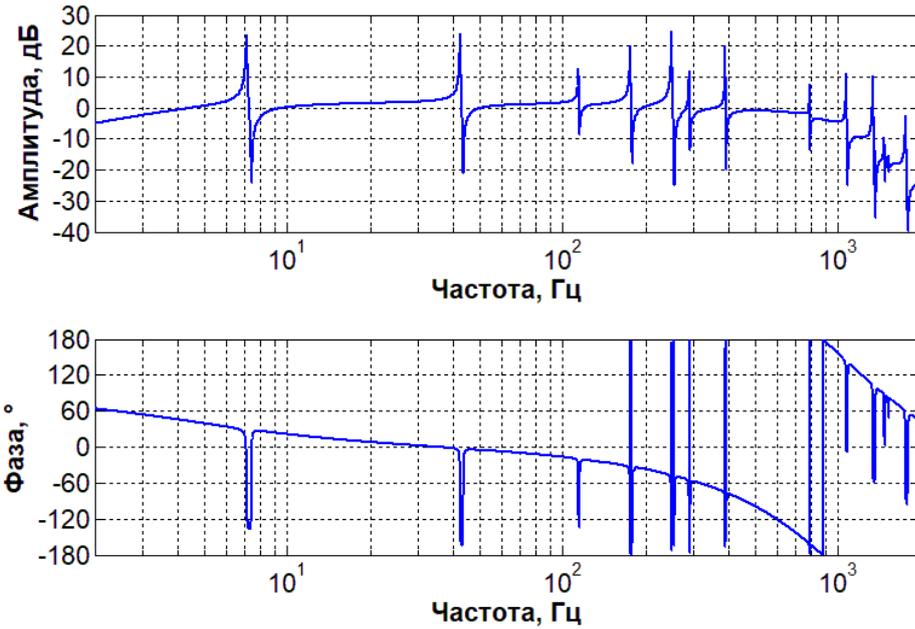


Рисунок 2.14. АЧХ и ФЧХ балки для 1-го актуатора и 1-го сенсора

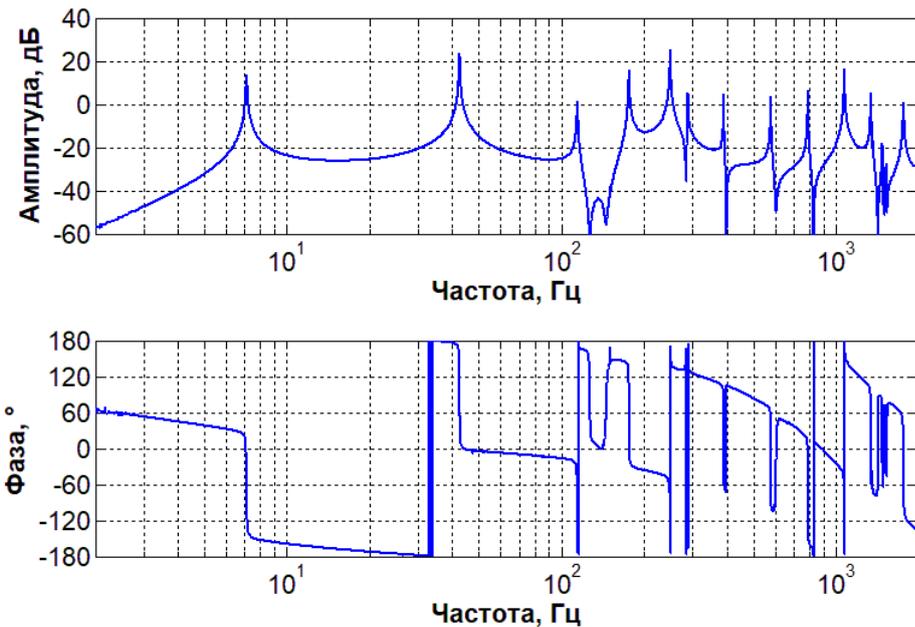


Рисунок 2.15. АЧХ и ФЧХ балки для 1-го актуатора и 2-го сенсора

Как и следовало ожидать, на всех полученных графиках резонансные частоты совпадают. При этом графики, отражающие перекрестное влияние пар сенсоров и актуаторов (Рисунки 2.15 и 2.16), практически идентичны, что говорит о том, что в рамках каждой пары сенсор и актуатор установлены точно на симметричных позициях и работают согласованно, как и должны.

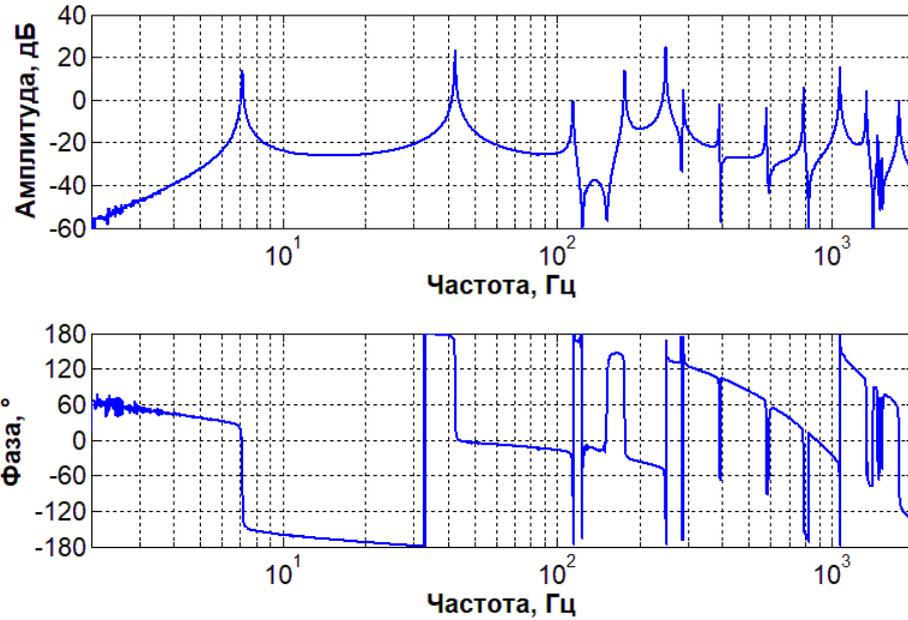


Рисунок 2.16. АЧХ и ФЧХ балки для 2-го актуатора и 1-го сенсора

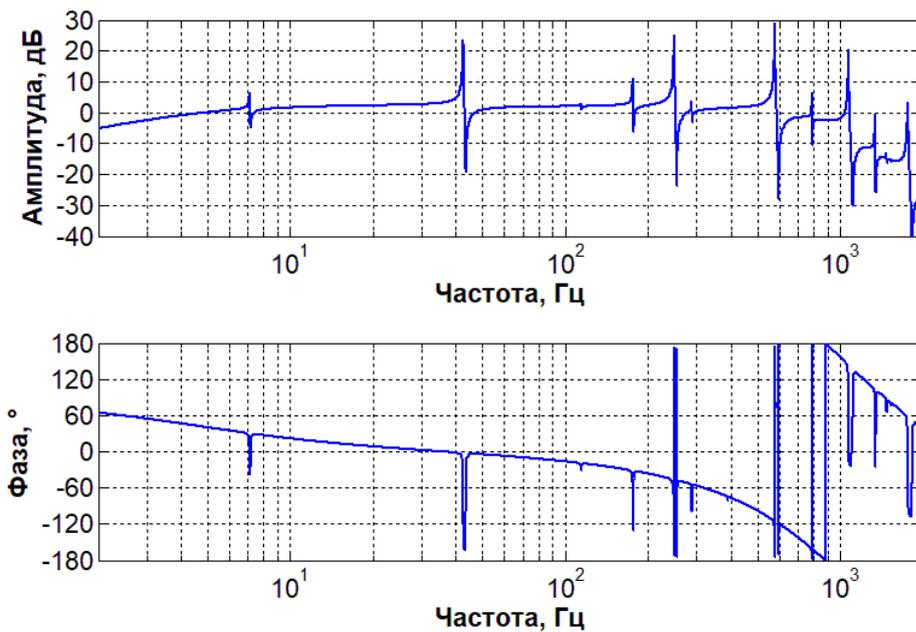


Рисунок 2.17. АЧХ и ФЧХ балки для 2-го актуатора и 2-го сенсора

Первое отличие, которое необходимо отметить в полученных результатах – графики для сенсоров и актуаторов, образующих пару (Рисунки 2.14 и 2.17), существенно отличаются от графиков для сенсоров и актуаторов из разных пар (Рисунки 2.15 и 2.16). А именно, существенно отличается поведение АЧХ вдали от резонансов: для пар сенсор-актуатор участки АЧХ вдали от резонансов практически ложатся на одну линию, на частотах до 1 КГц близкую к постоянной

величине 0 дБ, тогда как для сенсоров и актуаторов из разных пар значения амплитуды вдали от резонансов значительно ниже величины 0 дБ и далеки от какой-либо постоянной величины. Кроме этого, для пар сенсор-актуатор антирезонанс всегда следует сразу же после резонанса, тогда как для элементов из разных пар данная логика не соблюдается. Все указанные эффекты объясняются тем, что каждый актуатор значительно сильнее влияет на сенсор, расположенный с ним в паре, чем на сенсор из другой пары, и данное влияние велико даже вдали от резонансов, поскольку деформация актуатора даже в том случае, когда она не вызывает существенной деформации всей балки, обязательно приводит к противоположной по знаку деформации сенсора, расположенного в паре с данным актуатором.

Следует отметить также еще одну деталь: на всех фазочастотных характеристиках фаза на низких частотах начинается не от нуля, а от другой величины (около  $60^\circ$ ), и далее постепенно идет на спад. Данное поведение фазы объясняется в пункте 1.4.2: оно вызвано перетеканием на электроды сенсора заряда из измерительной электрической цепи, что проявляется сильнее всего на низких частотах. Дальнейшее падение фазы на высоких частотах объясняется запаздыванием в цепи управления и наличием фильтров низших частот.

### **2.2.3. Метод идентификации для определения модальных матриц**

Для создания модальных систем управления необходимо определить модальные матрицы – анализатор и синтезатор форм  $T$  и  $F$ , введенные в разделе 1.2. Задача анализатора форм – преобразовать измеренные сигналы сенсоров таким образом, чтобы в первый контур управления не поступала информация о возбуждении второй формы колебаний балки, а на второй контур – о первой форме. Аналогичным образом, синтезатор форм необходим для того, чтобы первый контур управления подавал управляющий сигнал на актуаторы в таких пропорциях, чтобы не возбуждалась вторая форма колебаний, а второй контур не возбуждал первую форму. При правильном задании модальных матриц контуры управления

оказываются специализированы каждый на своей форме колебаний. Однако, такое разделение первой и второй форм в системе управления не означает, что контуры управления не возбуждают и не реагируют на высшие формы колебаний. Используемая конфигурация сенсоров и актуаторов позволяет отделить друг от друга только две низшие формы, по которым ведется управление.

Согласно системе уравнений (1.8), для определения модальных матриц необходимо знание матрицы коэффициентов влияния  $\Theta^a$  и весовой матрицы  $\Theta^s$ . С учетом того, что модальное управление ведется по двум формам, указанные матрицы являются квадратными, и данные уравнения переписываются в более простом виде:

$$F = (\Theta^a)^{-1}, \quad T = (\Theta^s)^{-1}. \quad (2.28)$$

Для обеспечения разделения форм в системе управления достаточно установить, в каких пропорциях каждый из актуаторов возбуждает каждую из форм, по которым ведется управление, и в каких пропорциях каждый из сенсоров измеряет активизацию данных форм. Таким образом, достаточно определить строки матрицы  $\Theta^a$  и столбцы матрицы  $\Theta^s$  с точностью до константы.

Для того, чтобы определить модальные матрицы  $T$  и  $F$ , был предложен и применен на практике алгоритм экспериментальной идентификации, состоящий из трех этапов. Данные этапы изложены ниже.

**Первый этап.** Оценка модальных матриц  $T$  и  $F$ .

В качестве первого шага определения модальных матриц были получены оценки данных матриц на основе найденных численно собственных форм изгибных колебаний балки (пункт 2.2.1). Из Рисунка 2.10 видно, что кривизна первой формы в местах установки первой и второй пары сенсоров и актуаторов соотносится приблизительно как 3:1, а кривизна второй формы – как -1:1. Отсюда получают первые оценки матрицы коэффициентов влияния и весовой матрицы:

$$\tilde{\Theta}_1^a = (\tilde{\Theta}_1^s)^T = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Далее в соответствии с формулой (2.28) вычисляются оценки для модальных матриц:

$$\tilde{F}_1 = \tilde{T}_1^T = (\tilde{\Theta}_1^a)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Вторая оценка для данных матриц высчитывается из результатов экспериментов по измерению амплитудно-частотных характеристик по высоте резонансных пиков. Для определения матрицы  $\Theta^s$  измеряются АЧХ при воздействии на балку пьезотолкателя и измерении сигнала каждым из сенсоров, а для определения матрицы  $\Theta^a$  – АЧХ при возбуждении колебаний каждым из пьезоактуаторов и измерении амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки лазерным виброметром. Полученные кривые изображены на Рисунках 2.18 и 2.19.

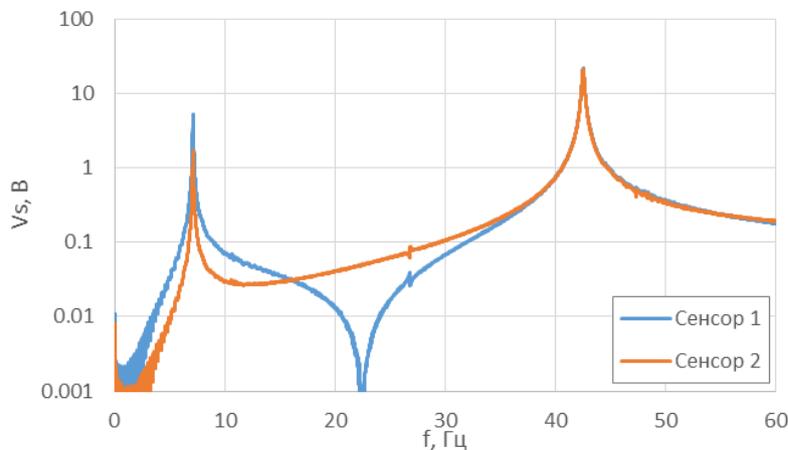


Рисунок 2.18. АЧХ балки при воздействии пьезотолкателем и измерении сигнала обоими сенсорами

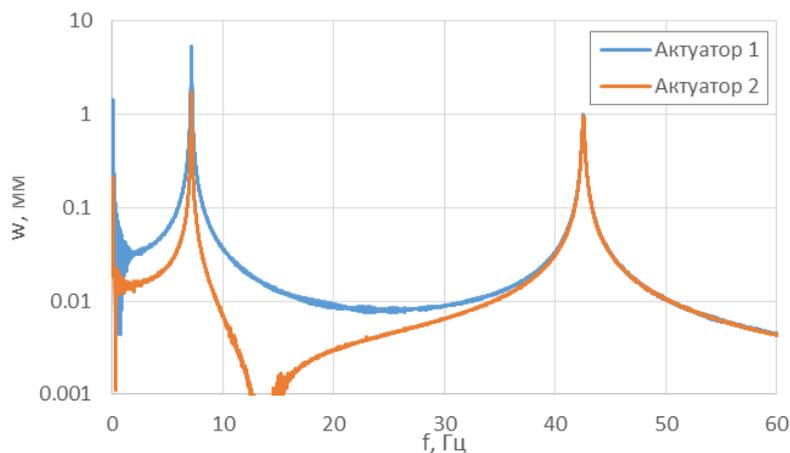


Рисунок 2.19. АЧХ балки при воздействии актуаторами и измерении сигнала виброметром

Сравнивая высоту резонансных пиков, получим, что сенсоры при возбуждении первой и второй форм колебаний активизируются (с учетом знака) в

пропорциях 3.14:1 и -1.03:1. Актуаторы возбуждают первую и вторую формы в пропорциях 3.08:1 и -1.04:1.

Получим вторую оценку матриц  $\Theta^s$  и  $\Theta^a$ , а также модальных матриц  $T$  и  $F$ :

$$\tilde{\Theta}_2^s = \begin{bmatrix} 0.758 & -0.507 \\ 0.242 & 0.493 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

$$\tilde{\Theta}_2^a = \begin{bmatrix} 0.755 & 0.245 \\ -0.51 & 0.49 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

$$\tilde{T}_2 = (\tilde{\Theta}_2^s)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.99 & 1.02 \\ -0.49 & 1.53 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

$$\tilde{F}_2 = (\tilde{\Theta}_2^a)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.5 \\ 1.03 & 1.53 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Надо отметить, что вторая оценка модальных матриц (2.33) и (2.34), полученная из эксперимента, очень близка к первой оценке (2.30), полученной из численных результатов для собственных форм колебаний балки. Матрица  $\tilde{T}_2$  оказалась очень близка к транспонированной матрице  $\tilde{F}_2$ , что означает, что сенсоры и актуаторы приклеены к балке симметрично с большой точностью.

**Второй этап.** Определение матрицы – анализатора форм  $T$ .

Задача данного этапа – получить уточненные значения матриц  $\Theta^s$  и  $T$ . Для этого последовательно вызываются резонансные колебания балки с первой и со второй собственными частотами, и в созданных резонансных режимах измеряются амплитуда и фаза сигналов обоих сенсоров. На резонансных режимах с большой точностью можно считать, что колебания балки реализуются в соответствии с собственными формами. Соответственно, значения показаний сенсора в  $i$ -м резонансном режиме относятся как  $\Theta_{1i}^s : \Theta_{2i}^s$ .

Каждый из резонансных режимов создается гармоническим воздействием либо на пьезотолкатель, либо на один из актуаторов. Результаты данных экспериментов для первого резонансного режима приведены в Таблице 2.5, а для второго – в Таблице 2.6. Амплитуда возмущающего воздействия обозначена как  $\bar{V}_{in}$ . Данное внешнее воздействие перед подаче на пьезотолкатель усиливалось в 100 раз, а перед подачей на актуаторы – в 25 раз. Для каждого варианта внешнего воздействия снимались показания обоих сенсоров (амплитуды данных сигналов

обозначены как  $\bar{V}_{s1}$  и  $\bar{V}_{s2}$ ) и виброметра, измеряющего скорость колебаний точки на верхнем конце балки ( $\bar{v}_{vib}$ ). В таблицах представлены исключительно амплитуды установившегося сигнала без указания фазы.

Таблица 2.5.

Показания приборов в первом резонансном режиме ( $f = 7.14$  Гц)

Внешнее воздействие	$\bar{V}_{in}$ , В	$\bar{v}_{vib}$ , мм/с	$\bar{V}_{s1}$ , В	$\bar{V}_{s2}$ , В	$\bar{V}_{s1}/\bar{v}_{vib}$ , В·с/мм	$\bar{V}_{s2}/\bar{v}_{vib}$ , В·с/мм	$\bar{V}_{s2}/\bar{V}_{s1}$
Пьезотолкатель	1	65.6	3.51	1.13	0.0535	0.0172	0.322
Актуатор 1	0.5	128.5	6.62	2.2	0.0515	0.0171	0.332
Актуатор 2	0.5	69.4	3.73	1.52	0.0537	0.0219	0.408

Таблица 2.6.

Показания приборов во втором резонансном режиме ( $f = 42.7$  Гц)

Внешнее воздействие	$\bar{V}_{in}$ , В	$\bar{v}_{vib}$ , мм/с	$\bar{V}_{s1}$ , В	$\bar{V}_{s2}$ , В	$\bar{V}_{s1}/\bar{v}_{vib}$ , В·с/мм	$\bar{V}_{s2}/\bar{v}_{vib}$ , В·с/мм	$\bar{V}_{s2}/\bar{V}_{s1}$
Пьезотолкатель	1	134	7.3	7.2	0.0544	0.0537	0.986
Актуатор 1	0.5	127.5	6.35	6.7	0.0498	0.0525	1.055
Актуатор 2	0.5	129	7.05	6.2	0.0547	0.0481	0.879

Результаты экспериментов, представленные в Таблицах 2.5 и 2.6, показывают, что пропорции сигналов сенсоров при возбуждении каждой из форм колебаний с помощью как пьезотолкателя, так и любого из двух пьезоактуаторов, хоть и близки друг к другу, но все же отличаются достаточно заметно (максимальное отличие составляет около 25%). Близость результатов подтверждается экспериментами по определению собственных форм колебаний балки при возбуждении колебаний как с помощью пьезотолкателя, так и с помощью каждого из актуаторов: данные формы оказались настолько близки друг к другу, что на графиках их невозможно отличить друг от друга. Тем не менее, отличия в пропорциях сигналов сенсоров для одной и той же собственной формы

существуют и объясняются тем, что при возбуждении сигнала с помощью пьезоактуатора форма колебаний все же несколько отличается от собственной формы, и это сказывается сильнее всего на показаниях сенсора, парного данному актуатору. Данный эффект можно проследить в обеих таблицах: значения пропорции сигналов сенсора и виброметра  $\bar{V}_{s1,2}/\bar{v}_{vib}$  особенно выделяются из общего ряда в случаях, когда сигнал измеряется сенсором, парным к актуатору, возбуждающему колебания. Для того, чтобы исключить влияние указанного эффекта на результат, для наиболее точного определения пропорции сигналов сенсоров  $\bar{V}_{s2}/\bar{V}_{s1}$  необходимо пользоваться тем значением данной величины, которое получено при возбуждении колебаний не с помощью актуаторов, а с помощью другого возбудителя (в данном случае – пьезотолкателя).

Итак, исходя из рассмотренных результатов экспериментов была определена матрица весовых коэффициентов  $\Theta^s$  таким образом, что модули элементов ее первого столбца соотносятся как 1:0.322, а второго – как 1:0.986. При этом учитывается, что на первую форму колебаний сенсоры реагируют с одинаковым знаком, а на вторую – с разными знаками:

$$\Theta^s = \begin{bmatrix} 0.756 & -0.504 \\ 0.244 & 0.496 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Отсюда вычисляется матрица – анализатор форм:

$$T = (\Theta^s)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1.01 \\ -0.49 & 1.52 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Полученная в результате экспериментов в резонансных режимах матрица очень близка к сделанным ранее оценкам (2.30) и (2.33).

Из результатов проведенных в рамках данного этапа экспериментов в резонансных режимах можно получить не только анализатор форм  $T$ , но также и синтезатор форм  $F$ . Для этого необходимо использовать данные экспериментов, в которых в качестве возбудителя колебаний выступали пьезоактуаторы. Из них получают строки матрицы  $\Theta^a$ , каждая из которых показывает, в каких пропорциях используемые актуаторы возбуждают соответствующую собственную форму колебаний балки. В Таблице 2.7 представлены результаты обработки

данных из Таблиц 2.5 и 2.6, а именно, рассматриваются пропорции, в которых оба актуатора возбуждают колебания балки, измеренные разными способами, для обоих резонансных режимов. Сигналы, соответствующие возбуждению колебаний с помощью первого актуатора, имеют верхний индекс (1), с помощью второго – (2).

Таблица 2.7.

Отношение интенсивности колебаний, вызванных обоими актуаторами, для обоих резонансных режимов

Режим	$\bar{v}_{vib}^{(2)}/\bar{v}_{vib}^{(1)}$	$\bar{V}_{s1}^{(2)}/\bar{V}_{s1}^{(1)}$	$\bar{V}_{s2}^{(2)}/\bar{V}_{s2}^{(1)}$
$f_1 = 7.14$ Гц	0.54	0.563	0.691
$f_2 = 42.7$ Гц	1.01	1.11	0.925

Полученные результаты для пропорций возбуждения каждой из форм с помощью первого и второго актуаторов достаточно близки друг к другу для разных способов измерения интенсивности колебаний балки (максимальное отличие – около 30%). Расхождение объясняется все тем же эффектом, который описан в изложении первого этапа алгоритма идентификации: актуатор, возбуждающий колебания балки, существенно влияет на показания парного ему сенсора. По этой причине более надежным является результат, полученный при измерении сигнала не сенсорами, а с помощью другого измерителя (в данном случае – лазерного виброметра, измеряющего колебания точки на верхнем конце балки).

Анализируя результаты, приведенные в Таблице 2.7, необходимо отметить, что пропорции возбуждения первой формы колебаний, полученные в рамках рассматриваемых экспериментов, значительно (почти на 70%) отличаются от результатов, полученных ранее на первом и на втором этапе алгоритма как для актуаторов, так и для сенсоров. Наиболее вероятная причина наблюдаемого расхождения – тот факт, что колебания вызывались двумя актуаторами по отдельности, а вблизи резонанса амплитуда колебаний очень сильно зависит от частоты возбуждения. Данный недостаток можно устранить, если возбуждать резонансные колебания одновременно обоими актуаторами, что и будет

испробовано далее. Таким образом, полученный в рамках данного этапа результат для матрицы коэффициентов влияния  $\Theta^a$  не является надежным, и для более точного нахождения синтезатора форм  $F$  необходимо провести дополнительные эксперименты, изложенные в рамках третьего этапа алгоритма определения модальных матриц.

**Третий этап.** Определение матрицы – синтезатора форм  $F$ .

Задача данного этапа – получить уточненное значение матрицы  $F$ . Первый столбец данной матрицы показывает, в каких пропорциях необходимо подавать управляющий сигнал на актуаторы, чтобы не возбуждалась вторая форма колебаний балки, а второй столбец – чтобы не возбуждалась первая форма. На данном этапе эти величины устанавливаются напрямую. Для этого на первом и на втором резонансных режимах колебания балки возбуждаются одновременно обоими актуаторами, и подбирается такое соотношение амплитуд и фаз данных воздействий, при котором они компенсируют друг друга. При этом отслеживаются с помощью виброметра колебания точки на верхнем конце балки. Если данная точка при описанном возбуждении не колеблется, то это означает, что подобрано правильное соотношение возмущающих сигналов, подаваемых на актуаторы.

В результате экспериментов были получены следующие значения пропорций возбуждения форм актуаторами: на первом резонансе воздействия компенсируют друг друга при соотношении сигналов в пропорциях  $-1:3.05$ , а на втором резонансе – в пропорциях  $1:1.035$ . Таким образом, была задана следующая матрица  $F$ :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1.035 & 1.525 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Данное значение очень близко к полученным ранее оценкам (2.30) и (2.34), а также к транспонированной матрице  $T$  (2.36).

После определения модальных матриц  $T$  и  $F$  необходимо получить амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики балки, соответствующие модальным контурам управления. Их можно получить как из эксперимента, подавая на актуаторы определенные комбинации воздействий и отслеживая определенные комбинации сигналов сенсоров в соответствии с матрицами  $T$  и  $F$ ,

так и аналитически, используя полученные в пункте 2.2.2 частотные характеристики объекта, соответствующие отдельным сенсорам и актуаторам. Если обозначить передаточные функции объекта, соответствующие  $i$ -му актуатору и  $j$ -му сенсору, как  $H_{ij}$ , а передаточные функции, получаемые возбуждением  $k$ -го модального контура управления и измерением сигнала с помощью  $l$ -го модального контура, как  $H_{kl}^m$ , то данные функции будут связаны следующим образом:

$$H_{kl}^m = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 T_{lj} F_{ik} H_{ij}. \quad (2.38)$$

На Рисунке 2.20 приведены измеренные амплитудно-частотные характеристики балки, соответствующие отдельным сенсорам и актуаторам, в диапазоне, содержащем две первых резонансных частоты (0-60 Гц). На Рисунке 2.21 изображены АЧХ, соответствующие контурам модальной системы управления, полученные из обозначенных выше в соответствии с формулой (2.38), где модальные матрицы заданы выражениями (2.36) и (2.37). Данные характеристики были также напрямую измерены экспериментально, однако результат измерений не приведен на графике, поскольку он совпал результатом, полученным аналитически, и на рисунке данные кривые были бы неотличимы.

На всех амплитудно-частотных характеристиках, представленных на Рисунке 2.20, присутствуют оба резонансных пика, поскольку каждый актуатор возбуждает, а каждый сенсор воспринимает обе низших формы колебаний балки. На Рисунке 2.21 на кривых, соответствующих первому и второму модальным контурам управления, присутствует по одному резонансному пику, так как первый модальный контур не возбуждает и не измеряет вторую форму колебаний балки, а второй контур – первую форму. Это значит, что первая и вторая форма в системе управления достаточно хорошо разделены, то есть анализатор и синтезатор форм  $T$  и  $F$  выбраны правильно.

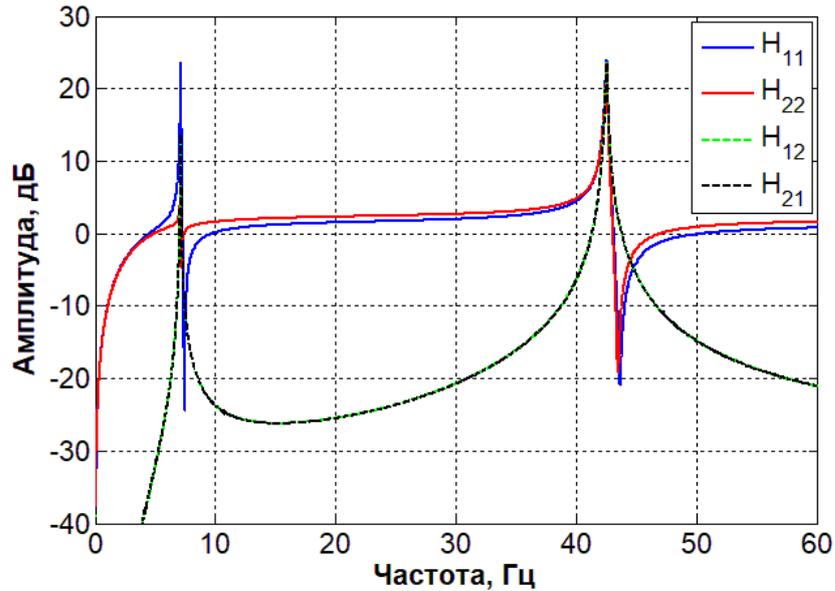


Рисунок 2.20. АЧХ балки для отдельных сенсоров и актуаторов

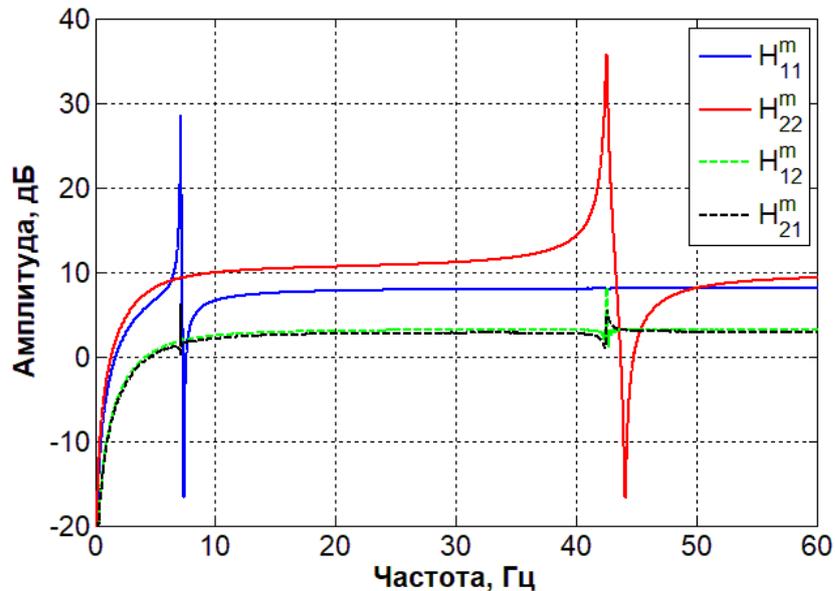


Рисунок 2.21. АЧХ балки для модальных контуров управления

На втором графике кривые  $H_{12}^m$  и  $H_{21}^m$ , отражающие перекрестное влияние модальных контуров управления друг на друга, проходят достаточно низко по сравнению с функциями  $H_{11}^m$  и  $H_{22}^m$ , соответствующими отдельным контурам, однако данные передаточные функции далеки от нуля. На резонансных частотах данные кривые имеют невысокие пики, свидетельствующие о небольшой, но все же присутствующей погрешности в определении модальных матриц и некоторой неидеальности разделения первой и второй форм в системе управления. При этом

вдали от резонансов данные кривые проходят значительно выше, нежели кривые АЧХ, соответствующие перекрестному влиянию пар сенсор-актуатор на Рисунке 2.20. Это связано с тем, что отдельные контуры влияют друг на друга, так как каждый контур включает в себя оба актуатора и оба сенсора, а действие актуаторов сильно влияет на сигналы сенсоров, находящихся с ними в одной паре. Можно задать модальные матрицы таким образом, чтобы исключить данный эффект. Для этой цели оставим синтезатор форм  $F$  прежним, а анализатор форм  $T$  изменим так, чтобы первый контур не реагировал на возбуждение, создаваемое вторым контуром, и наоборот:

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 1.525 & 0.5 \\ -1.035 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Передаточные функции для модальных контуров управления, соответствующие модальным матрицам (2.37) и (2.39), представлены на Рисунке 2.22.

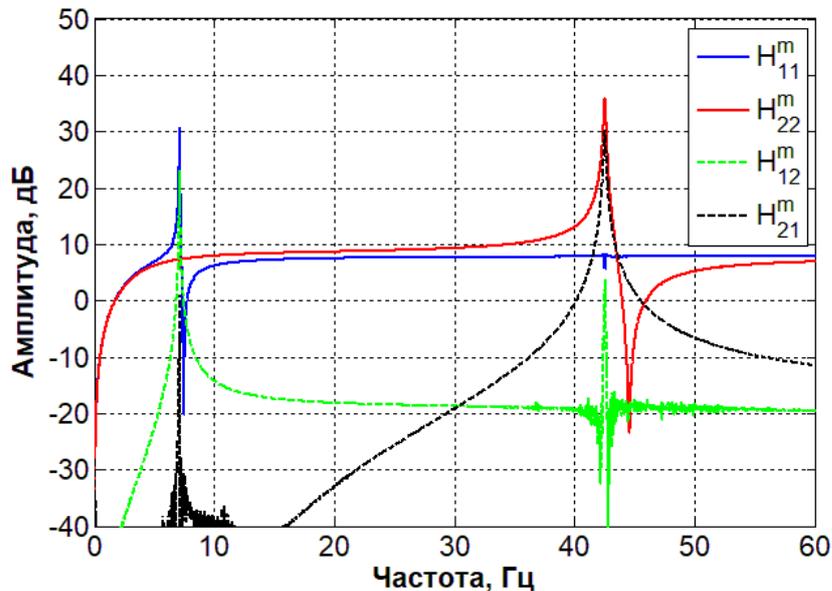


Рисунок 2.22. АЧХ балки для модальных контуров управления (вариант 2)

При использовании заданной формулой (2.39) матрицы  $T$  первый контур не реагирует напрямую на возбуждение, создаваемое вторым контуром, однако он реагирует на вторую форму колебаний, и наоборот. Поэтому несмотря на то, что перекрестные передаточные функции на Рисунке 2.22 значительно уменьшились вдали от резонансов по сравнению с кривыми на Рисунке 2.21, вблизи резонансов

они существенно возросли. При этом по причине того, что матрица  $F$  не изменилась, первый контур по-прежнему не возбуждает вторую форму колебаний, а второй – первую, так что каждая передаточная функция для отдельного контура управления, как и ранее, имеет в рассматриваемом частотном диапазоне только один резонансный пик.

Поскольку перекрестные передаточные функции, представленные на Рисунке 2.22, имеют ярко выраженные резонансные пики, что означает, что первая и вторая формы колебаний плохо отделяются друг от друга в системе управления, было принято решение использовать в создаваемых модальных системах управления первый вариант модальных матриц, заданный формулами (2.36) и (2.37).

Итак, в данной главе:

- была представлена схема эксперимента по управлению вынужденными изгибными колебаниями металлической балки;

- была экспериментально и аналитически решена задача анализа форм изгибных колебаний балки для выбора оптимальных мест расположения на балке сенсоров и актуаторов. Численные результаты для двух низших собственных частот и форм оказались очень близки к экспериментальным, что подтвердило правильность использования для получения данных результатов простейшей модели балки Бернулли-Эйлера без учета растяжения и сдвига и с конструкцией закрепления балки, запрещающей поперечное смещение и имеющей установленную жесткость на поворот;

- были описаны эксперименты, позволяющие точно установить значения модальных матриц – синтезатора и анализатора форм, данные матрицы были экспериментально определены в соответствии с предложенным алгоритмом идентификации. Определенные таким образом значения матриц оказались близки к теоретическим оценкам. Полученные матрицы обеспечили качественное разделение первой и второй форм изгибных колебаний балки в системе управления.

### Глава 3. Экспериментальное сравнение локальных и модальных систем управления изгибными колебаниями балки

Данная глава посвящена задаче синтеза передаточных функций в контурах управления, также в ней приводятся и сравниваются между собой результаты использования созданных локальных и модальных систем управления с различными передаточными функциями. Требования к передаточным функциям подробно изложены в разделе 1.3: во-первых, они не должны приводить к неустойчивости замкнутой системы, а во-вторых, они должны обеспечивать эффективное подавление вынужденных колебаний на первой и второй резонансных частотах изгибных колебаний балки. Основные результаты, полученные в данной главе, изложены в работах [3, 13].

Синтез передаточных функций осуществляется методом логарифмических амплитудных характеристик разомкнутой системы (метод ЛАХ, [18, 23]). Для этого используются амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики балки, полученные экспериментально в разделе 2.2. При синтезе законов управления для локальной системы используются частотные характеристики, соответствующие отдельным сенсорам и актуаторам, изображенные на Рисунках 2.14 – 2.17, а для модальной системы управления – характеристики, полученные из указанных по формуле (2.38), где модальные матрицы  $T$  и  $F$  заданы выражениями (2.36) и (2.37).

Для решения задачи о снижении уровня резонансных колебаний в упругой системе необходимо за счет управления увеличить демпфирование на определенных резонансных частотах данной системы. Поскольку диссипативная сила пропорциональна первой производной обобщенной координаты по времени, для указанной цели закон управления должен содержать дифференциальную составляющую. В связи с этим в задаче гашения вынужденных колебаний широко применяются ПД-регуляторы [42, 51]. Управление исключительно по дифференциальной составляющей получило название direct velocity feedback (DVF) [57].

Однако в реальных системах управления присутствует запаздывание, вызывающее сдвиг фазы управляющего сигнала на высоких частотах. При этом дифференциальная составляющая закона управления усиливает сигнал на данных частотах, что вместе со сдвигом фазы приводит к неустойчивости замкнутой системы по высшим формам колебаний. Для того, чтобы бороться с неустойчивостью, предложены более сложные подходы к синтезу законов управления, среди которых можно выделить positive position feedback (PPF), negative position feedback (NPF), negative derivative feedback (NDF) и negative acceleration feedback (NAF). Данные подходы подробно освещаются в работах [15, 38, 57].

Передаточная функция контроллера при использовании метода PPF фактически представляет собой взятый с обратным знаком фильтр нижних частот первого или второго порядка (данные фильтры наряду с другими рассмотрены в разделе 3.1). Указанный метод позволяет снизить воздействие управления на высшие частоты, при этом внося в систему дополнительное демпфирование за счет положительного знака обратной связи. Однако по этой же причине данный закон управления вносит в систему отрицательную жесткость, что усиливает колебания на низких частотах.

Метод NPF отличается от PPF, во-первых, знаком обратной связи, а во-вторых, тем, что в числителе передаточной функции стоит не константа, а множитель  $s^2$ , где  $s$  – комплексная переменная. Таким образом, управление ведется не по координате, а по ускорению. Методы NDF и NAF фактически предлагают тот же закон управления, что и NPF, только они используются в случаях, если измеряемой переменной являются соответственно скорость и ускорение, и в числителе передаточных функций имеют соответственно множитель  $s$  и константу. Перечисленные подходы, с одной стороны, в отличие от DVF, не ухудшают устойчивость системы на высоких частотах, а с другой стороны – снижают уровень вибраций в рабочей частотной области. Сравнение стратегий PPF и NPF представлено в [38], в работе сделан вывод о предпочтительности метода NPF в случае, когда необходимо контролировать несколько форм колебаний упругого

объекта. В работе [15] также сравнивается несколько подходов к управлению, среди которых PPF и NDF, в задаче о снижении колебаний балки, в итоге наилучшие результаты показывает стратегия NDF.

В настоящей работе с целью достижения максимально эффективного управления синтезируются более сложные передаточные функции, чем те, что были рассмотрены выше в рамках перечисленных стратегий управления. Каждая передаточная функция конструируется из нескольких фильтров: одни из этих фильтров нацелены на увеличение устойчивости системы на высших частотах, а другие – на снижение вибраций объекта на низких частотах, что является непосредственной целью управления. Таким образом, законы управления являются гибкими и настраиваемыми. Оптимальные параметры для каждого из использованных фильтров определяются экспериментально. Описанный подход к синтезу законов управления используется в работе [51] и именуется *loop shaping*. Обзор всех используемых в настоящем исследовании фильтров, из которых синтезируются передаточные функции контроллера, дан в разделе 3.1.

### **3.1. Фильтры, используемые при синтезе законов управления**

Для эффективного подавления вынужденных резонансных колебаний балки передаточная функция контроллера должна обладать следующими свойствами: во-первых, как было показано в пункте 1.3.1, на тех резонансных частотах, на которых необходимо бороться с колебаниями системы, фазочастотная характеристика разомкнутой системы должна приближаться к  $\frac{\pi}{2}$ . Во-вторых, вблизи данных частот амплитуда разомкнутой системы должна быть максимальна. В-третьих, на высших резонансных частотах, на которых вследствие фазового сдвига система управления усиливает колебания, амплитуда разомкнутой системы должна быть минимальна. В целях соблюдения данных требований передаточная функция в каждом контуре управления конструируется из нескольких типов стандартных звеньев, каждое из которых представляет собой передаточную функцию некоторого фильтра. Ниже

рассмотрены различные варианты таких фильтров, использующиеся в данной работе.

1) Фильтр нижних частот первого порядка

Передаточная функция:  $R(s) = \frac{1}{Ts+1}$ .

Данный фильтр используется для снижения амплитуды сигнала на высоких частотах. Наклон АЧХ данного фильтра на высоких частотах составляет -20 дБ/дек. Диаграмма Бode фильтра нижних частот первого порядка для значения параметра  $f^* = \frac{1}{2\pi T} = 20$  Гц представлена на Рисунке 3.1.

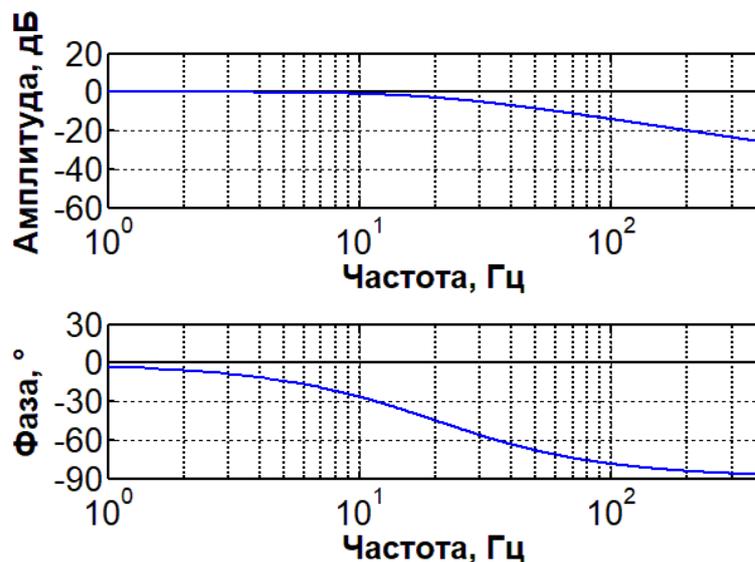


Рисунок 3.1. Диаграмма Бode фильтра нижних частот первого порядка

Недостатком данного фильтра является то, что он снижает фазу сигнала на всем частотном диапазоне. Чем выше частота, тем сильнее снижение фазы, и с ростом частоты фаза стремится к  $-\frac{\pi}{2}$ . Сдвиг фазы может как приводить к неустойчивости на высоких частотах, так и снижать эффективность управления в рабочей частотной области.

2) Фильтр нижних частот второго порядка

Передаточная функция:  $R(s) = \frac{1}{T^2s^2+2T\xi s+1}$ .

Данный фильтр также используется для подавления сигнала на высоких частотах, наклон АЧХ данного фильтра на высоких частотах составляет -40 дБ/дек.

Диаграмма Бode фильтра нижних частот второго порядка для значений параметров

$f^* = \frac{1}{2\pi T} = 20$  Гц,  $\xi = 0.2$  представлена на Рисунке 3.2.

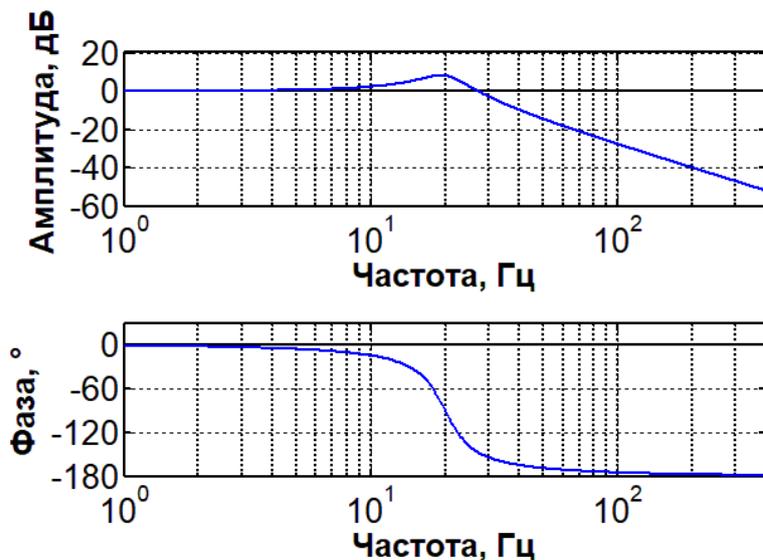


Рисунок 3.2. Диаграмма Бode фильтра нижних частот второго порядка

Недостатком данного фильтра так же, как и для ФНЧ первого порядка, является снижение фазы сигнала. С ростом частоты фазовый сдвиг стремится к  $-\pi$ . Преимуществом данного фильтра по сравнению с ФНЧ первого порядка является более быстрое убывание амплитуды на высоких частотах ( $f > f^*$ ), а также возможность меньшего снижения фазы на низких частотах ( $f < f^*$ ): для этого необходимо задавать низкое значение параметра  $\xi$ . Однако при низких значениях  $\xi$  данный фильтр заметно усиливает амплитуду сигнала вблизи частоты  $f^*$ , что может приводить к неустойчивости системы в данной области, где амплитуда сигнала увеличена, а фаза сильно сдвинута вниз.

### 3) Lead-фильтр

Передаточная функция:  $R(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$ .

Данный фильтр поднимает фазу сигнала в рабочей частотной области.

Диаграмма Бode lead-фильтра для значений параметров  $f^* = \frac{1}{2\pi T} = 10$  Гц,  $\alpha = 0.5$  представлена на Рисунке 3.3.

Lead-фильтр поднимает фазу управляющего сигнала, что необходимо для эффективного подавления резонансных колебаний. Недостаток данного фильтра

состоит в том, что он поднимает амплитуду сигнала на высоких частотах ( $f > f^*$ ), что снижает устойчивость замкнутой системы.

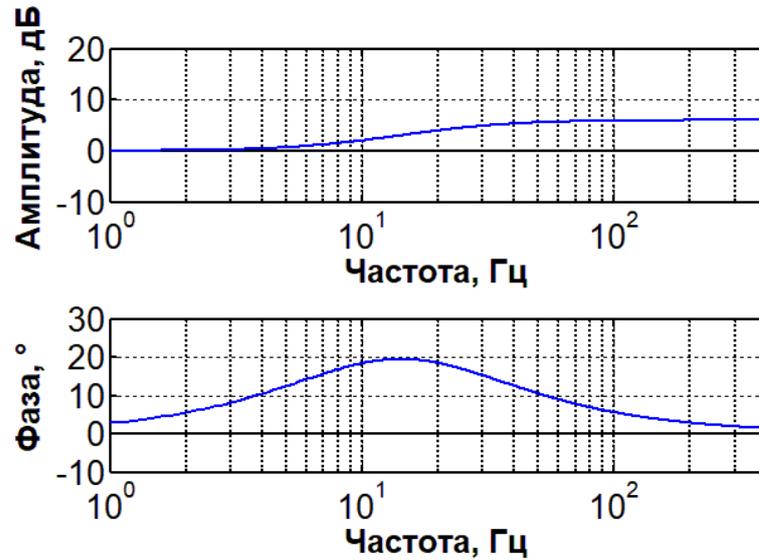


Рисунок 3.3. Диаграмма Бode lead-фильтра

#### 4) Полосно-заграждающий фильтр

$$\text{Передаточная функция: } R(s) = \frac{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}{T^2 s^2 + 2T\alpha\xi s + 1}.$$

Данный фильтр подавляет сигнал в определенной частотной области. Диаграмма Бode полосно-заграждающего фильтра для значений параметров  $f^* = \frac{1}{2\pi T} = 20$  Гц,  $\xi = 0.1$ ,  $\alpha = 7$  представлена на Рисунке 3.4.

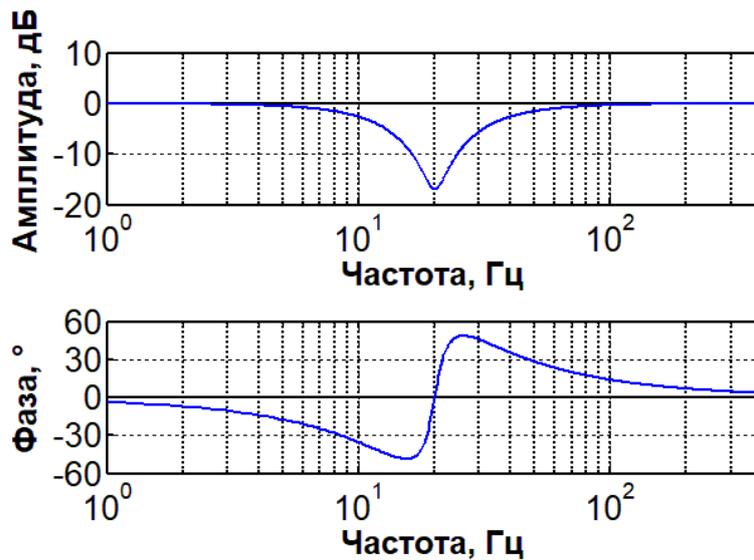


Рисунок 3.4. Диаграмма Бode полосно-заграждающего фильтра

Полосно-заграждающий фильтр снижает амплитуду сигнала в некоторой области вблизи частоты  $f^*$ , что позволяет подавлять высокие резонансные частоты, способные привести к неустойчивости замкнутой системы. Недостатком данного фильтра является то, что он приводит к снижению фазы на низких частотах ( $f < f^*$ ), что снижает эффективность управления, а также может вызывать неустойчивость.

#### 5) Полосно-пропускающий фильтр

$$\text{Передаточная функция: } R(s) = \frac{T_1^2 s^2 + 2T_1 \alpha \xi s + 1}{T_2^2 s^2 + 2T_2 \xi s + 1}.$$

Данный фильтр усиливает сигнал в определенной частотной области. Диаграмма Бode полосно-пропускающего фильтра для значений параметров  $f_1^* = \frac{1}{2\pi T_1} = f_2^* = \frac{1}{2\pi T_2} = 20$  Гц,  $\xi = 0.1$ ,  $\alpha = 7$  представлена на Рисунке 3.5.

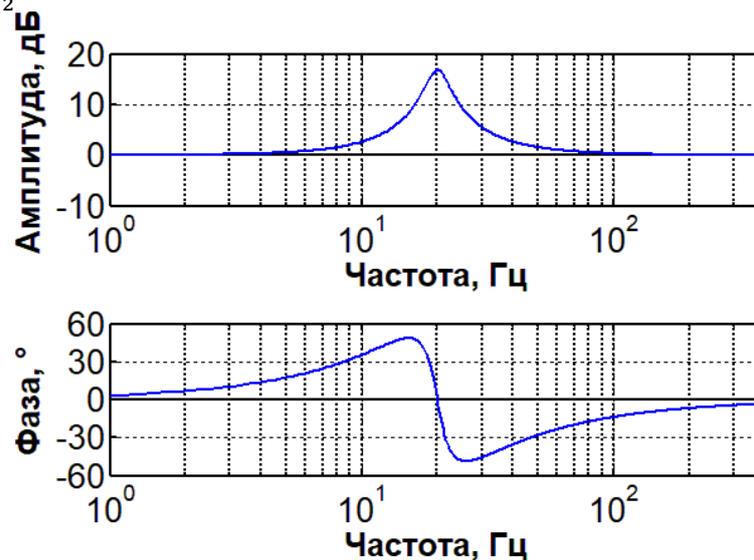


Рисунок 3.5. Диаграмма Бode полосно-пропускающего фильтра

Полосно-пропускающий фильтр поднимает фазу сигнала на низких частотах ( $f < f_1^*$ ), а также увеличивает амплитуду сигнала вблизи резонансной частоты  $f_2^*$ , что позволяет улучшить эффективность подавления колебаний в рабочей частотной области. Недостаток данного фильтра состоит в том, что на высоких частотах ( $f > f_2^*$ ) он также усиливает сигнал и сдвигает его фазу вниз, что снижает устойчивость замкнутой системы.

### 3.2. Локальные системы управления с одним контуром

На первом этапе синтеза законов управления были протестированы локальные системы управления с одним контуром, включающим только одну (первую) пару сенсор-актуатор. На данной стадии отработывался алгоритм синтеза передаточных функций и устанавливалась эффективность использования различных фильтров, рассмотренных в пункте 2.3.1.

Работа над каждым вариантом системы управления включает несколько частей. Во-первых, синтезируется передаточная функция, приводящая АЧХ и ФЧХ разомкнутой системы к желаемому виду. Во-вторых, осуществляется экспериментальный подбор максимального коэффициента усиления в контуре управления, не приводящего к неустойчивости замкнутой системы, для этого система управления включается в отсутствие внешнего возмущающего воздействия на балку. В-третьих, определяется эффективность созданной системы управления: для этого измеряется амплитудно-частотная характеристика балки при возбуждении колебаний балки пьезотолкателем и измерении амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки с помощью виброметра. АЧХ, полученная при включенной системе управления, сравнивается с характеристикой, полученной для балки без управления, при этом отслеживается изменение высоты первого и второго резонансных пиков. Точка на верхнем конце балки выбрана потому, что для первой и второй форм колебаний балки амплитуда ее колебаний наивысшая среди всех точек балки.

Всего было протестировано семь различных вариантов законов управления для локальной системы управления с одним сенсором и одним актуатором. Передаточные функции данных систем приведены ниже.

1) Система с одним контуром №1

Использованные фильтры: ФНЧ второго порядка ( $f^* = \frac{1}{2\pi T} = 30$  Гц,  $\xi = 0.4$ ),  
полосно-заграждающий фильтр ( $f^* = \frac{1}{2\pi T} = 42.5$  Гц,  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 20$ ).

Коэффициент усиления:  $K_p = 1.5$ .

Передаточная функция:

$$R(s) = \frac{5.33 \cdot 10^4 s^2 + 2.85 \cdot 10^5 s + 3.8 \cdot 10^9}{s^4 + 258s^3 + 1.23 \cdot 10^5 s^2 + 1.46 \cdot 10^7 s + 2.53 \cdot 10^9}$$

2) Система с одним контуром №2

Использованные фильтры: ФНЧ второго порядка ( $f^* = 600$  Гц,  $\xi = 0.3$ ), 3 полосно-заграждающих фильтра (первый:  $f^* = 176.8$  Гц,  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 3$ ; второй:  $f^* = 249.2$  Гц,  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 5$ ; третий:  $f^* = 390$  Гц,  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 3$ ).

Коэффициент усиления:  $K_p = 0.35$ .

Передаточная функция:

$$R(s) = (5 \cdot 10^6 s^6 + 5.1 \cdot 10^8 s^5 + 4.8 \cdot 10^{13} s^4 + 3 \cdot 10^{15} s^3 + 1.3 \cdot 10^{20} s^2 + 3.5 \cdot 10^{21} s + 9 \cdot 10^{25}) / (s^8 + 2632s^7 + 2.5 \cdot 10^7 s^6 + 3 \cdot 10^{10} s^5 + 1.7 \cdot 10^{14} s^4 + 9.2 \cdot 10^{16} s^3 + 3.8 \cdot 10^{20} s^2 + 7.8 \cdot 10^{22} s + 2.6 \cdot 10^{26})$$

3) Система с одним контуром №3

Использованные фильтры: ФНЧ первого порядка ( $f^* = 170$  Гц), 3 полосно-заграждающих фильтра (первый:  $f^* = 176.8$  Гц,  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 3$ ; второй:  $f^* = 249.2$  Гц,  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 5$ ; третий:  $f^* = 390.2$  Гц,  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 2$ ).

Коэффициент усиления:  $K_p = 0.45$ .

Передаточная функция:

$$R(s) = (481s^6 + 4.9 \cdot 10^4 s^5 + 4.7 \cdot 10^9 s^4 + 2.9 \cdot 10^{11} s^3 + 1.2 \cdot 10^{16} s^2 + 3.4 \cdot 10^{17} s + 8.8 \cdot 10^{21}) / (s^7 + 1390s^6 + 1 \cdot 10^7 s^5 + 1.2 \cdot 10^{10} s^4 + 2.8 \cdot 10^{13} s^3 + 2.9 \cdot 10^{16} s^2 + 2.1 \cdot 10^{19} s + 1.9 \cdot 10^{22})$$

4) Система с одним контуром №4

Использованные фильтры: Lead-фильтр ( $f^* = 5$  Гц,  $\alpha = 0.05$ ), ФНЧ первого порядка ( $f^* = 70$  Гц), ФНЧ второго порядка ( $f^* = 70$  Гц,  $\xi = 0.7$ ), 2 полосно-заграждающих фильтра (первый:  $f^* = 114.2$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 2.5$ ; второй:  $f^* = 176.2$  Гц,  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 2$ ), полосно-пропускающий фильтр ( $f_1^* = f_2^* = 50$  Гц,  $\xi = 0.2$ ,  $\alpha = 4$ ).

Коэффициент усиления:  $K_p = 0.1$ .

Передаточная функция:

$$R(s) = (1.7 \cdot 10^8 s^7 + 1 \cdot 10^{11} s^6 + 3.2 \cdot 10^{14} s^5 + 1.7 \cdot 10^{17} s^4 + 1.5 \cdot 10^{20} s^3 + 5.9 \cdot 10^{22} s^2 + 1.2 \cdot 10^{25} s + 3.3 \cdot 10^{26}) / (s^{10} + 1926 s^9 + 3.4 \cdot 10^6 s^8 + 4.1 \cdot 10^9 s^7 + 3.6 \cdot 10^{12} s^6 + 2.6 \cdot 10^{15} s^5 + 1.4 \cdot 10^{18} s^4 + 5.3 \cdot 10^{20} s^3 + 1.5 \cdot 10^{23} s^2 + 2.8 \cdot 10^{25} s + 3.3 \cdot 10^{27}).$$

5) Система с одним контуром №5

Использованные фильтры: Lead-фильтр ( $f^* = 5$  Гц,  $\alpha = 0.5$ ), ФНЧ второго порядка ( $f^* = 80$  Гц,  $\xi = 0.7$ ), 3 полосно-заграждающих фильтра (первый:  $f^* = 114.2$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 3$ ; второй:  $f^* = 176.2$  Гц,  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 3$ ; третий:  $f^* = 247.3$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 3$ ), полосно-пропускающий фильтр ( $f_1^* = f_2^* = 50$  Гц,  $\xi = 0.1$ ,  $\alpha = 8$ ).

Коэффициент усиления:  $K_p = 0.45$ .

Передаточная функция:

$$R(s) = (2.3 \cdot 10^5 s^9 + 1.5 \cdot 10^8 s^8 + 9.9 \cdot 10^{11} s^7 + 5.7 \cdot 10^{14} s^6 + 1.2 \cdot 10^{18} s^5 + 6.3 \cdot 10^{20} s^4 + 4.9 \cdot 10^{23} s^3 + 1.9 \cdot 10^{26} s^2 + 4 \cdot 10^{28} s + 1.1 \cdot 10^{30}) / (s^{11} + 1168 s^{10} + 4.9 \cdot 10^6 s^9 + 4.6 \cdot 10^9 s^8 + 7.5 \cdot 10^{12} s^7 + 5.3 \cdot 10^{15} s^6 + 4.3 \cdot 10^{18} s^5 + 2 \cdot 10^{21} s^4 + 8.8 \cdot 10^{23} s^3 + 1.9 \cdot 10^{26} s^2 + 4.7 \cdot 10^{28} s + 2.4 \cdot 10^{30}).$$

6) Система с одним контуром №6

Использованные фильтры: Lead-фильтр ( $f^* = 30$  Гц,  $\alpha = 0.5$ ), ФНЧ первого порядка ( $f^* = 90$  Гц), 4 полосно-заграждающих фильтра (первый:  $f^* = 114.2$  Гц,  $\xi = 0.015$ ,  $\alpha = 4$ ; второй:  $f^* = 176.2$  Гц,  $\xi = 0.015$ ,  $\alpha = 6$ ; третий:  $f^* = 247.2$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 7$ ; четвертый:  $f^* = 390.2$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 5$ ), полосно-пропускающий фильтр ( $f_1^* = 50$  Гц,  $f_2^* = 55$  Гц,  $\xi = 0.1$ ,  $\alpha = 8$ ).

Коэффициент усиления:  $K_p = 0.4$ .

Передаточная функция:

$$R(s) = (547 s^{11} + 5 \cdot 10^5 s^{10} + 5.8 \cdot 10^9 s^9 + 4.6 \cdot 10^{12} s^8 + 1.8 \cdot 10^{16} s^7 + 1.3 \cdot 10^{19} s^6 + 2.1 \cdot 10^{22} s^5 + 1.3 \cdot 10^{25} s^4 + 8.7 \cdot 10^{27} s^3 + 3.9 \cdot 10^{30} s^2 + 9.8 \cdot 10^{32} s + 9.3 \cdot 10^{34}) / (s^{12} + 2222 s^{11} + 1.2 \cdot 10^7 s^{10} +$$

$$+1.9 \cdot 10^{10}s^9 + 4.4 \cdot 10^{13}s^8 + 5 \cdot 10^{16}s^7 + 5.9 \cdot 10^{19}s^6 + 4.7 \cdot 10^{22}s^5 + \\ + 3 \cdot 10^{25}s^4 + 1.6 \cdot 10^{28}s^3 + 5.1 \cdot 10^{30}s^2 + 1.3 \cdot 10^{33}s + 2.3 \cdot 10^{35}).$$

7) Система с одним контуром №7

Использованные фильтры: Lead-фильтр ( $f^* = 12$  Гц,  $\alpha = 0.083$ ), ФНЧ первого порядка ( $f^* = 90$  Гц), 4 полосно-заграждающих фильтра (первый:  $f^* = 114.2$  Гц,  $\xi = 0.015$ ,  $\alpha = 4$ ; второй:  $f^* = 176.2$  Гц,  $\xi = 0.015$ ,  $\alpha = 7$ ; третий:  $f^* = 247.2$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 10$ ; четвертый:  $f^* = 390.2$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 6$ ), полосно-пропускающий фильтр ( $f_1^* = 50$  Гц,  $f_2^* = 55$  Гц,  $\xi = 0.1$ ,  $\alpha = 8$ ).

Коэффициент усиления:  $K_p = 0.1$ .

Передаточная функция:

$$R(s) = (821s^{11} + 6.5 \cdot 10^5s^{10} + 8.6 \cdot 10^9s^9 + 6 \cdot 10^{12}s^8 + \\ + 2.6 \cdot 10^{16}s^7 + 1.6 \cdot 10^{19}s^6 + 3 \cdot 10^{22}s^5 + 1.6 \cdot 10^{25}s^4 + 1.1 \cdot 10^{28}s^3 + \\ + 4.6 \cdot 10^{30}s^2 + 1 \cdot 10^{33}s + 5.6 \cdot 10^{34}) / (s^{12} + 3068s^{11} + 1.4 \cdot 10^7s^{10} + \\ + 2.8 \cdot 10^{10}s^9 + 5.7 \cdot 10^{13}s^8 + 7.6 \cdot 10^{16}s^7 + 8.4 \cdot 10^{19}s^6 + 7.6 \cdot 10^{22}s^5 + \\ + 4.8 \cdot 10^{25}s^4 + 2.7 \cdot 10^{28}s^3 + 1 \cdot 10^{31}s^2 + 2.3 \cdot 10^{33}s + 5.6 \cdot 10^{35}).$$

Результаты работы всех перечисленных локальных систем управления с одним сенсором и одним актуатором приведены в Таблице 3.1. Для каждой из систем указаны характеристики управляющего сигнала, а также показатели эффективности в области первой и второй резонансных частот. Здесь  $|R(s)|$  – величина усиления сигнала в цепи управления, а  $\Delta\varphi$  – сдвиг фазы управляющего сигнала вблизи резонанса, причем данная величина включает в себя как сдвиг фазы в самом контроллере, так и сдвиг фазы, возникающий при измерении сигнала сенсора вследствие его конечной емкости. Данный эффект в работе пьезосенсоров подробно рассмотрен в пункте 1.4.2, величина возникающего вследствие данного эффекта положительного сдвига фазы составляет на первом резонансе около  $27^\circ$ , а на втором – около  $-3.5^\circ$ . Величина  $\Delta A_{res}$  в Таблице 3.1 обозначает разницу между амплитудами резонансных колебаний точки на верхнем конце балки при включенной и отключенной системе управления, выраженную в децибелах (отрицательная величина свидетельствует о снижении уровня вибраций,

положительная – об их усилении). Данные значения определяются по высоте резонансных пиков на соответствующих амплитудно-частотных характеристиках. Величина  $\Delta f_{res}$  обозначает сдвиг резонансного пика на указанных АЧХ при включенном управлении по сравнению с системой без управления.

Таблица 3.1.

Результаты работы локальных систем управления с одним контуром

№	1 резонанс				2 резонанс			
	$ R(s) $	$\Delta\varphi, ^\circ$	$\Delta A_{res}, \text{дБ}$	$\Delta f_{res}, \text{Гц}$	$ R(s) $	$\Delta\varphi, ^\circ$	$\Delta A_{res}, \text{дБ}$	$\Delta f_{res}, \text{Гц}$
1	0.52	11.8	- 4.8	0.1	0.05	-112	0.9	-0.03
2	0.35	26.3	- 7.1	0.08	0.35	-0.6	0.3	0.3
3	0.45	24.3	- 6.8	0.08	0.44	-12.1	6.5	0.3
4	0.18	73	- 9.5	0.02	2	-8	2.7	0.8
5	0.65	50	- 11.6	0.13	3.65	0.4	1	0.9
6	0.21	39	- 7	0.05	1.7	39	-9.4	0.55
7	0.12	60	- 6.5	0.02	1.1	76	-14.2	0.7

Как видно из Таблицы 3.1, первые пять систем управления уменьшают амплитуду колебаний только на первом резонансе, на втором же они не только не уменьшают, а даже увеличивают амплитуду резонансных колебаний. Наилучший из данных вариантов управления – вариант №5: он снижает уровень колебаний на первом резонансе на 11.6 дБ. На втором резонансе лучше всего работает контроллер №7: колебания снижаются на 14.2 дБ, однако на первом резонансе данный контроллер уже не столь эффективен – снижение составляет 6.5 дБ.

Анализируя данные, приведенные в Таблице 3.1, можно сделать вывод о том, что управление тем эффективнее, чем выше значения сдвига фазы и амплитуды управляющего сигнала. При этом при проектировании системы управления существует противоречие между увеличением данных величин: при больших значениях фазового сдвига, таких как, например, в системах управления №4 и №7 на первом резонансе, нет возможности задавать высокий коэффициент усиления,

поэтому приходится искать компромисс между увеличением амплитуды и фазы сигнала. Система управления №5 эффективна на первом резонансе потому, что и значение фазового сдвига является достаточно большим ( $50^\circ$ ), и модуль передаточной функции наибольший среди всех вариантов систем управления (0.65). Та же логика справедлива и для результатов системы управления №7 на втором резонансе: сдвиг фазы составляет  $76^\circ$ , а модуль передаточной функции – 1.1.

Таким образом, в результате проведенных экспериментов был отработан алгоритм синтеза законов управления и получены два варианта таких законов, обеспечивающие наиболее эффективное подавление колебаний на первом или на втором резонансах. При этом была установлена невозможность задания такого закона управления, который бы приводил к максимально эффективной работе системы одновременно как на первом, так и на втором резонансе.

### **3.3. Локальные системы управления с двумя контурами**

На втором этапе синтеза законов управления были спроектированы локальные системы управления с двумя контурами, каждый из которых включает свою пару сенсор-актуатор. Всего было создано две таких системы управления: первая предназначалась для наиболее эффективной работы на первой резонансной частоте изгибных колебаний балки, а вторая – на второй. В данном пункте для каждого контура указанных систем управления представлены частотные характеристики контроллера и разомкнутой системы, а также приведены результаты работы данных систем вблизи первой и второй резонансных частот изгибных колебаний балки.

#### **1) Локальная система с двумя контурами №1**

Данная система спроектирована с целью наиболее эффективного подавления вынужденных изгибных колебаний балки в области первого резонанса. В качестве закона управления для первого контура в данной системе использовалась

передаточная функция, представленная в пункте 3.2 под номером 5. Характеристики контроллера для второго контура управления приведены ниже.

Использованные фильтры: Lead-фильтр ( $f^* = 5$  Гц,  $\alpha = 0.5$ ), ФНЧ второго порядка ( $f^* = 80$  Гц,  $\xi = 0.7$ ), 3 полосно-заграждающих фильтра (первый:  $f^* = 176.2$  Гц,  $\xi = 0.015$ ,  $\alpha = 1.5$ ; второй:  $f^* = 249$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 5$ ; третий:  $f^* = 578.6$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 3$ ), полосно-пропускающий фильтр ( $f_1^* = f_2^* = 50$  Гц,  $\xi = 0.1$ ,  $\alpha = 8$ ).

Коэффициент усиления:  $K_{p2} = 0.55$ .

Передаточная функция:

$$R_2(s) = (2.8 \cdot 10^5 s^9 + 2.2 \cdot 10^8 s^8 + 4.8 \cdot 10^{12} s^7 + 3.1 \cdot 10^{15} s^6 + 1.5 \cdot 10^{19} s^5 + 8.4 \cdot 10^{21} s^4 + 1.3 \cdot 10^{25} s^3 + 6 \cdot 10^{27} s^2 + 1.3 \cdot 10^{30} s + 3.4 \cdot 10^{31}) / (s^{11} + 1628 s^{10} + 1.8 \cdot 10^7 s^9 + 2.2 \cdot 10^{10} s^8 + 6.6 \cdot 10^{13} s^7 + 5.6 \cdot 10^{16} s^6 + 7.1 \cdot 10^{19} s^5 + 4.2 \cdot 10^{22} s^4 + 2 \cdot 10^{25} s^3 + 4.7 \cdot 10^{27} s^2 + 1.2 \cdot 10^{30} s + 6.2 \cdot 10^{31}).$$

Диаграммы Бode разомкнутой системы для обоих контуров управления приведены на Рисунках 3.6 и 3.7. Синяя линия на данных рисунках соответствует объекту управления, а красная – разомкнутой системе.

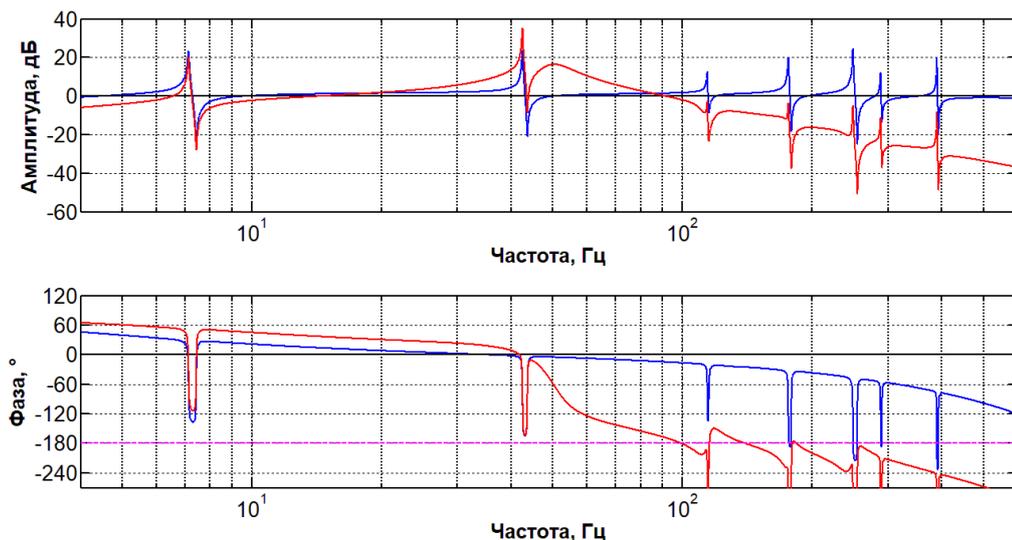


Рисунок 3.6. Диаграмма Бode разомкнутой системы для первого контура локальной системы управления с двумя контурами №1

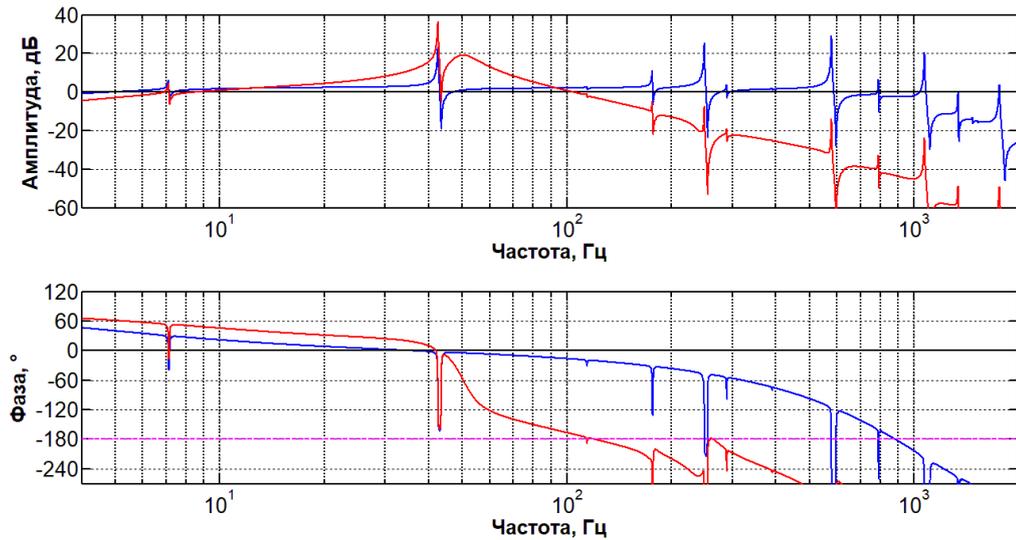


Рисунок 3.7. Диаграмма Бode разомкнутой системы для второго контура локальной системы управления с двумя контурами №1

Диаграмма Найквиста для обоих контуров локальной системы управления с двумя контурами №1 (коэффициенты усиления  $K_{p1} = 0.45$ ,  $K_{p2} = 0.55$ ), полученная в соответствии с формулой (1.22), на общем и приближенном плане представлена на Рисунке 3.8. На данном рисунке видно, что годограф не охватывает точку  $(-1; 0)$ , поэтому данная система управления с двумя контурами не вызывает неустойчивости замкнутой системы.

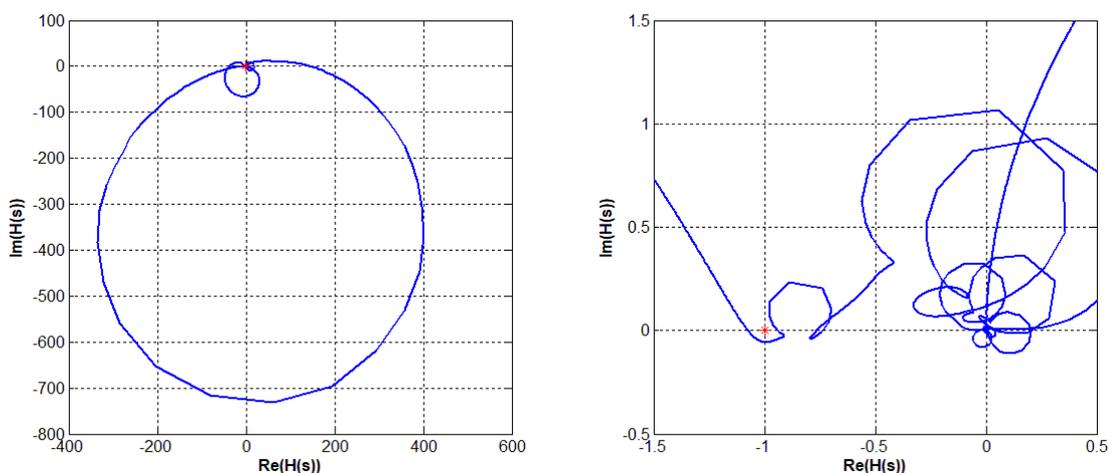


Рисунок 3.8. Диаграмма Найквиста для обоих контуров локальной системы управления с двумя контурами №1 (общий вид и увеличенный фрагмент)

В качестве результатов использования локальной системы управления с двумя контурами №1 на Рисунках 3.9 и 3.10 представлены АЧХ балки вблизи первого и второго резонансов для разных вариантов коэффициентов усиления в контурах управления. Данные АЧХ получены при воздействии на балку с помощью пьезостержня и измерении амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки с помощью лазерного виброметра.

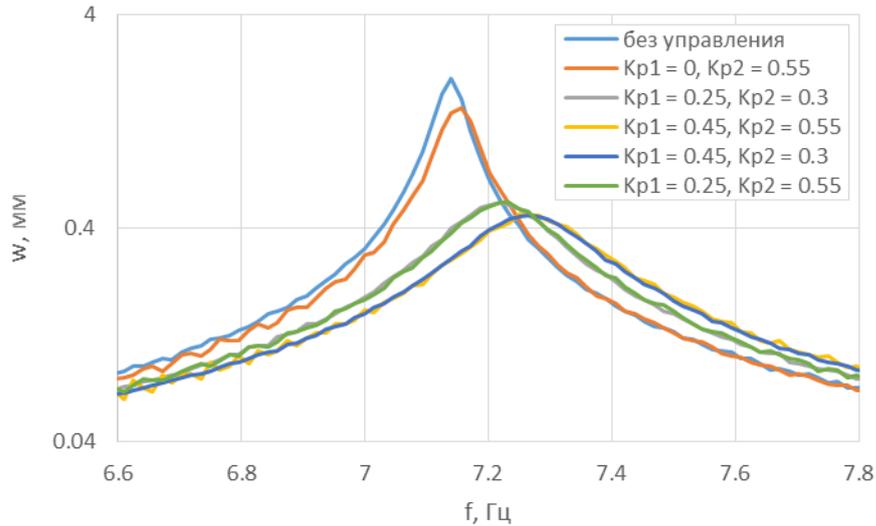


Рисунок 3.9. АЧХ балки при локальном управлении с двумя контурами №1 в области первого резонанса для разных значений коэффициентов усиления

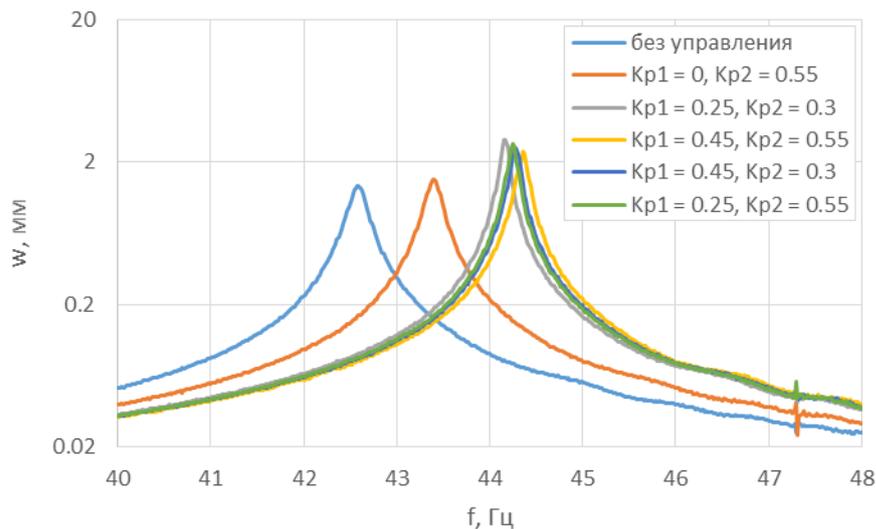


Рисунок 3.10. АЧХ балки при локальном управлении с двумя контурами №1 в области второго резонанса для разных значений коэффициентов усиления

Созданная система управления эффективно работает на первом резонансе, снижая амплитуду резонансных колебаний на 12.7 дБ (для коэффициентов усиления  $K_{p1} = 0.45$ ,  $K_{p2} = 0.55$ ), но на втором резонансе она, наоборот, увеличивает амплитуду колебаний на 4.8 дБ. По сравнению с результатом системы с одним контуром №5 (снижение амплитуды на первом резонансе на 11.6 дБ) данный результат ненамного эффективнее, это связано с тем, что второй контур при локальном управлении относительно слабо влияет на первую форму изгибных колебаний балки.

## 2) Локальная система с двумя контурами №2

Данная система спроектирована с целью наиболее эффективного подавления вынужденных изгибных колебаний балки в области второго резонанса. В качестве закона управления для первого контура в данной системе использовалась передаточная функция, представленная в пункте 3.2 под номером 7. Характеристики контроллера для второго контура управления приведены ниже.

Использованные фильтры: Lead-фильтр ( $f^* = 12$  Гц,  $\alpha = 0.083$ ), ФНЧ первого порядка ( $f^* = 90$  Гц), 4 полосно-заграждающих фильтра (первый:  $f^* = 176.2$  Гц,  $\xi = 0.015$ ,  $\alpha = 2$ ; второй:  $f^* = 249$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 14$ ; третий:  $f^* = 578.6$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 12$ ; четвертый:  $f^* = 1073$  Гц,  $\xi = 0.03$ ,  $\alpha = 3$ ), полосно-пропускающий фильтр ( $f_1^* = 50$  Гц,  $f_2^* = 55$  Гц,  $\xi = 0.1$ ,  $\alpha = 8$ ).

Коэффициент усиления:  $K_p = 0.1$ .

Передаточная функция:

$$R_2(s) = (821s^{11} + 1 \cdot 10^6s^{10} + 5.2 \cdot 10^{10}s^9 + 4.6 \cdot 10^{13}s^8 + 6.9 \cdot 10^{17}s^7 + 4.8 \cdot 10^{20}s^6 + 2.1 \cdot 10^{24}s^5 + 1.3 \cdot 10^{27}s^4 + 1.8 \cdot 10^{30}s^3 + 8.8 \cdot 10^{32}s^2 + 2 \cdot 10^{35}s + 1.1 \cdot 10^{37}) / (s^{12} + 5440s^{11} + 7.4 \cdot 10^7s^{10} + 2.7 \cdot 10^{11}s^9 + 1.2 \cdot 10^{15}s^8 + 2.6 \cdot 10^{18}s^7 + 4.8 \cdot 10^{21}s^6 + 5.9 \cdot 10^{24}s^5 + 5.5 \cdot 10^{27}s^4 + 4.1 \cdot 10^{30}s^3 + 1.7 \cdot 10^{33}s^2 + 4.4 \cdot 10^{35}s + 1.1 \cdot 10^{38}).$$

Диаграммы Боде разомкнутой системы для обоих контуров управления приведены на Рисунках 3.11 и 3.12. Синяя линия на данных рисунках соответствует объекту управления, а красная – разомкнутой системе.

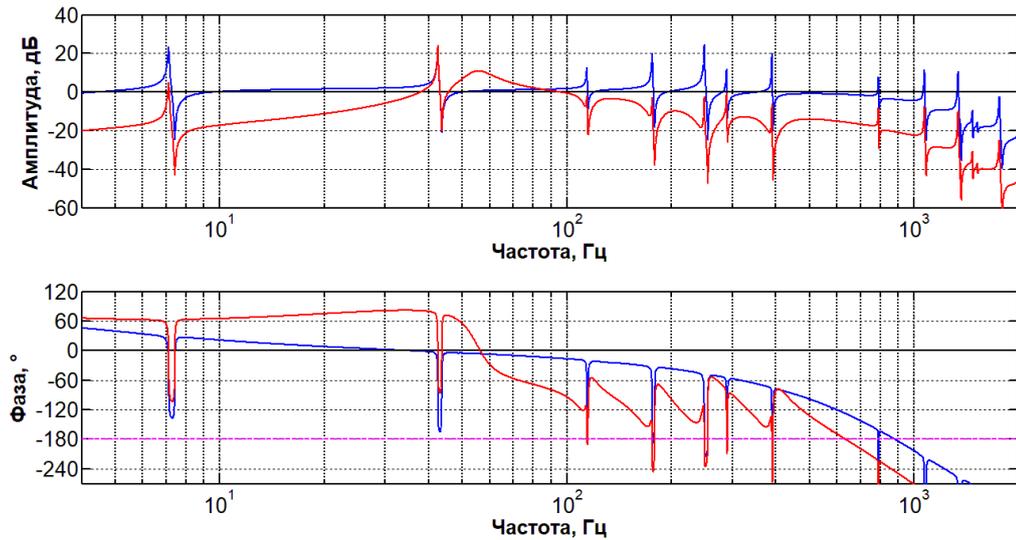


Рисунок 3.11. Диаграмма Бode разомкнутой системы для первого контура локальной системы управления с двумя контурами №2

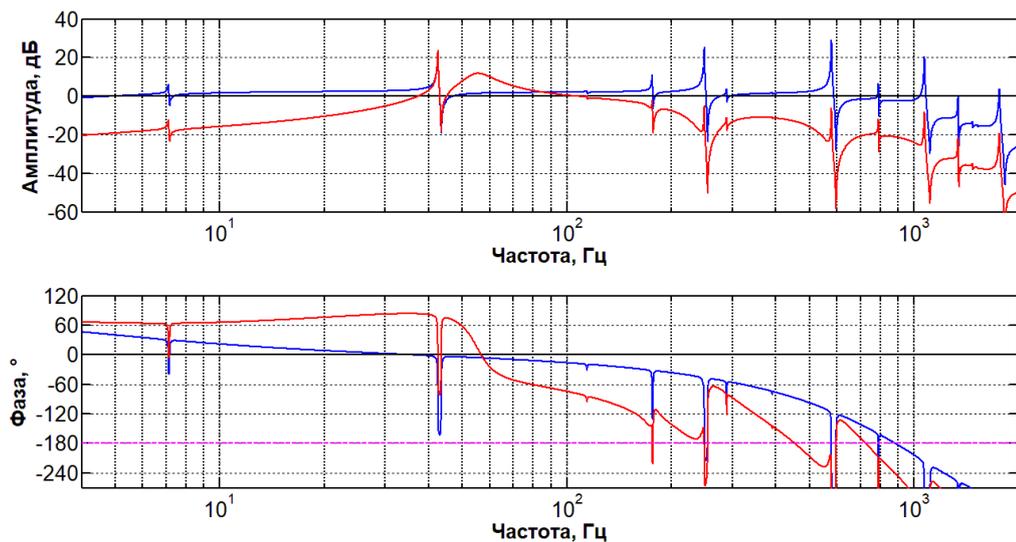


Рисунок 3.12. Диаграмма Бode разомкнутой системы для второго контура локальной системы управления с двумя контурами №2

Диаграмма Найквиста для обоих контуров локальной системы управления с двумя контурами №2 (коэффициенты усиления  $K_{p1} = K_{p2} = 0.055$ ) на общем и приближенном плане представлена на Рисунке 3.13. Годограф не охватывает точку  $(-1; 0)$ , поэтому данная система управления с двумя контурами не вызывает неустойчивости замкнутой системы.

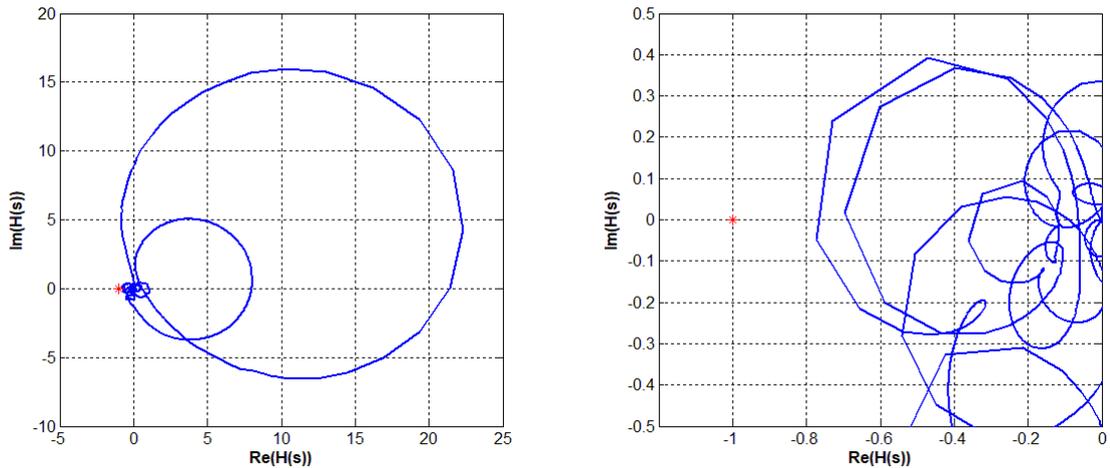


Рисунок 3.13. Диаграмма Найквиста для обоих контуров локальной системы управления с двумя контурами №2 (общий вид и увеличенный фрагмент)

В качестве результатов использования локальной системы управления с двумя контурами №2 на Рисунках 3.14 и 3.15 представлены АЧХ балки вблизи первого и второго резонансов для разных вариантов коэффициентов усиления в контурах управления. При совместном включении обоих контуров управления коэффициенты усиления в них уменьшаются с целью сохранения устойчивости системы.

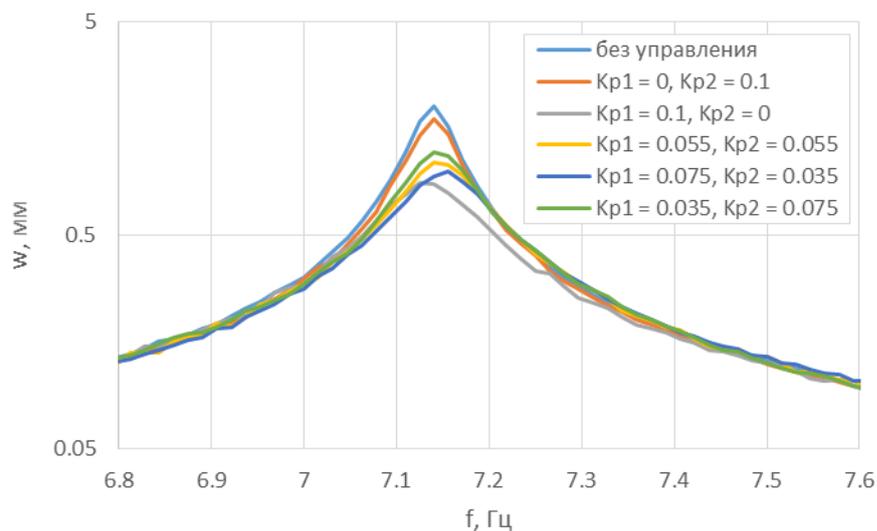


Рисунок 3.14. АЧХ балки при локальном управлении с двумя контурами №2 в области первого резонанса для разных значений коэффициентов усиления

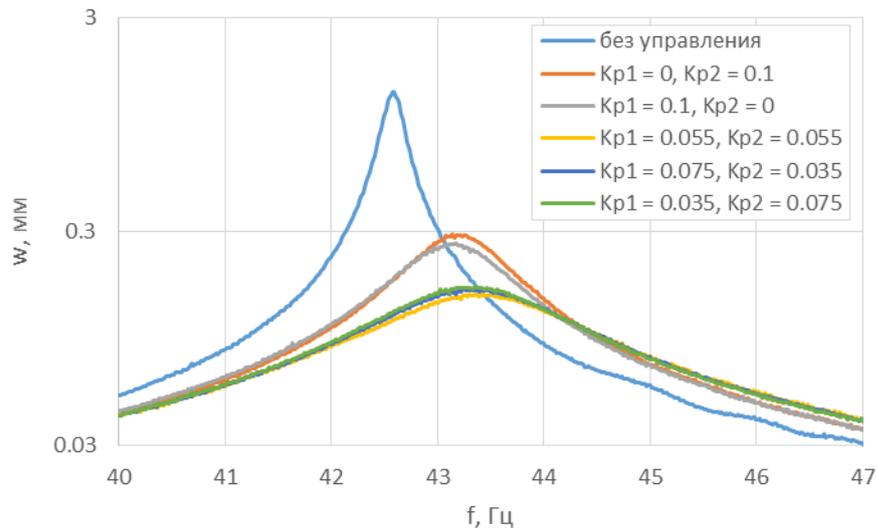


Рисунок 3.15. АЧХ балки при локальном управлении с двумя контурами №2 в области второго резонанса для разных значений коэффициентов усиления

Локальная система управления с двумя контурами №2 эффективно работает на втором резонансе, снижая амплитуду резонансных колебаний на 18.9 дБ (для коэффициентов усиления  $K_{p1} = 0.055$ ,  $K_{p2} = 0.055$ ), однако на первом резонансе она не столь эффективна: снижение амплитуды колебаний составляет всего 5.2 дБ. По сравнению с результатом системы с одним контуром №7 (снижение амплитуды на первом и втором резонансах соответственно 6.5 и 14.2 дБ) система с двумя контурами существенно эффективнее на второй резонансной частоте, однако менее эффективна на первой, поскольку коэффициент усиления в первом контуре данной системы, сильнее влияющий на первую форму колебаний балки, уменьшен для того, чтобы включение второго контура не приводило к неустойчивости.

Таким образом, были получены две локальных системы управления с двумя контурами, одна из которых эффективно снижает амплитуду колебаний балки на первом резонансе, а вторая – на втором. Наилучший общий результат достигается при использовании системы управления №2: снижение амплитуды колебаний составляет 5.2 и 18.9 дБ на первом и на втором резонансах соответственно.

### 3.4. Модальная система управления с двумя контурами

На третьем этапе синтеза законов управления была спроектирована модальная система управления с двумя контурами. В данной системе управления используются модальные матрицы  $T$  и  $F$ , заданные выражениями (2.36) и (2.37). При задании законов управления для каждого контура в качестве передаточных функций объекта используются функции  $H_{kk}^m$ , полученные из измеренных функций для каждого актуатора и каждого сенсора  $H_{ij}$  по формуле (2.38).

В первом контуре модальной системы управления использованы следующие фильтры: ФНЧ первого порядка ( $f^* = 20$  Гц), два полосно-заграждающих фильтра (первый:  $f^* = 114.2$  Гц,  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 2$ ; второй:  $f^* = 249$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 8$ ), полосно-пропускающий фильтр ( $f_1^* = 7$  Гц,  $f_2^* = 10$  Гц,  $\xi = 0.1$ ,  $\alpha = 10$ ).

Коэффициент усиления:  $K_p = 0.6$ .

Передаточная функция:

$$R_1(s) = (154s^6 + 2.5 \cdot 10^4 s^5 + 4.6 \cdot 10^8 s^4 + 5.1 \cdot 10^{10} s^3 + 2 \cdot 10^{14} s^2 + 1.7 \cdot 10^{16} s + 3.8 \cdot 10^{17}) / (s^7 + 668s^6 + 3.1 \cdot 10^6 s^5 + 7.4 \cdot 10^8 s^4 + 1.3 \cdot 10^{12} s^3 + 1.8 \cdot 10^{14} s^2 + 7.1 \cdot 10^{15} s + 6.3 \cdot 10^{17}).$$

Во втором контуре модальной системы управления использованы следующие фильтры: Lead-фильтр ( $f^* = 15$  Гц,  $\alpha = 0.125$ ), ФНЧ второго порядка ( $f^* = 100$  Гц,  $\xi = 0.2$ ), полосно-заграждающий фильтр ( $f^* = 176.2$  Гц,  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 3$ ), полосно-пропускающий фильтр ( $f_1^* = f_2^* = 55$  Гц,  $\xi = 0.1$ ,  $\alpha = 8$ ).

Коэффициент усиления:  $K_p = 0.035$ .

Передаточная функция:

$$R_2(s) = (1.1 \cdot 10^5 s^5 + 7.4 \cdot 10^7 s^4 + 1.6 \cdot 10^{11} s^3 + 8.9 \cdot 10^{13} s^2 + 2.3 \cdot 10^{16} s + 1.5 \cdot 10^{18}) / (s^7 + 1141s^6 + 2.1 \cdot 10^6 s^5 + 1.8 \cdot 10^9 s^4 + 1.1 \cdot 10^{12} s^3 + 6 \cdot 10^{14} s^2 + 1.1 \cdot 10^{17} s + 4.4 \cdot 10^{19}).$$

Диаграммы Боде разомкнутой системы для обоих контуров управления приведены на Рисунках 3.16 и 3.17. Синяя линия на данных рисунках соответствует объекту управления, а красная – разомкнутой системе.

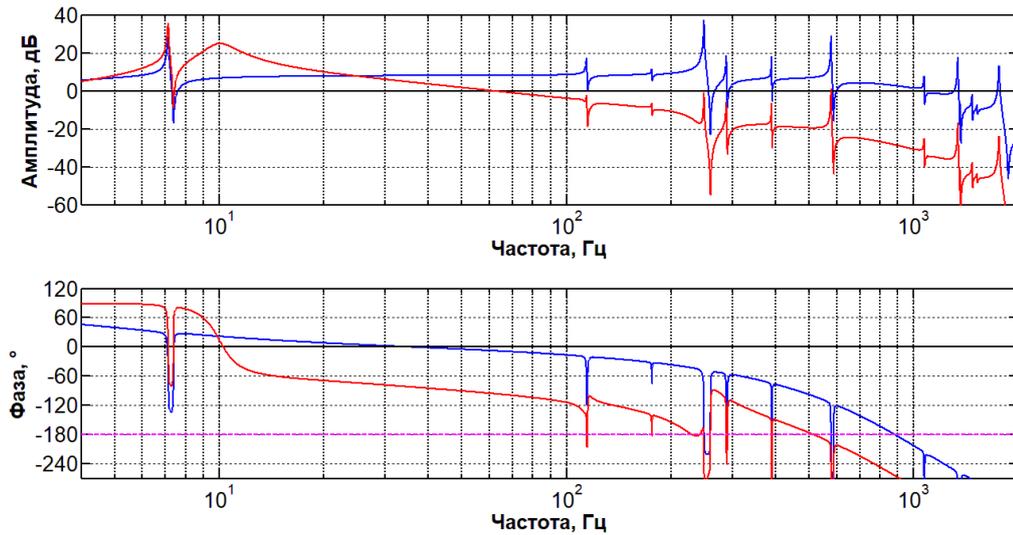


Рисунок 3.16. Диаграмма Бode разомкнутой системы для первого контура модальной системы управления

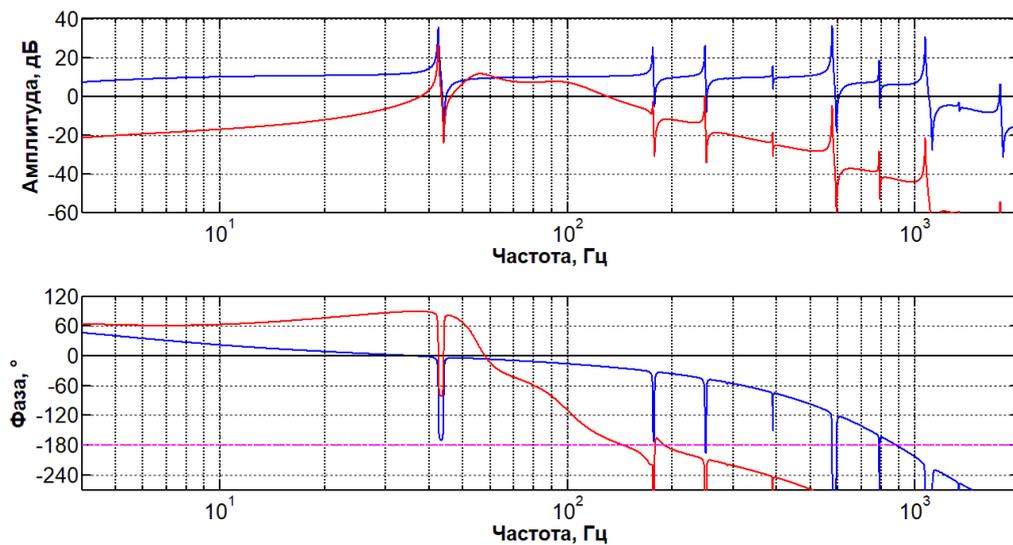


Рисунок 3.17. Диаграмма Бode разомкнутой системы для второго контура модальной системы управления

Диаграмма Найквиста для обоих контуров модальной системы управления (коэффициенты усиления  $K_{p1} = 0.1$ ,  $K_{p2} = 0.02$ ) на общем и приближенном плане представлена на Рисунке 3.18. Годограф не охватывает точку  $(-1; 0)$ , поэтому данная система управления с двумя контурами не вызывает неустойчивости замкнутой системы.

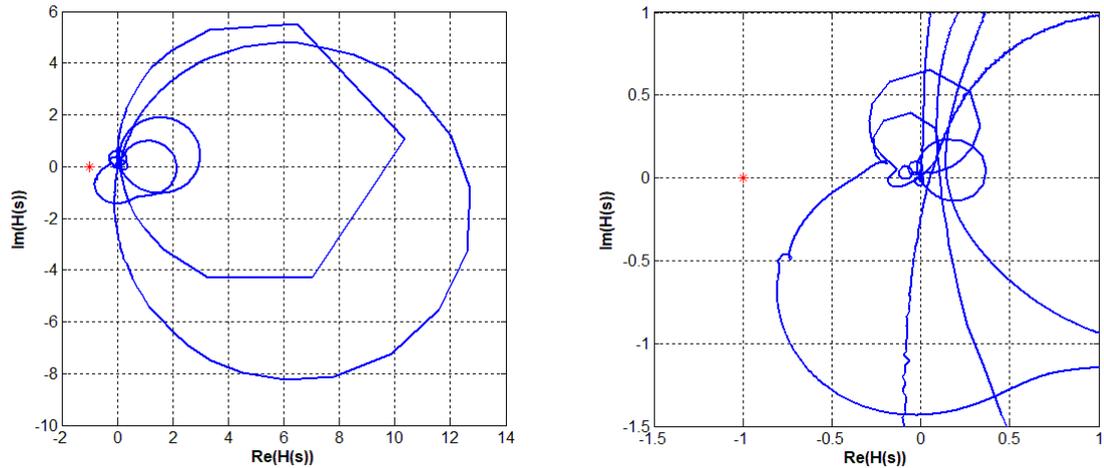


Рисунок 3.18. Диаграмма Найквиста для обоих контуров модальной системы управления (общий вид и увеличенный фрагмент)

В качестве результатов использования модальной системы управления на Рисунках 3.19 и 3.20 представлены АЧХ балки вблизи первого и второго резонансов для разных вариантов коэффициентов усиления в контурах управления. При этом наилучшее подавление резонансных колебаний достигается не при максимальных значениях коэффициентов усиления, а при более низких значениях.

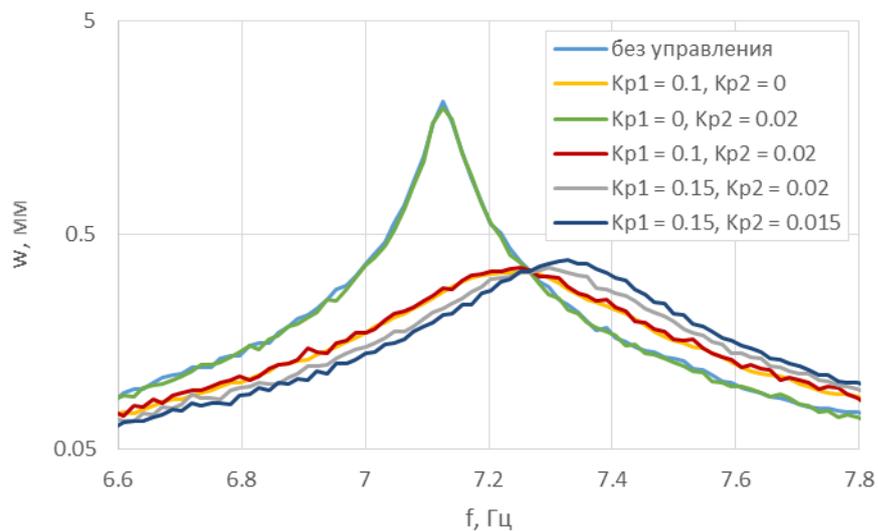


Рисунок 3.19. АЧХ балки при модальном управлении в области первого резонанса для разных значений коэффициентов усиления

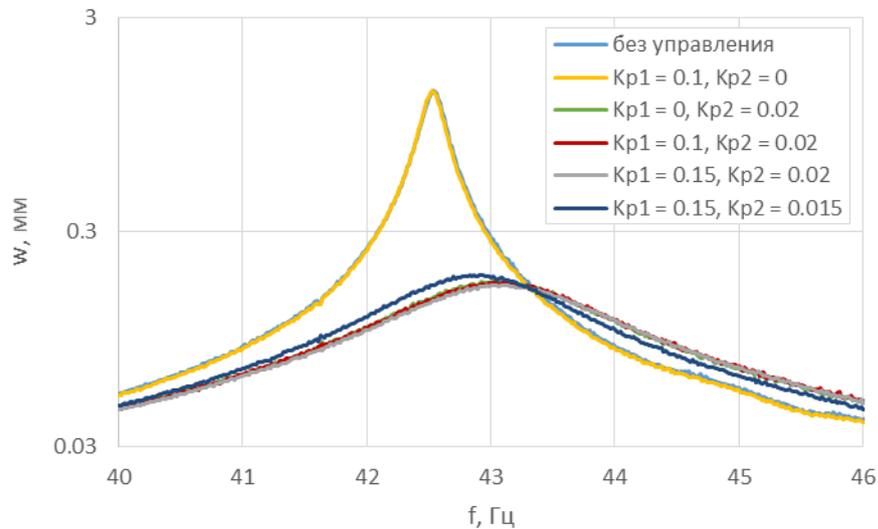


Рисунок 3.20. АЧХ балки при модальном управлении в области второго резонанса для разных значений коэффициентов усиления

Модальная система управления эффективно снижает амплитуду колебаний на обоих резонансах: снижение составляет 15.7 дБ на первом и 17.9 дБ – на втором (для значений коэффициентов усиления в контурах управления  $K_{p1} = 0.1$ ,  $K_{p2} = 0.02$ ). Как видно из Рисунков 3.19 и 3.20, включение в системе управления только одного из контуров приводит к изменениям АЧХ только на одном из резонансов – так и должно происходить вследствие разделения первой и второй форм в контурах управления за счет задания модальных матриц – синтезатора и анализатора форм.

Помимо измерения АЧХ системы, результат работы модальной системы управления проверялся также в резонансных режимах колебаний балки при воздействии на пьезотолкатель гармонического сигнала с первой или со второй собственными частотами. При этом так же, как и при снятии АЧХ, колебания точки на верхнем конце балки отслеживались с помощью вибрметра. Эксперимент проводился следующим образом: вначале возбуждение прикладывалось к балке без управления, затем в какой-то момент система управления включалась, что приводило к резкому снижению амплитуды колебаний балки. При этом в системе управления были заданы коэффициенты усиления  $K_{p1} = 0.1$  и  $K_{p2} = 0.02$ . Амплитуда внешнего воздействия на пьезостержень в первом и втором

резонансных режимах составляла соответственно 1 В и 0.3 В, а частота – соответственно 7.14 Гц и 42.7 Гц. Измеренная скорость колебаний точки на верхнем конце балки в зависимости от времени для обоих резонансных режимов приведена на Рисунке 3.21.

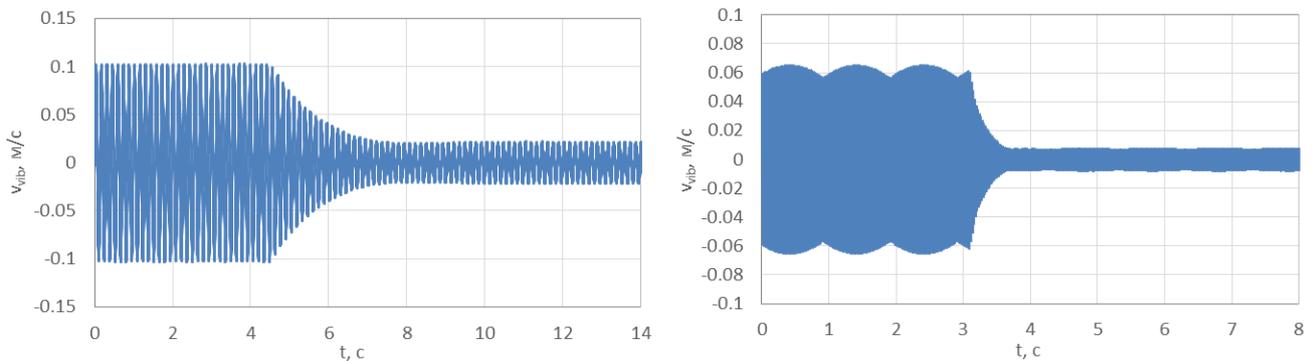


Рисунок 3.21. Уменьшение скорости колебаний конца балки при включении модальной системы управления в первом и во втором резонансных режимах

В результате включения системы управления скорость колебаний точки на верхнем конце балки снижается на 13.5 дБ в первом резонансном режиме и на 18.3 дБ – во втором. Данные цифры несколько отличаются от показателей используемой модальной системы при снятии АЧХ, данное различие невелико и объясняется некоторой нелинейностью системы, проявляющейся сильнее при больших амплитудах колебаний балки, поэтому данный эффект более заметен в первом резонансном режиме, где амплитуда колебаний значительно больше, чем во втором.

Обзор результатов работы локальных систем управления (СУ) с двумя контурами и модальной системы управления представлен в Таблице 3.2. Рассматриваются СУ с коэффициентами усиления, которые обеспечивают наибольшую эффективность подавления резонансных колебаний: для локальной системы №1 взяты коэффициенты  $K_{p1} = 0.45$ ,  $K_{p2} = 0.55$ , для локальной системы №2  $K_{p1} = K_{p2} = 0.055$ , а для модальной системы  $K_{p1} = 0.1$ ,  $K_{p2} = 0.02$ . Как и в Таблице 3.1, здесь для каждого варианта управления приведены характеристики управляющего сигнала в области первого и второго резонансов, а также показатели эффективности системы на данных резонансных частотах.  $|R(s)|$  – величина

усиления сигнала в цепи управления, а  $\Delta\varphi$  – сдвиг фазы управляющего сигнала вблизи резонанса, причем данная величина включает в себя как сдвиг фазы в самом контроллере, так и сдвиг фазы, возникающий при измерении сигнала сенсором вследствие натекания на его электроды заряда из измерительной цепи. Данные характеристики в случае локальной системы управления приведены для обоих контуров, а в случае модальной системы – только для одного соответствующего контура на каждом резонансе, поскольку, как было показано ранее, первый контур модальной системы не влияет на вторую форму колебаний балки, а второй контур – на первую. Величина  $\Delta A_{res}$  обозначает разницу между амплитудами резонансных колебаний точки на верхнем конце балки при включенной и отключенной системе управления. Величина  $\Delta f_{res}$  обозначает сдвиг резонансного пика в результате включения системы управления.

Таблица 3.2.

## Результаты работы систем управления с двумя контурами

СУ	1 резонанс				2 резонанс			
	$ R(s) $	$\Delta\varphi, ^\circ$	$\Delta A_{res}, \text{дБ}$	$\Delta f_{res}, \text{Гц}$	$ R(s) $	$\Delta\varphi, ^\circ$	$\Delta A_{res}, \text{дБ}$	$\Delta f_{res}, \text{Гц}$
Лок. №1	0.65	50	- 12.7	0.16	3.65	0.4	4.8	1.78
	0.8	50			4.47	1.7		
Лок. №2	0.065	60	- 5.2	0	0.56	76	- 18.9	0.72
	0.065	61			0.56	79		
Мод.	0.38	82	- 15.7	0.12	0.2	86	- 17.9	0.58

Анализируя результаты, представленные в Таблице 3.2, необходимо отметить, что наиболее эффективной на каждом из резонансов система управления является в тех случаях, когда фазовый сдвиг в цепи управления в области соответствующего резонанса приближается к  $90^\circ$ . На первом резонансе наилучшие результаты достигаются при использовании модальной системы управления – резонансная амплитуда снижается на 15.7 дБ. На втором резонансе наибольшую эффективность имеет локальная система с двумя контурами №2 (снижение

амплитуды на 18.9 дБ), однако результат модальной системы отличается ненамного (снижение на 17.9 дБ). Основным же отличием модальной системы управления от локальных является ее высокая эффективность одновременно на обоих резонансах, тогда как рассматриваемые локальные системы демонстрируют высокие результаты либо на первой, либо на второй резонансной частоте.

Отмеченная эффективность модального управления объясняется тем, что при модальном подходе каждый контур управления соответствует своей форме колебаний балки, и не связан с другой формой, при этом контуры слабо влияют друг на друга в частотном диапазоне, включающем две первых собственных частоты колебаний балки. В связи с этим упрощается задача дизайна передаточных функций для контуров управления: данные функции для каждого контура задаются таким образом, чтобы обеспечивать эффективную работу данного контура на соответствующей резонансной частоте. Таким образом, модальный подход к управлению оказывается предпочтительнее локального, если от системы управления требуется гасить резонансные колебания объекта не на одной собственной частоте, а в некотором частотном диапазоне, включающем несколько собственных частот объекта.

Итак, в данной главе:

- был отработан алгоритм синтеза передаточных функций на примере локальной системы управления с одним контуром, для таких систем получены законы управления, приводящие к эффективному снижению резонансных колебаний либо на первой, либо на второй собственной частоте изгибных колебаний балки;

- была решена задача синтеза законов управления для систем с двумя контурами, результаты полученных локальных и модальной системы сравнивались друг с другом. Были получены локальные системы, эффективно снижающие амплитуду резонансных колебаний либо на первом, либо на втором резонансе, полученная же модальная система оказалась эффективна сразу на обоих резонансах, значительно превзойдя результат локальных систем на первом

резонансе. По результатам сравнения созданных систем управления был сделан вывод о том, что модальный подход к управлению колебаниями распределенных систем эффективнее локального в случаях, когда необходимо уменьшить колебания системы сразу на нескольких резонансных частотах.

#### **Глава 4. Численное исследование локальных и модальных систем управления и различных вариантов моделирования пьезоэлементов**

Данная глава, как и предыдущие главы, посвящена исследованию и сравнению эффективности работы различных локальных и модальных систем управления в задаче о снижении вынужденных резонансных колебаний тонкой балки. Однако, в отличие от глав 2 и 3, здесь проводится не экспериментальное, а численное исследование, при этом рассматривается несколько другой объект – не упруго заземленная, а шарнирно-опертая балка. При этом вследствие изменения граничных условий изменяется и расположение на балке сенсоров и актуаторов, в то время как их число остается прежним: используется два сенсора и два актуатора. Численное моделирование задачи производится в вычислительном комплексе Matlab в разложении по собственным формам колебаний балки.

Первая часть главы посвящена изложению математической процедуры решения задачи о вынужденных колебаниях балки при наличии управления в разложении по собственным формам колебаний. Во второй части сравниваются результаты численного моделирования колебаний балки в разложении по собственным формам в пакете Matlab и конечно-элементного моделирования той же задачи в комплексе ANSYS, а также проверяется необходимость учета при моделировании изгибающего момента, создаваемого пьезосенсорами вследствие их деформации. Таким образом, осуществляется верификация используемой в численных расчетах модели исследуемого объекта. Далее с использованием изложенной процедуры численного решения задачи о колебаниях балки с управлением сравниваются различные варианты локальных и модальных систем управления и определяются наиболее эффективные из них.

Существенное отличие процедуры синтеза законов управления в данной главе от методики, использованной в главе 3, состоит в том, что здесь результаты управления для каждого варианта системы управления получаются не экспериментально, а численно, что значительно проще и быстрее. Таким образом, появляется возможность протестировать большое количество разных вариантов

законов управления и выбрать среди них оптимальный. Данная задача решается с помощью специально написанной программы на языке Matlab, которая подбирает оптимальный коэффициент усиления для каждого варианта закона управления и сравнивает результаты использования различных параметров фильтров, составляющих передаточную функцию того или иного контура управления. Это позволяет определить оптимальные параметры фильтров, обеспечивающие наиболее эффективную работу создаваемых систем управления.

В заключительной части главы исследуется влияние используемой при синтезе систем управления модели сенсоров и актуаторов на эффективность создаваемых систем. Дело в том, что для задачи синтеза систем управления для реального объекта необходимо проводить либо трудоемкую идентификацию объекта, включающую экспериментальное определение его амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик, либо создавать его численную модель, учитывающую как сам объект, так и все использованные в системе управления сенсоры и актуаторы. Поскольку данная процедура зачастую представляет собой сложную задачу, определенный интерес вызывает вопрос, можно ли при синтезе системы управления обойтись упрощенной моделью объекта, не учитывающей влияние используемых сенсоров и актуаторов на его динамику, и насколько данное упрощение повлияет на производительность полученной системы управления.

Аналогичное исследование было проведено в работе [29], где в качестве объекта управления была рассмотрена тонкая пластина, а в качестве элементов управления – пьезоэлектрические сенсоры и актуаторы. Задачей управления являлось воспроизведение нужной формы пластины в зависимости от времени (displacement tracking). Было установлено, что неучет влияния сенсоров и актуаторов на формы колебаний значительно влияет на результаты управления, таким образом, при синтезе системы управления важно учитывать в модели данные элементы. В разделе 4.4 ставится задача проверить указанные результаты для задачи гашения вынужденных колебаний шарнирно-опертой балки с помощью модального управления. Исследованию этого же вопроса посвящены работы [8, 54].

## 4.1. Алгоритм численного решения задачи о колебаниях шарнирно-опертой балки

### 4.1.1. Постановка задачи

В качестве объекта управления, амплитуду вынужденных колебаний которого необходимо снизить, рассматривается шарнирно-опертая алюминиевая балка длиной  $l = 1$  м с сечением  $3 \times 35$  мм. Система управления включает в себя две пары прямоугольных пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов, работа которых рассмотрена в разделе 1.4.2. Сенсоры и актуаторы полностью идентичны тем, что используются в эксперименте, изложенном в главах 2 и 3. Данные элементы расположены двумя парами сенсор-актуатор по обеим сторонам балки, как показано на Рисунке 4.1. Выбранная конфигурация элементов управления позволяет реализовать как локальное, так и модальное управление с двумя контурами. Обозначим координаты расположения на балке первой пары сенсор-актуатор как  $p_1 \leq x_1 \leq p_1 + l_p$ , а второй пары – как  $p_2 \leq x_2 \leq p_2 + l_p$ , где  $l_p$  – длина одного пьезоэлемента. Таким образом, описанная здесь модель отличается от модели, рассмотренной в эксперименте, только длиной балки (1 м вместо 70 см), условиями ее закрепления (шарнирно-опертая вместо упруго защемленной в точке), а также позициями на балке пар пьезоэлементов.

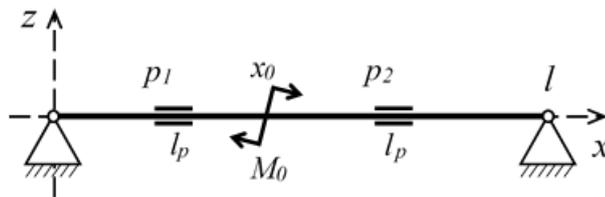


Рисунок 4.1. Модель шарнирно-опертой балки с пьезоэлементами

В роли внешнего возмущения выступает приложенный к балке в сечении  $x_0 = 0.4$  м изгибающий момент  $M_0 = 0.1$  Н·м. Задачей системы управления является снижение амплитуды вынужденных колебаний балки на первом и на втором резонансах, то есть при колебаниях балки по первой и по второй изгибным формам.

#### 4.1.2. Численное решение задачи о колебаниях балки с управлением

В данном исследовании задача о колебаниях балки при использовании различных систем управления решается численно в комплексе Matlab в разложении по собственным формам изгибных колебаний балки. Для этой цели в первую очередь вычисляются собственные формы и частоты изгибных колебаний балки. Они определяются тем же образом, что и собственные формы и частоты балки, упруго защемленной в промежуточном сечении, согласно алгоритму, изложенному в разделе 2.2.

Рассмотрим задачу об изгибных колебаниях балки с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при наличии управления. Пусть пьезоэлементы расположены попарно по обеим сторонам балки, и всего по длине балки имеется  $r$  пар сенсор-актуатор. Работа сенсоров и актуаторов рассмотрена в разделе 1.4.2 и описывается формулами (1.53), (1.56) и (1.57). Зависимость вектора управляющих напряжений  $V^a$  от вектора сигналов сенсоров  $V^s$  задается законом управления:

$$V^a = -G_{r \times r}(\omega)V^s. \quad (4.1)$$

Здесь  $G_{r \times r}(\omega)$  – матрица, состоящая из комплексных чисел, зависящих от частоты сигнала  $\omega$ .

Будем считать, что поперечное смещение балки  $w$  может быть представлено в разложении по формам изгибных колебаний  $w_k(x)$ , при этом ограничимся рассмотрением  $m$  низших форм:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^m w_k(x)q_k(t), \quad (4.2)$$

где  $q_k$  – обобщенные координаты, динамика каждой из которых описывается уравнением (1.1). В правой части данного уравнения стоит обобщенная сила  $Q_k$ , состоящая из двух слагаемых: внешнего воздействия на  $k$ -ю форму  $Q_k^d$  и управляющего воздействия на данную форму  $Q_k^c$ . В качестве внешнего воздействия к балке в сечении  $x_0$  приложен изгибающий момент  $M_0$ . Таким образом, обобщенные воздействия на  $k$ -ю форму колебаний балки зависят от приложенных

к балке внешнего момента  $M_0$ , управляющих моментов  $M^a$  и моментов, создаваемых сенсорами  $M^s$ :

$$Q_k^d = M_0 w'_k(x_0), \quad (4.3)$$

$$Q_k^c = \sum_{i=1}^r (M_i^a + M_i^s) \left( w'_k(x_i^{(2)}) - w'_k(x_i^{(1)}) \right), \quad (4.4)$$

где  $x_i^{(1)}$  и  $x_i^{(2)}$  – продольные координаты обоих концов  $i$ -ой пары сенсор-актуатор.

Перепишем уравнения (4.3) и (4.4) в матричном виде:

$$Q_{m \times 1}^d = \Theta_{m \times 1}^d M_0, \quad (4.5)$$

$$Q_{m \times 1}^c = \Theta_{m \times r}^c (M_{r \times 1}^a + M_{r \times 1}^s). \quad (4.6)$$

Здесь  $\Theta_{m \times 1}^d$  и  $\Theta_{m \times r}^c$  – весовые вектор и матрица, показывающие, насколько сильно на каждую из форм колебаний балки влияет внешнее воздействие и воздействие от каждой пары сенсор-актуатор:

$$\Theta_k^d = w'_k(x_0), \quad (4.7)$$

$$\Theta_{ki}^c = w'_k(x_i^{(2)}) - w'_k(x_i^{(1)}). \quad (4.8)$$

Поскольку в качестве результата моделирования колебаний балки с управлением необходимо получить амплитудно-частотные характеристики, будем рассматривать внешнее воздействие на балку в виде гармонической функции с некоторой частотой  $\omega$ :

$$M_0 = \bar{M}_0 e^{i\omega t}. \quad (4.9)$$

Здесь  $\bar{M}_0$  – модуль приложенного к балке внешнего момента.

Аналогичным образом перепишем векторы обобщенных координат и моментов от сенсоров и актуаторов:

$$q = \bar{q}^* e^{i\omega t}, \quad (4.10)$$

$$M^a + M^s = M^* = \bar{M}^* e^{i\omega t}. \quad (4.11)$$

Здесь  $\bar{q}^*$  и  $\bar{M}^*$  – векторы модулей обобщенных координат и моментов, создаваемых парами сенсор-актуатор, с учетом фазы (их фаза не совпадает с фазой внешнего воздействия  $M_0$ ). Таким образом, данные векторы состоят не из вещественных, а из комплексных величин.

С учетом (4.5), (4.6), (4.9), (4.10) и (4.11) уравнение (1.1) переписывается следующим образом:

$$\bar{q}_k^*(\Omega_k^2 - \omega^2 + 2i\xi_k\Omega_k\omega) = \Theta_k^d \bar{M}_0 + \sum_{i=1}^r \Theta_{ki}^c \bar{M}_i^*. \quad (4.12)$$

Введем диагональную комплексную матрицу  $H(\omega)$ :

$$H_{kk}(\omega) = \frac{1}{(\Omega_k^2 - \omega^2 + 2i\xi_k\Omega_k\omega)}. \quad (4.13)$$

Тогда вектор модулей обобщенных координат переписывается в следующем виде:

$$\bar{q}^* = H(\omega)(\Theta^d \bar{M}_0 + \Theta^c \bar{M}^*). \quad (4.14)$$

Рассмотрим моменты, создаваемые актуаторами и сенсорами  $M^a$  и  $M^s$ . Зависимость данных моментов от напряжения на электродах актуатора и сенсора задается формулами (1.56) и (1.57). Перепишем данные формулы, обозначив соответствующий коэффициент пропорциональности как  $k^a$ :

$$M^* = M^a + M^s = k^a(V^a - V^s). \quad (4.15)$$

С учетом закона управления (4.1) данное выражение примет вид:

$$M^* = -k^a(G_{r \times r}(\omega) + E_{r \times r})V^s, \quad (4.16)$$

где  $E_{r \times r}$  – единичная матрица размером  $r \times r$ . Сигнал  $i$ -го сенсора  $V_i^s$  зависит от деформации участка, к которому приклеен сенсор, в соответствии с формулой (1.53). Перепишем данную формулу, обозначив соответствующий коэффициент пропорциональности как  $k^s$ :

$$V_i^s = k^s \Delta \varphi_i = k^s \sum_{k=1}^m \left( w_k'(x_i^{(2)}) - w_k'(x_i^{(1)}) \right) q_k = k^s \sum_{k=1}^m \Theta_{ki}^c q_k. \quad (4.17)$$

Подставив (4.17) в (4.16), получим выражение в матричном виде:

$$M^* = -k^a k^s (G(\omega) + E_{r \times r}) \Theta^{c'} q = H^M(\omega) q. \quad (4.18)$$

В данной формуле введено следующее обозначение:

$$H^M(\omega) = -k^a k^s (G(\omega) + E_{r \times r}) \Theta^{c'}. \quad (4.19)$$

Соотношение для модулей обобщенных координат и моментов примет вид, аналогичный (4.18):

$$\bar{M}^* = H^M(\omega)\bar{q}^*. \quad (4.20)$$

Теперь, имея соотношения (4.14) и (4.20), несложно получить формулы для нахождения модулей моментов и обобщенных координат:

$$\bar{M}^* = (E_{r \times r} - H^M(\omega)H(\omega)\Theta^c)^{-1}H^M(\omega)H(\omega)\Theta^d\bar{M}_0, \quad (4.21)$$

$$\bar{q}^* = (E_{m \times m} - H(\omega)\Theta^cH^M(\omega))^{-1}H(\omega)\Theta^d\bar{M}_0. \quad (4.22)$$

Зная обобщенные координаты, можно вычислить поперечное смещение точек балки:

$$w = \sum_{k=1}^m w_k q_k = \sum_{k=1}^m w_k \bar{q}_k^* e^{i\omega t}. \quad (4.23)$$

Таким образом, задача о вынужденных изгибных колебаниях балки при наличии управления решена.

## 4.2. Сравнение различных моделей балки без управления

### 4.2.1. Исследование разных способов учета момента, создаваемого пьезосенсорами

В данном разделе рассматриваются различные варианты моделирования изгибающего момента, создаваемого пьезосенсорами. Величина данного момента описывается формулой (1.57). Возникновение данного момента зависит от граничных условий на электродах сенсора: в случае, если они закорочены и напряжение на них равно нулю, сенсор не создает изгибающий момент. В обратном случае, например, при работе системы управления, на сенсоре возникает напряжение и появляется рассматриваемый момент.

Момент, создаваемый пьезосенсором, является нелокальным, то есть его величина зависит не только от деформации балки в точке приложения момента, но и от кривизны балки по всей длине сенсора. Это усложняет задачу моделирования данного момента: при решении задачи о колебаниях балки в разложении по собственным формам методом, описанном в разделе 4.1.3, даже в отсутствие управления (управляющего момента, подаваемого на актуаторы), необходимо все равно моделировать обратную связь, так как присутствует нелокальный момент,

создаваемый сенсорами. Задача конечно-элементного моделирования системы также усложняется, поскольку для корректного учета рассматриваемого момента необходимо учитывать в модели пьезоэффект, задавая пьезоматериал сенсора вместе с покрывающими его электродами. Изучим, насколько существенен эффект от моделирования данного момента, и можно ли сделать это другим, более легким способом, не прибегая к моделированию пьезоэффекта.

Рассмотрим шарнирно-опертую балку с двумя парами пьезоэлементов, описанную в разделе 4.1.1. Пусть пьезоэлементы распределены по длине балки равномерно: координаты первой пары сенсор-актуатор  $308.5 \text{ мм} \leq x \leq 358.5 \text{ мм}$ , а второй  $641.5 \text{ мм} \leq x \leq 691.5 \text{ мм}$ . Проанализируем колебания балки как без учета момента, создаваемого сенсорами, так и с учетом данного момента, при этом будем учитывать его двумя разными способами: напрямую, в соответствии с алгоритмом, изложенном в разделе 4.1.3, и альтернативным способом, предполагающим модификацию изгибной жесткости участков балки с пьезоэлементами. Остановимся на последнем способе поподробнее.

Рассмотрим случай, когда моменты, создаваемые сенсорами, не учитываются в модели. В таком случае изгиб балки на участке, на котором закреплена пара сенсор-актуатор, описывается следующим уравнением, полученным из второго уравнения системы (1.26) при учете исключительно изгибной деформации:

$$M = -\bar{D}_p \varphi'. \quad (4.24)$$

Выражение для момента сенсора  $M^s$  получим из формулы (1.57), введя коэффициенты пропорциональности  $k^a$  и  $k^s$ , как это было сделано в предыдущем разделе:

$$M^s = -k^a V^s = -k^a k^s \Delta\varphi, \quad (4.25)$$

где  $\Delta\varphi$  – разность углов поворота сечений на концах сенсора. Будем считать, что кривизна балки постоянна по всей длине пьезосенсора и равна  $\varphi'$ , тогда уравнение (4.25) переписется следующим образом:

$$M^s = -k^a k^s l_p \varphi', \quad (4.26)$$

где  $l_p$  – длина одного пьезоэлемента. Теперь, принимая во внимание (4.26), в случае учета момента от пьезосенсоров уравнение (4.24) можно переписать в следующем виде:

$$M + M^s = -(\bar{D}_p + k^a k^s l_p) \varphi' = -\bar{D}_p^m \varphi'. \quad (4.27)$$

Таким образом, учет момента  $M^s$ , создаваемого пьезосенсорами, эквивалентен тому, что изгибная жесткость балки на соответствующих участках изменяется и принимает следующий вид:

$$\bar{D}_p^m = \bar{D}_p + \bar{D}^s, \quad (4.28)$$

$$\bar{D}^s = k^a k^s l_p, \quad (4.29)$$

где  $\bar{D}^s$  – дополнительная жесткость на изгиб участка балки, покрытого пьезоэлементами.

Заметим еще раз, что данные постановки эквивалентны в том случае, если кривизна балки  $\varphi'$  постоянна по всей длине участка балки с пьезоэлементами. Поскольку в реальной задаче это предположение выполняется не точно, эффект момента, создаваемого сенсорами, в реальности может быть ниже, чем это учтено в предложенной модели.

Значения изгибной жесткости участков балки с пьезоэлементами и без вместе с модифицированной жесткостью участков балки с пьезоэлементами для рассматриваемой задачи приведены в Таблице 4.1. Как видно из таблицы, пьезоэлементы значительно (более, чем вдвое) повышают изгибную жесткость участков балки, к которым они прикреплены, при этом учет момента, создаваемого сенсорами, влияет на жесткость достаточно слабо (разница составляет 3.5%).

Таблица 4.1.

Значения изгибной жесткости различных участков балки

	Изгибная жесткость $\bar{D}$ , Н·м <sup>2</sup>
Без пьезоэлементов, $\bar{D}_b$	5.51
С пьезоэлементами, $\bar{D}_p$	12.27
С пьезоэлементами (модиф.), $\bar{D}_p^m$	12.71

С использованием численного алгоритма, изложенного в разделах 4.1.2 и 4.1.3, были получены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) балки при возбуждении колебаний с помощью первого актуатора и измерении сигнала первого сенсора. Численная модель содержала 35 низших собственных форм изгибных колебаний балки, для каждой из форм был принят одинаковый коэффициент демпфирования, равный 0.01. Были рассмотрены различные варианты учета момента  $M^S$ , создаваемого сенсорами: без учета, с учетом напрямую или с учетом через модификацию изгибной жесткости участков балки с пьезоэлементами. Результаты на общем плане, а также вблизи первого и семнадцатого резонансов приведены на Рисунках 4.2 и 4.3.

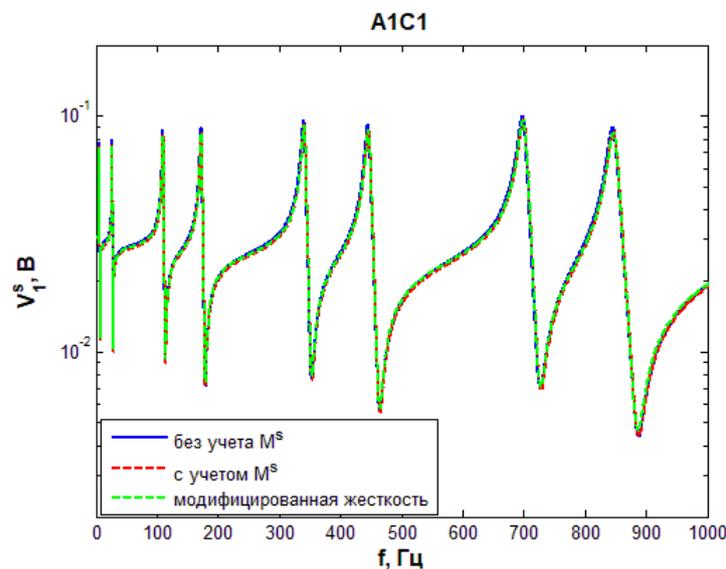


Рисунок 4.2. АЧХ 1-й актуатор – 1-й сенсор для разных вариантов моделирования момента сенсоров

Из Рисунка 4.2 видно, что для всех трех вариантов учета момента пьезосенсоров АЧХ очень похожи, основные отличия – на резонансных пиках. Высота резонансных пиков моделей, учитывающих момент, создаваемый сенсором, несколько ниже, а резонансные частоты – несколько выше, чем для модели, в которой данный момент не учитывается: это объясняется тем, что при увеличении жесткости объекта уменьшаются деформации и увеличиваются частоты колебаний. Рисунок 4.3 показывает, что модель с модифицированной жесткостью дает очень близкие результаты к модели, учитывающей момент

сенсоров напрямую: на первом резонансе отличие в высоте пиков составляет 0.5%, а на семнадцатом – около 1%. Такой результат объясняется тем, что чем выше номер резонанса, тем хуже выполняется предположение о постоянстве кривизны балки по длине пьезоэлемента, однако в целом оно выполняется с большой точностью. Модель, не учитывающая момент, создаваемый пьезосенсорами, также дает вполне удовлетворительный результат: на первом резонансе отличие в высоте пика, полученной с помощью данной модели, от результата полной модели составляет 5%, а на семнадцатом резонансе – 3%. Таким образом, с ростом номера резонанса модель с модифицированной жесткостью дает результаты, все более далекие от истины, а модель, никак не учитывающая момент сенсоров – результаты, все более близкие к истине. Однако первая из данных моделей предпочтительнее второй, поскольку ее результаты точнее.

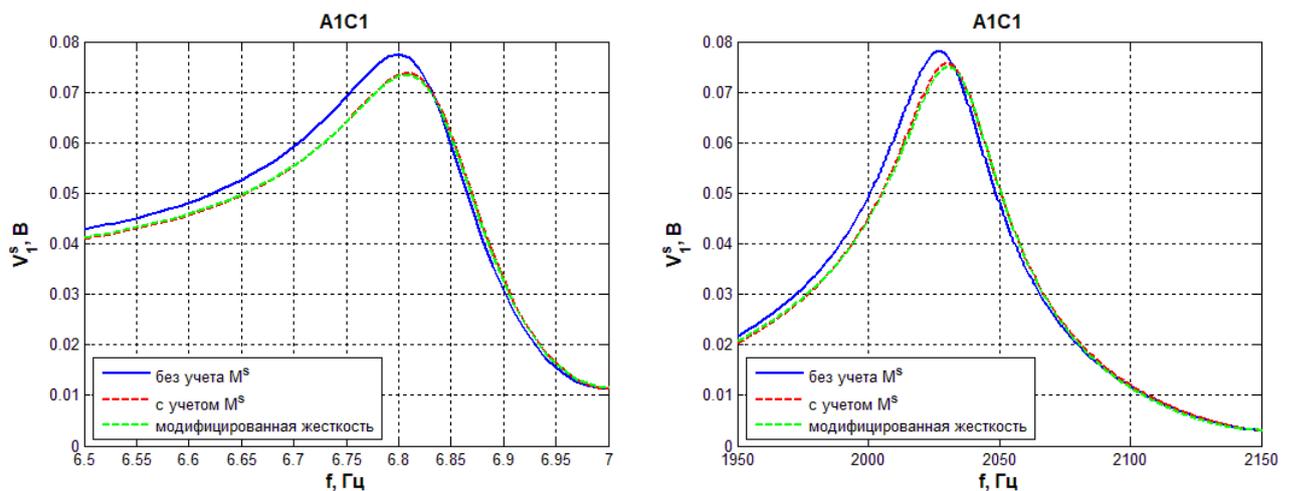


Рисунок 4.3. АЧХ 1-й актуатор – 1-й сенсор вблизи 1-го и 17-го резонансов для разных вариантов моделирования момента сенсоров

Графики АЧХ первый актуатор – второй сенсор, а также АЧХ внешний момент – сенсоры здесь не приводятся, поскольку для них результаты рассмотренных моделей соотносятся абсолютно аналогичным образом.

Итак, выполненное исследование показало, что при решении задачи о колебаниях балки допустимо использовать упрощенные модели, наилучшие результаты из которых дает модель с модифицированной жесткостью участков балки с пьезоэлементами.

#### 4.2.2. Сравнение моделей балки в ANSYS и Matlab

Цель данного раздела состоит в сравнении решения задачи о вынужденных колебаниях балки в разложении по собственным формам колебаний в пакете Matlab с решением, полученным методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Данное сравнение должно показать, насколько корректно рассматриваемая задача решается в разложении по формам колебаний, а также установить, сколько форм необходимо учитывать для точного решения задачи.

В рамках данного исследования конечно-элементная модель балки с пьезоэлементами, создаваемая в пакете ANSYS, выбиралась максимально упрощенной. Модель состоит из одномерных 3-узловых балочных элементов Beam189 с шестью степенями свободы в каждом узле (перемещения и повороты) с сечениями, изображенными на Рисунке 4.4 (показано сечение самой алюминиевой балки и сечение пьезоэлементов). Вид конечно-элементной модели балки сбоку и сверху для различных вариантов нагружения представлен на Рисунке 4.5. Всего модель включает 403 узла и 220 элементов. Как и в разделе 4.2.1, рассматривается балка с пьезоэлементами, распределенными по длине балки равномерно: координаты первой пары сенсор-актуатор  $308.5 \text{ мм} \leq x \leq 358.5 \text{ мм}$ , а второй  $641.5 \text{ мм} \leq x \leq 691.5 \text{ мм}$ .



Рисунок 4.4. Сечения балки и пьезоэлементов в КЭ-модели

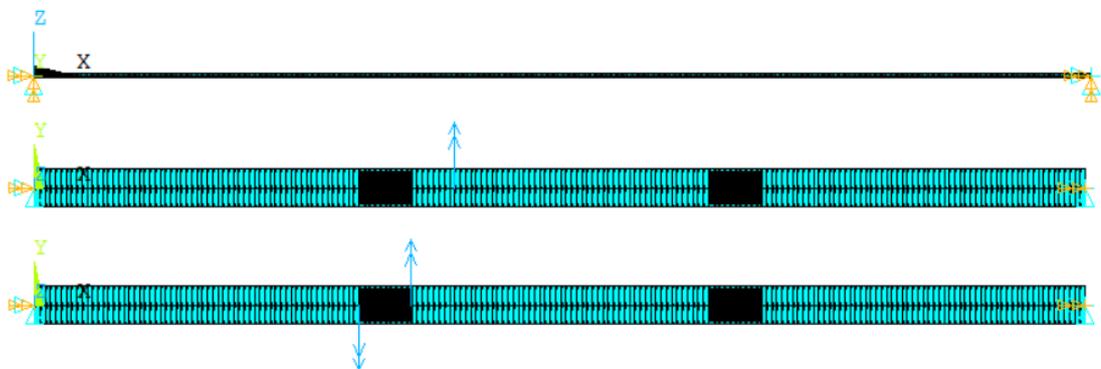


Рисунок 4.5. Вид КЭ-модели сбоку и сверху для разных вариантов нагружения

Для простоты пьезоэффект в данной задаче напрямую не моделируется: вместо задания напряжения на актуаторе к балке прикладывается пара моментов на концевых сечениях пьезоэлемента, а для получения сигнала сенсоров измеряются углы поворота этих же сечений и используется формула (1.53). Поскольку пьезоэффект не моделируется, момент, создаваемый сенсорами, учитывается не напрямую, а за счет модификации изгибной жесткости участков балки с пьезоэлементами в соответствии с подходом, изложенным в разделе 4.2.1. Для всех форм колебаний в КЭ-модели задается одинаковый коэффициент демпфирования, равный 0.01.

Рассматриваются постановки задачи о вынужденных колебаниях балки с двумя вариантами внешнего воздействия: либо это внешний изгибающий момент  $M_0 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , приложенный в сечении с координатой  $x_0 = 0.4 \text{ м}$ , либо это воздействие с помощью первого актуатора, прикладываемое в виде пары моментов  $M^a = \pm 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$  в сечениях  $x_1 = 308.5 \text{ мм}$  и  $x_2 = 358.5 \text{ мм}$ . На концах балки заданы граничные условия, соответствующие шарнирному закреплению: запрет всех перемещений и поворотов, кроме поворота относительно оси  $y$ . Граничные условия для обеих постановок задачи изображены на Рисунке 2.5. В комплексе ANSYS производится гармонический анализ в диапазоне частот от 1 Гц до 1 КГц.

Результаты КЭ-моделирования сравниваются с результатами численного моделирования в разложении по собственным формам колебаний в комплексе Matlab, произведенного в соответствии с методикой, изложенной в разделе 4.1. В численной модели момент, создаваемый пьезосенсорами, учитывается напрямую. Для каждой из форм, как и в КЭ-модели, задается коэффициент демпфирования, равный 0.01. При этом в численной модели учитывается различное количество форм изгибных колебаний (20 и 35).

Полученные результаты для различных вариантов возбуждения для конечно-элементной и численной моделей приведены на Рисунках 4.6 и 4.7. Представлены АЧХ, полученные измерением сигналов первого и второго сенсоров  $V_1^S$  и  $V_2^S$ .

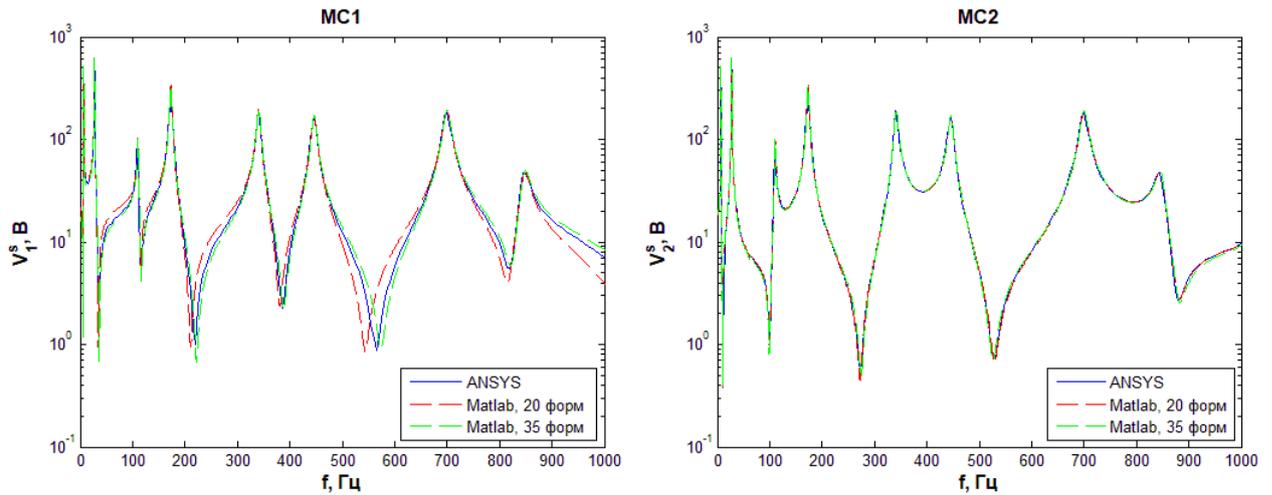


Рисунок 4.6. АЧХ внешний момент – сенсоры для различных моделей в ANSYS и Matlab

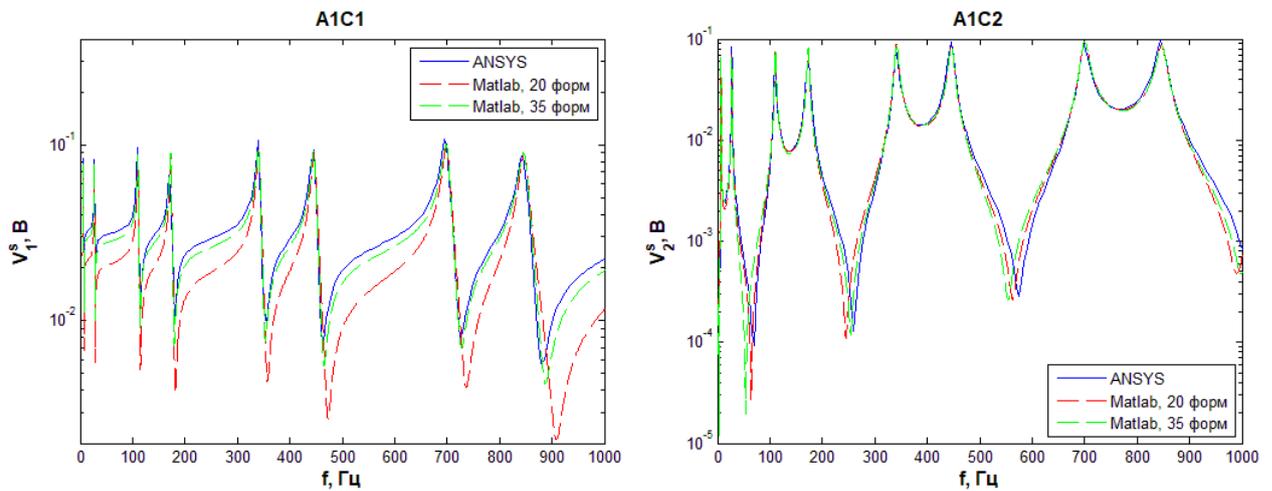


Рисунок 4.7. АЧХ 1-й актуатор – сенсоры для различных моделей в ANSYS и Matlab

Из представленных рисунков видно, что с большой точностью сходятся все результаты, кроме АЧХ первый актуатор – первый сенсор. На данном графике кривые близки друг к другу только на резонансных пиках, вдали же от них значения амплитуд сильно различаются. Дело в том, что именно на данном графике, где рассматриваются сенсор и актуатор, составляющие пару, АЧХ имеет вид, непохожий на АЧХ на других графиках: значения амплитуды сигнала вдали от резонансов достаточно высоки и близки к постоянному уровню, поскольку сенсор и актуатор, находящиеся в паре, сильно связаны между собой. Для точного моделирования данной связи необходимо учитывать как можно большее

количество форм колебаний: двадцати форм явно недостаточно, тогда как учет тридцати пяти форм уже дает достаточно точный результат. На остальных графиках удовлетворительный результат достигается даже при учете в численной модели двадцати форм.

Итак, в целом по представленным данным можно сделать вывод, что моделирование рассматриваемой задачи в разложении по собственным формам колебаний дает корректные результаты, при этом для большей точности моделирования лучше учитывать в численной модели не менее 35 форм, поэтому в дальнейших расчетах используется именно это число форм колебаний.

### **4.3. Исследование эффективности различных систем управления**

В данном разделе синтезируются и сравниваются между собой различные системы управления, снижающие вынужденные колебания шарнирно-опертой балки, рассматриваемой в данной главе. Целью систем управления является гашение вынужденных изгибных колебаний балки с первой и со второй собственными частотами. Постановка задачи приводится в разделе 4.1.1. В системе управления участвуют две пары сенсор-актуатор, их расположение совпадает с вариантом, рассмотренным в разделе 4.2, а именно: первая пара сенсор-актуатор занимает позицию  $308.5 \text{ мм} \leq x \leq 358.5 \text{ мм}$ , а вторая пара –  $641.5 \text{ мм} \leq x \leq 691.5 \text{ мм}$ .

Тестируемые системы управления различаются между собой принципом управления: используется либо локальный, либо модальный принцип. Схемы синтезируемых локальных и модальных систем управления совпадают с аналогичными схемами для управления упруго заземленной в промежуточном сечении балкой, приведенными на Рисунках 1.2 и 1.3. Для локальных систем необходимо задать только законы управления, определяемые передаточными функциями  $R_1(s)$  и  $R_2(s)$ . Для модальных систем помимо законов управления необходимо определить также матрицы  $T$  и  $F$  (анализатор и синтезатор форм),

отвечающие за разделение форм колебаний балки в модальных контурах управления.

Синтез передаточных функций в контурах управления осуществляется методом логарифмических амплитудных характеристик разомкнутой системы (метод ЛАХ), используемым в главе 3. Требования к передаточным функциям остаются теми же, что и в экспериментальном исследовании, изложенном в главе 3: во-первых, они не должны приводить к неустойчивости замкнутой системы, а во-вторых, они должны обеспечивать эффективное подавление вынужденных колебаний на первой и второй резонансных частотах изгибных колебаний балки. В целях соблюдения данных требований передаточная функция в каждом контуре управления конструируется из передаточных функций стандартных фильтров, перечисленных в разделе 3.1. В данном численном исследовании при проектировании законов управления используются два фильтра: во-первых, фильтр нижних частот первого порядка с параметром  $T = 0.0005$  с, моделирующий запаздывание в канале управления, неизбежно присутствующее в контуре обратной связи, а во-вторых – полосно-пропускающий фильтр, поднимающий фазу в рабочей частотной области вблизи резонанса, который необходимо сгладить. Параметры данного фильтра выбираются из условия наибольшей эффективности системы управления.

Для определения эффективности работы систем управления отслеживается параметр, отражающий интенсивность колебаний балки в установившемся режиме, получаемый в результате интегрирования поперечного смещения  $w(x, t)$  по всей длине балки:

$$E = \sqrt{\frac{1}{l} \int_0^l w^2(x, t) dl} \quad (4.30)$$

Для каждого из тестируемых вариантов систем управления строится амплитудно-частотная характеристика, показывающая зависимость модуля параметра  $E$  от частоты внешнего воздействия  $\omega$ . Данные АЧХ вблизи первого и второго резонансов сравниваются с аналогичной АЧХ, полученной для балки без

управления, и эффективность каждого варианта управления определяется по разнице в высоте резонансных пиков для системы с управлением и без.

1) Локальная система №1

Локальная система управления №1 настраивается таким образом, чтобы наиболее эффективно снижать амплитуду колебаний балки на первом резонансе. При этом для обоих контуров задается одинаковый закон управления:  $R_1^{(1)}(s) = R_2^{(1)}(s)$ . Помимо фильтра нижних частот используется полосно-пропускающий фильтр со следующими параметрами:  $f_1^* = 3.55$  Гц,  $f_2^* = 8.05$  Гц,  $\xi = 0.06$ ,  $\alpha = 4$ ).

Коэффициенты усиления:  $K_{p1} = K_{p2} = 3.05$ .

Передаточная функция:

$$R_1^{(1)}(s) = R_2^{(1)}(s) = \frac{3.1 \cdot 10^4 s^2 + 3.4 \cdot 10^5 s + 1.6 \cdot 10^7}{s^3 + 2006 s^2 + 1.5 \cdot 10^4 s + 5.1 \cdot 10^6}$$

Диаграмма Бode разомкнутой системы приведена на Рисунке 4.8, она одинакова для обоих контуров управления. Синяя линия на данном рисунке соответствует объекту управления, а красная – разомкнутой системе.

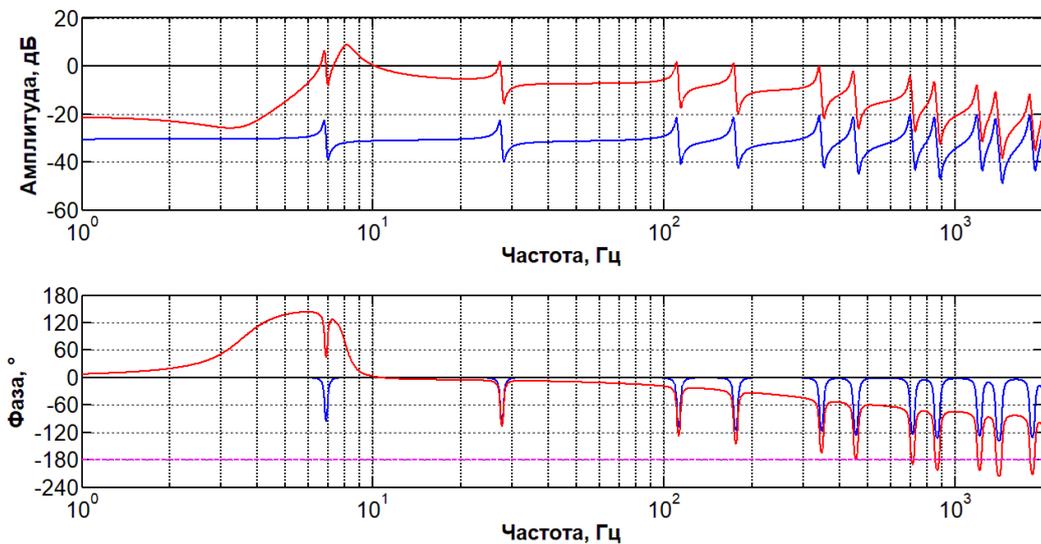


Рисунок 4.8. Диаграмма Бode разомкнутой системы для каждого контура локальной системы управления №1

Диаграмма Найквиста для обоих контуров локальной системы управления №1 (коэффициенты усиления  $K_{p1} = K_{p2} = 3.05$ ) на общем и приближенном плане

представлена на Рисунке 4.9. Годограф не охватывает точку  $(-1; 0)$ , поэтому данная система управления с двумя контурами не вызывает неустойчивости замкнутой системы.

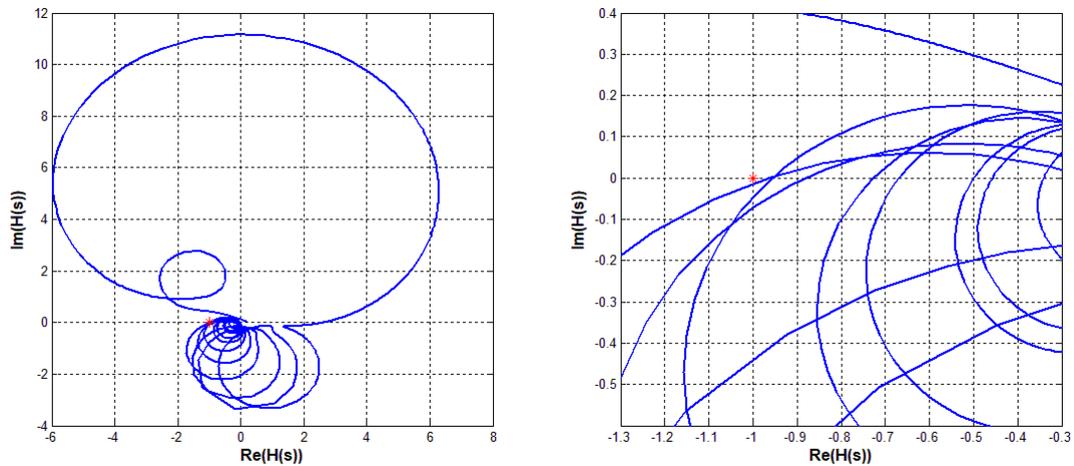


Рисунок 4.9. Диаграмма Найквиста для обоих контуров локальной системы управления №1 (общий вид и увеличенный фрагмент)

## 2) Локальная система №2

Локальная система управления №2 настраивается таким образом, чтобы наиболее эффективно снижать амплитуду колебаний балки на втором резонансе. При этом для обоих контуров задается одинаковый закон управления:  $R_1^{(2)}(s) = R_2^{(2)}(s)$ . Помимо фильтра нижних частот используется полосно-пропускающий фильтр со следующими параметрами:  $f_1^* = 15.5$  Гц,  $f_2^* = 32.4$  Гц,  $\xi = 0.0059$ ,  $\alpha = 87$ ).

Коэффициенты усиления:  $K_{p1} = K_{p2} = 3.14$ .

Передаточная функция:

$$R_1^{(2)}(s) = R_2^{(2)}(s) = \frac{2.7 \cdot 10^4 s^2 + 2.7 \cdot 10^6 s + 2.6 \cdot 10^8}{s^3 + 2002s^2 + 4.6 \cdot 10^4 s + 8.3 \cdot 10^7}$$

Диаграмма Бode разомкнутой системы приведена на Рисунке 4.10, она одинакова для обоих контуров управления. Синяя линия на данном рисунке соответствует объекту управления, а красная – разомкнутой системе.

Диаграмма Найквиста для обоих контуров локальной системы управления №2 (коэффициенты усиления  $K_{p1} = K_{p2} = 3.14$ ) на общем и приближенном плане

представлена на Рисунке 4.11. Годограф не охватывает точку  $(-1; 0)$ , поэтому данная система управления с двумя контурами не вызывает неустойчивости замкнутой системы.

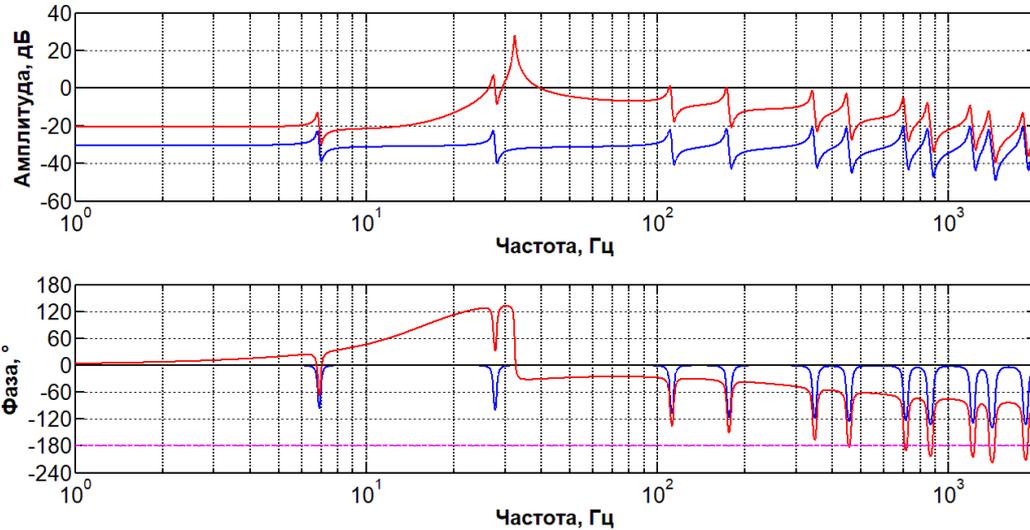


Рисунок 4.10. Диаграмма Бode разомкнутой системы для каждого контура локальной системы управления №2

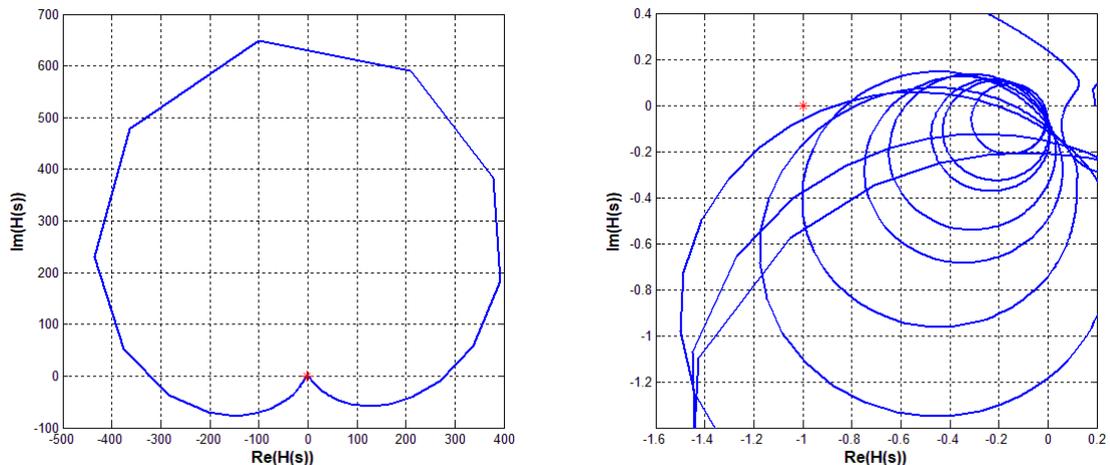


Рисунок 4.11. Диаграмма Найквиста для обоих контуров локальной системы управления №2 (общий вид и увеличенный фрагмент)

### 3) Локальная система №3

В локальной системе управления №3 первый контур настраивается таким образом, чтобы наиболее эффективно снижать амплитуду колебаний балки на втором резонансе, а второй – на первом резонансе. В первом контуре кроме

фильтра нижних частот используется полосно-пропускающий фильтр со следующими параметрами:  $f_1^* = 11.5$  Гц,  $f_2^* = 32.4$  Гц,  $\xi = 0.0039$ ,  $\alpha = 118$ ).

Коэффициент усиления:  $K_{p1} = 1.82$ .

Передаточная функция:

$$R_1^{(3)}(s) = \frac{2.9 \cdot 10^4 s^2 + 1.9 \cdot 10^6 s + 1.5 \cdot 10^8}{s^3 + 2002s^2 + 4.5 \cdot 10^4 s + 8.3 \cdot 10^7}$$

Во втором контуре кроме фильтра нижних частот используется полосно-пропускающий фильтр со следующими параметрами:  $f_1^* = 2.6$  Гц,  $f_2^* = 8.1$  Гц,  $\xi = 0.04$ ,  $\alpha = 6$ ).

Коэффициент усиления:  $K_{p2} = 1.64$ .

Передаточная функция:

$$R_2^{(3)}(s) = \frac{3.2 \cdot 10^4 s^2 + 2.5 \cdot 10^5 s + 8.5 \cdot 10^8}{s^3 + 2004s^2 + 1.1 \cdot 10^4 s + 5.2 \cdot 10^6}$$

Диаграммы Бode разомкнутой системы для обоих контуров управления приведены на Рисунках 4.12 и 4.13. Синяя линия на данных рисунках соответствует объекту управления, а красная – разомкнутой системе.

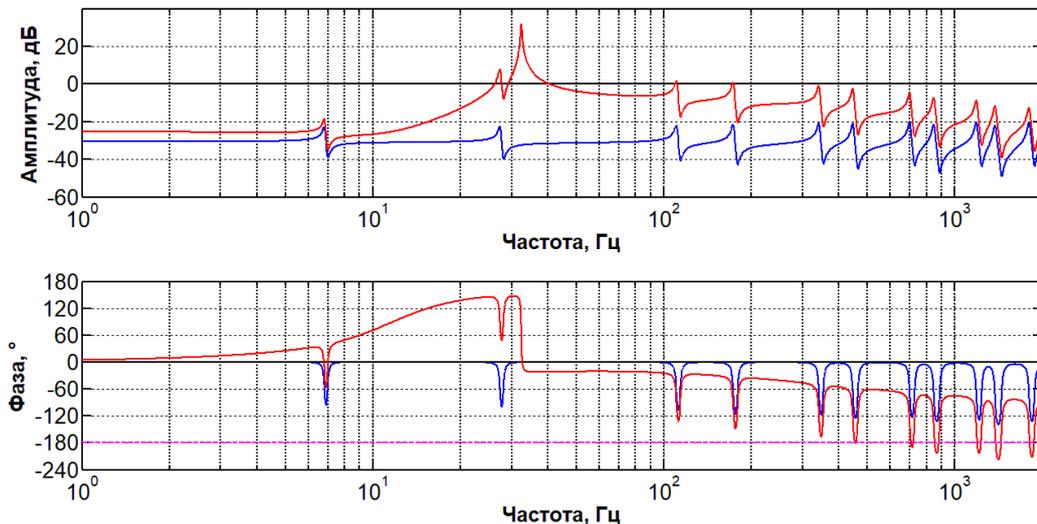


Рисунок 4.12. Диаграмма Бode разомкнутой системы для первого контура локальной системы управления №3

Диаграмма Найквиста для обоих контуров локальной системы управления №2 (коэффициенты усиления  $K_{p1} = 1.82$ ,  $K_{p2} = 1.64$ ) на общем и приближенном

плане представлена на Рисунке 4.14. Годограф не охватывает точку  $(-1; 0)$ , поэтому данная система управления с двумя контурами не вызывает неустойчивости замкнутой системы.

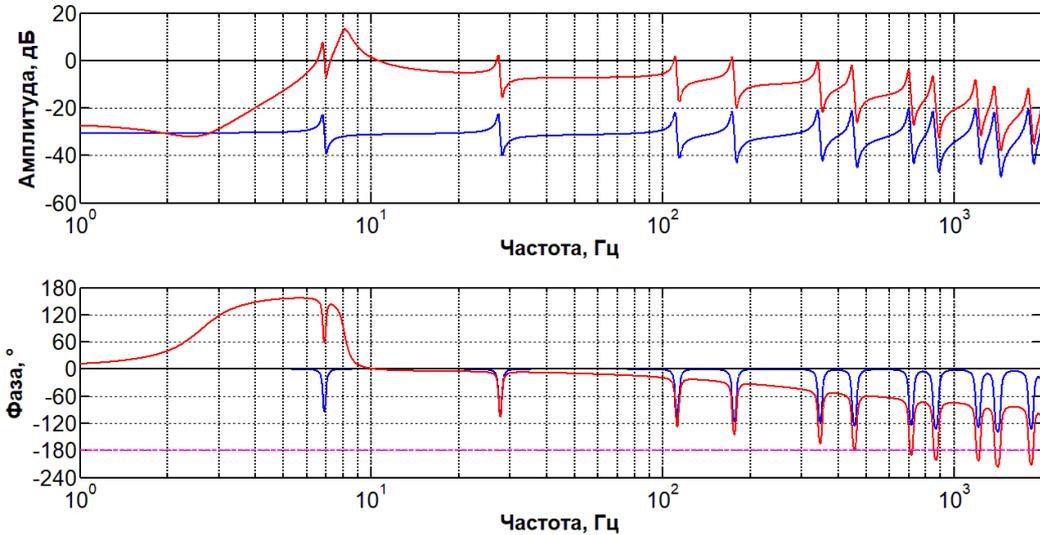


Рисунок 4.13. Диаграмма Бode разомкнутой системы для второго контура локальной системы управления №3

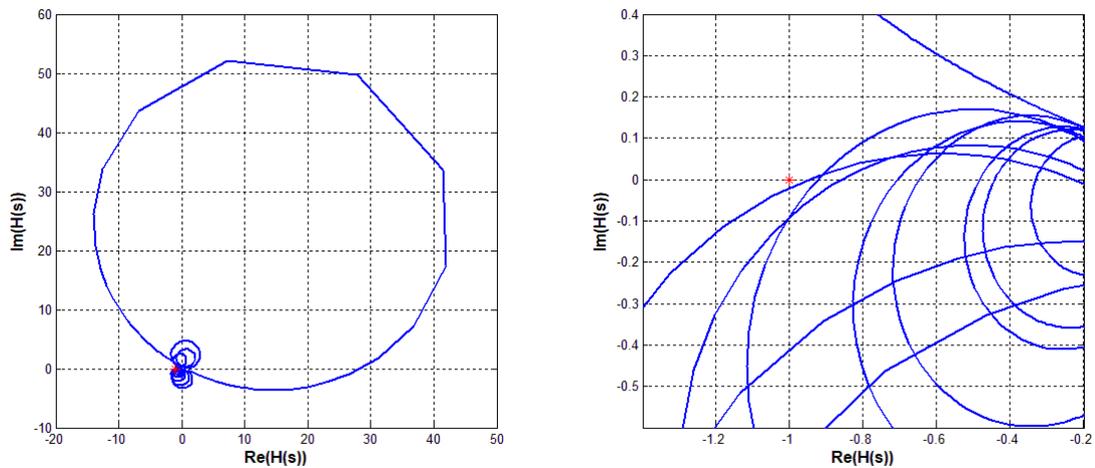


Рисунок 4.14. Диаграмма Найквиста для обоих контуров локальной системы управления №3 (общий вид и увеличенный фрагмент)

#### 4) Модальная система №1

Модальная система управления включает в себя два контура, каждый из которых соответствует своей форме изгибных колебаний балки: первый контур – первой форме, а второй – второй. Такое разделение функций контуров управления достигается благодаря определенному выбору модальных матриц  $T$  и  $F$

(анализатора и синтезатора форм). В рассматриваемой системе данные матрицы задаются равенствами (1.8), где элементы весовой матрицы  $\Theta^s$  и матрицы коэффициентов влияния  $\Theta^a$  соответствуют элементам матрицы  $\Theta^c$ , найденным из известных форм колебаний в соответствии с формулой (4.8). Полученные таким образом модальные матрицы имеют следующий вид:

$$T = 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} 6.90 & 6.90 \\ -1.68 & 1.68 \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

$$F = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1.48 & -0.36 \\ 1.48 & 0.36 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

В первом контуре кроме фильтра нижних частот используется полосно-пропускающий фильтр со следующими параметрами:  $f_1^* = 2.8$  Гц,  $f_2^* = 8.3$  Гц,  $\xi = 0.03$ ,  $\alpha = 18$ ).

Коэффициент усиления:  $K_{p1} = 8.45$ .

Передаточная функция:

$$R_1^{(4)}(s) = \frac{1.5 \cdot 10^5 s^2 + 2.8 \cdot 10^6 s + 4.6 \cdot 10^7}{s^3 + 2003s^2 + 8978s + 5.4 \cdot 10^6}.$$

Во втором контуре кроме фильтра нижних частот используется полосно-пропускающий фильтр со следующими параметрами:  $f_1^* = 14.1$  Гц,  $f_2^* = 32.9$  Гц,  $\xi = 0.0088$ ,  $\alpha = 60$ ).

Коэффициент усиления:  $K_{p2} = 230$ .

Передаточная функция:

$$R_2^{(4)}(s) = \frac{2.5 \cdot 10^6 s^2 + 2.3 \cdot 10^8 s + 2 \cdot 10^{10}}{s^3 + 2004s^2 + 5 \cdot 10^4 s + 8.5 \cdot 10^7}.$$

Диаграммы Боде разомкнутой системы для обоих контуров управления приведены на Рисунках 4.15 и 4.16. Синяя линия на данных рисунках соответствует объекту управления, а красная – разомкнутой системе.

Диаграмма Найквиста для обоих контуров модальной системы управления №1 (коэффициенты усиления  $K_{p1} = 8.45$ ,  $K_{p2} = 230$ ) на общем и приближенном плане представлена на Рисунке 4.17. Годограф не охватывает точку  $(-1; 0)$ , поэтому данная система управления с двумя контурами не вызывает неустойчивости замкнутой системы.

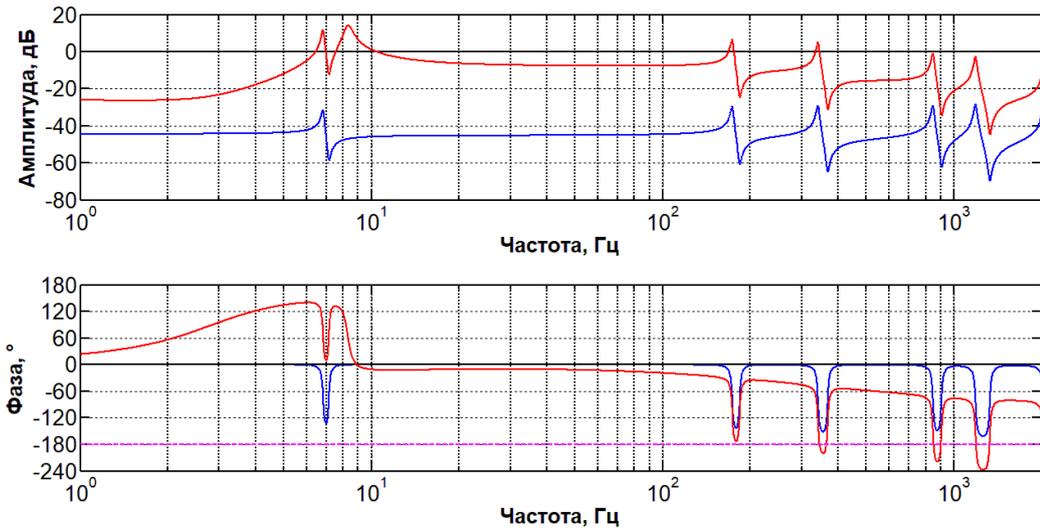


Рисунок 4.15. Диаграмма Бode разомкнутой системы для первого контура модальной системы управления №1

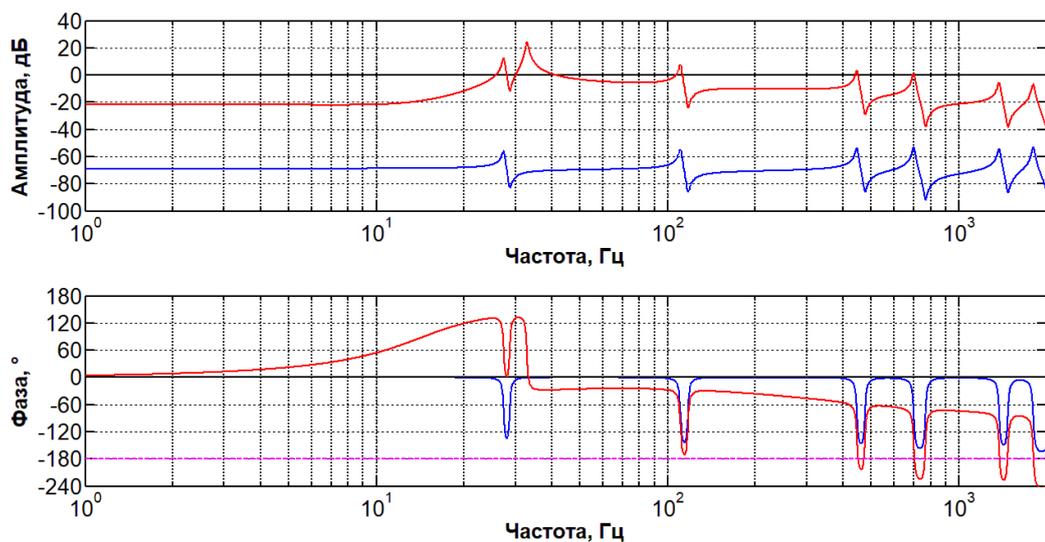


Рисунок 4.16. Диаграмма Бode разомкнутой системы для второго контура модальной системы управления №1

Результаты работы всех рассмотренных систем представлены на Рисунках 4.18 и 4.19, а также в Таблице 4.2. На рисунках приведены амплитудно-частотные характеристики для величины  $E$ , характеризующей интенсивность колебаний и определяемой по формуле (4.30), вблизи первого и второго резонансов. Кривые, полученные для разных вариантов управления (цветные линии), сравниваются с кривыми, соответствующими системе без управления (черные линии).

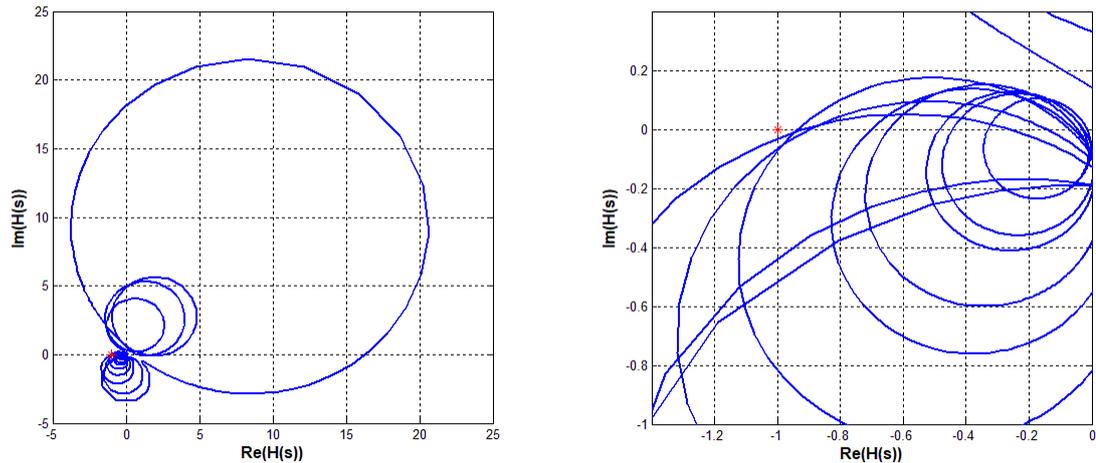


Рисунок 4.17. Диаграмма Найквиста для обоих контуров модальной системы управления №1 (общий вид и увеличенный фрагмент)

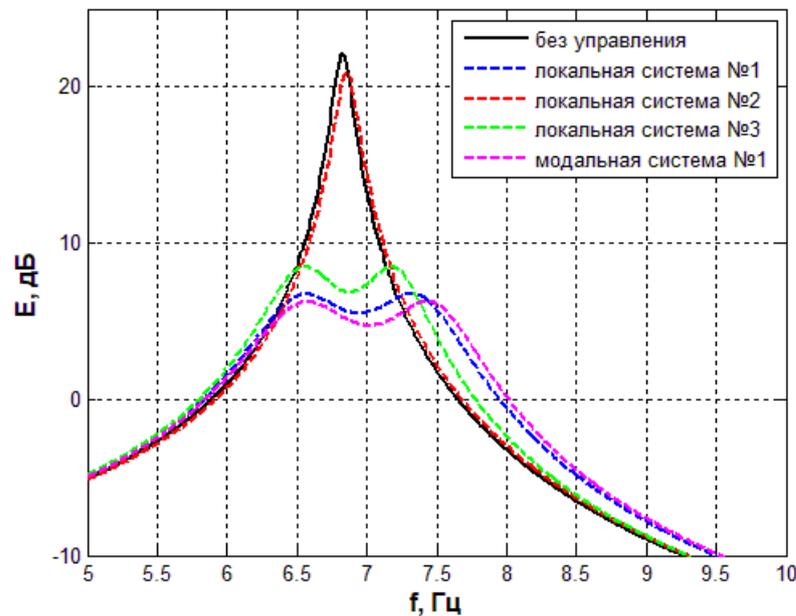


Рисунок 4.18. АЧХ балки с управлением и без для разных систем управления вблизи 1-го резонанса

В Таблице 4.2 для каждого варианта управления приведены характеристики управляющего сигнала в области первого и второго резонансов, а также показатели эффективности системы на данных резонансных частотах.  $|R(s)|$  и  $\Delta\varphi$  – величины усиления сигнала в цепи управления и сдвига фазы управляющего сигнала вблизи резонанса. Данные характеристики в случае локальной системы управления №3 приведены для обоих контуров, а для локальных систем №1 и №2 – только для

одного контура, так как для обоих контуров данные величины совпадают. В случае модальной системы для первого резонанса приведены результаты первого контура, а для второго резонанса – второго контура. Величины  $\Delta\bar{E}_1$  и  $\Delta\bar{E}_2$  показывают разницу между амплитудами интенсивности колебаний  $E$  с управлением и без на первом и втором резонансах. В случаях, когда в результате управления вблизи одного исходного резонанса появляется два резонансных пика, амплитуда  $\bar{E}$  определяется по наиболее высокому из них.

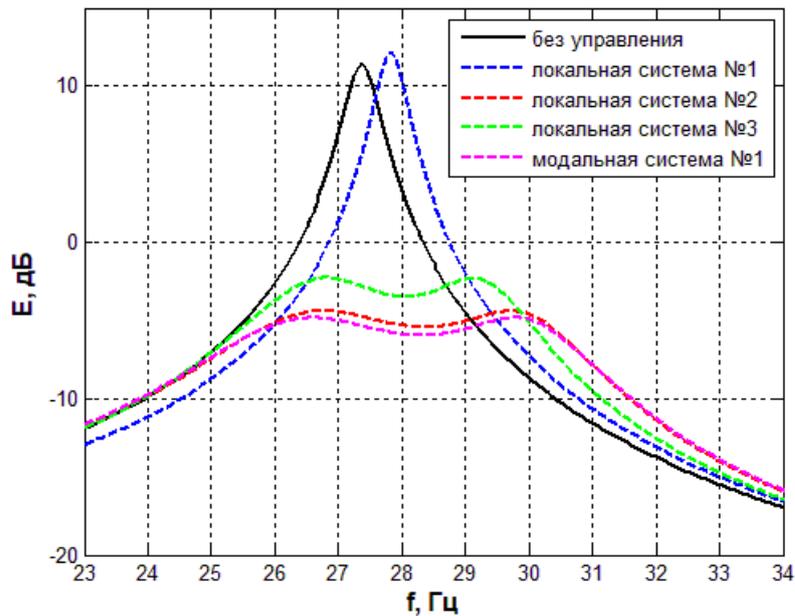


Рисунок 4.19. АЧХ балки с управлением и без для разных систем управления вблизи 2-го резонанса

Таблица 4.2.

Результаты работы различных систем управления

СУ	1 резонанс			2 резонанс		
	$ R(s) $	$\Delta\varphi, ^\circ$	$\Delta\bar{E}_1, \text{дБ}$	$ R(s) $	$\Delta\varphi, ^\circ$	$\Delta\bar{E}_2, \text{дБ}$
Лок. №1	28.6	140	- 15.4	16.8	-6.3	0.8
Лок. №2	3.04	27.8	- 1.2	29.9	132	- 15.8
Лок. №3	1.61	38.7	- 13.6	32	149	- 13.6
	32.7	154		17.2	-6.05	
Мод. №1	144	142	- 15.9	2547	136	- 16.2

Из приведенных рисунков и таблицы видно, что наилучшее подавление резонансных колебаний балки как на первом, так и на втором резонансе достигается в случае использования модального управления (снижение резонансной амплитуды составляет соответственно 15.9 и 16.2 дБ). Очень близкие к данным показателям результаты демонстрируют также локальные системы управления №1 и №2 (снижение соответственно 15.4 и 15.8 дБ), однако они работают либо только на первом (локальная система №1), либо только на втором (локальная система №2) резонансе. Локальная система №3 удовлетворительно работает на обоих резонансах (снижение обеих резонансных амплитуд на 13.6 дБ), однако ее эффективность ниже, чем у модальной системы. Этот результат объясняется тем, что в локальной системе №3 на каждом из резонансов работает одна определенная пара сенсор-актуатор, тогда как в модальной системе за счет использования в каждом контуре управления всех имеющихся сенсоров и актуаторов на каждом резонансе работают оба сенсора и оба актуатора. Таким образом, за счет своей структуры, позволяющей настроить на работу на каждом из резонансов все имеющиеся сенсоры и актуаторы, модальная система управления оказывается эффективнее локальных в задаче подавления вынужденных резонансных колебаний балки. Данный результат, полученный путем численного моделирования, полностью согласуется с экспериментальным результатом, полученным в разделе 3.4.

Анализируя представленные в таблице значения сдвига фазы управляющего сигнала вблизи резонансных частот  $\Delta\varphi$ , необходимо отметить, что наибольшая эффективность управления достигается при значениях сдвига фазы в пределах  $130^\circ$  –  $155^\circ$ . Данный результат является нетривиальным, поскольку в экспериментальных исследованиях в главе 3 при синтезе законов управления принималось, что сдвиг фазы сигнала для максимальной эффективности управления должен устанавливаться в районе  $90^\circ$ , что подтверждалось теоретическими выкладками, приведенными в разделе 1.3.1. Очевидно, полученный результат объясняется тем, что не выполняются предположения, принятые в указанном разделе первой главы: во-первых, объект управления имеет

не одну, а множество степеней свободы, а во-вторых, модуль передаточной функции контроллера вблизи резонансной частоты не является константой, а достаточно быстро растет с ростом частоты.

#### **4.4. Влияние модели пьезоэлементов на эффективность системы управления**

Присоединение к объекту управления сенсоров и актуаторов влияет на собственные частоты и формы колебаний объекта. Цель данного раздела – изучить, насколько модель работы сенсоров и актуаторов, используемая при синтезе систем управления, влияет на результаты использования данных систем. Вопрос состоит в том, возможно ли создать эффективную систему управления, если не учитывать в модели объекта изменений, вызванных прикреплением сенсоров и актуаторов. В данном разделе результаты, полученные в ранее в рамках данной главы, соответствующие использованию полной модели пьезоэлементов, сравниваются с результатами применения системы управления, синтезируемой на основании упрощенной модели работы данных элементов.

Упрощенная модель пьезоэлементов имеет несколько отличий от полной модели. Во-первых, в ней не учитывается влияние сенсоров и актуаторов на динамику объекта, то есть в расчетах используются формы и частоты шарнирно-опертой балки без пьезоэлементов. Во-вторых, в данной модели не учитывается размер пьезоэлементов, а именно: при вычислении сигнала сенсоров принимается допущение, что кривизна балки по всей длине сенсора одинаковая, и вместо измерения разности углов поворота концевых сечений сенсор измеряет кривизну балки в сечении, соответствующем середине сенсора. Аналогичным образом считается, что актуатор совершает работу не на повороте концевых сечений, а на изгибной деформации сечения, соответствующего середине актуатора. Кроме того, в упрощенной модели мы пренебрегаем изгибающим моментом, создаваемым пьезосенсорами, и учитываем только момент от актуаторов.

При использовании полной модели пьезоэлементов управляющее воздействие на различные формы колебаний балки задается уравнением (4.4), а сигналы сенсоров определяются формулой (4.17). В случае использования упрощенной модели данные уравнения переписываются следующим образом:

$$Q_k^c = l_p \sum_{i=1}^r M_i^a \hat{w}_k'' \left( \frac{x_i^{(1)} + x_i^{(2)}}{2} \right), \quad (4.33)$$

$$V_i^s = k^s l_p \sum_{k=1}^m \hat{w}_k'' \left( \frac{x_i^{(1)} + x_i^{(2)}}{2} \right) q_k. \quad (4.34)$$

Здесь  $l_p$  – длина одного пьезоэлемента (сенсора или актуатора), а  $\hat{w}_k''$  – кривизна  $k$ -й собственной формы колебаний балки, полученной для шарнирно-опертой балки без учета прикрепленных сенсоров и актуаторов. Данные формы колебаний при рассматриваемом варианте закрепления балки имеют вид гармонических функций:

$$\hat{w}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho b h l}} \sin \frac{k \pi x}{l}, \quad (4.35)$$

где  $l$ ,  $b$  и  $h$  – длина, ширина и толщина балки,  $\rho$  – плотность материала балки.

В данном исследовании рассматривается та же балка, что и ранее в данной главе, с тем же расположением двух пар сенсор-актуатор ( $308.5 \text{ мм} \leq x_1 \leq 358.5 \text{ мм}$ ,  $641.5 \text{ мм} \leq x_2 \leq 691.5 \text{ мм}$ ).

Для проектирования систем управления необходимо получить амплитудно-и фазочастотные характеристики объекта управления при воздействии на актуаторы и измерении сигналов сенсоров. На Рисунке 4.20 сравниваются АЧХ, соответствующие первому актуатору и первому сенсору, для случаев использования полной и упрощенной моделей пьезоэлементов.

Из рисунка видно, что по амплитуде рассматриваемые АЧХ сильно отличаются друг от друга: кривая, соответствующая упрощенной модели пьезоэлементов, проходит значительно выше кривой, соответствующей полной модели (разница составляет около 3.5 – 4 раза). Такое отличие обусловлено тем, что в упрощенной модели используются собственные формы колебаний балки без пьезоэлементов. Как указано в Таблице 4.1, пьезоэлементы примерно вдвое

увеличивают изгибную жесткость тех участков балки, к которым они приклеены, таким образом, кривизна форм колебаний на этих участках падает приблизительно в два раза. Если не учитывать этот эффект, то сенсоры будут в два раза сильнее реагировать на активизацию каждой собственной формы, а актуаторы – в два раза сильнее возбуждать данные формы, таким образом, все амплитудно-частотные характеристики вырастут примерно в четыре раза, что и наблюдается на рисунке.

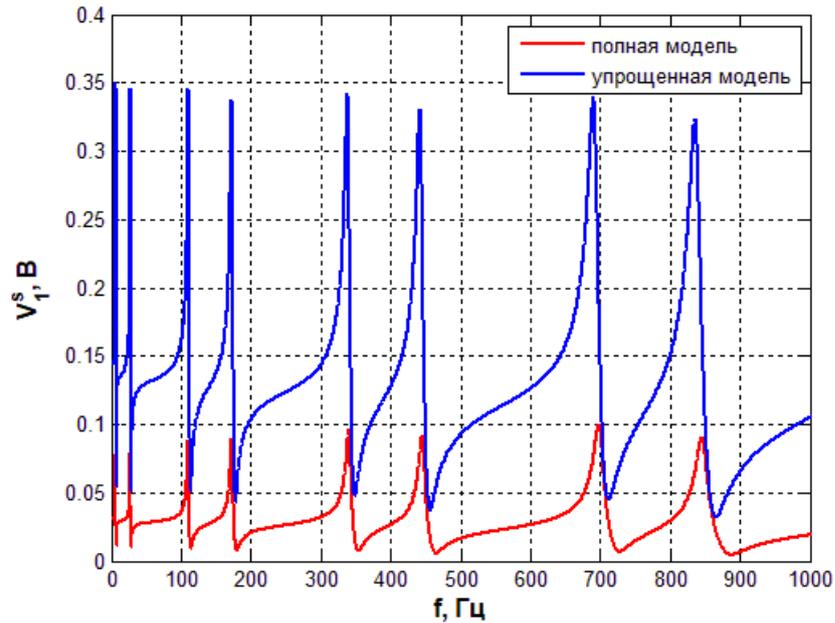


Рисунок 4.20. АЧХ 1-й актуатор – 1-й сенсор для полной и упрощенной моделей пьезоэлементов

В случае использования упрощенной модели пьезоэлементов анализатор и синтезатор форм принимают следующий вид:

$$T = 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} 3.22 & 3.22 \\ -0.81 & 0.81 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

$$F = \begin{bmatrix} 692 & -173 \\ 692 & 173 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Приведенные значения модальных матриц отличаются от матриц (4.31) и (4.32), полученных для случая полной модели пьезоэлементов. Значения новых матриц примерно в два раза ниже, чем значения полученных ранее. Это объясняется тем, что модальные матрицы получаются в результате обращения матрицы коэффициентов влияния и весовой матрицы в соответствии с равенствами

(1.8), а данные матрицы для упрощенной модели пьезоэлементов приблизительно вдвое превосходят аналогичные для полной модели. Указанное различие, как и рассмотренное ранее различие в АЧХ объекта, обусловлено использованием в упрощенной модели собственных форм балки без пьезоэлементов.

Для проектирования систем управления необходимо из снятых передаточных функций объекта с использованием модальных матриц получить передаточные функции, соответствующие различным модальным контурам управления, в соответствии с формулой (2.38). На Рисунке 4.21 сравниваются АЧХ, соответствующие первому контуру модальной системы управления, для случаев использования полной и упрощенной моделей пьезоэлементов. Отдельно показан участок АЧХ вблизи первого резонанса.

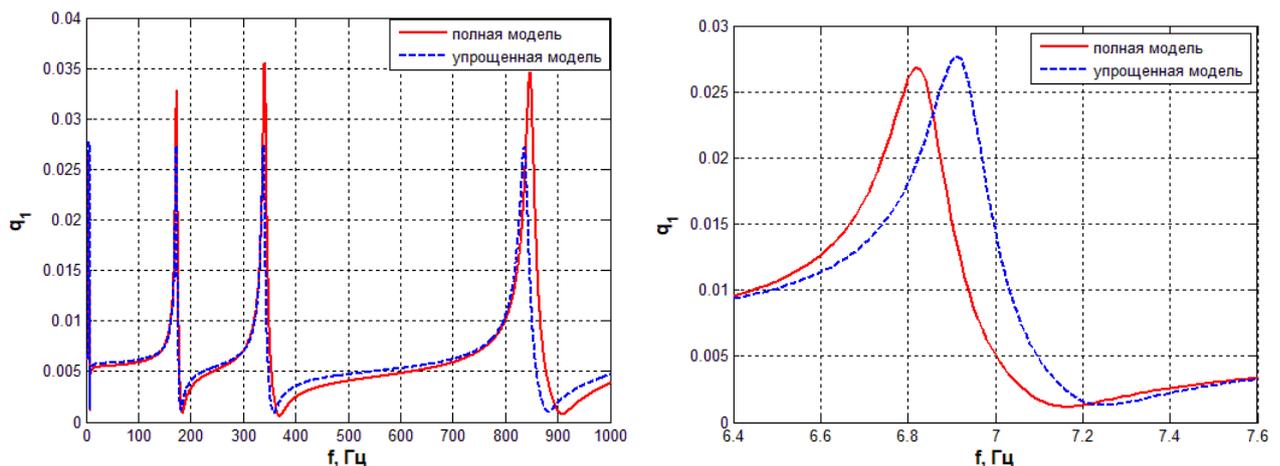


Рисунок 4.21. АЧХ, соответствующая 1-му контуру модальной системы, для полной и упрощенной моделей пьезоэлементов

Видно, что отличия в рассматриваемых АЧХ для полной и упрощенной моделей пьезоэлементов невелики, однако все же заметны. Отличаются как резонансные частоты, так и амплитуды. Поэтому законы управления, синтезируемые на основе данных АЧХ, будут различными для случаев использования различных моделей пьезоэлементов.

На основе модальных АЧХ, полученных при использовании упрощенной модели работы пьезоэлементов, синтезируется модальная система управления №2. Законы управления задаются таким образом, чтобы эффективность данной

системы на первом и втором резонансах была максимальной, при этом данная эффективность определяется не на реальном объекте, а на модели объекта, использующей упрощенную модель работы сенсоров и актуаторов. Как и ранее, во всех передаточных функциях присутствует фильтр нижних частот с параметром  $T = 0.0005$  с, моделирующий запаздывание в канале управления. Далее приведены характеристики полученной системы управления.

В первом контуре модальной системы управления №2 кроме фильтра нижних частот используется полосно-пропускающий фильтр со следующими параметрами:  $f_1^* = 2.8$  Гц,  $f_2^* = 9.2$  Гц,  $\xi = 0.03$ ,  $\alpha = 18$ ).

Коэффициент усиления:  $K_{p1} = 12.06$ .

Передаточная функция:

$$R_1^{(5)}(s) = \frac{2.6 \cdot 10^5 s^2 + 4.9 \cdot 10^6 s + 8.1 \cdot 10^7}{s^3 + 2003s^2 + 1 \cdot 10^4 s + 6.7 \cdot 10^6}$$

Во втором контуре кроме фильтра нижних частот используется полосно-пропускающий фильтр со следующими параметрами:  $f_1^* = 11.4$  Гц,  $f_2^* = 35.6$  Гц,  $\xi = 0.0092$ ,  $\alpha = 65$ ).

Коэффициент усиления:  $K_{p2} = 187$ .

Передаточная функция:

$$R_2^{(5)}(s) = \frac{3.6 \cdot 10^6 s^2 + 3.1 \cdot 10^8 s + 1.9 \cdot 10^{10}}{s^3 + 2004s^2 + 5.8 \cdot 10^4 s + 1 \cdot 10^8}$$

Диаграммы Боде разомкнутой системы для обоих контуров управления приведены на Рисунках 4.22 и 4.23. Синяя линия на данных рисунках соответствует объекту управления, а красная – разомкнутой системе.

Диаграмма Найквиста для обоих контуров модальной системы управления №2 (коэффициенты усиления  $K_{p1} = 12.06$ ,  $K_{p2} = 187$ ) на общем и приближенном плане представлена на Рисунке 4.24. Годограф не охватывает точку  $(-1; 0)$ , поэтому данная система управления с двумя контурами не вызывает неустойчивости замкнутой системы.

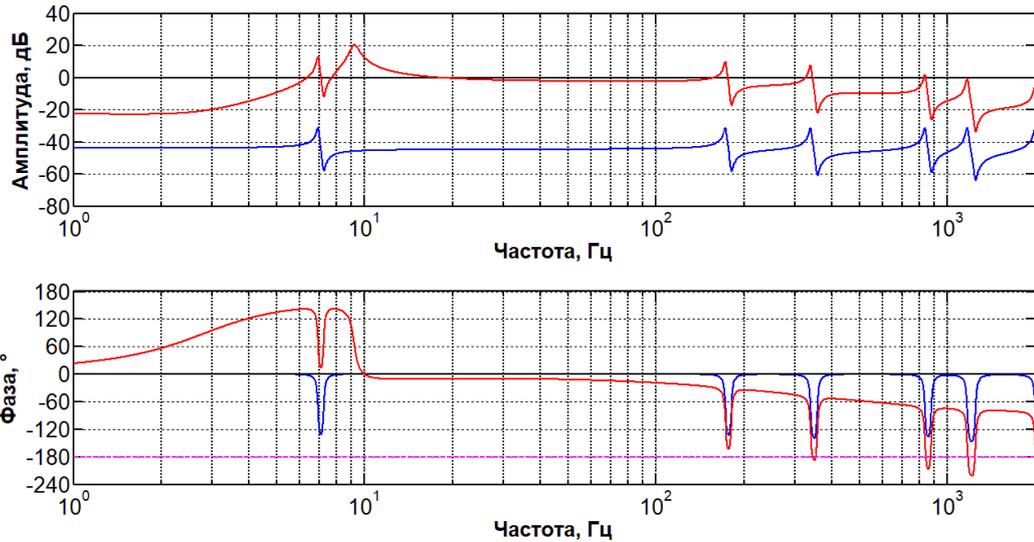


Рисунок 4.22. Диаграмма Бode разомкнутой системы для первого контура модальной системы управления №2

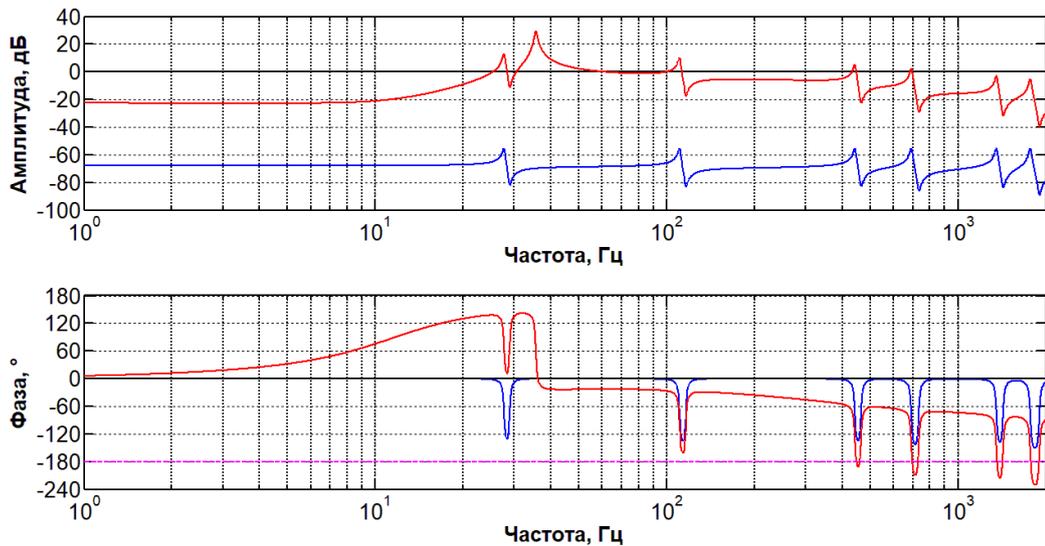


Рисунок 4.23. Диаграмма Бode разомкнутой системы для второго контура модальной системы управления №2

Полученная модальная система управления при использовании упрощенной модели сенсоров и актуаторов приводит к снижению резонансных амплитуд колебаний на обоих резонансах на 17.5 дБ. Далее необходимо выяснить, насколько эффективной окажется полученная система управления в применении к реальному объекту, то есть к системе с полной моделью работы пьезоэлементов. При использовании модальной системы №2 для управления реальной системой

оказывается, что коэффициенты усиления заданы не оптимальным образом и их можно увеличить. Это обусловлено тем, что в модальной системе №2 используются модальные матрицы (4.36) и (4.37), имеющие примерно в два раза более низкие значения элементов, чем матрицы (4.31) и (4.32). В целях увеличения эффективности управления коэффициенты усиления модальной системы №2 увеличиваются до достижения пределов устойчивости замкнутой системы. Диаграмма Найквиста для обоих контуров модальной системы управления №2 с увеличенными коэффициентами усиления ( $K_{p1} = 32.6$ ,  $K_{p2} = 584$ ), полученная для реального объекта (с полной моделью пьезоэлементов), представлена на Рисунке 4.25. Годограф не охватывает точку  $(-1; 0)$ , поэтому данная система управления с двумя контурами не вызывает неустойчивости замкнутой системы.

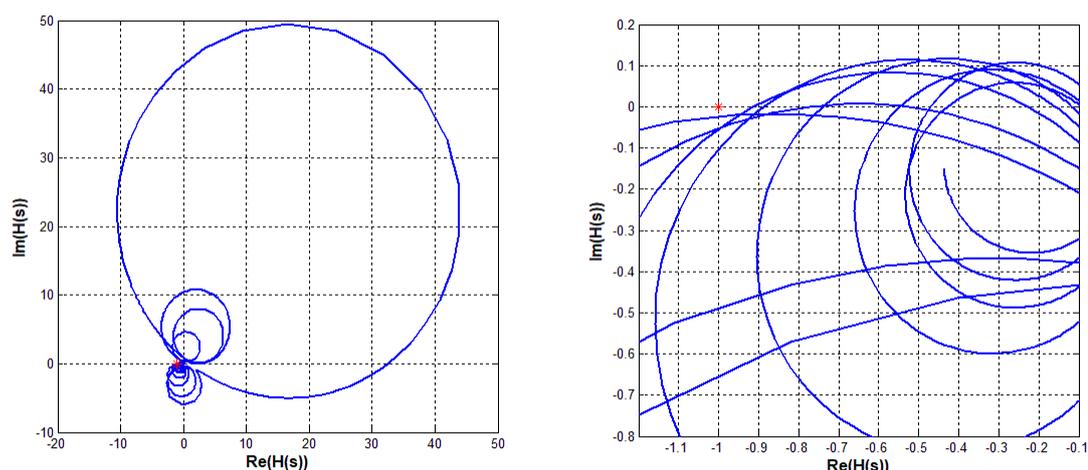


Рисунок 4.24. Диаграмма Найквиста для обоих контуров модальной системы управления №2 (общий вид и увеличенный фрагмент)

Результаты использования модальной системы №2 в сравнении с модальной системой №1 представлены на Рисунках 4.26 и 4.27, а также в Таблице 4.3. Анализируется установившееся значение величины  $E$ , характеризующей интенсивность колебаний и определяемой по формуле (4.30), вблизи первого и второго резонансов. Кривые, полученные для разных вариантов управления (цветные линии), сравниваются с кривыми, соответствующими системе без управления (черные линии). Для модальной системы №2 приведены как

результаты, соответствующие изначально выбранным коэффициентам усиления, так и результаты, соответствующие увеличенным коэффициентам усиления (КУ).

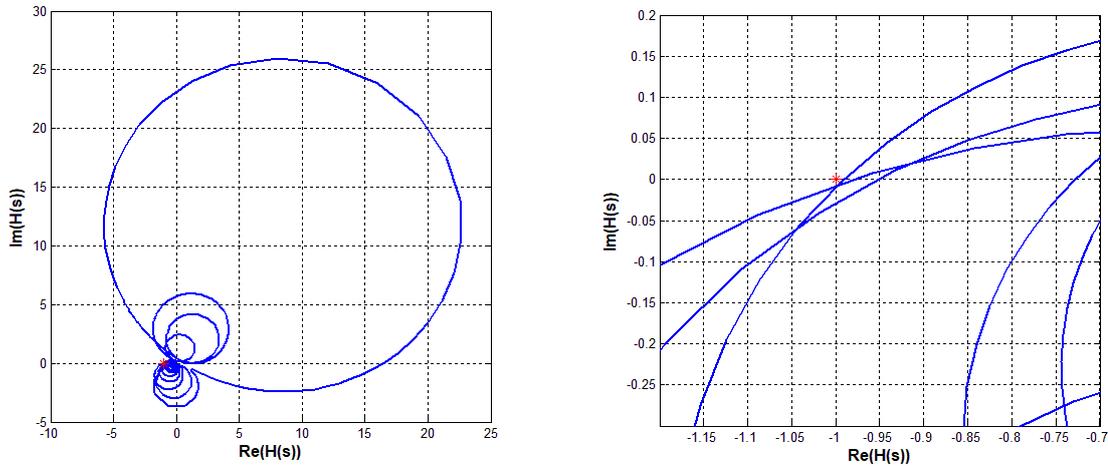


Рисунок 4.25. Диаграмма Найквиста для обоих контуров модальной системы управления №2 с увеличенными коэффициентами усиления на реальном объекте (общий вид и увеличенный фрагмент)

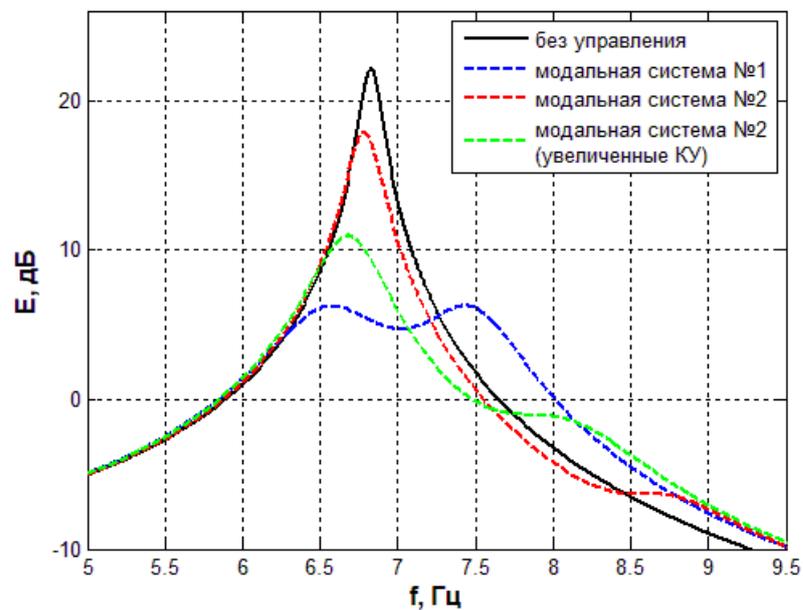


Рисунок 4.26. АЧХ балки с управлением и без для разных систем управления вблизи 1-го резонанса

В Таблице 4.3 для каждой системы управления приведены значения коэффициентов усиления в первом и втором контурах  $K_{p1}$  и  $K_{p2}$ , а также разница между амплитудами интенсивности колебаний  $E$  с управлением и без на первом и втором резонансах  $\Delta\bar{E}_1$  и  $\Delta\bar{E}_2$ , несущая информацию об эффективности работы

рассматриваемых систем управления. В случаях, когда в результате управления вблизи одного исходного резонанса появляется два резонансных пика, амплитуда  $\bar{E}$  определяется по наиболее высокому из них.

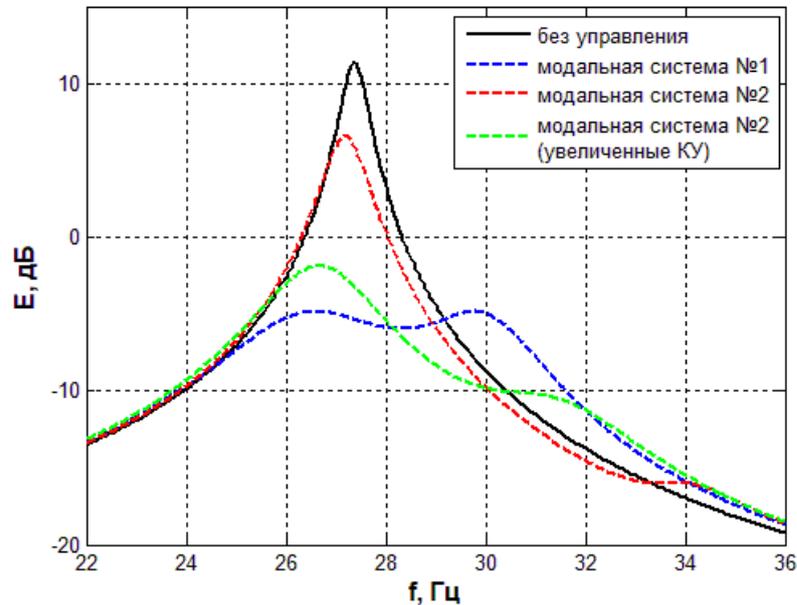


Рисунок 4.27. АЧХ балки с управлением и без для разных систем управления вблизи 2-го резонанса

Таблица 4.3.

Результаты работы различных систем управления

Система управления	$K_{p1}$	$K_{p2}$	$\Delta \bar{E}_1$ , дБ	$\Delta \bar{E}_2$ , дБ
Модальная №1	8.45	230	- 15.9	- 16.2
Модальная №2	12.06	187	- 4.3	- 4.8
Модальная №2 (увеличенные КУ)	32.6	584	- 11.2	- 13.2

Из приведенных рисунков и таблицы видно, что модальная система управления №1 значительно превосходит по эффективности модальную систему управления №2. Система №1 обеспечивает качественное снижение амплитуды резонансных колебаний балки как на первом, так и на втором резонансе (снижение на 15.9 и 16.2 дБ соответственно). Система №2 в том виде, в котором она была синтезирована, исходя из упрощенной модели работы пьезоэлементов, является

малоэффективной (снижение амплитуды на первом и на втором резонансах соответственно 4.3 и 4.8 дБ). Увеличение коэффициентов усиления при использовании системы №2 значительно повышает ее эффективность (снижение 11.2 и 13.2 дБ), однако даже с высокими коэффициентами усиления система №2 заметно уступает системе №1. Полученный результат говорит о том, что при проектировании системы управления не следует пользоваться упрощенной моделью сенсоров и актуаторов, а вместо этого стоит использовать полную модель, поскольку рассматриваемое упрощение приводит к значительному снижению эффективности создаваемой системы управления на реальном объекте.

Итак, в данной главе:

- был изложен алгоритм численного решения задачи об изгибных колебаниях шарнирно-опертой балки при наличии управления в программном пакете Matlab в разложении по собственным формам колебаний;

- были исследованы различные способы учета изгибающего момента, создаваемого сенсорами вследствие их деформации. Установлено, что влияние данного момента на динамику балки является достаточно слабым, и его эффект можно с хорошей степенью точности смоделировать без прямого учета данного момента за счет модификации жесткости тех участков балки, к которым приклеены сенсоры;

- было проведено сравнение результатов моделирования поведения шарнирно-опертой балки в разложении по собственным формам колебаний в пакете Matlab с результатами конечно-элементного моделирования в пакете ANSYS, была подтверждена достоверность моделирования поведения балки в разложении по формам колебаний при условии учета в модели достаточного количества форм (для дальнейших исследований было выбрано значение 35 собственных форм);

- было проведено сравнение эффективности различных локальных и одной модальной системы управления в задаче снижения вынужденных резонансных колебаний балки на первом и на втором резонансах, при этом законы управления

были синтезированы на основе полосно-пропускающего фильтра из условия максимальной эффективности гашения колебаний. Было продемонстрировано, что модальный подход к управлению предпочтительнее локального, поскольку он позволяет эффективно снизить амплитуду резонансных колебаний балки на обоих резонансах;

- была проверена возможность синтеза модальной системы управления, полученной с использованием упрощенной модели работы сенсоров и актуаторов, не учитывающей их реальные размеры и их влияние на собственные формы и частоты колебаний балки. Оказалось, что полученная система управления по эффективности значительно уступает системе, спроектированной на основе полной модели сенсоров и актуаторов, таким образом, был сделан вывод о том, что при создании системы управления необходимо использовать полную модель работы пьезоэлементов.

## **Глава 5. Воспроизведение результатов эксперимента с помощью численного моделирования и проектирование новых систем управления**

В большинстве работ по теме управления колебаниями упругих тел (например, [15, 29, 51, 53, 58]) принято сопровождать теоретические изыскания как экспериментальными, так и численными исследованиями конкретных систем. Моделирование динамики электроупругих тел, представляющих собой распределенные системы с присоединенными пьезоэлементами, может быть выполнено разными способами: наряду с методом конечных элементов, использованным в данном исследовании, существует возможность моделирования таких систем с помощью их электрического аналога, данный способ рассматривается в работе [10]. Численное воспроизведение экспериментальных результатов позволяет говорить об их достоверности и повторяемости и подтверждает значимость сделанных выводов. Исходя из названной цели, в данной главе ставится задача численного воспроизведения основных результатов эксперимента, изложенного в главах 2 и 3, включая как характеристики объекта в отсутствие управления, так и работу систем управления.

В рамках проведенного экспериментального исследования создаются различные системы управления вынужденными изгибными колебаниями металлической балки, при этом эффективность всех систем при проектировании определяется экспериментально. В главе 4 воплощен значительно более эффективный численный подход к синтезу законов управления и использована программа, позволяющая автоматизировать данный процесс, что существенно ускоряет процесс проектирования. В данной главе предложенный подход применяется уже к задаче, исследованной экспериментально, что потенциально дает возможность синтезировать значительно более эффективные законы управления, чем полученные ранее в главе 3.

В первой части главы рассматривается задача теоретического получения результатов управления на основе снятых экспериментально частотных характеристик объекта. Данный подход позволяет тестировать различные законы

управления без проведения соответствующего эксперимента, что дает возможность создавать более эффективные системы управления, чем системы, полученные в рамках экспериментальной части исследования. Результат использования указанного подхода сравнивается с экспериментом. Вторая часть главы посвящена конечно-элементному моделированию экспериментальной установки, позволяющему получить численно частотные характеристики объекта управления. В третьей части главы на основании результатов КЭ-моделирования и с использованием теоретического подхода, изложенного в начале главы, синтезируется новая модальная система управления, позволяющая более эффективно снизить уровень резонансных колебаний балки по сравнению с полученными ранее системами. Результаты работы всех рассмотренных локальных и модальных систем, полученные экспериментально и теоретически, сравниваются между собой. Основные результаты изложенного в данной главе численного исследования приведены в работах [9, 20].

### **5.1. Получение результатов управления на основе снятых экспериментально характеристик объекта**

Для анализа результатов использования различных систем управления с точки зрения подавления вынужденных резонансных колебаний балки необходимо исследовать реакцию балки на внешнее воздействие при включенной и отключенной системе управления. Для этого анализируются АЧХ балки при воздействии на пьезотолкатель и измерениях амплитуды колебаний верхнего конца балки в диапазонах частот, содержащих первую и вторую собственные частоты изгибных колебаний балки. В главе 3 настоящей работы данные АЧХ получаются экспериментально. В данном разделе ставится задача получить АЧХ балки с управлением теоретически, исходя из известных амплитудно- и фазочастотных характеристик, полученных для различных вариантов воздействия на балку и измерения выходного сигнала, и известных законов управления.

В первом пункте данного раздела приводится алгоритм вычисления передаточной функции балки с управлением на основании измеренных передаточных функций балки для различных вариантов входного сигнала (воздействия) и выходного сигнала (измерения). Затем полученные таким образом результаты работы различных систем управления, протестированных экспериментально в главе 3, сравниваются с результатами эксперимента.

### 5.1.1. Алгоритм получения результатов управления

Пусть на балку одновременно действуют три входных сигнала, а именно напряжение, подаваемое на пьезотолкатель  $U_d$ , на первый актуатор  $U_1$  и на второй актуатор  $U_2$ . При этом измеряются три выходных сигнала: поперечное смещение точки на верхнем конце балки  $w$ , напряжение на первом сенсоре  $Y_1$  и на втором сенсоре  $Y_2$ . Измеряемые величины выражаются через приложенные воздействия с использованием девяти передаточных функций  $H_d$ ,  $H_d^{(1)}$ ,  $H_d^{(2)}$ ,  $H_a^{(1)}$ ,  $H_a^{(2)}$ ,  $H_{as}^{(11)}$ ,  $H_{as}^{(12)}$ ,  $H_{as}^{(21)}$ ,  $H_{as}^{(22)}$  в соответствии со следующими формулами:

$$\begin{cases} w = H_d U_d + H_a^{(1)} U_1 + H_a^{(2)} U_2 \\ Y_1 = H_d^{(1)} U_d + H_{as}^{(11)} U_1 + H_{as}^{(21)} U_2 \\ Y_2 = H_d^{(2)} U_d + H_{as}^{(12)} U_1 + H_{as}^{(22)} U_2 \end{cases} \quad (5.1)$$

Когда система управления включена, управляющие воздействия  $U_1$  и  $U_2$  и сигналы сенсоров  $Y_1$  и  $Y_2$  связаны следующим образом:

$$\begin{cases} U_1 = -R_{11} Y_1 - R_{12} Y_2 \\ U_2 = -R_{21} Y_1 - R_{22} Y_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

Из систем уравнений (5.1) и (5.2) можно путем математических преобразований получить выражения, связывающие перемещение точки на верхнем конце балки  $w$  с внешним воздействием на пьезотолкатель  $U_d$ :

$$w = \left( H_d + H_R^{(1)} + H_R^{(2)} \right) U_d, \quad (5.3)$$

где передаточные функции  $H_R^{(1)}$  и  $H_R^{(2)}$  находятся по формулам:

$$\begin{cases} H_R^{(1)} = \frac{-R_{21} H_d^{(1)} - R_{22} H_d^{(2)} + (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21})(H_{as}^{(12)} H_d^{(1)} - H_{as}^{(11)} H_d^{(2)})}{1 + R_{11} H_{as}^{(11)} + R_{12} H_{as}^{(12)} + R_{21} H_{as}^{(21)} + R_{22} H_{as}^{(22)} + (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21})(H_{as}^{(12)} H_{as}^{(22)} - H_{as}^{(12)} H_{as}^{(21)})} \\ H_R^{(2)} = \frac{-R_{11} H_d^{(1)} - R_{12} H_d^{(2)} - (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21})(H_{as}^{(22)} H_d^{(1)} - H_{as}^{(21)} H_d^{(2)})}{1 + R_{11} H_{as}^{(11)} + R_{12} H_{as}^{(12)} + R_{21} H_{as}^{(21)} + R_{22} H_{as}^{(22)} + (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21})(H_{as}^{(12)} H_{as}^{(22)} - H_{as}^{(12)} H_{as}^{(21)})} \end{cases} \quad (5.4)$$

Выражения (5.3) и (5.4) задают передаточную функцию балки с включенной системой управления, содержащей два актуатора и два сенсора.

### 5.1.2. Численное получение результатов управления в сравнении с экспериментом

В главе 2 было описано экспериментальное получение АЧХ и ФЧХ для разных случаев воздействия на балку и измерения выходного сигнала. В главе 3 были протестированы различные системы управления (как локальные, так и модальная), снижающие амплитуду резонансных колебаний балки. В данном разделе действие спроектированных в рамках эксперимента систем управления проверяется теоретически на полученных экспериментально АЧХ и ФЧХ объекта, и результат сравнивается с результатом эксперимента с управлением.

Всего в главе 3 было рассмотрено три системы управления с двумя контурами: локальные системы №1 и №2 и модальная система. Результаты работы данных систем управления вблизи первого и второго резонансов, полученные экспериментально и теоретически на основе измеренных АЧХ и ФЧХ объекта, показаны на Рисунках 5.1 – 5.3. А именно, изображены АЧХ при измерении амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки и воздействии на пьезотолкатель с управлением (полученные экспериментально и теоретически) и без.

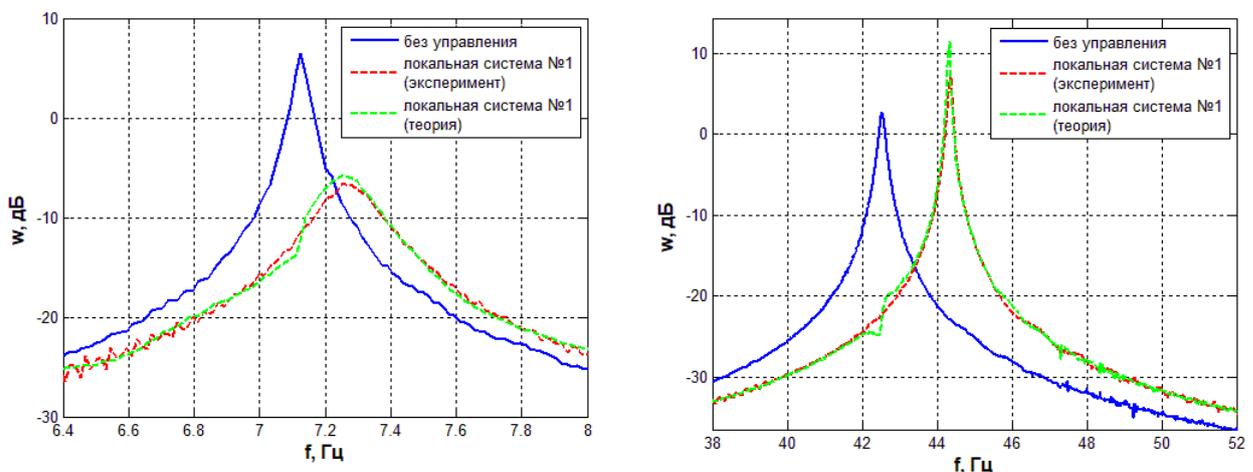


Рисунок 5.1. АЧХ балки без управления и с управлением для локальной системы №1, полученные теоретически и экспериментально, вблизи 1-го и 2-го резонансов

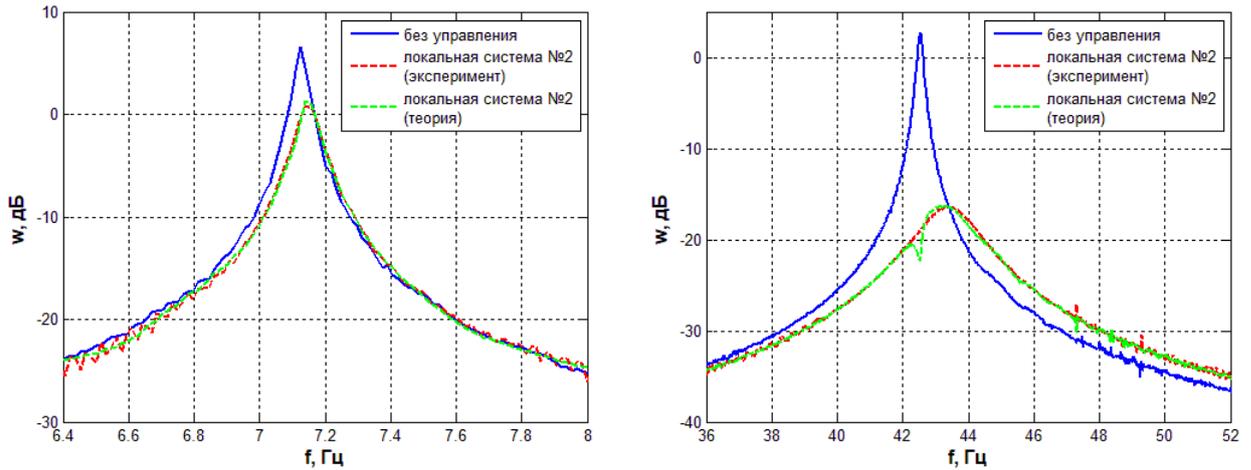


Рисунок 5.2. АЧХ балки без управления и с управлением для локальной системы №2, полученные теоретически и экспериментально, вблизи 1-го и 2-го резонансов

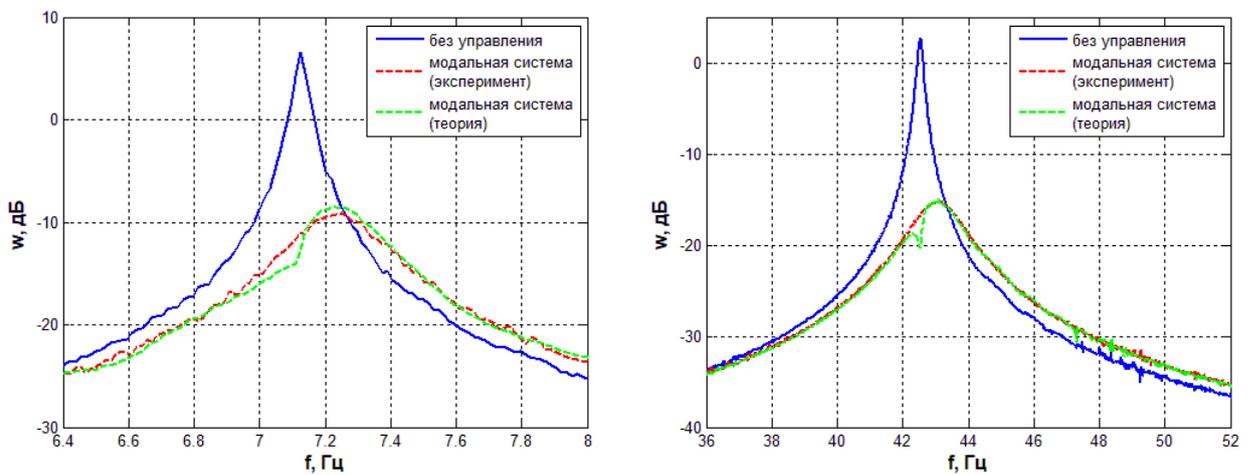


Рисунок 5.3. АЧХ балки без управления и с управлением для модальной системы, полученные теоретически и экспериментально, вблизи 1-го и 2-го резонансов

В целом результаты теории и эксперимента на представленных графиках сходятся достаточно хорошо, за исключением высоты второго резонансного пика для локальной системы управления №1 (вторая часть Рисунка 5.1). Высота резонансного пика на кривой, полученной теоретически, существенно превышает высоту пика на экспериментальной кривой. Данный результат объясняется тем, что на данном резонансе при данном законе управления на актуаторах возникают большие значения управляющего напряжения, которое в эксперименте ограничивается значением 100 В, а в теории данное напряжение ничем не ограничено. Если же ограничить аналогичным образом управляющие напряжения

в теоретическом расчете, теоретическая кривая несколько изменится и станет ближе к экспериментальной, это продемонстрировано на Рисунке 5.4.

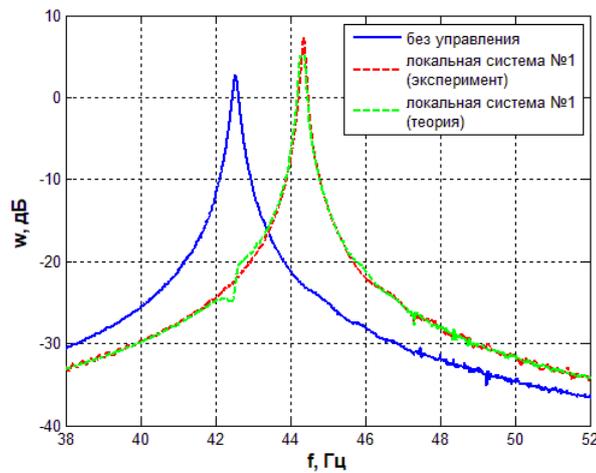


Рисунок 5.4. АЧХ балки без управления и с управлением для локальной системы №1, полученные теоретически (с ограничением управляющего напряжения) и экспериментально, вблизи 2-го резонанса

Наиболее важные результаты сравнения теории с экспериментом – не рассмотренный случай, в котором система управления увеличивает высоту резонансного пика, а остальные случаи, в которых система управления выполняет свою функцию, снижая амплитуду вынужденных колебаний балки. Для данных графиков сходимость результатов достаточно хорошая. Единственное небольшое отличие между теоретическими и экспериментальными кривыми наблюдается в узкой области частот, соответствующих резонансному пику без управления: кривая, соответствующая теории, несколько проседает вниз. Данная особенность объясняется тем, что различные АЧХ и ФЧХ объекта, на основе которых были получены теоретические результаты управления, несколько не соответствуют друг другу, поскольку они были сняты не одновременно, а в разные дни. За это время некоторые параметры объекта могли незначительно измениться, что привело к небольшому отличию в расположении резонансных пиков на разных АЧХ. Данный недостаток в результатах управления будет исключен в третьем разделе данной главы, где результаты управления будут вычисляться на основе характеристик

модели, полученных не экспериментально, а численно при помощи конечно-элементного моделирования.

## **5.2. Конечно-элементное моделирование экспериментальной установки**

### **5.2.1. Описание конечно-элементных моделей**

В конечно-элементном пакете ANSYS были созданы две модели экспериментальной установки. Первая, упрощенная модель, состоит из одномерных 3-узловых балочных элементов Beam189, и в ней не моделируется пьезоэффект. Роль конструкции закрепления в данной модели выполняют две пружины, мешающие повороту и поперечному смещению балки в точке закрепления. Вторая модель состоит из трехмерных 20-узловых элементов Solid186 (для обычных материалов без пьезоэффекта) и Solid226 (для пьезоэлектрических материалов модели, из которых состоят сенсоры, актуаторы и стержень-толкатель).

Изображения обеих моделей балки вместе с разбиением на элементы представлены на Рисунке 5.5. На первом рисунке изображена балочная модель, на втором, третьем и четвертом – 3D-модель (общий вид и конструкция закрепления крупным планом). На рисунках для 3D-модели хорошо видна конструкция закрепления, в которую входит пьезоэлектрический стержень-толкатель (изображен черным цветом). На всех рисунках видны актуаторы, размещенные на лицевой стороне балки, парные им сенсоры располагаются на обратной стороне балки и выглядят аналогичным образом.

Балочная модель содержит 161 элемент и 283 узла, 3D-модель – 3534 элемента и 21088 узлов. Таким образом, с вычислительной точки зрения первая модель значительно проще второй.

В качестве механических граничных условий задано жесткое закрепление дальних концов пружин в балочной модели и концов конструкции опоры, которые в экспериментальной установке прикреплены к неподвижному основанию – в 3D-модели. В качестве внешнего возбуждения в первой модели задана либо сила, приложенная к точке закрепления балки (в случае воздействия с помощью стержня-

толкателя), либо пара моментов, действующих на концах актуатора, в соответствии с формулой (1.56) (в случае возбуждения колебаний с помощью актуатора). Во второй модели в качестве внешнего возбуждения заданы электрические потенциалы на электродах актуаторов и пьезотолкателя. Для получения АЧХ и ФЧХ модели выполняется гармонический анализ системы в диапазоне частот от 1 Гц до 2 кГц, при этом гармонически меняющееся воздействие прикладывается либо на пьезотолкатель (в балочной модели на точку закрепления балки), либо на один из актуаторов. В качестве результатов для каждого из расчетов измеряется напряжение на обоих сенсорах, а также поперечное смещение точки на верхнем конце балки. Величина электрического напряжения на электродах сенсоров в балочной модели, где нет учета пьезоэффекта, вычисляется из углов поворота концевых сечений сенсоров в соответствии с формулой (1.58).

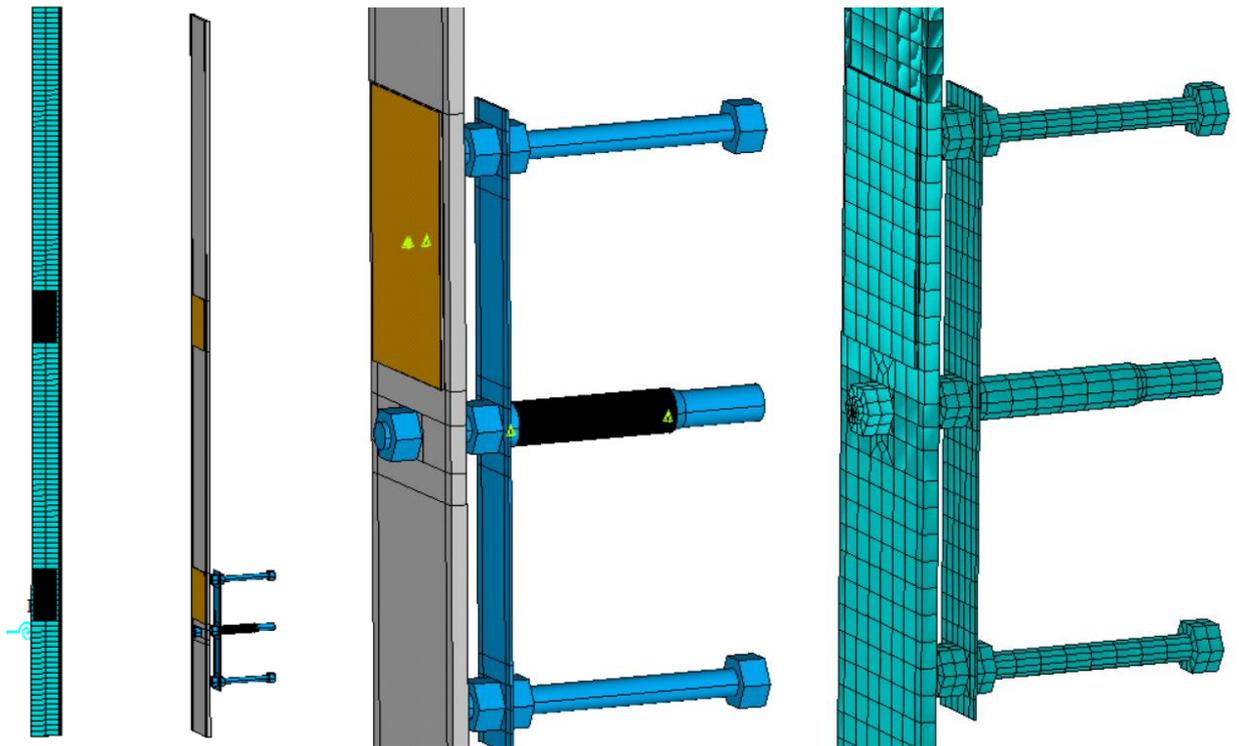


Рисунок 5.5. Конечно-элементные модели балки с пьезоэлементами

Отдельный вопрос при моделировании заключался в том, какую величину демпфирования в модели следует задавать для гармонического расчета. Коэффициент демпфирования – важный параметр, поскольку от него напрямую зависит высота резонансных пиков. В целях определения коэффициента

демпфирования были проанализированы результаты эксперимента, а именно, измеренные АЧХ балки. Всего таких АЧХ девять: для каждого из трех вариантов внешнего воздействия (пьезотолкатель или пьезоактуаторы) и каждого из трех вариантов измерения (лазерный виброметр или пьезосенсоры). Для каждой АЧХ анализировался каждый резонансный пик в диапазоне 1 – 2000 Гц. Коэффициент демпфирования  $\xi$  для каждой из форм колебаний определялся по ширине резонансного пика в соответствии с формулой:

$$\xi = \frac{\Delta f}{2f_0}, \quad (5.5)$$

где  $f_0$  – резонансная частота,  $\Delta f$  – ширина резонансного пика, ограниченная значениями частоты, на которых амплитуда падает в  $\sqrt{2}$  раз. Полученные таким образом значения коэффициентов демпфирования приведены на Рисунке 5.6.

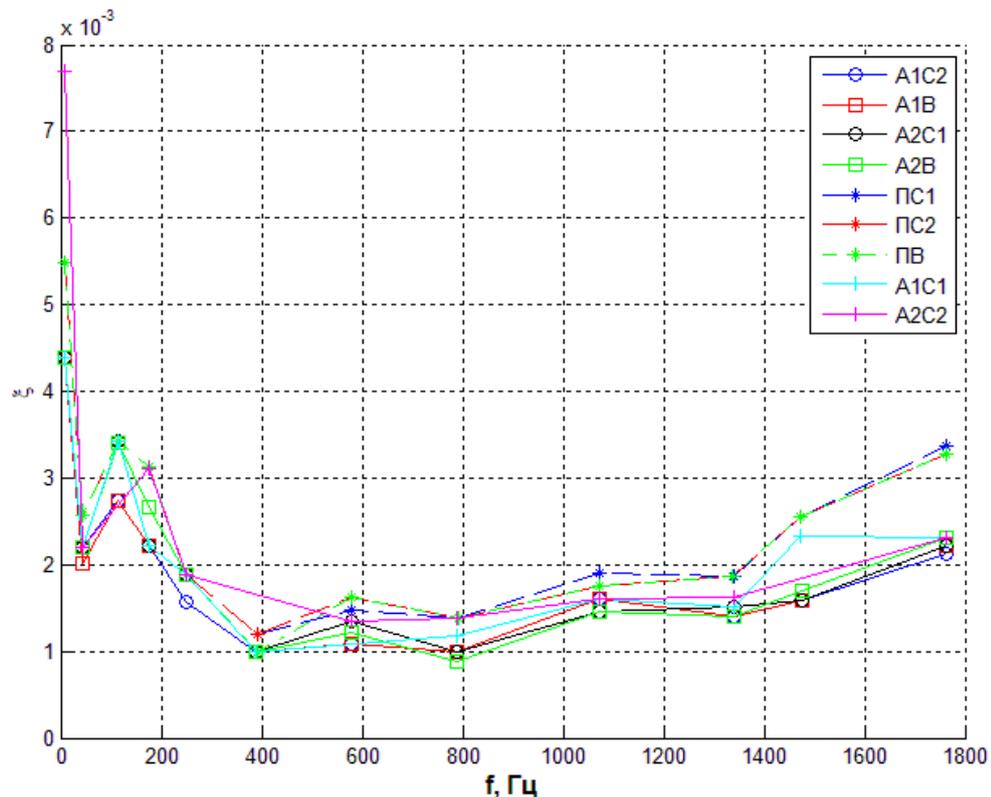


Рисунок 5.6. Коэффициенты демпфирования, полученные из экспериментальных АЧХ. А – актуатор, П – пьезотолкатель, С – сенсор, В – виброметр.

Коэффициенты демпфирования, полученные из экспериментальных АЧХ, приведены также в Таблице 5.1. Здесь  $f_0$  – резонансная частота,  $\xi_{1-4}$  – коэффициенты

демпфирования, полученные в результате осреднения из разных АЧХ: 1 – из АЧХ актуатор-сенсор, 2 – из АЧХ актуатор-виброметр, 3 – из АЧХ пьезотолкатель-сенсор, 4 – из АЧХ пьезотолкатель-виброметр.

Таблица 5.1.

Коэффициенты демпфирования, полученные из экспериментальных АЧХ

№ формы	$f_0$ , Гц	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$
1	7.12	0.0044	0.0044	0.0055	0.0055
2	42.5	0.0022	0.0021	0.0026	0.0026
3	114	0.0031	0.0031	0.0034	0.0034
4	176	0.0022	0.0025	0.0031	0.0031
5	249	0.0018	0.0019	0.0019	0.0019
6	390	0.001	0.001	0.0012	0.001
7	579	0.0013	0.0012	0.0016	0.0016
8	790	0.001	0.0009	0.0014	0.0014
9	1073	0.0016	0.0016	0.0018	0.0017
10	1340	0.0015	0.0014	0.0019	0.0019
11	1474	0.0016	0.0017	0.0025	0.0025
12	1762	0.0022	0.0023	0.0034	0.0033

Из рисунка и таблицы видно, что значения коэффициентов демпфирования различаются для разных частот и разных АЧХ. Общая тенденция такова: максимальный коэффициент демпфирования (около 0.005) наблюдается на первой резонансной частоте (возможно, это вызвано высокой амплитудой колебаний по первой форме), далее на низких частотах (до 200 Гц) демпфирование все еще достаточно высоко (около 0.0025), затем оно снижается примерно до уровня 0.001 - 0.0015, а на высоких частотах (выше 1.4 кГц) снова плавно растет. Исходя из представленных данных, в конечно-элементных моделях был выбран одинаковый для всех форм коэффициент демпфирования, равный 0.002.

### 5.2.2. Сравнение частотных характеристик, полученных экспериментально и численно

В результате проведения гармонических расчетов в комплексе ANSYS для каждой из моделей были получены девять амплитудно- и фазочастотных характеристик балки: для каждого из трех вариантов внешнего воздействия (актуаторы или пьезотолкатель) и каждого из трех вариантов измерения (показания сенсоров или колебания точки на верхнем конце балки). Далее полученные характеристики подвергались модификации, а именно, к ним были добавлены характеристики фильтров и усилителей, отдельно измеренные в рамках эксперимента (см. раздел 2.1.2), а также характеристики сенсоров (см. раздел 1.4.2), полученные для значений сопротивления вольтметра  $R = 1$  МОм и емкости сенсора  $C = 45$  нФ. Таким образом получались АЧХ и ФЧХ, аналогичные снятым экспериментально.

Сравнение АЧХ, полученных экспериментально и численно, приводится на Рисунках 5.7 – 5.15. Синий цвет соответствует эксперименту, красный – балочной, а зеленый – 3D-модели.

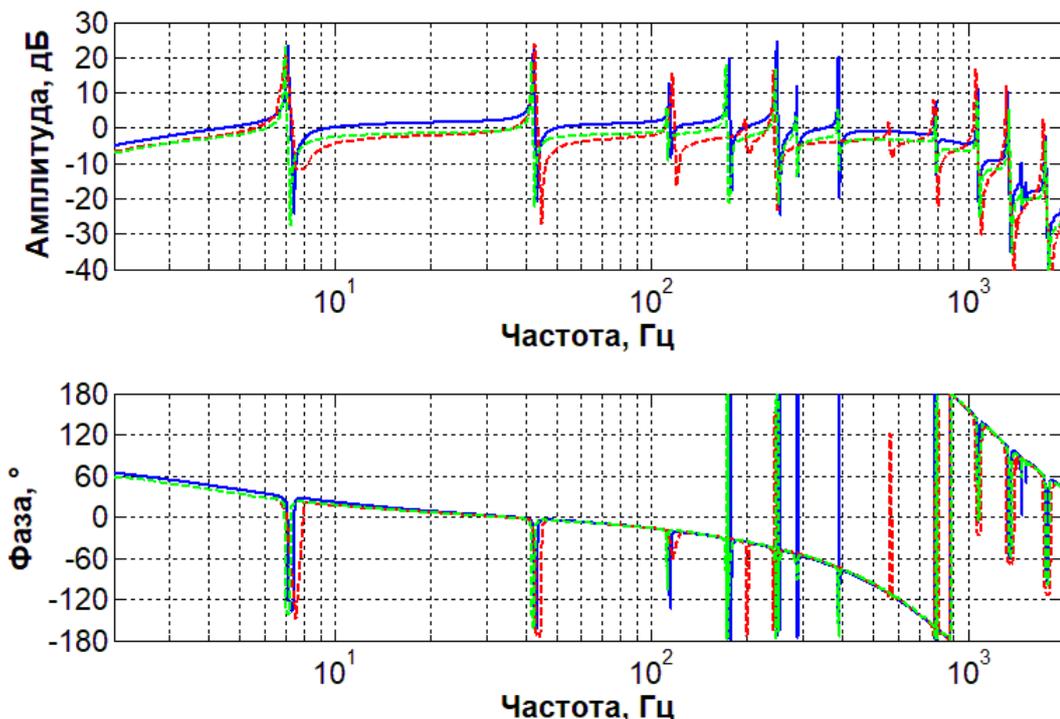


Рисунок 5.7. Сравнение АЧХ и ФЧХ 1 актуатор – 1 сенсор

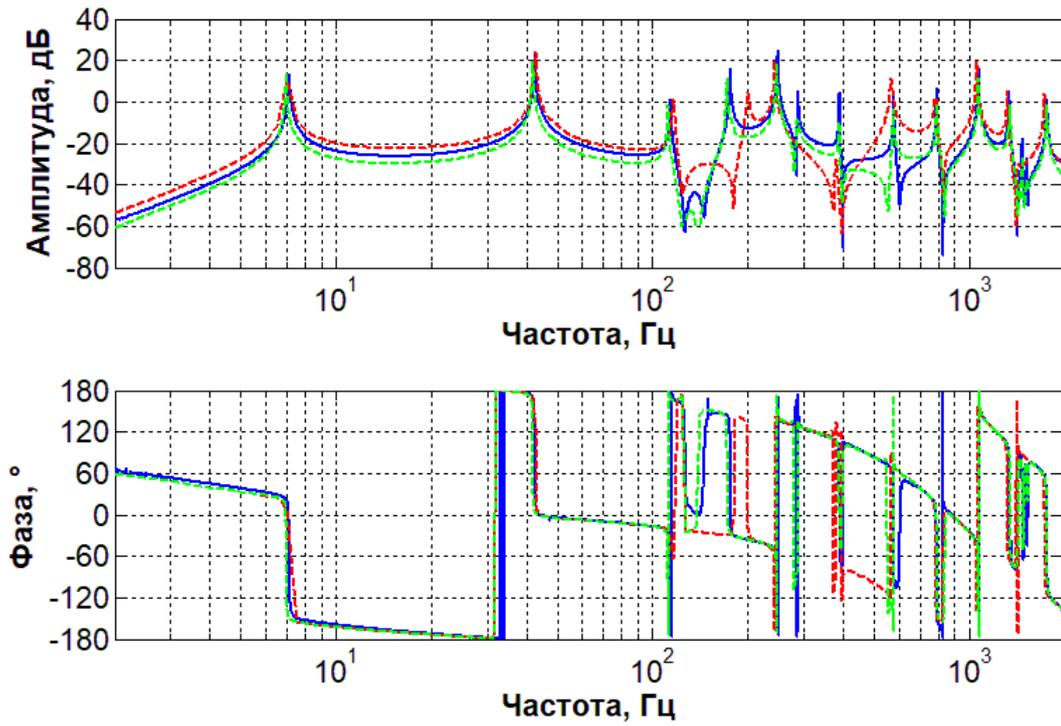


Рисунок 5.8. Сравнение АЧХ и ФЧХ 1 актуатор – 2 сенсор

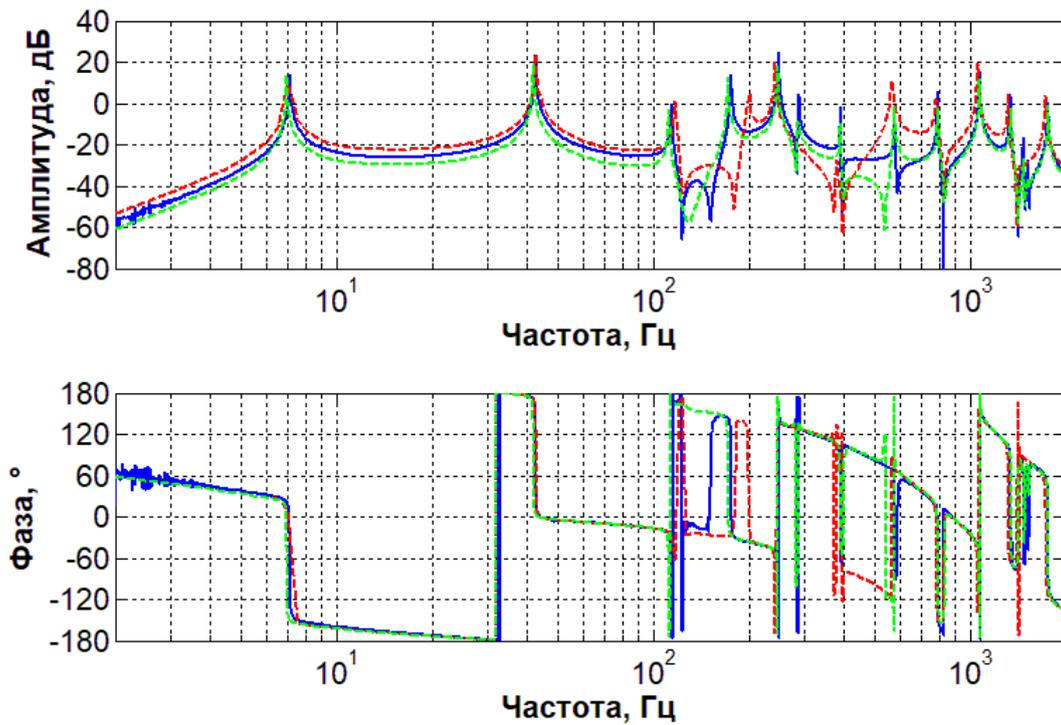


Рисунок 5.9. Сравнение АЧХ и ФЧХ 2 актуатор – 1 сенсор

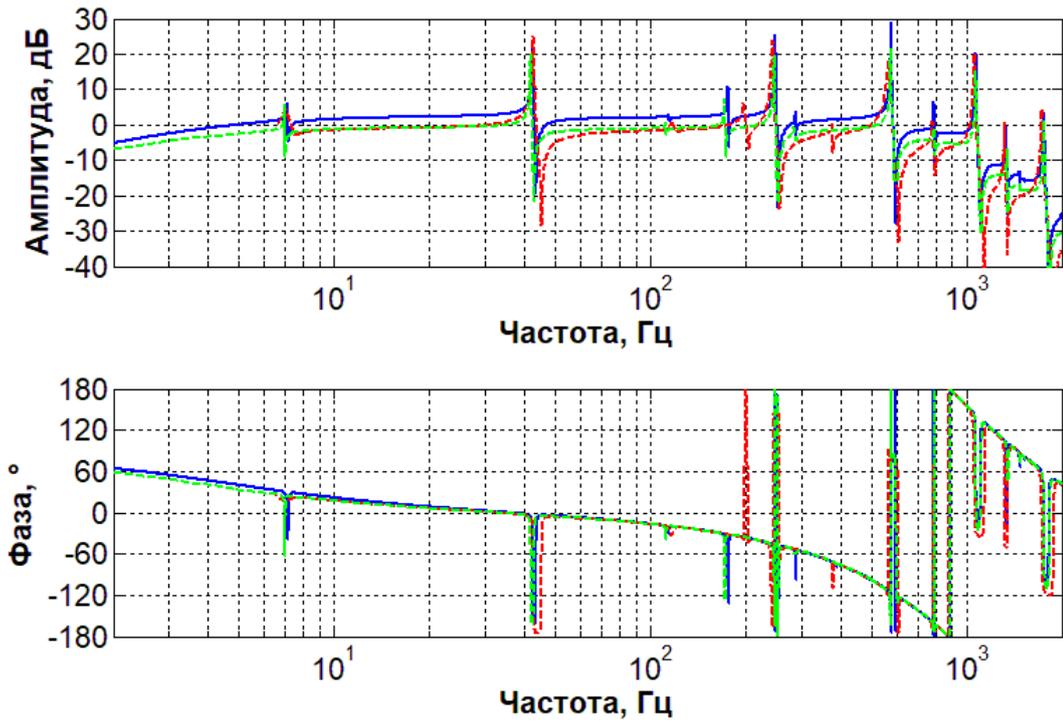


Рисунок 5.10. Сравнение АЧХ и ФЧХ 2 актуатор – 2 сенсор

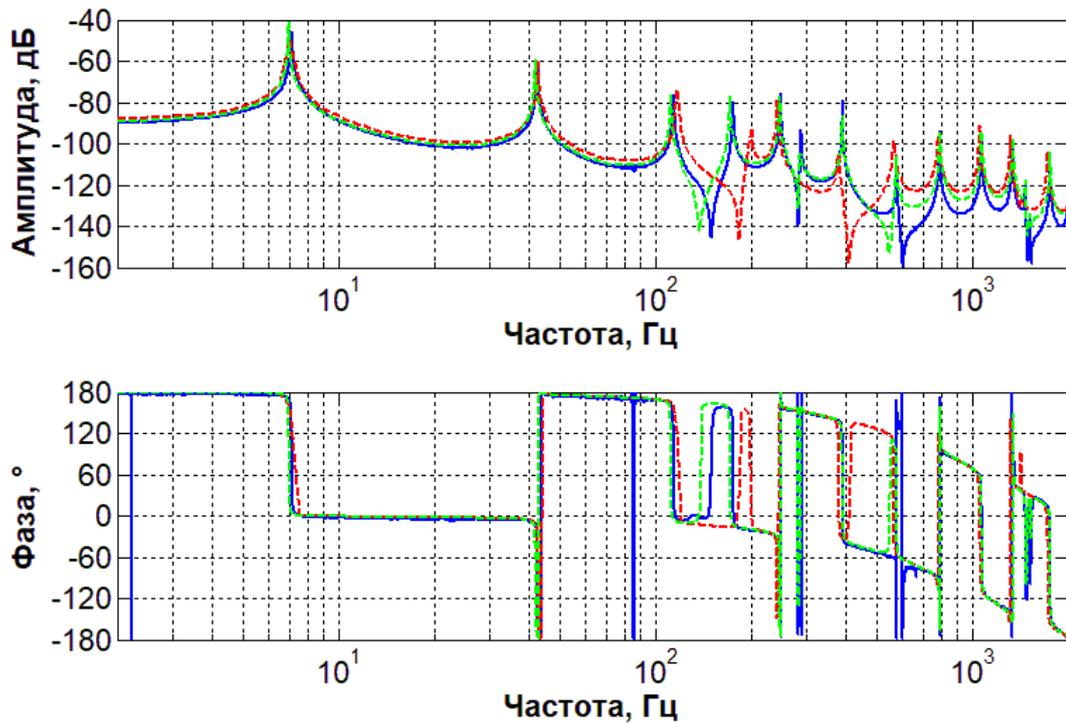


Рисунок 5.11. Сравнение АЧХ и ФЧХ 1 актуатор – виброметр

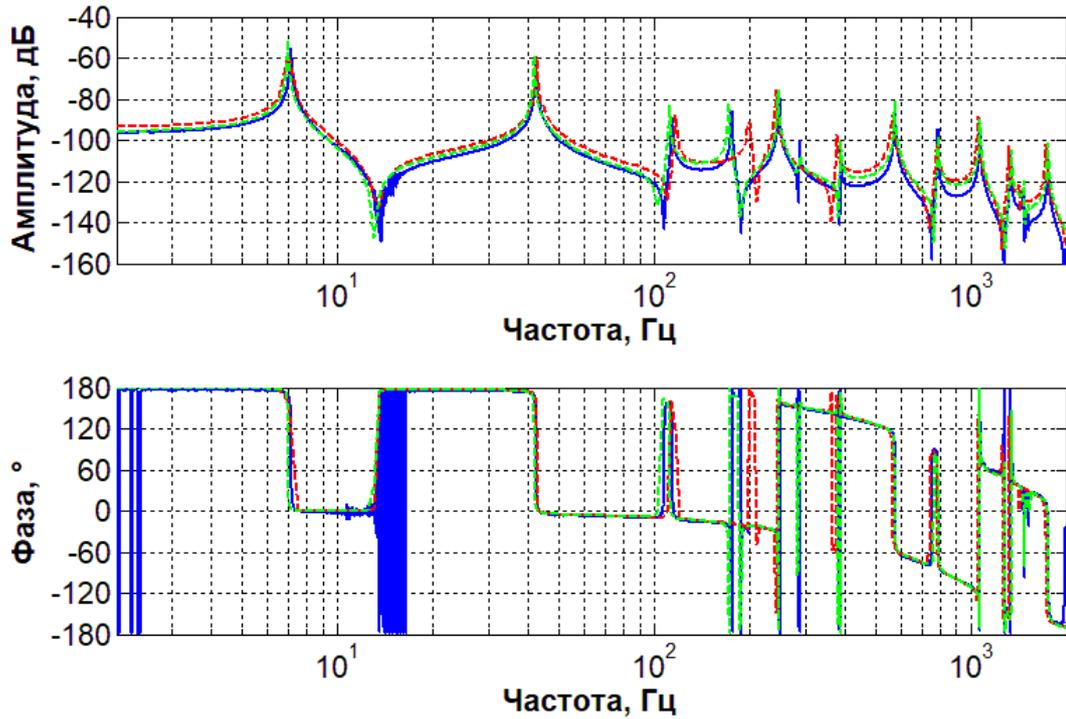


Рисунок 5.12. Сравнение АЧХ и ФЧХ 2 актуатор – виброметр

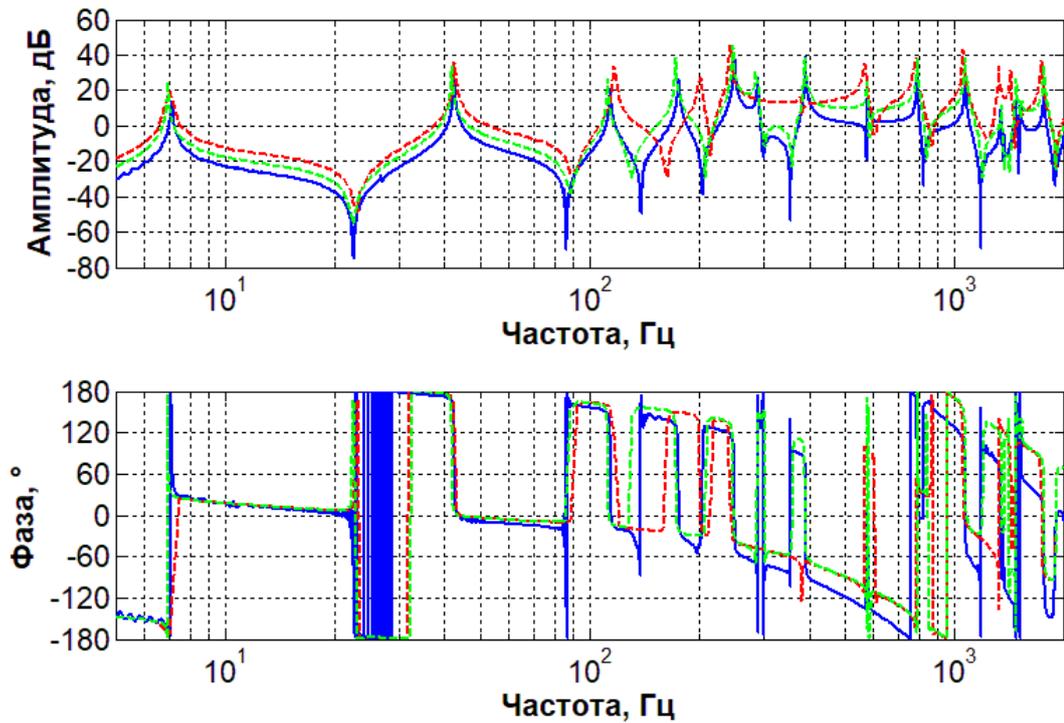


Рисунок 5.13. Сравнение АЧХ и ФЧХ пьезотолкатель – 1 сенсор

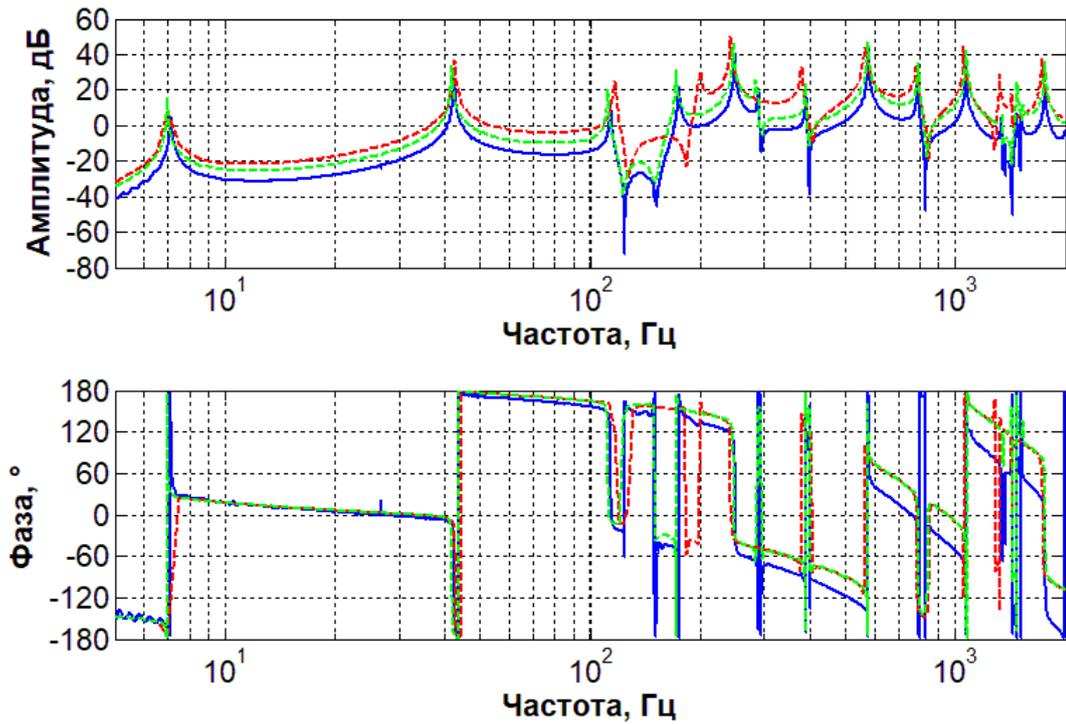


Рисунок 5.14. Сравнение АЧХ и ФЧХ пьезотолкатель – 2 сенсор

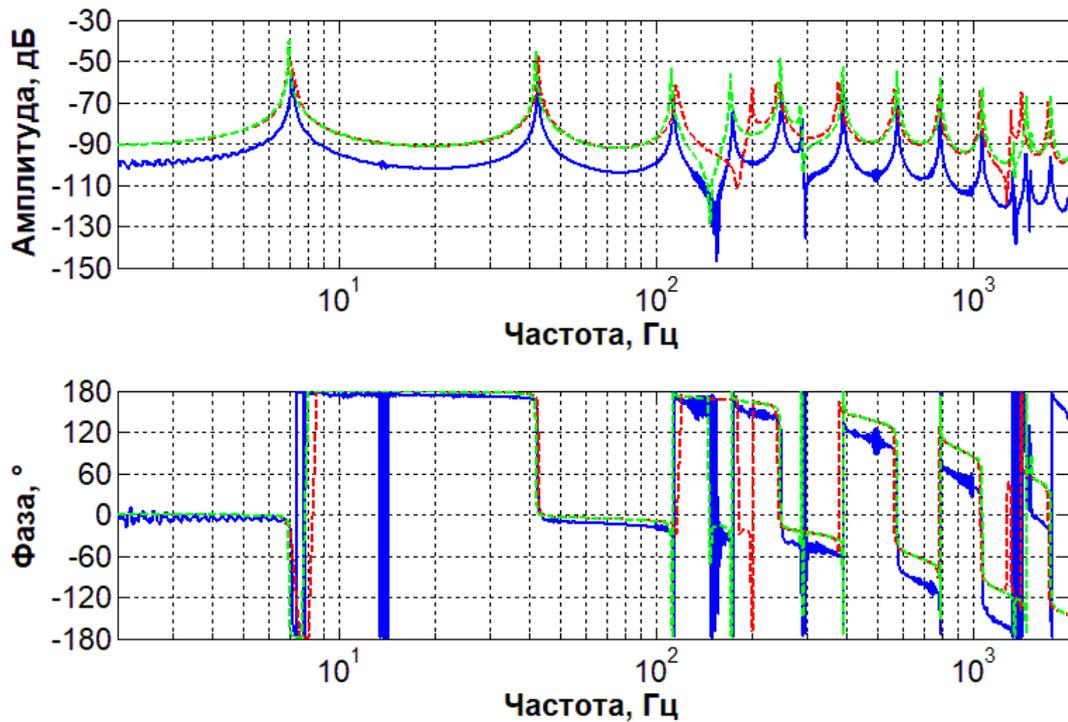


Рисунок 5.15. Сравнение АЧХ и ФЧХ пьезотолкатель – виброметр

Анализируя представленные графики, необходимо отметить, что в целом за небольшим исключением результаты численного моделирования достаточно

хорошо сходятся с экспериментом. Результаты для 3D-модели более близки к эксперименту, чем результаты для балочной модели, особенно это заметно в области резонансной частоты 176 Гц, соответствующей форме колебаний, в которой существенным образом задействована конструкция опоры. За исключением данной частоты, на всех АЧХ и ФЧХ теоретические и экспериментальные значения резонансных частот хорошо совпадают, при этом амплитуды как на резонансах, так и вдали от них достаточно близки. Главной причиной различия в высоте резонансных пиков на АЧХ является различие в коэффициентах демпфирования в численной модели и в реальном объекте. Отдельно стоит выделить очень хорошее совпадение фазочастотных характеристик на низких частотах – там, где проявляется эффект перетекания зарядов на электроды сенсоров, из-за чего фаза сигнала на низких частотах поднимается, а амплитуда снижается (данный эффект описан в разделе 1.4.2). Такое совпадение свидетельствует о том, что параметры, описывающие данный эффект – емкость сенсоров и сопротивление вольтметров – выбраны верно.

Несколько хуже остальных совпали с экспериментом характеристики, соответствующие возбуждению колебаний балки с помощью пьезотолкателя. Одной из причин данного несовпадения является тот факт, что в данных АЧХ и ФЧХ не были учтены характеристики усилителя, через который проходит сигнал перед подачей на толкатель, поскольку данные характеристики не были измерены в ходе эксперимента. В то же время для задачи синтеза законов управления используются исключительно АЧХ и ФЧХ, соответствующие возбуждению колебаний с помощью актуаторов и измерению с помощью сенсоров, данные характеристики получены с большой точностью. Наиболее существенным отличием для данных кривых, помимо высоты резонансных пиков, является разница в амплитуде вдали от резонансов: теоретические кривые проходят несколько ниже экспериментальных (разница составляет около 2-3 дБ или 20-30%).

Поскольку результаты для конечно-элементной модели, состоящей из трехмерных элементов, оказались ближе к экспериментальным данным, чем результаты для балочной модели, в дальнейшем используются именно они.

### **5.3. Вычисление результатов управления на основе полученных численно характеристик объекта**

В данном разделе анализируются результаты работы локальных и модальных систем управления, полученные на основе не экспериментальных, а численных характеристик объекта управления, то есть металлической балки, упруго заземленной в промежуточном сечении. При получении данных результатов используются те же законы управления, что и в системах, синтезированных и испытанных в рамках экспериментального исследования, описанного в главе 3. Отличие же тестируемых в данном разделе систем управления состоит в том, что, во-первых, для них задаются другие величины коэффициентов усиления, оптимизированные из условия наибольшей эффективности указанных систем, а во-вторых – в модальной системе используются несколько другие матрицы – синтезатор и анализатор форм, подобранные в соответствии с характеристиками объекта, полученными в результате КЭ-моделирования. Кроме уже созданных ранее систем, здесь синтезируется новая модальная система управления, при этом используется программный алгоритм, впервые использованный в главе 4, который позволяет оптимизировать параметры входящих в систему управления фильтров. Результаты работы полученных систем управления сравниваются между собой.

#### **5.3.1. Разделение форм в модальной системе управления**

В первую очередь при создании модальной системы управления необходимо определить модальные матрицы – синтезатор и анализатор форм  $F$  и  $T$ . Они должны быть заданы таким образом, чтобы первый контур управления не возбуждал и не реагировал на вторую форму изгибных колебаний балки, а второй контур не возбуждал и не реагировал на первую форму. Для вычисления модальных матриц необходимо проанализировать высоту первого и второго резонансных пиков на АЧХ пьезотолкатель-сенсор и актуатор-виброметр. Данные АЧХ, полученные в результате численного моделирования, приведены на Рисунках 5.16 и 5.17.

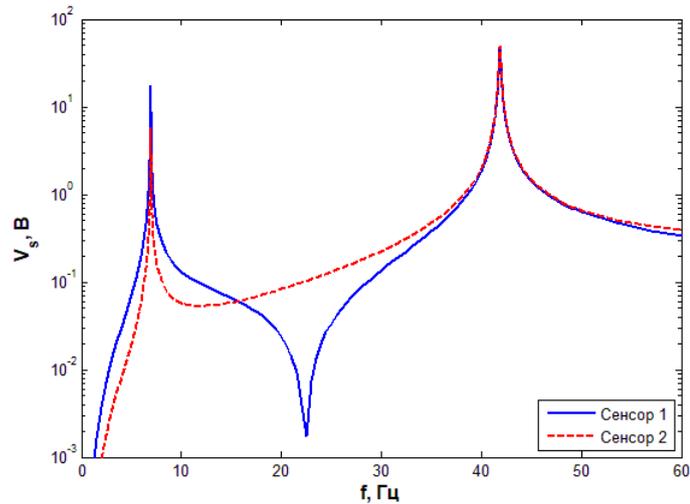


Рисунок 5.16. АЧХ пьезотолкатель – сенсор на низких частотах

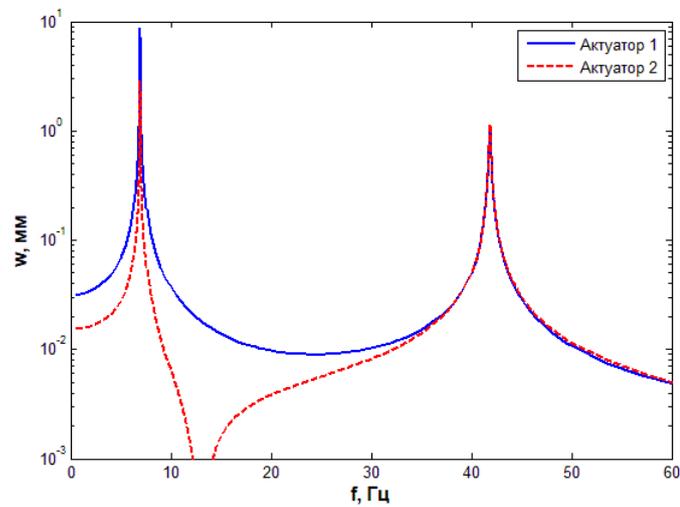


Рисунок 5.17. АЧХ актуатор – виброметр на низких частотах

Сравнивая высоту резонансных пиков, получим, что сенсоры при возбуждении первой и второй форм колебаний активизируются в пропорциях 3.07:1 и -0.95:1. Актуаторы возбуждают первую и вторую формы в пропорциях 3.08:1 и -0.97:1. Отсюда получаются следующие значения модальных матриц:

$$T = \begin{bmatrix} 1.01 & 0.96 \\ -0.49 & 1.49 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1.01 & -0.49 \\ 0.98 & 1.5 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Следует обратить внимание на то, что данные матрицы очень близки значениям матриц, полученным из эксперимента (2.36) и (2.37).

Для демонстрации разделения форм в контурах управления в результате использования вычисленных модальных матриц на Рисунках 5.18 и 5.19 приведены АЧХ балки до и после разделения форм в частотном диапазоне, содержащем две низших резонансных частоты изгибных колебаний балки.

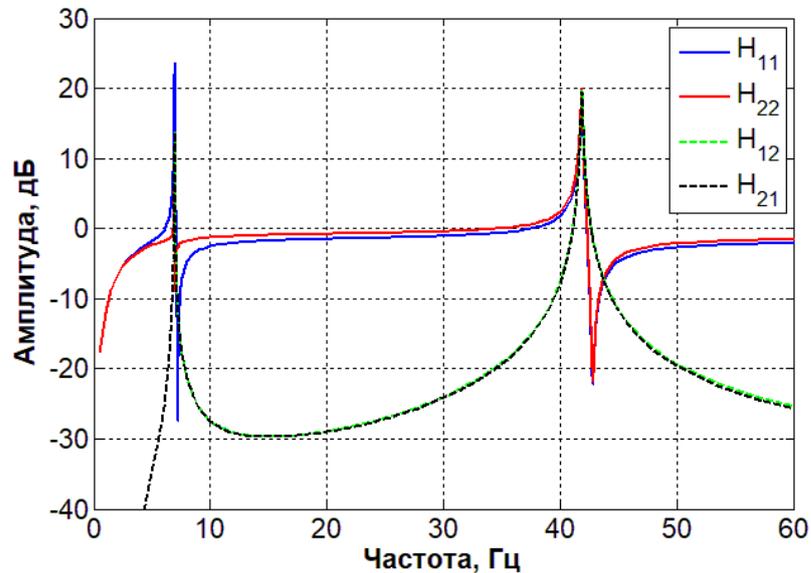


Рисунок 5.18. АЧХ актуатор – сенсор на низких частотах

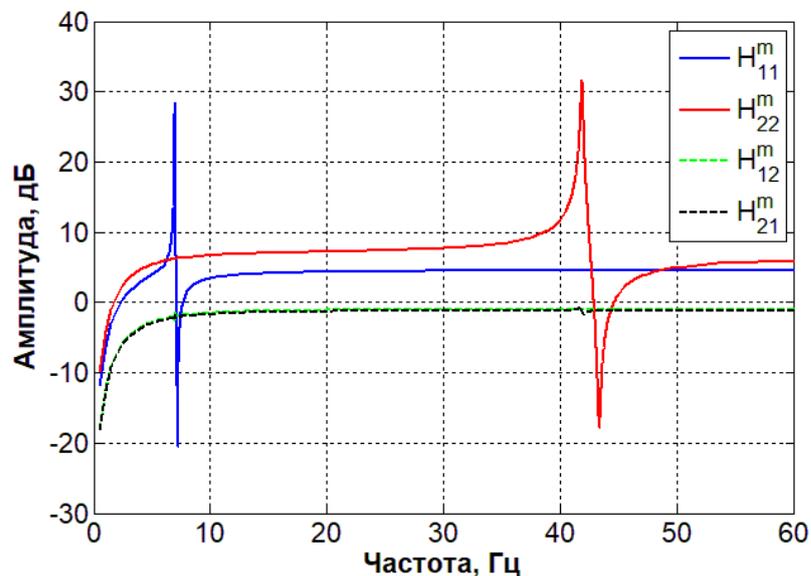


Рисунок 5.19. АЧХ балки для модальных контуров управления

На Рисунке 5.18 изображены АЧХ актуатор-сенсор, а на Рисунке 5.19 – АЧХ, соответствующие модальным контурам управления. Если обозначить передаточные функции объекта, соответствующие  $i$ -му актуатору и  $j$ -му сенсору, как  $H_{ij}$ , а передаточные функции, получаемые возбуждением  $k$ -го модального

контура управления и измерением сигнала с помощью  $l$ -го модального контура, как  $H_{kl}^m$ , то данные функции будут связаны формулой (2.38).

Как видно из приведенных рисунков, выбранные модальные матрицы обеспечивают качественное разделение первой и второй форм колебаний. В то время как на всех АЧХ актуатор-сенсор присутствуют оба резонансных пика, на АЧХ  $H_{11}^m$ , соответствующей первому модальному контуру управления, наблюдается только первый резонанс, на АЧХ  $H_{22}^m$  – только второй резонанс, а на перекрестных АЧХ  $H_{12}^m$  и  $H_{21}^m$  отсутствуют оба резонанса, таким образом, взаимное влияние контуров управления минимально. Приведенные рисунки, характеризующие численную модель балки, напоминают Рисунки 2.20 и 2.21, на которых изображены те же данные, полученные экспериментально.

### 5.3.2. Создание модальной системы управления №2

Изложенная в разделе 5.1.1 процедура позволяет получать результаты управления теоретически на основе имеющихся частотных характеристик объекта, без проведения эксперимента по управлению. Этот метод позволяет спроектировать более эффективные системы управления, чем те, что были созданы в рамках эксперимента. Таким образом, были протестированы различные варианты законов управления и создана модальная система управления №2, более эффективно снижающая вынужденные резонансные колебания балки, чем системы, полученные в рамках экспериментальной части исследования в главе 3. В данной системе используются матрицы – синтезатор и анализатор форм  $F$  и  $T$ , заданные формулами (5.6) и (5.7). Ниже приведены характеристики полученной системы управления.

В первом контуре модальной системы управления №2 использованы следующие фильтры: ФНЧ первого порядка ( $f^* = 100$  Гц), полосно-заграждающий фильтр ( $f^* = 247$  Гц,  $\xi = 0.02$ ,  $\alpha = 8$ ), полосно-пропускающий фильтр ( $f_1^* = 4.9$  Гц,  $f_2^* = 9.5$  Гц,  $\xi = 0.018$ ,  $\alpha = 22$ ).

Коэффициент усиления:  $K_p = 0.073$ .

Передаточная функция:

$$R_1(s) = \frac{172s^4 + 1.5 \cdot 10^4 s^3 + 4.2 \cdot 10^8 s^2 + 1 \cdot 10^{10} s + 3.9 \cdot 10^{11}}{s^5 + 1127s^4 + 2.7 \cdot 10^6 s^3 + 1.5 \cdot 10^9 s^2 + 1.3 \cdot 10^{10} s + 5.4 \cdot 10^{12}}$$

Во втором контуре модальной системы управления №2 использованы следующие фильтры: ФНЧ второго порядка ( $f^* = 80$  Гц,  $\xi = 0.3$ ), полосно-заграждающий фильтр ( $f^* = 172.2$  Гц,  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 3$ ), полосно-пропускающий фильтр ( $f_1^* = 3$  Гц,  $f_2^* = 73$  Гц,  $\xi = 0.008$ ,  $\alpha = 0.3$ ).

Коэффициент усиления:  $K_p = 0.00075$ .

Передаточная функция:

$$R_2(s) = \frac{1.1 \cdot 10^5 s^4 + 2.4 \cdot 10^6 s^3 + 1.3 \cdot 10^{11} s^2 + 1.3 \cdot 10^{10} s + 4.7 \cdot 10^{13}}{s^6 + 374s^5 + 1.7 \cdot 10^6 s^4 + 4.6 \cdot 10^8 s^3 + 6 \cdot 10^{11} s^2 + 8 \cdot 10^{13} s + 6.2 \cdot 10^{16}}$$

Диаграммы Бode разомкнутой системы для обоих контуров управления модальной системы №2 приведены на Рисунках 5.20 и 5.21. Синяя линия на данных рисунках соответствует объекту управления, а красная – разомкнутой системе.

Диаграмма Найквиста для обоих контуров модальной системы управления №2 на общем и приближенном плане представлена на Рисунке 5.22. Годограф не охватывает точку  $(-1; 0)$ , поэтому данная система управления с двумя контурами не вызывает неустойчивости замкнутой системы.

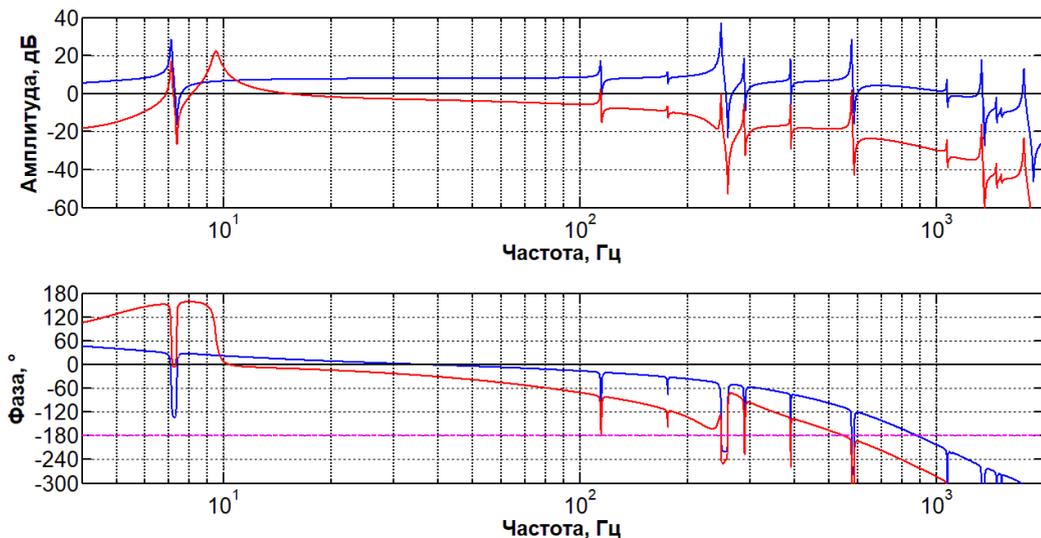


Рисунок 5.20. Диаграмма Бode разомкнутой системы для первого контура модальной системы управления №2

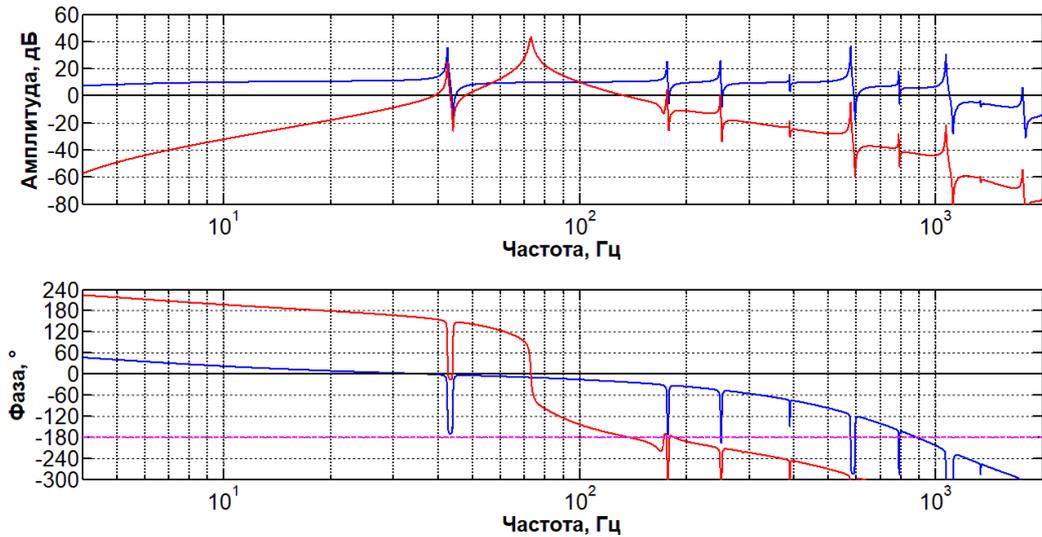


Рисунок 5.21. Диаграмма Бode разомкнутой системы для второго контура модальной системы управления №2

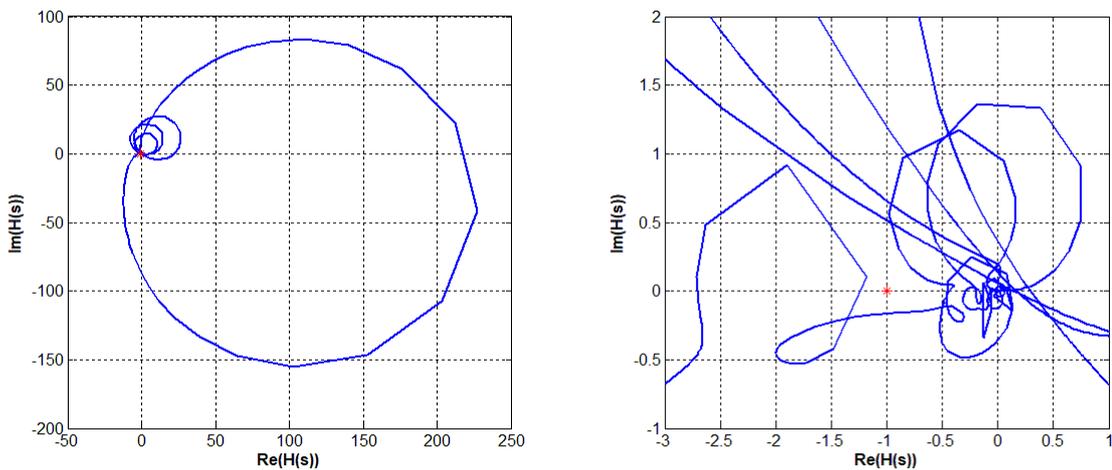


Рисунок 5.22. Диаграмма Найквиста для обоих контуров модальной системы управления №2 (общий вид и увеличенный фрагмент)

### 5.3.3. Сравнение результатов работы различных систем управления

В данном разделе рассматриваются результаты работы созданных в рамках эксперимента систем управления, вычисленные на основе не экспериментальных, а теоретических частотных характеристик, полученных в результате конечно-элементного моделирования объекта управления. Наряду с системами управления, созданными в рамках эксперимента, тестируется модальная система управления №2, описанная в разделе 5.3.2.

При тестировании систем управления на полученных численно характеристиках объекта используются те же законы управления, что и в эксперименте, за исключением того, что выбираются другие величины коэффициентов усиления в контурах управления. Это вызвано тем, что данные АЧХ и ФЧХ отличаются от экспериментальных, поэтому, во-первых, к другим ограничениям на коэффициенты усиления задают требования устойчивости замкнутой системы, а во-вторых, при других значениях коэффициентов усиления рассматриваемые системы управления имеют наибольшую эффективность. Кроме того, в модальных системах управления задаются не те значения модальных матриц (синтезатора и анализатора форм), которые использовались в эксперименте, а те значения, которые были получены на основе теоретических характеристик объекта управления в разделе 5.3.1.

Значения коэффициентов усиления в контурах управления, обеспечивающие наибольшую эффективность рассмотренных систем, следующие: для локальной системы №1  $K_{p1} = 0.7$ ,  $K_{p2} = 0.75$ , для локальной системы №2  $K_{p1} = K_{p2} = 0.08$ , для модальной системы №1  $K_{p1} = 0.17$ ,  $K_{p2} = 0.044$ , для модальной системы №2  $K_{p1} = 0.176$ ,  $K_{p2} = 0.00113$ . На Рисунках 5.23 – 5.25 представлены диаграммы Найквиста для обоих контуров рассмотренных систем управления, построенные на основе численных характеристик объекта, на общем и приближенном плане.

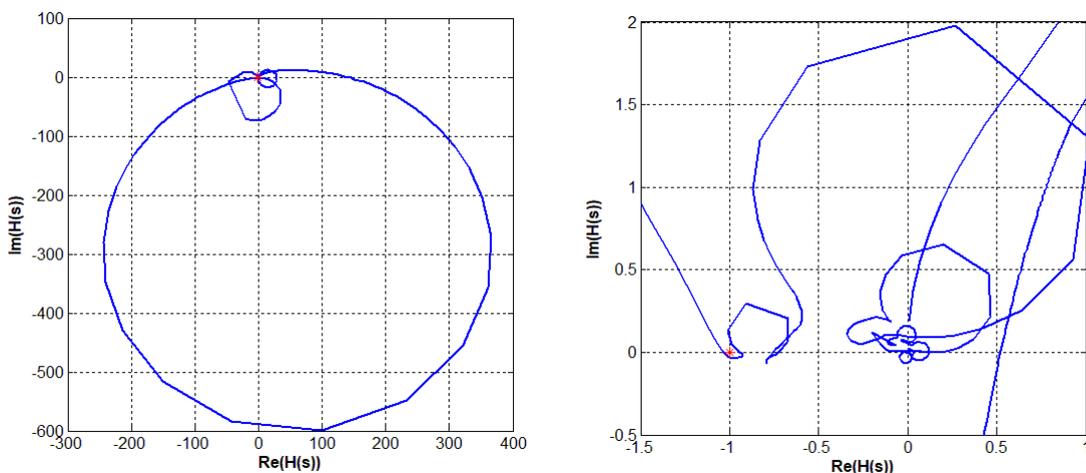


Рисунок 5.23. Диаграмма Найквиста для обоих контуров локальной системы управления №1 (общий вид и увеличенный фрагмент)

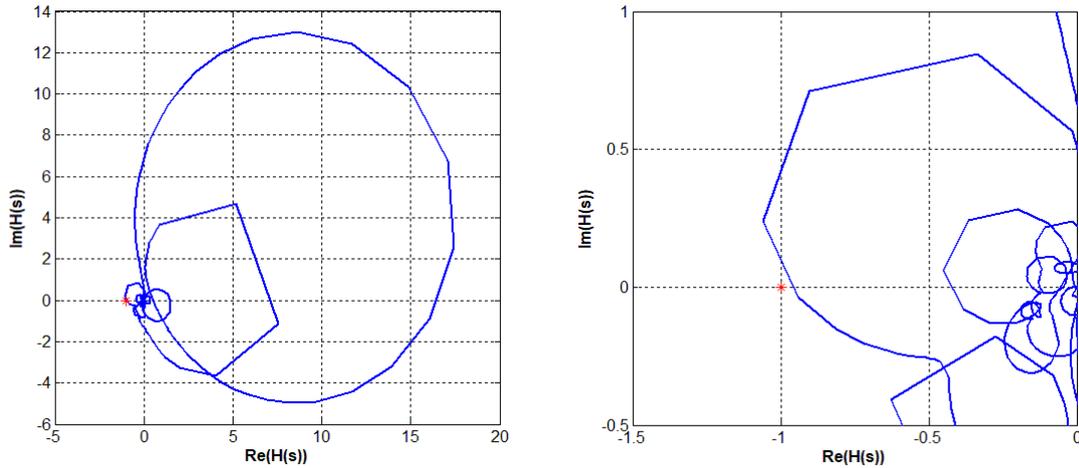


Рисунок 5.24. Диаграмма Найквиста для обоих контуров локальной системы управления №2 (общий вид и увеличенный фрагмент)

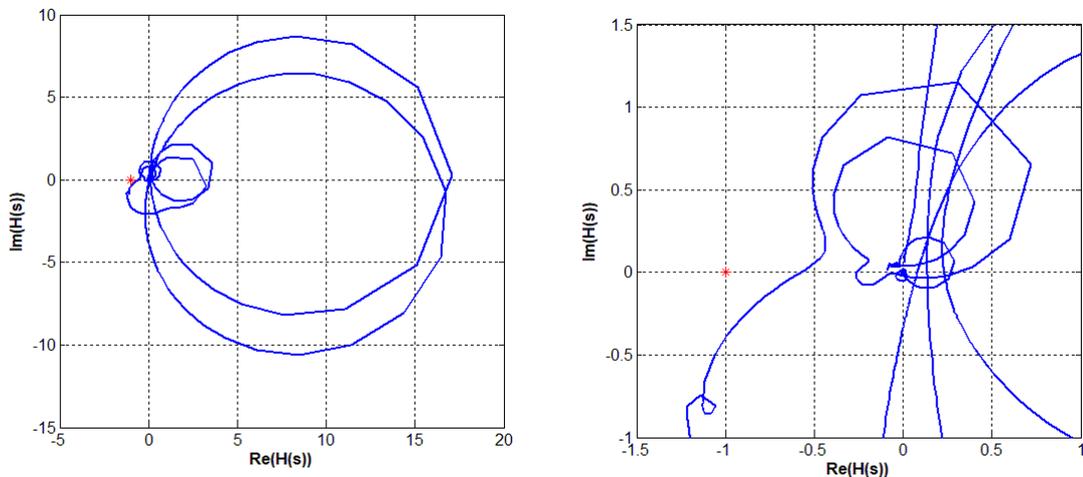


Рисунок 5.25. Диаграмма Найквиста для обоих контуров модальной системы управления №1 (общий вид и увеличенный фрагмент)

На представленных рисунках видно, что рассмотренные годографы не охватывают точку  $(-1; 0)$ , поэтому данные системы управления не вызывают неустойчивости замкнутой системы.

На Рисунках 5.26 и 5.27 представлены результаты работы всех рассмотренных систем управления вблизи первого и второго резонансов. А именно, показаны АЧХ при измерении амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки и воздействии на пьезотолкатель с управлением и без, вычисленные в соответствии с алгоритмом, представленным в разделе 5.1.1, с использованием

частотных характеристик балки, полученных численно в результате конечно-элементного моделирования.

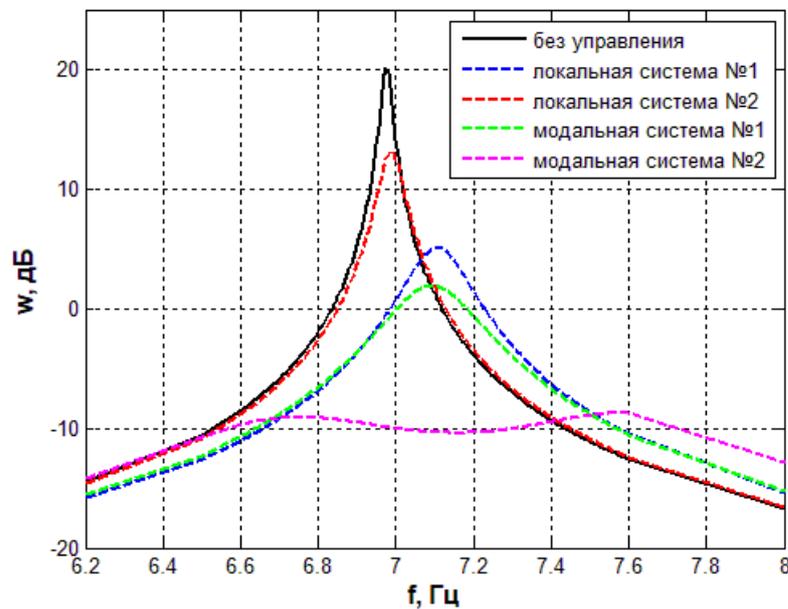


Рисунок 5.26. АЧХ балки без управления и с управлением для разных систем управления вблизи 1-го резонанса (теория)

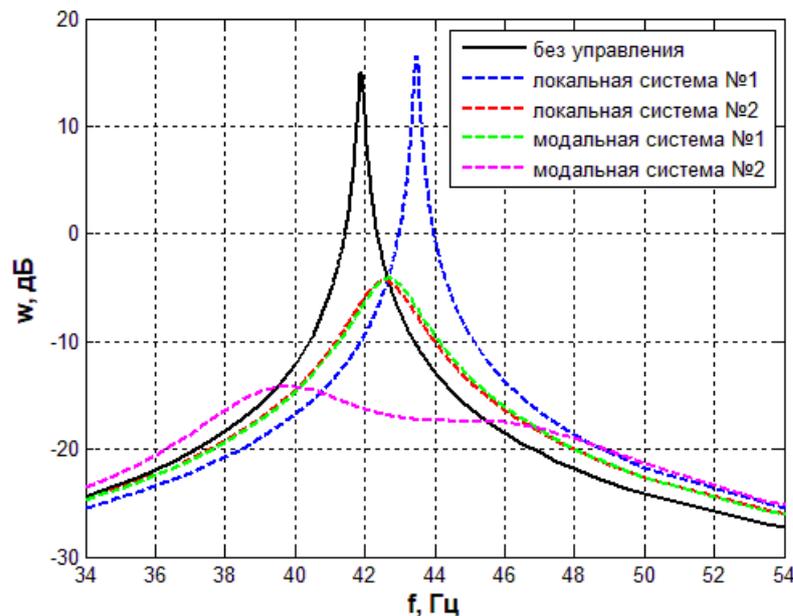


Рисунок 5.27. АЧХ балки без управления и с управлением для разных систем управления вблизи 2-го резонанса (теория)

Из данных рисунков видно, что модальная система №2 снижает амплитуду вынужденных резонансных колебаний балки значительно эффективнее остальных систем управления. Данное снижение на первом и на втором резонансах у

модальной системы №2 составляет соответственно 28.9 и 29.2 дБ по сравнению с 18.3 и 19.3 дБ у модальной системы №1. При этом в отличие от результатов, полученных на основе экспериментальных характеристик объекта (см. раздел 5.1.2), кривые, полученные на основе конечно-элементного моделирования и изображенные на Рисунках 5.26 и 5.27, не имеют дефектов вблизи резонансных частот объекта без управления, следовательно, данные результаты заслуживают большего доверия.

Все основные характеристики рассмотренных систем управления приведены в Таблице 5.2. Для каждой системы управления приведены значения коэффициентов усиления в первом и втором контурах  $K_{p1}$  и  $K_{p2}$ , а также разница между резонансными амплитудами с управлением и без на первом и втором резонансах  $\Delta w_1$  и  $\Delta w_2$ . Для первых трех систем управления приведены результаты эксперимента и численные результаты, полученные как на основе экспериментальных частотных характеристик объекта (в таблице обозначены как комбинация эксперимента и теории), так и на основе характеристик, полученных численно. Для модальной системы №2 приведены только результаты, полученные теоретически и численно, поскольку экспериментально эффективность данной системы управления не была исследована.

Как было замечено ранее, величины коэффициентов усиления у одних и тех же систем управления, тестируемых на частотных характеристиках, полученных экспериментально и численно, достаточно сильно различаются (в 1.5-2.5 раза), поскольку различаются по абсолютным величинам сами данные характеристики. Показатели эффективности систем управления (снижение резонансных амплитуд) в теории несколько лучше, чем в эксперименте, для большей части данных разница составляет 2 – 2.5 дБ. Одной из причин данного различия результатов является тот факт, что экспериментальное значение резонансной амплитуды колебаний верхнего конца балки на первом резонансе без управления получено не совсем точно вследствие слишком высокой величины шага по частоте при снятии экспериментальной АЧХ. Таким образом, в расчетах на основе эксперимента

значение  $w_1$  без управления оказывается заниженным, следовательно, разница в величине резонансного пика при управлении  $\Delta w_1$  оказывается завышенной. Поэтому в данной ситуации следует больше доверять результатам расчетов на основе теоретических, а не экспериментальных характеристик.

Таблица 5.2.

Результаты работы различных систем управления, полученные экспериментально и теоретически

Система управления		$K_{p1}$	$K_{p2}$	$\Delta w_1$ , дБ	$\Delta w_2$ , дБ
Локальная №1	эксперимент	0.45	0.55	- 12.7	4.8
	эксп. + теор.	0.45	0.55	- 13.2	4.7
	расчет	0.7	0.75	-15.1	1.4
Локальная №2	эксперимент	0.055	0.055	- 5.2	- 18.9
	эксп. + теор.	0.055	0.055	- 5.6	- 19.1
	расчет	0.08	0.08	- 7	- 19.5
Модальная №1	эксперимент	0.1	0.02	- 15.7	- 17.9
	эксп. + теор.	0.1	0.02	- 15.7	- 17.9
	расчет	0.17	0.044	- 18.3	- 19.3
Модальная №2	эксп. + теор.	0.073	0.00075	- 19.5	- 28.9
	расчет	0.176	0.00113	- 28.9	- 29.2

Наиболее сильно разница между численными и экспериментальными результатами проявляется на первом резонансе для модальной системы №2: экспериментальный результат почти на 10 дБ превышает теоретический. Это свидетельствует о том, что полученные численно характеристики объекта все же не совпадают с экспериментальными, в то время как рассматриваемая система управления была синтезирована именно исходя из численных характеристик. При этом надо отметить, что эффективность данной системы на первом резонансе, даже

посчитанная на основе экспериментальных характеристик, все равно превышает эффективность всех остальных созданных систем управления.

В целом необходимо отметить, что теоретическое моделирование как самого объекта управления, так и работы систем управления дает надежные результаты, в основном согласующиеся с экспериментом. Таким образом, предложенный способ численного моделирования вынужденных колебаний балки с управлением является мощным инструментом, позволяющим проектировать эффективные системы управления. Данный метод позволил создать и протестировать модальную систему управления №2, значительно превосшедшую по эффективности все системы управления, созданные в рамках эксперимента.

Итак, в данной главе:

- был описан способ теоретического получения результатов работы систем управления на основе частотных характеристик объекта без управления (как снятых экспериментально, так и полученных методом конечно-элементного моделирования объекта). Данным способом были вычислены результаты работы систем управления, исследованных в рамках эксперимента, и полученные данные оказались близки к экспериментальным;

- были созданы две конечно-элементных модели экспериментальной установки, рассматриваемой в предыдущих главах (балочная и 3D-модель), частотные характеристики объекта управления, полученные на основе данных моделей, достаточно хорошо согласуются с экспериментальными;

- в результате была предложена методика проектирования систем управления для рассмотренной в предыдущих главах экспериментальной задачи, позволяющая создавать и тестировать различные локальные и модальные системы управления без проведения какого-либо эксперимента, исключительно на основе численных данных. Созданная и протестированная в соответствии с данной методикой модальная система управления оказалась более эффективной с точки зрения подавления вынужденных резонансных колебаний металлической балки, чем все системы, испытанные ранее в рамках эксперимента.

## Заключение

Основные научные результаты выполненной работы:

1) Проведено экспериментальное исследование, включающее практическую реализацию локального и модального подходов к управлению колебаниями упругой системы на примере гашения вынужденных изгибных колебаний тонкой металлической балки. В рамках данного исследования собрана экспериментальная установка, включающая металлическую балку, упруго заземленную в промежуточном сечении, и используемые для целей управления пьезоэлектрические сенсоры и актуаторы, соединенные через дискретный контроллер. Для определения собственных форм изгибных колебаний балки в программном комплексе Matlab создана численная модель системы, результаты анализа которой оказались в хорошем соответствии с экспериментом. На основании полученных данных определено оптимальное расположение на балке сенсоров и актуаторов.

2) Предложен и применен в рамках выполненного исследования метод экспериментальной идентификации, позволяющий определить оптимальные параметры линейного преобразования измеренных и управляющих сигналов, которое обеспечивает разделение форм колебаний распределенного объекта в контурах модальной системы управления. Результаты проведенной процедуры с большой точностью совпали с оценками, полученными в ходе численного анализа собственных форм колебаний объекта. Данные значения параметров обеспечили качественное разделение первой и второй форм изгибных колебаний балки в модальной системе управления.

3) Отработана методика синтеза передаточных функций для контуров обратной связи локальных и модальных систем управления, основанная на численном моделировании работы данных систем без проведения эксперимента. Указанная методика позволяет программным образом сопоставлять результаты работы систем управления с различными параметрами передаточных функций и определять наиболее эффективные из них. Полученные с использованием данной

методики системы оказались способны эффективно снижать амплитуду резонансных колебаний как на первой, так и на второй собственной частоте изгибных колебаний балки.

4) В результате проведенного экспериментального исследования продемонстрировано преимущество модального подхода к управлению перед локальным, проявляющееся в том случае, когда необходимо бороться с вынужденными колебаниями системы в диапазоне частот, содержащем несколько собственных частот объекта. Данный результат объясняется тем, что каждый контур модальной системы управления использует все имеющиеся сенсоры и актуаторы и настраивается таким образом, чтобы в первую очередь бороться с колебаниями на соответствующей резонансной частоте, следовательно, контуры модальной системы имеют лучшую специализацию и более эффективны, чем контуры локальной системы управления.

5) Выводы экспериментального исследования о преимуществе модального подхода над локальным подтверждаются численным исследованием, проведенном для другой постановки задачи, предполагающей шарнирное закрепление балки и иное расположение на ней сенсоров и актуаторов. Данное исследование проводилось в программном комплексе Matlab в разложении по собственным формам колебаний. Корректность использования указанного метода подтверждается конечно-элементным моделированием данной системы.

6) В рамках численного исследования проведено сравнение использования при создании системы управления различных моделей работы сенсоров и актуаторов. Показано, что при синтезе системы управления колебаниями распределенного объекта необходимо применять полную модель работы сенсоров и актуаторов, учитывающую влияние данных элементов на собственные формы колебаний объекта, поскольку в случае использования упрощенной модели эффективность управления значительно снижается.

7) В программном комплексе ANSYS созданы две конечно-элементные модели металлической балки с пьезоэлементами, исследуемой в эксперименте: балочная и 3D-модель. Полученные методом КЭ-моделирования частотные

характеристики объекта управления оказались близки к экспериментальным. На основе КЭ-моделирования была синтезирована модальная система управления, превзошедшая по эффективности все системы, созданные в рамках эксперимента: разница между рассматриваемыми системами в уровне гашения колебаний составила 10 дБ на первом и втором резонансах.

8) Разработана методика проектирования модальных систем управления распределенным упругим объектом, осуществляющих гашение вынужденных резонансных колебаний данного объекта. Данная методика включает в себя определение матриц – синтезатора и анализатора форм, обеспечивающих раздельное управление различными формами колебаний объекта, а также синтез регуляторов для отдельных контуров управления, обеспечивающих эффективную работу системы управления на резонансных частотах, соответствующих указанным формам колебаний. Эффективность указанной методики продемонстрирована численно на примере гашения вынужденных колебаний тонкой металлической балки, закрепленной в одной точке, с помощью двух пьезоэлектрических сенсоров и двух актуаторов: снижение амплитуды колебаний балки на первом и втором резонансах составило 29 дБ.

## Литература

- [1] Арсеньев Д.Г., Котов В.В., Полянский В.А., Смирнова Н.А. Биоморфное управление в задаче о виброизоляции случайных колебаний // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление, 2013, 2(169), с. 112-116
- [2] Беляев А.К., Котов В.В., Полянский В.А., Смирнова Н.А. Биоморфное управление в задаче об активном подавлении колебаний // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия, 2014, 1(1), с. 96-106
- [3] Беляев А.К., Полянский В.А., Смирнова Н.А., Федотов А.В. Процедура идентификации при модальном управлении распределенным упругим объектом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, 2017, 10(2), с. 69-81
- [4] Колюбин С.А., Мусалимов В.М. Биомехатроника: шаги навстречу к энергоэффективным роботам // Control Engineering Россия, 2017, 2(68), с. 54-57
- [5] Котов В.В., Арсеньев Д.Г., Полянский В.А. Квазиоптимальное биоморфное подавление случайных колебаний упругих объектов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление, 2014, 5(205), с. 100-107
- [6] Кузовков Н.Т. Модальное Управление и Наблюдающие Устройства, М.: Машиностроение, 1976
- [7] Ошмарин Д.А., Севодина Н.В., Юрлов М.А., Юрлова Н.А. Вариант мультимодального демпфирования колебаний электроупругих конструкций за счет соответствующего подбора параметров внешней электрической цепи // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки», 2016, 20(3), с. 475-495
- [8] Федотов А.В. Применимость упрощенных моделей пьезоэлементов в задаче активного гашения колебаний // Известия высших учебных заведений. Приборостроение, 2020, 63(2), с. 126-132

- [9] Федотов А.В. Численное моделирование гашения колебаний распределенной системы с помощью пьезоэлементов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, 2019, 12(1), с. 142-155
- [10] Юрлов М.А., Ошмарин Д.А., Севодина Н.В., Юрлова Н.А. Решение задачи о собственных колебаниях электроупругих тел с внешними электрическими цепями на основе их электрического аналога // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 2018, 4, с. 266-277
- [11] Alkhatib R., Golnaraghi M.F. Active structural vibration control: a review // The Shock and Vibration Digest, 2003, 35(5), p. 367-383
- [12] Balas M.J. Modal control of certain flexible systems // SIAM Journal on Control and Optimization, 1978, 16, p. 450-462
- [13] Belyaev A.K., Fedotov A.V., Irschik H., Nader M., Polyanskiy V.A., Smirnova N.A. Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems // Structural Control and Health Monitoring, 2018, 25(2), e2105.
- [14] Braghin F., Cinquemani S., Resta F. A new approach to the synthesis of modal control laws in active structural vibration control // Journal of Vibration and Control, 2012, 19(2), p. 163-182
- [15] Cazzulani G., Resta F., Ripamonti F., Zanzi R. Negative derivative feedback for vibration control of flexible structures // Smart Materials and Structures, 2012, 21, 075024
- [16] Chopra I. Review of state of art of smart structures and integrated systems // AIAA Journal, 2002, 40(11), p. 2145–2187
- [17] Donoso A., Bellido J.C. Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile // Structural and Multidisciplinary Optimization, 2009, 38, p. 347-356
- [18] Dorf R. C., Bishop R. H. Modern Control Systems, 12th ed., Prentice Hall, New Jersey, 2011

- [19] Elliott S.J., Serrand M., Gardonio P. Feedback stability limits for active isolation systems with reactive and inertial actuators // *Journal of Vibration and Acoustics*, 2001, 123, p. 250-261
- [20] Fedotov A.V. Active vibration suppression of Bernoulli-Euler beam: experiment and numerical simulation // *Cybernetics and Physics*, 2019, 8(4), p. 228-234
- [21] Fisco N.R., Adeli H. Smart structures: part I – active and semi-active control // *Scientia Iranica, Transaction A: Civil Engineering*, 2011, 18(3), p. 275-284
- [22] Fisco N.R., Adeli H. Smart structures: Part II – Hybrid control systems and control strategies // *Scientia Iranica, Transactions A: Civil Engineering*, 2011, 18(3), p. 285-295
- [23] Franklin G. F., Powell J. D., Emami-Naeini A. *Feedback Control of Dynamic Systems*, 5th ed., Prentice Hall, New Jersey, 2006
- [24] Fuller C.R., Elliot S.J., Nelson P.A. *Active Control of Vibration*, Academic Press, 1996
- [25] Gould L.A., Murray-Lasso M.A. On the modal control of distributed parameter systems with distributed feedback // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1966, 11(4), p. 729-737
- [26] Gupta V., Sharma M., Thakur N. Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: a technical review // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2010, 21, p. 1227-1243
- [27] Haftka R.T., Adelman H.M. An analytical investigation of shape control of large space structures by applied temperatures // *AIAA Journal*, 1985, 23(3), p. 450-457
- [28] Hansen C., Snyder S., Qiu X., Brooks L., Moreau D. *Active Control of Noise and Vibration*, 2nd Edition, CRC Press, 2012
- [29] Huber D.W. *Modeling and Control of Thin Plate Structures by Piezoelectric Actuators and Sensors*, Trauner Verlag, Linz, 2011
- [30] Hurlebaus S., Stöbener U., Gaul L. Vibration reduction of curved panels by active modal control // *Computers and Structures*, 2008, 86, p. 251-257
- [31] Inman D.J. Active modal control for smart structures // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2001, 359, p. 205-219

[32] Inman D.J. *Vibration, with Control, Measurement and Stability*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989

[33] Irschik H. A review on static and dynamic shape control of structures by piezoelectric actuation // *Engineering Structures*, 2002, 24, p. 5-11

[34] Irschik H., Krommer M., Belyaev A.K., Schlacher K. Shaping of piezoelectric sensors/actuators for vibrations of slender beams: coupled theory and inappropriate shape functions // *International Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1999, 9, p. 546-554

[35] Irschik H., Krommer M., Pichler U. Dynamic shape control of beam-type structures by piezoelectric actuation and sensing // *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 2003, 17, p. 251-258

[36] Irschik H., Krommer M., Pichler U. Shaping distributed piezoelectric self-sensing layers for static shape control of smart structures // *Journal of Structural Control*, 2000, 7(2), p. 173-189

[37] Kim S.-M., Elliott S.J., Brennan, M. J. Decentralized control for multichannel active vibration isolation // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001, 9(1), p. 93-100

[38] Kim S.-M., Wang S., Brennan M.J. Comparison of negative and positive position feedback control of a flexible structure // *Smart Materials and Structures*, 2011, 20, 015011

[39] Krommer M. On the correction of the Bernoulli-Euler beam theory for smart piezoelectric beams // *Journal of Smart Materials and Structures*, 2001, 10, p. 668-680

[40] Krommer M., Irschik H. An electromechanically coupled theory for piezoelastic beams taking into account the charge equation of electrostatics // *Acta Mechanica*, 2002, 154, p. 141-158

[41] Krommer M., Irschik H. On the influence of the electric field on free transverse vibrations of smart beams // *Journal of Smart Materials and Structures*, 1999, 8, p. 401-410

[42] Krommer M., Irschik H. Sensor and actuator design for displacement control of continuous systems // *Smart Structures and Systems*, 2007, 3(2), p. 147-172

[43] Krommer M., Irschik H., Zellhofer M. Design of actuator networks for dynamic displacement tracking of beams // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2008, 15, p. 235-249

[44] Krommer M., Zellhofer M., Heilbrunner K.-H. Strain-type sensor networks for structural monitoring of beam-type structures // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009, 20, p. 1875-1888

[45] Kumar R., Singh S.P., Chandrawat H.N. MIMO adaptive vibration control of smart structures with quickly varying parameters: Neural networks vs classical control approach // *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 307, p. 639-661

[46] Lee C.-K., Moon F.C. Modal sensors/actuators // *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1990, 57, p. 434-441

[47] Meirovitch L. *Dynamics and Control of Structures*, Wiley, 1990

[48] Meirovitch L., Baruh H., Öz H. A comparison of control techniques for large flexible systems // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1983, 6(4), p. 302-310

[49] Musalimov V.M., Monahov Y.S., Tamre M., Robak D., Sivitski A., Aryassov G., Penkov I. Modeling of the human lower-limb motion, design and control of knee joint orthosis // *International Review on Modelling and Simulations*, 2017, 10(5), p. 371-376

[50] Musalimov V., Monahov Y., Tamre M., Robak D., Sivitski A., Aryssov G., Penkov I. Modelling of the human knee joint supported by active orthosis // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 23(1), p. 107-120

[51] Nader M. *Compensation of Vibrations in Smart Structures: Shape Control, Experimental Realization and Feedback Control*, Trauner Verlag, Linz, 2008

[52] Pachter M., Kobylarz T., Houppis C. H. Literal Nyquist stability criterion for MIMO control systems // *International Journal of Control*, 1996, 63(1), p. 55-65

[53] Peukert C., Pöhlmann P., Merx M., Müller J., Ihlenfeldt S. Investigation of local and modal based active vibration control strategies on the example of an elastic system // *Journal of Machine Engineering*, 2019, 19(2), p. 32-45

[54] Polyanskiy V.A., Belyaev A.K., Smirnova N.A., Fedotov A.V. Influence of Sensors and Actuators on the Design of the Modal Control System. In: Matveenko V.,

Krommer M., Belyaev A., Irschik H. (eds) Dynamics and Control of Advanced Structures and Machines, 2019, Springer, Cham, p. 127-135

[55] Porter B., Crossley T.R. Modal Control: Theory and Applications, Taylor and Francis, 1972

[56] Preumont A. Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems, Springer, Dordrecht, 2006

[57] Preumont A. Vibration Control of Active Structures: An Introduction, 3rd Edition, Springer-Verlag, 2011

[58] Resta F., Ripamonti F., Cazzulani G., Ferrari M. Independent modal control for nonlinear flexible structures: An experimental test rig // Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(8), p. 961-972

[59] Schoeftner J., Brandl A., Irschik H. Control of stress and damage in structures by piezoelectric actuation: 1D-theory and monofrequent experimental validation // Structural Control and Health Monitoring, 2019, e2338

[60] Serrand M., Elliott S.J. Multichannel feedback control for the isolation of base-excited vibration // Journal of Sound and Vibration, 2000, 234(4), p. 681-704

[61] Sevodina N. V., Yurlova N. A., Oshmarin D. A. The optimal placement of the piezoelectric element in a structure based on the solution of the problem of natural vibrations // Solid State Phenomena, 2016, 243, p. 67-74

[62] Stavroulakis G.E., Foutsitzi G., Hadjigeorgiou E., Marinova D., Baniotopoulos C.C. Design and robust optimal control of smart beams with application on vibrations suppression // Advances in Engineering Software, 2005, 36, p. 806-813

[63] Stavroulakis G.E., Marinova D.G., Hadjigeorgiou E., Foutsitzi G., Baniotopoulos C.C. Robust active control against wind-induced structural vibrations // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2006, 94, p. 895-907

[64] Stöbener U., Gaul L. Modal vibration control for PVDF coated plates // Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2000, 11, p. 283-293

[65] Sunar M., Rao S.S. Recent advances in sensing and control of flexible structures via piezoelectric materials technology // Applied Mechanics Review, 1999, 52(1), p. 1-16

[66] Tani J., Takagi T., Qiu J. Intelligent material systems: application of functional materials // *Applied Mechanics Reviews*, 1998, 51, p. 505-521

[67] Tzou H. S., Hollkamp J. J. Collocated independent modal control with self-sensing orthogonal piezoelectric actuators (theory and experiment) // *Journal of Smart Materials and Structures*, 1994, 3, p. 277-284

[68] Zenz G., Berger W., Gerstmayr J., Nader M., Krommer M. Design of piezoelectric transducer arrays for passive and active modal control of thin plates // *Smart Structures and Systems*, 2013, 12(5), p. 547-577