

ПЕРМСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Научная лаборатория

«Механика перспективных конструкционных и функциональных материалов»

*На правах рукописи*

**Федулов Борис Никитович**

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
В СЛОЖНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

*Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела*

*Научный консультант: член-корреспондент РАН, профессор Е. В. Ломакин*

Пермь 2017 г.

# Оглавление

Введение . . . . .	6
<b>1 Свойства неоднородных материалов и модели для их описания</b>	<b>17</b>
1.1 Моделирование пластичности и прочности материала со сложной внутренней структурой . . . . .	21
1.1.1 Критерии пластичности и прочности . . . . .	22
1.1.2 Деградация свойств материала с последующим разрушением . . . . .	28
1.2 Моделирование технологических задач для композиционных материалов на основе полимерного связующего . . . . .	35
1.3 Нелинейная упругость конструкционных композитов . . . . .	38
1.4 Моделирование прочности слоистых композитов . . . . .	42
1.5 Выводы к главе 1 . . . . .	50
<b>2 Задачи пластичности дилатирующих сред</b>	<b>52</b>
2.1 Формализация вида напряженного состояния в сплошной среде	53
2.2 Моделирование пластического течения дилатирующих сред .	57
2.2.1 Определяющие соотношения пластического течения с зависимостью свойств материалов от вида нагружения	58

2.2.2	Основные соотношения для условий плоской деформации . . . . .	63
2.2.3	Аналитические решения конкретных задач . . . . .	71
2.2.4	Метод конечных элементов для физически нелинейного материала . . . . .	111
2.2.5	Численные решения конкретных задач . . . . .	128
2.3	Расширения предложенного подхода . . . . .	154
2.3.1	Модель пластичности с учетом влияния высоких скоростей деформирования и вида нагружения . . . . .	154
2.3.2	Модель пластичности с учетом анизотропии свойств материалов и вида нагружения . . . . .	169
2.4	Выводы к главе 2 . . . . .	179

### **3 Анализ прочности в технологических задачах композиционных материалов 181**

3.1	Композиты на основе термопластичного связующего, необходимые модели для оценки прочности . . . . .	184
3.2	Моделирование формования термопластичного композита . . . . .	189
3.3	Кристаллизация термопластичного материала . . . . .	201
3.4	Жесткость термопластичного материала . . . . .	206
3.5	Усадка термопластичного материала . . . . .	211
3.6	Эффективные свойства композиционного материала . . . . .	213
3.7	Усадка композиционного материала . . . . .	216
3.8	Анализ остаточных напряжений . . . . .	217
3.9	Оценка повреждений . . . . .	223
3.9.1	Анализ прочности на изгиб . . . . .	229

3.9.2	Трансверсальное нагружение однонаправленного композита . . . . .	234
3.9.3	Анализ прочности интерфейса . . . . .	237
3.9.4	Вид напряженного состояния в матрице и интерфейсе при трансверсальном нагружении однонаправленного композита . . . . .	241
3.10	Механические характеристики в зависимости от температуры и степени кристалличности . . . . .	245
3.11	Выводы к главе 3 . . . . .	251
<b>4</b>	<b>Нелинейная упругость композиционных материалов</b>	<b>254</b>
4.1	Анизотропная упругость с учетом вида напряженного состояния . . . . .	257
4.2	Анизотропная упругость с учетом нелинейности при сдвиговых нагрузках . . . . .	260
4.2.1	Решение задачи о сжатии анизотропной полосы, ослабленной круговым вырезом, с учетом сдвиговой нелинейности . . . . .	264
4.3	Анизотропная упругость с учетом нелинейности при сдвиговых нагрузках и зависимости свойств от вида нагружения . . . . .	267
4.4	Выводы к главе 4 . . . . .	273
<b>5</b>	<b>Моделирование разрушения композиционных материалов на основе параметров поврежденности</b>	<b>275</b>
5.1	Набор предположений для построения определяющих соотношений . . . . .	277
5.2	Пример построения определяющих соотношений . . . . .	281

5.2.1	Верификация . . . . .	288
5.3	Решение задачи о сжатии анизотропной полосы, ослабленной круговым вырезом, с учетом сдвиговой нелинейности совместно с ростом поврежденности . . . . .	299
5.4	Усложнение критерия начала разрушения . . . . .	301
5.5	Зависимость критерия разрушения от параметра поврежденности и скорости изменения параметра поврежденности . . .	303
5.6	Выводы к главе 5 . . . . .	307
	Выводы . . . . .	309
	Список литературы . . . . .	313

# **Введение**

Материалы со сложной неоднородной структурой широко используются в различных отраслях промышленности. Выбор конструкторов в их пользу связан с более эффективной возможностью решать поставленные перед ними задачи. Например, при использовании жаропрочного титана в турбореактивных двигателях пористость такого материала позволяет получить необходимые прочностные характеристики при повышенных температурных воздействиях. Широкое применение получили композиционные материалы, которые имеют ряд существенных преимуществ и позволяют варьировать необходимым образом прочностные характеристики создаваемого нового изделия при существенном снижении массы. Более того, можно сказать, что в инженерной практике, на протяжении всей своей истории, широко использовались различные материалы со сложной внутренней структурой в качестве конструкционных, к которым относятся бетоны, керамики, грунты, скальные породы, сыпучие среды и многие другие.

### ***Актуальность темы***

На практике, при проектировании нового изделия всегда встает вопрос предельного состояния разрабатываемой конструкции. Всегда есть желание проверить прочностные характеристики нового проектируемого элемента и конструкции в целом путем эксперимента. Но такой путь весьма затратен, не гарантирует проверку всех возможных ситуаций и с очень большой долей вероятности может не привести к желаемым результатам, а во многих случаях не осуществим. Такая ситуация заставляет инженеров и научных специалистов искать пути и возможности для моделирования, анализа и предсказания прочности создаваемого изделия.

В настоящее время накоплен большой опыт работы с численными методами анализа прочности, что позволяет проводить расчеты объектов про-

извольной геометрии и учитывать практически все факторы воздействия на конструкцию. Основной вопрос возникает при выборе методики такого анализа или создания какой-либо новой для конкретного материала. Ситуация усложняется, если такой материал является новым и известны лишь частично его характеристики.

В концентрированном виде ответ на этот вопрос дает создание специальной математической модели для такого материала, которая включает в себя определяющие соотношения, сформулированные в виде связи между напряжениями и деформациями. Введение такой модели практически полностью формализует все вопросы проектирования, от необходимой экспериментальной программы для используемого материала, до возможностей предсказания прочности проектируемого изделия в целом.

Введение такой формализации приводит к возможности оптимизации конструкций на более высоком уровне, что в свою очередь, дает возможность получения более достоверных сведений относительно максимального потенциала от использования конкретного материала и повышает конкурентные преимущества создаваемых изделий.

С другой стороны, такая формализация, существенным образом повышает безопасность эксплуатации конструкций. Даже в изделиях, где в процесс проектирования входит большое количество испытаний, все равно невозможно проконтролировать все элементы и области конструкции, потому что, любые испытания, как правило, дают только интегральные прочностные показатели.

**Целью работы** является, как раз, изучение и выработка подходов к моделированию деформирования и созданию определяющих соотношений для материалов со сложной внутренней структурой. Причем рассматрива-



ется вся последовательность стадий деформирования от упругой части до полного разрушения материала.

### ***Научная новизна работы***

В работе показан возможный подход к анализу пластического деформирования сред, демонстрирующих эффект дилатансии, присущего, по видимому, всем материалам со сложной неоднородной структурой. Решены некоторые конкретные задачи предельного состояния для таких материалов.

Показаны возможные расширения описанной модели пластического деформирования. На основе одного из таких расширений предложена модель пластичности, учитывающая скоростное упрочнение. Для примера построена модель пластичности для титанового сплава ВТ6 с проведением сравнительного анализа с экспериментальными данными. На примере другого расширения предложена анизотропная модель пластичности для металлических сплавов, полученных методом прокатки или, в общем случае, методом обработки давлением.

На основе подхода, учитывающего пластическую дилатансию, предложена методика анализа прочности композиционного материала в технологическом процессе изготовления. Такая методика позволяет оценить прочностные характеристики материала в финальном изделии на основе моделирования укладки армирующих элементов и истории температурного воздействия. Проанализирована прочность и вид напряженного состояния матрицы композита при трансверсальном нагружении.

Предложены модели нелинейной упругости для слоистого композита, учитывающие различную жесткость материала в зависимости от типа нагрузки совместно с эффектом падения сдвиговой жесткости при росте ве-

личин сдвиговой деформации.

Сформулирован ряд предположений, позволяющий выстроить подход к моделированию разрушения слоистого композита. Предложенный подход проиллюстрирован на примере построения теории, в которой в качестве входных параметров используются только стандартные инженерные характеристики материала, что не требует сложной экспериментальной программы.

На примере задачи о разрушении композитной пластины с круговым вырезом в условиях сжатия, проведено сравнение подходов, основанных на линейной модели упругости и модели, учитывающей сдвиговую нелинейность свойств материала. Было показано различие в областях повреждения, предсказанных данными подходами, при практически полном совпадении интегральной предельной нагрузки для образца.

Показано возможное расширение предложенного подхода для моделирования разрушения композита, в котором учитывается скоростное упрочнение материала. Предложена аналитическая формулировка для оценки влияния скорости накопления повреждений в материале на итоговую прочность. Продемонстрирован набор необходимых параметров модели на примере экспериментальных исследований с высоким диапазоном скоростей деформирования.

**Методы исследования** в представленной работе основаны на механике деформирования твердых тел и сплошной среды. Решения конкретных задач производилось как численно, так и на основе аналитических построений. В работе интенсивно используется метод конечных элементов, реализованный в системе общего прочностного анализа Abaqus, с внедрением собственных программных процедур.

***Достоверность и обоснованность результатов*** следует из сравнения результатов, полученных аналитическими методами и численными, с существенно разными предположениями. С другой стороны, все предложенные новые модели деформирования и реализованные подходы сравнивались с экспериментальными данными и показали высокую степень корреляции результатов.

### ***Практическая значимость работы***

Фундаментальные результаты работы могут быть использованы во всех областях индустрии где возникает вопрос прочности в целом. При этом во всех разделах работы предлагаются конкретные практические выходы с экспериментальным сравнением и набором конкретных данных для непосредственного проведения прикладных расчетов.

В первой главе предложены модели пластичности с определенным набором параметров для титанового сплава ВТ6 и алюминия АД33, полученного методом экструзии.

Вторая глава содержит законченную методику для работы с термопластичным композитом на основе связующего ПЭЭК, с полным набором параметров, характеризующих все фазовые стадии материала.

Результаты последних глав применимы ко всем вариантам конструктивных композитов, причем предложенные модели апробированы на конкретных результатах экспериментальных исследований с необходимыми наборами констант для прочностного анализа.

Для всех новых определяющих соотношений были написаны специальные подпрограммы, позволяющие моделировать деформирование материалов и определять напряженно-деформированное состояние для их использования в современных промышленных системах прочностного анализа.

***Личное участие автора*** в данной работе заключается в решении всех конкретных задач и анализе экспериментальных данных, а также, в формулировке части новых моделей материалов и определяющих соотношений.

### ***Апробация работы***

Основные результаты диссертации опубликованы в международных рецензируемых журналах индексируемых в системах Scopus или Web of Science, а также из списка ВАК [51–53, 79, 83, 152, 159–164, 242, 243, 319], в сборниках научных статей [49, 81, 123] и трудах конференций [48, 73, 78, 84, 124, 165–168, 215, 234–236, 238–240, 295, 299–303, 305].

Основные положения диссертации и работа в целом докладывались и обсуждались на ряде российских и международных конференций и семинаров:

- ICAF2017 The International Committee on Aeronautical Fatigue and Structural Integrity, Nagoya, Japan, 2017,
- ISDMM, International Symposium on Defects and Material Mechanics 2017, Lyon, 26-29 June, 2017,
- ICF14 — 14th International Conference on Fracture, Rhodes, Greece, June 18-23, 2017,
- ECCM 2016 — the 17th European Conference on Composite Materials Munich, Germany, 26-30th June 2016 (Scopus),
- 9th European Solid Mechanics Conference (ESMC 2015) July 6 - 10, 2015, Leganes-Madrid, Spain,
- CAMX 2015 — Composites and Advanced Materials Expo (Scopus),

- International SAMPE Technical Conference, 2015-January (Scopus),
- 20th International Conference on Composite Materials, Copenhagen, Denmark, July 19-24, 2015,
- Simulia Community Conference, May 18–21, 2015 | Berlin, Germany,
- The Composites and Advanced Materials Expo, Dallas, 27-29th October 2015,
- 20th International Conference on Composite Materials, Copenhagen, 19-24th July 2015,
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики 2015,
- International conference "Deformation and fracture of composite materials and structures. (DFCMS-2014), Moscow, 10-13 November 2014,
- Системы управления жизненным циклом изделий авиационной техники: актуальные проблемы, исследования, опыт внедрения и перспективы развития, Ульяновск – 2014,
- 20th European Conference on Fracture - Fracture at all scales July 2014 Trondheim, Norway,
- 16th European Conference on Composite Materials ECCM16, Seville, Spain, June 22-26, 2014,
- Simulia community conference may, 2014, Providence, RI USA,

- 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI) 5th European Conference on Computational Mechanics (ECCM V) 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI), 2014, Barcelona, Spain,
- International SAMPE Technical Conference 2013 (Scopus),
- Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел - научное наследие Ю.Н.Работнова (к 100-летию со дня рождения),
- Symposium: Design with Composites, CompositesWeek@Leuven, Leuven, Belgium, September 18, 2013,
- Conf. XVIII Winter school of continuum mechanics, Federal State Organization "Institute of continuum mechanics of Ural branch of RAS Perm, 2013,
- DYMAT 2009 - 9th International Conference on the Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic Loading
- IX всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 2006.

### ***Структура работы***

Работа состоит из введения, 5-ти глав и заключения. В первой главе работы приводится обзор наработанных методов для моделирования материалов со сложной внутренней структурой, описание которых невозможно при помощи классических методов.

Вторая глава посвящена анализу моделирования пластичности дилатирующих сред. Описываются общие подходы. Рассмотрено решение конкретных задач предельного состояния аналитическими методами. Приводится описание алгоритмов для построения численных решений. Проводится сравнительный анализ результатов численного моделирования и аналитических результатов. Предлагаются возможные расширения модели пластичности на примере конкретных металлических сплавов.

В третьей главе, на основе предложенных моделей пластичности рассматривается построение методики для анализа прочности композиционных материалов в технологическом цикле их производства. Рассматривается путь получения остаточных напряжений и оценки возможного зарождения дефектов в композиционном изделии.

Четвертая глава посвящена развитию подходов нелинейной упругости применительно к композиционным материалам. Предлагаются специальные модели для анизотропных материалов с учетом чувствительности жесткостных свойств к типу нагружения, а также нелинейной зависимости сдвиговой жесткости слоистого композита от величин сдвиговых деформаций по отношению к направлению армирования материала.

Последняя глава содержит формулировку предположений, позволяющих описать теорию разрушения слоистых композитов. Рассматривается пример построения такой теории, основанной только на стандартных экспериментальных данных для слоистых композитов. Демонстрируются примеры расчетов и анализируются экспериментальные данные. Показываются возможные расширения предложенной теории на примере одновременного учета нелинейной упругости и чувствительности свойств материалов к высоким скоростям деформирования.

Работа выполнена на кафедре теории пластичности механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и, частично, в научной лаборатории «Механика перспективных конструкционных и функциональных материалов», созданной в Пермском национальном исследовательском политехническом университете в рамках гранта Правительства Российской Федерации, постановление № 220 от 9 апреля 2010 г. «О мерах по привлечению ведущих ученых в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования, научные учреждения государственных академий наук и государственные научные центры Российской Федерации» (договор № 14.В25.310006 от 24 июня 2013 года, научный руководитель член-корр. РАН Е.В. Ломакин).

Автор диссертации выражает искреннюю благодарность члену-корреспонденту РАН Ломакину Евгению Викторовичу за постоянную поддержку и терпение в ходе выполнения данной работы. Автор также выражает благодарность за поддержку Российскому фонду фундаментальных исследований и Правительству Российской Федерации.



## **Глава 1**

# **Свойства неоднородных материалов и модели для их описания**

Вопрос возможности моделирования деформирования материалов со сложной внутренней структурой имеет довольно долгий и сложный путь развития. По-видимому, одно из первых исследований на эту тему сделал Кулон еще в 1776 году [145]. Проблему моделирования таких сред можно обозначить, как противопоставление хорошо известным определяющим соотношениям линейной упругости и критериям пластичности, основанным на интенсивности сдвиговых напряжений, таких как, условия Губера-Мизеса или Треска. При этом имеет смысл подчеркнуть, что речь идет не о моделях гипер-упругости, которые нелинейные по своей сути, а именно о деформировании материала в условиях малых значений градиентов перемещений.

Довольно наглядный пример, дающий представление об эффектах деформирования материалов такого рода, можно найти в работах Уэлша [330–332]. Целью данных работ было изучение сжимаемости горных пород при действии всестороннего сжатия, а также анализ эффективной жесткости материала при сжатии в зависимости от концентрации дефектов.

Рассмотрим, следуя Уэлшу, изотропный материал, идеально упругий, в котором по всему объему распределены трещины. Предположим, что трещины ориентированы случайным образом и расположены на достаточном расстоянии друг от друга, чтобы можно было пренебречь их взаимным влиянием, то есть случай достаточно малой концентрации, тогда такой материал также обладает изотропными свойствами. Весь объем тела можно разбить на объемы - ячейки, содержащие каждый только одну трещину, и решая задачу только для выделенной ячейки можно получить осредненные характеристики для всего объема. При определении свойств такого материала рассмотрим трещины в виде вытянутых эллипсоидов вращения.

При рассмотрении тела, содержащего трещины с нулевым расхождением берегов, для эффективного модуля объемного расширения  $K_{эфф}^+$  в условиях плоской деформации получаем следующую формулу [330]:

$$\frac{1}{K_{эфф}^+} = \frac{1}{K} \left[ 1 + \frac{4\pi(1 - \nu^2) l^3}{3(1 - 2\nu) v} \right],$$

где  $K$  и  $\nu$  — модуль объемного сжатия и коэффициент Пуассона сплошного материала,  $l$  — средняя полудлина трещин,  $v$  — средний объем выделенных ячеек тела. Отношение  $l^3/v$  характеризует концентрацию трещин в теле.

При действии всестороннего сжатия трещины закрыты, и относительное перемещение берегов равно нулю. В этом случае модуль эффективного объемного сжатия  $K_{эфф}^-$  равен модулю объемного сжатия материала без дефектов

$$K_{эфф}^- = K.$$

При одноосном растяжении происходит раскрытие большинства трещин, за исключением трещин, ориентированных вдоль направления действия нагрузки. При этом модуль Юнга при растяжении в условиях плоской деформации определяется выражением

$$\frac{1}{E_{эфф}^+} = \frac{1}{E} \left[ 1 + \frac{4\pi(1 - \nu^2) l^3}{3 v} \right],$$

где  $E$  — модуль Юнга в сплошном материале.

В условиях одноосного сжатия все трещины закрыты, но при этом возможно относительное перемещение контактирующих берегов трещин. Естественное предположение относительно взаимодействия контактирующих берегов трещин — это закон сухого трения, при котором касательное напряжение трения  $\tau_f$  связано с нормальным напряжением на поверхности

трещины  $\sigma_n$  соотношением

$$\tau_f = \mu\sigma_n,$$

где  $\mu$  — коэффициент трения. Если на поверхности трещины возникает касательное напряжение  $\tau$ , то относительное перемещение берегов трещин будет происходить только в том случае, если  $\tau > \tau_f$ . Касательное напряжение на поверхности трещины  $\tau = \sigma \cos \beta \sin \beta$ , нормальное напряжение  $\sigma_n = \sigma \sin^2 \beta$ , здесь  $\sigma$  это сжимающие напряжения заданные на границе тела,  $\beta$  это угол определяющий ориентацию трещины. Поэтому условие относительного перемещения берегов трещин можно представить так —  $\beta < \arctg(1/\mu)$ . Вследствие полученного условия не все берега трещин останутся неподвижными, что ослабит эффективный модуль Юнга  $E_{эфф}^-$ , и для случая плоской деформации получим

$$\frac{1}{E_{эфф}^-} = \frac{1}{E} \left[ 1 + \frac{4\pi(1-\nu^2)}{15} \left( \frac{2 + 3\mu^2 + 2\mu^4}{(1 + \mu^2)^{3/2}} - 2\mu \right) \frac{l^3}{v} \right].$$

Придавая различные значения параметрам  $\mu$  и  $l^3/v$ , можно показать, что влияние коэффициента трения  $\mu$  и изменение концентрации дефектов  $l^3/v$  достаточно слабо влияют на различие между  $E_{эфф}^+$  и  $E_{эфф}^-$ , при этом изменение концентрации  $l^3/v$  влияет значительно на различия эффективных коэффициентов объемного растяжения  $K_{эфф}^+$  и сжатия  $K_{эфф}^-$ . Разница может быть более чем 1,5 раза, стоит отметить, что результаты получены для случая малой концентрации трещин, при этом для больших концентрациях эффекты усиливаются [71].

Приведенный пример демонстрирует изменение свойств материала в зависимости от приложенной нагрузки. В данном примере наглядно ощущается привязка к классическим моделям через саму формулировку — эффек-

тивные свойства. Так как линейная упругость и пластичность, основанная на критерии Губера-Мизеса, являются самыми распространенными видами определяющих соотношений, то результаты прочностных исследований часто формулируются в их терминологии с приставкой эффективные. Когда же материал проявляет сложные свойства, то такая привязка становится отягощающей описание, так как для некоторых материалов жесткость может быть принципиально разной при различных видах нагружения и меняться с ростом величин деформаций. Такая же ситуация с пластичностью и прочностью материала, где нет единства кривой деформирования для всех типов нагрузки и разрушение подвержено большому числу факторов, начиная от типа и величины нагрузки до скорости деформирования.

## **1.1 Моделирование пластичности и прочности материала со сложной внутренней структурой**

В отношении пластичности и прочности материала со сложной внутренней структурой, при активном нагружении, можно выделить два основных подхода или метода моделирования. Первый основан на использовании сложных критериев пластичности с использованием инвариантов, как тензора напряжений, так и деформаций. Второй тип подхода связан с введением поврежденности материала — зарождением дефектов, которые, как правило, вносят деградацию в упругие характеристики.

### 1.1.1 Критерии пластичности и прочности

Изучение условий, при которых в материале начнут появляться необратимые деформации, либо произойдет хрупкое разрушение, имеет довольно долгую историю и количество наработанного материала столь велико, что не может быть изложено абсолютно объективно. По мнению автора, наиболее удачные работы позволяющие понять суть проблемы, изложены в книге Гольденבלата и Копнова [21] и в статье Победри [65], где задача поставлена наиболее формальным и точным образом.

Если же попытаться проследить последовательность появления ключевых идей, то после формулировки классических критериев Треска и Губера-Мизеса, необходимо отметить условие Кулона-Мора [265]:

$$|\tau_n| = \operatorname{tg} \rho \sigma_n + k, \quad (1.1)$$

где  $\tau_n$  — касательное, а  $\sigma_n$  — нормальное напряжения на площадке с нормалью  $n$ , постоянные  $\rho$  и  $k$  называются, как правило, *угол внутреннего трения* и *сцепка*, соответственно.

Обобщение данного критерия, основанного на инвариантах тензора напряжений, было предложено в работе Д. Друккера и В. Прагера [151] в следующей форме:

$$\sigma_0 + C\sigma = k, \quad (1.2)$$

где  $C$  и  $k$  являются положительными константами для каждой точки среды,  $\sigma = \sigma_{ii}/3$  — среднее нормальное напряжение,  $\sigma_0 = \sqrt{3/2 S_{ij} S_{ij}}$  — интенсивность касательных напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$  — компоненты девiatorа тензора напряжений. Данное условие использовалось в работах Д. Друккера и В. Прагера наиболее интенсивно, и в современной литера-

туре достаточно часто модель пластичности с данным критерием течения связывается с их именами [88].

Следующая ключевая идея относительно формулировки критерия принадлежит Грину [23]:

$$\sigma_0^2 + \alpha\sigma^2 = \beta\sigma_s^2, \quad (1.3)$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести материала плотной фазы при растяжении, коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от пористости среды. Результаты Грина использовались для анализа процесса пластического деформирования пористого листа в условиях плоского напряженного состояния с целью определения влияния пористости на форму предельного контура пластичности [39].

Современные работы, изучающие условия пластичности или прочности, как правило, по сути близки либо к критерию Друкера-Прагера (1.2) либо условию Грина (1.3).

Например, в работах Гурсона и Твергаарда предложен критерий, где квадрат первого инварианта напряжений из (1.3) заменен гиперболическим косинусом:

$$F = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_T}\right)^2 + 2f \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma}{\sigma_T}\right) - (1 + f^2) = 0.$$

Функция  $f$  зависит от пористости среды. Значение  $f = 0$  отвечает состоянию отсутствия пор или полностью плотному материалу, значение  $f = 1$  означает, что материал полностью исчерпал возможность сопротивляться нагружению. Параметр  $\sigma_T$  — напряжение течения в полностью плотном материале и является функцией эквивалентной пластической деформации  $\sigma_T(\varepsilon^{pl})$ .

Также большое распространение получили модификации критерия

Друккера - Прагера (1.2), где вместо линейной суммы инвариантов используются гиперболические (1.4), экспоненциальные (1.5) и др. функции [88]:

$$\sqrt{k_0^2 + \sigma_0^2} + C\sigma = k, \quad (1.4)$$

$$k_0\sigma_0^p + C\sigma = k, \quad (1.5)$$

где  $k_0$  и  $p$  — дополнительные константы.

Другой вариант для связи инвариантов  $\sigma_0$  и  $\sigma$ , приведен в работах [55, 56]:

$$\sigma_0 - A - D\sigma - C\sqrt{\alpha - \sigma} - D\sqrt{\beta + \sigma} = 0,$$

где коэффициенты представляли собой функции плотности среды.

Еще один распространенный путь видоизменить модель пластичности на основе критерия (1.2), это введение дополнительной поверхности замыкающей условие Друккера-Прагера при отрицательных значениях первого инварианта напряжений [150, 292]. Как правило, при выходе вектора напряжений на такую поверхность упрочнение материала происходит по отличному от условия (1.2) закону. Сама форма дополнительного условия, как правило, представляется эллиптической поверхностью [88, 148, 181, 296]:

$$\sqrt{(\sigma - p_0)^2 + \alpha\sigma_0^2} + \beta = 0,$$

где  $p_0$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — параметры, зависящие от упрочнения материала.

Идея введения нескольких поверхностей в критерий довольно развита, для каждого из таких условий вводятся свои пластические деформации [17, 18, 88, 99, 105, 118, 281, 286]. Характерным примером могут служить работы, широко используемые применительно к деформированию чугу-



на, [36, 42, 63, 69]. Здесь учитывалось взаимное влияние на интенсивность деформации и объемную деформацию среднего напряжения и интенсивности напряжений. При описании деформации полухрупких тел предлагалось представлять полные деформации в виде суммы упругой, пластической и деформации разрыхления:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^*.$$

Можно сказать, что работ, посвященных включению в различной форме первого инварианта напряжений, довольно много [1–4, 7–17, 19, 20, 25, 117], но все они, несмотря на введение сложных зависимостей от дополнительных инвариантных параметров, по сути своей, так или иначе близки либо к обобщенному условию Друккера-Прагера (1.2) либо условию Грина (1.3).

Другая тенденция в современных работах — это введение в условие пластичности или прочности параметра Лоде или параметра вида девиатора  $\Theta$ , который можно выразить следующим образом:

$$\cos \Theta = 9/2(\det(S_{ij})/\sigma_0^3).$$

Примером такой работы является критерий, предложенный Толоконниковым [77], где условие формулируется в виде полинома с коэффициентами, зависящими от параметра  $\Theta$ :

$$A(\Theta)\sigma_0^2 + B(\Theta)\sigma_0 + C(\Theta)\sigma = 1.$$

В работе [90] приводится еще один вариант критерия, где в коэффициенты

введена зависимость от параметра  $\Theta$ :

$$\lambda_1 \sigma_0 \sin \Theta + \lambda_2 \sigma_0 \cos \Theta + \lambda_3 \sigma_0 + \lambda_4 \sigma + \lambda_5 \sigma \sin \Theta + \lambda_6 \sigma \cos \Theta = k,$$

где  $\lambda_i$  — константы, определяемые из экспериментов. Еще одна идея, набравшая популярность в последнее время, предложена в работах Вержбицкого [333–335]. Здесь критерий Друккера-Прагера (1.2) умножается на функцию, связанную с параметром Лоде:

$$(\sigma_0 + C\sigma) (c_\Theta^s + (c_\Theta^a x - c_\Theta^s) [\gamma - \gamma^{m+1}/m + 1]) = k,$$

здесь

$$\gamma = \frac{\cos(\pi/6)}{1 - \cos(\pi/6)} \left[ \frac{1}{1 - \cos(\Theta - \pi/6)} - 1 \right]$$

$$c_\Theta^{ax} = \begin{cases} c_\Theta^t & \text{если } 1 \geq 6\Theta/\pi, \\ c_\Theta^c & \text{если } 1 < 6\Theta/\pi. \end{cases}$$

Рассмотрим другой критерий, который выделяется из описанных выше тенденций предложенный Хершем [192]:

$$\left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^n + (\sigma_2 - \sigma_3)^n + (\sigma_1 - \sigma_3)^n}{2} \right]^{1/n} = k, \quad (1.6)$$

здесь  $\sigma_i$  — главные напряжения,  $n$  и  $k$  — константы, определяемые из экспериментов. Видно, что при  $n = 2$  критерий совпадает с критерием Губера-Мизеса, при  $n = 1$  аналогичен критерию Треска, но при этом, критерий имеет возможность реализовывать промежуточные поверхности. На основе, сформулированной в (1.6) построено довольно много модификаций [102, 107, 197, 231]

Рассмотрим теперь критерии, которые учитывают влияние анизотропии материала. По-видимому, первой работой такого плана был критерий, предложенный Хиллом [178]:

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2(L\sigma_{23}^2 + M\sigma_{13}^2 + N\sigma_{12}^2) = k^2, \quad (1.7)$$

где  $F, G, H, L, M$  и  $N$  — константы, связанные с анизотропией материала. Наверное, наиболее логичное расширение критерия Хилла, но учитывающие вид нагружения материала, было предложено Цаем и Ву [317], идею которого в общем случае можно записать следующим образом:

$$A_{ij}\sigma_{ij} + \sigma_{ij}A_{ijkl}\sigma_{kl} = 1. \quad (1.8)$$

По сути это аналог того же критерия Друккера-Прагера, где к условию Хилла добавлена анизотропная шаровая часть напряжений.

В этом смысле, довольно распространена идея использования изотропных критериев, но с модификацией компонент напряжений при помощи линейных соотношений:

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \widehat{\Phi}(\widehat{\sigma}_{ij}),$$

где  $\Phi(\sigma_{ij})$  — анизотропная функция, а  $\widehat{\Phi}$  — изотропная, при этом:

$$\widehat{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}\sigma_{ij}.$$

На такой идее с различными уже упоминавшимися критериями построено довольно большое количество исследований [108, 110, 111, 131, 323, 324]. В целом, работ по анизотропным критериям существенно меньше, в сравне-

нии с изотропными, и как правило они имеют больше отношение к моделированию композитов.

### **1.1.2 Деградация свойств материала с последующим разрушением**

Другой подход к описанию прочности связан с анализом накопления повреждений в материале и, как правило, основан на введении характеристик, определяемых историей процесса нагружения. Основоположниками построения теории разрушения, связанной с накоплением повреждений, можно считать Работнова Ю.Н. [285] и Качанова Л.М. [213]. Последующее развитие теории повреждений связано с такими авторами как: Хао [184], Мураками [267–269], Наяр [272], Лецки [137,249], Эванс [156], Хатчинсон [203,204], Крайчинович [221], Халт [201], Лематр [226] и многие другие.

В данной работе нас интересуют исследования, где происходит активное нагружение материала, так что если не рассматривать циклическое нагружение, разрушение в условиях ползучести и способы обнаружения повреждений, то основные разработанные идеи теории накопления повреждений можно изложить в нескольких утверждениях.

Первое — это введение параметра поврежденности  $\omega$ , который  $\omega = 1$  при отсутствии повреждений и  $\omega = 0$  при полной деградации материала. Далее, как правило, вводится понятие эффективных напряжений [285]  $\tilde{\sigma} = \sigma/\omega$ . После чего, типовые определяющие соотношения записываются относительно эффективных напряжений  $\tilde{\sigma}$  вместо  $\sigma$ , что приводит, опять

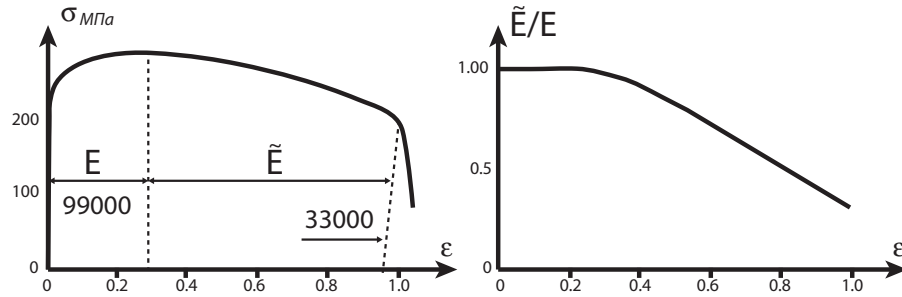


Рис. 1.1: Деградация упругих свойств меди при растяжении.

же как правило, к уравнению эволюции параметра поврежденности в виде:

$$\frac{d\omega}{dt} = F(\omega, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \chi_1, \chi_2, \dots), \quad (1.9)$$

где величины  $\chi_1, \chi_2$ , и др. — параметры, влияющие на прочностные характеристики материала. Такое уравнение в некоторых случаях возможно разрешить аналитически [213, 226, 285]. Подробный и наиболее формальный путь развития подобной теории описан в работе Победри [64].

Довольно наглядный пример поведения материала, в котором повреждение оказывает влияние на упругие характеристики, приведен в книге Лематра [226], на основе растяжения медного образца (рис. 1.1). Видно существенное изменение модуля жесткости, отношение текущего модуля  $\tilde{E}$  к изначальному  $E$ , можно рассматривать как изменение параметра поврежденности  $\omega = \tilde{E}/E$ .

Существенную популярность в инженерных расчетах для металлов приобрел критерий разрушения, приведенный в работе [196]:

$$\int_0^t \frac{d\varepsilon_{eq}^{pl}}{\varepsilon_D^{pl}(\xi, \dot{\varepsilon}_{eq}^{pl})} = 1, \quad (1.10)$$

здесь  $\varepsilon_{eq}^{pl}$  — эквивалентные пластические деформации,  $\varepsilon_D^{pl}$  — функция па-

раметра трехосности напряжений  $\xi$  и скорости эквивалентных пластических деформаций  $\dot{\varepsilon}_{eq}^{pl}$ , определяемая экспериментально. В работах Вейржбицки [103] к функции  $\varepsilon_D^{pl}$  в дополнение к скорости деформирования и отношению трехосности добавлен параметр Лоде в форме вида девиатора  $\Theta$ . Видно, что величина, характеризующая поврежденность (1.10) растет с ростом пластических деформаций, при этом, используя функцию  $\varepsilon_D^{pl}$ , есть возможность настроить критерий для получения меньшего количества повреждений для сжимающих случаев нагружения и больших при растягивающих видах напряженного состояния.

Такой критерий также можно рассмотреть в виде уравнения (1.9):

$$\omega = 1 - \int_0^t \frac{d\varepsilon_{eq}^{pl}}{\varepsilon_D^{pl}(\xi, \dot{\varepsilon}_{eq}^{pl})},$$

или после дифференцирования по времени:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^{pl}}{\varepsilon_D^{pl}(\xi, \dot{\varepsilon}_{eq}^{pl})},$$

при условии, что  $\omega(0) = 1$ .

Видно, что параметр  $\omega$  не входит в правую часть уравнения, что приводит к упрощенному аналогу теории разрушения (1.9). С другой стороны, можно представить данный случай, как вырожденный, и рассмотреть жесткость материала с зависимостью от параметра поврежденности в виде  $E = E_0 H(\omega)$ , где  $E_0$  — модуль Юнга неповрежденного материала, а функция  $H(x)$  задается следующим образом:  $H(x) = 1$  при  $x < 1$  и  $H(x) = 0$  при  $x \geq 1$ . Такая постановка задачи формально сводит предложенную теорию разрушения к уравнению в форме (1.9).

Рассмотрим подходы, популярные в инженерной практике, связанные с

моделированием разрушения бетона. Постараемся проанализировать ключевые идеи, встречающиеся в таких моделях, без привязки к частным случаям, в связи со сложностью их формулировок. Модели, связанные с разрушением бетона интересны тем, что параметры поврежденности входят явным образом не только в пластические свойства материала, но и в упругие характеристики [88, 250, 251, 339]. В качестве критерия пластичности, как правило, используются условия, близкие к критерию Друккера-Прагера (1.2). Выпишем такое условие в общем виде:

$$F(\sigma_{ij}) = c,$$

где параметр  $c$  будем называть сцепкой. Далее, для параметра поврежденности в общем случае предлагается следующая связь, полностью укладывающаяся в описанный в (1.9) подход:

$$\dot{\omega} = h(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, c, \omega),$$

при этом для вычисления снижения свойств сцепки в общем случае вводится уравнение:

$$\dot{c} = g(\sigma_{ij}, c, \omega)\dot{\omega}.$$

Один из популярных вариантов таких соотношений [88, 251]:

$$\dot{\omega} = \frac{r(\sigma_{ij})}{g_t} f_t(\omega) \varepsilon_1^{pl} - \frac{1 - r(\sigma_{ij})}{g_c} f_c(\omega) \varepsilon_3^{pl},$$

здесь предполагается что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , где  $\sigma_i$  — главные напряжения, при

этом весовой фактор  $r(\sigma_{ij})$  определяется следующим образом:

$$r(\sigma_{ij}) = \frac{\sum_i \langle \sigma_i \rangle}{\sum_i |\sigma_i|},$$

где  $\langle x \rangle = 1/2(|x| + x)$ , константы и функции  $f_t(\omega)$  и  $g_t$  определяются из эксперимента на одноосное растяжение, а  $f_c(\omega)$  и  $g_c$  — одноосное сжатие. Для функции  $g$  предлагается ввести следующую форму [251]:

$$g(\sigma_{ij}, c, \omega) = c \left[ \frac{r(\sigma_{ij})}{f_t(\omega)} f'_t(\omega) - \frac{1 - r(\sigma_{ij})}{f_c(\omega)} f'_c(\omega) \right].$$

Для деградации упругих свойств вводят отличный набор параметров поврежденности  $\omega_1^{el}, \omega_2^{el}, \dots, \omega_i^{el}$ , следующим образом:

$$\tilde{E}_{ijkl} = E_{ijkl}(\omega_1^{el}, \omega_2^{el}, \dots, \omega_i^{el}),$$

при этом значения  $\omega_i^{el}$  определяются в общем случае деформациями:

$$\omega_i^{el} = \phi_i(\varepsilon_{kl}).$$

В работах [91, 127] вводилось два параметра поврежденности:  $\omega_1^{el}$  для объемной жесткости материала и  $\omega_2^{el}$  для сдвиговой; которые имеют следующее выражение через деформации:

$$\omega_1^{el} = \exp(-a_1 \varepsilon), \quad \omega_2^{el} = \exp(-a_2 e),$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_{ii}$  — объемная деформация, а  $e = 2/3 \sqrt{e_{ij} e_{ij}}$  — интенсивность сдвиговых деформаций,  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}/3$ , а  $a_1$  и  $a_2$  — константы, опре-



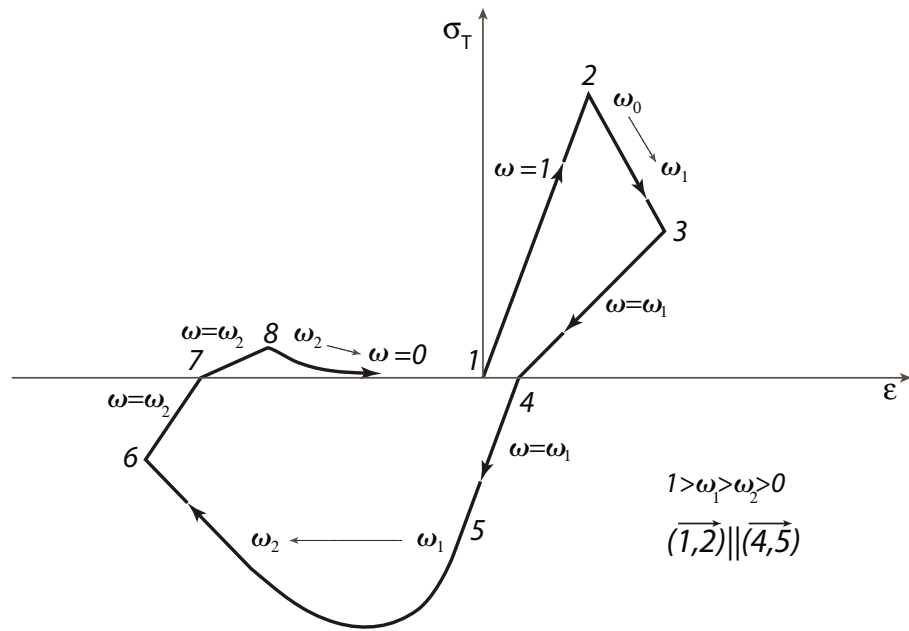


Рис. 1.2: Схема типового одноосного нагружения бетона. Предполагается что  $1 > \omega_1 > \omega_2 > 0$  и отрезок  $(1, 2)$  параллелен отрезку  $(4, 5)$ .

деляемые из экспериментов. В работе Ли [250] вводилась связь между параметрами поврежденности относящимися к пластическому поведению и деградации упругой жесткости. Причем вводилось два параметра упругой поврежденности для растяжения  $\omega_t^{el}$  и сжатия  $\omega_c^{el}$ , общий параметр деградации упругих свойств для получения эффективных напряжений вычислялся следующим образом:

$$\omega^{el} = \omega_t^{el} \omega_c^{el}.$$

Связь с параметрами поврежденности, влияющими на пластические характеристики материала, устанавливалась следующим образом: для растяжения —

$$\omega_t^{el} = [A_t(1 + B_t - \sqrt{\phi_t(\omega_t^{pl})})]^{C_t},$$

и аналогично для сжатия —

$$\omega_c^{el} = [A_c(1 + B_c - \sqrt{\phi_c(\omega_c^{pl})})]^{C_c},$$

где  $A_t, B_t, C_t$  — константы, определяемые из экспериментов на растяжение, а соответствующие  $A_c, B_c, C_c$  — на сжатие. Причем, параметры поврежденности, связанные с пластичностью, вводятся следующим образом:

$$\omega_i^{pl} = \int_0^{\varepsilon_i^p} \sigma_i(\varepsilon_i^p) d\varepsilon^p / \int_0^\infty \sigma_i(\varepsilon_i^p) d\varepsilon^p,$$

где  $i = t, c$ , напряжения и деформации соответствуют результату одноосного растяжения или сжатия,  $\sigma_i \sim \varepsilon_i^p$ . Существуют и другие схемы введения параметров поврежденности, например, в работе [157] вводятся аналогично упомянутым два параметра поврежденности для растяжения и сжатия, при этом, по сути, один снижает жесткость материала в упругих условиях при сжимающих напряжениях, второй - при растягивающих. Можно сказать, что авторы использовали аналог идеи разномодульного поведения материала, развитого Амбарцумяном [5]. В работе [176] наоборот, количество параметров сведено к минимуму и вводятся явные функциональные выражения характеристик поврежденности через величины деформаций. Причем, в упомянутой работе продемонстрирована хорошая близость предсказанных и экспериментальных данных. На рис. 1.2 схематически отображено типовое деформирование бетона при одноосном нагружении.

Таким образом видно, что использование параметров поврежденности довольно существенно в моделировании разрушения бетона. Используются разные стратегии введения таких параметров, как для упругих определяющих соотношений, так и для пластических.

## **1.2 Моделирование технологических задач для композиционных материалов на основе полимерного связующего**

Для достоверного моделирования деформирования композиционного материала, в общем случае приходится учитывать весь процесс его создания. Например, после намотки композитных лент необходимо правильно воссоздать ориентацию уложенного композита, что в свою очередь заставляет анализировать технологию намотки лент. Рассмотрим некоторые стадии технологии производства композитных изделий подробнее.

Укладка не отвержденного композита приводит к задаче моделирования драпировки препрегов на основе армирующего волокна. Работ, посвященной данной теме, достаточно много, из них можно выделить, как наиболее фундаментальные, работы Ломова [208, 245–247, 322, 336] и Боза [121, 122, 126]. Следует отметить, что изучено большое количество эффектов, влияющих на укладку армирующих препрегов. При этом вопрос моделирования драпировки в виде универсального подхода не решен. Также, стоит отметить, что для моделирования деформирования тканей и препрегов на основе текстильных композитов довольно часто используется именно алгоритм, а не набор определяющих соотношений, основанный на механике сплошной среды [214, 325]. Моделей, основанных на определяющих соотношениях, записанных в форме связи напряжений и деформаций существенно меньше [98, 101, 133, 198]. При этом работ, связанных с моделированием материала при формовании препрегов на основе термопластичного связующего, в сравнении с аналогичными для сухих преформ, практически нет [252, 259, 341].

В случае изготовления композиционного изделия на основе инфузионной технологии, возникает вопрос моделирования пропитки. Такие задачи получили стандартный подход для моделирования на основе закона Дарси с анизотропными коэффициентами проницаемости [144]. По сути, задача сводится к решению уравнений теплопроводности в анизотропном варианте [173, 180, 277]. Также в задачах учитывается вес жидкого связующего для анализа заполнения вертикально уложенных преформ [307]. Также, проработаны варианты решений с учетом нормальной координаты к поверхности укладки преформы, то есть в трехмерной постановке [219]. Существуют решения для заполнения связующим форм с рубленным волокном, где короткие волокна поступают в формовочный пресс вместе со связующим [129, 294]. В таких задачах одной из важных проблем является определение свойств будущего изделия и предсказание ориентации осей анизотропии [89, 104]. С точки зрения предсказания эффективных свойств задача имеет большое количество устоявшихся подходов для объемного содержания волокна ниже 30% [275, 343].

Следующий важный вопрос при решении технологических задач – это моделирование отверждения связующего [152]. Это важно с точки зрения получения необходимых свойств изготавливаемого композиционного материала. Для термореактивных связующих такой процесс связан с полимеризацией [161]. Для моделирования кинетики полимеризации существует устоявшийся подход, основанный на следующих уравнениях Аррениуса [87]:

$$\frac{d\alpha}{dt} = A_0(1 - \alpha)^m \alpha^n \exp\left(\frac{-E_\alpha}{RT}\right),$$

где  $A_0, n, m$  – константы конкретного полимера,  $E_\alpha$  – энергия активации,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – температура. Здесь через

$\alpha$  обозначена степень полимеризации материала. Работ с использованием подобной модели довольно много, в качестве примера можно привести следующие: [100, 218, 220, 254]. При этом, в зависимости от параметра степени полимеризации возможно учесть изменение жесткости материала и появление химической и температурной усадки [119, 169, 182]. В целом, подобный анализ позволяет смоделировать рост и финальное распределение остаточных напряжений в композиционном материале [164].

Аналогичная ситуация с термопластичными композитами. Единственное различие заключается в замене процесса полимеризации на кристаллизацию связующего. Для моделирования степени кристалличности в полимере ( $X_{vc}$ ) также существует устоявшийся подход, основанный на уравнениях Колмогорова-Аврами [70]:

$$X_{vc} = X_{vc\infty}(w_1 F_{vc1} + w_2 F_{vc2}), \quad (1.11)$$

где  $X_{vc\infty}$  – равновесное значение степени кристалличности,  $w_1$  – весовой фактор для первого механизма роста степени кристалличности,  $w_2$  – весовой фактор для второго механизма роста степени кристалличности, причем  $w_1 + w_2 = 1$ ,  $F_{vc1}$  – значение степени кристалличности, полученной в результате зарождения кристаллов:

$$F_{vc1} = 1 - \exp \left[ -C_{11} \int_0^t T \exp \left\{ - \left[ \frac{C_{21}}{(T - T_g + 51.6)} + \frac{C_{31}}{T (T_{m1} - T)^2} \right] \right\} n_1 t^{n_1 - 1} dt \right],$$

$F_{vc2}$  – значение степени кристалличности, полученной в результате роста

существующих кристаллов:

$$F_{vc2} = 1 - \exp \left[ -C_{12} \int_0^t T \exp \left\{ - \left[ \frac{C_{22}}{(T - T_g + 51.6)} + \frac{C_{32}}{T (T_{m2} - T)^2} \right] \right\} n_2 t^{n_2 - 1} dt \right],$$

где  $C_{11}, C_{21}, C_{31}, C_{12}, C_{22}, C_{32}$ , — константы, определяемые в экспериментах,  $T_g$  — температура стеклования,  $T_{m1}, T_{m2}$  — температуры плавления кристаллов для соответствующих способов появления,  $n_1, n_2$  — постоянные материала для соответствующих механизмов процесса кристаллизации. Аналогично, существуют проработанные подходы для оценки жесткости и усадки материала в зависимости от параметра степени кристалличности [116, 225, 291, 311, 327, 328].

### **1.3 Нелинейная упругость конструкционных композитов**

Одним из существенных аспектов в моделировании композиционных материалов является правильное предсказание жесткостных параметров в условии упругих деформаций. Сложная неоднородная структура такого материала может реализовывать сложное сопротивление деформированию при разных видах и величинах нагрузок. Для композиционных материалов, как правило, можно выделить два типа нелинейности: 1-й связан с разной жесткостью при различных видах нагружения, 2-й с нелинейным изменением жесткости при росте значений сдвиговых деформаций, где максимальным образом в процесс деформирования включено связующие материала. Последний случай довольно характерен для слоистых композитов, где при сдвиговом нагружении деформируется, в основном, только матрица

материала, а армирующие элементы нагружены минимальным образом.

Первый механизм нелинейности, как правило, связывается с неустойчивостью армирующих волокон в случае сжимающих напряжений, что приводит к заниженным жесткостным показателям. Наиболее известные работы, посвященные разномудольным материалам, связаны с исследованиями Амбацурмяна [5]. Если сузить класс интересующих нас моделей материалов до ортотропных, то работ, выполненных в этом направлении, довольно немного. Рассмотрим ключевые идеи таких моделей и их развитие с точки зрения введения авторами параметров, которые характеризуют тип нагружения материала и вносят изменения в их упругую жесткость.

В работах Амбацурмяна [6] в качестве таких параметров использовались знаки главных компонент напряжений, которые в случае плоского напряженного состояния сводились к двум значениям —

$$\{\text{sign}(\sigma_1), \text{sign}(\sigma_2)\}.$$

После чего для разных комбинаций значений таких параметров рассматривался свой набор жесткостей. Далее в работах Джонса [209, 210] такой подход был усовершенствован и предложен расширенный набор параметров —

$$\{\text{sign}(\sigma_1), \text{sign}(\sigma_2), \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}\}.$$

Такой набор параметров решал некоторые проблемы, такие как несимметричность матрицы упругих модулей и др. При этом, Берт [114, 115] в своих работах ввел только один параметр, основанный на знаке деформации вдоль армирующих волокон —

$$\{\varepsilon_f\}.$$

В работе авторов Папазаглоу и Цеволис был предложен 3-х мерный вариант модели Джонса [278]:

$$\left\{ \text{sign}(\sigma_1), \text{sign}(\sigma_2), \text{sign}(\sigma_3), \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|}, \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|}, \frac{|\sigma_3|}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|} \right\}.$$

Виджаякумар и Рао [320] предложили рассматривать знаки напряжений, и деформаций в направлении армирования композита и в трансверсальном (индексы  $L$  и  $T$  соответственно) —

$$\left\{ \text{sign}(\varepsilon_L), \text{sign}(\varepsilon_T), \text{sign}(\sigma_L), \text{sign}(\sigma_T) \right\}.$$

Патель и Хан [280] рассмотрели вариант параметров, основанный на компонентах деформаций вдоль и поперек направления армирования —

$$\left\{ \text{sign}(\varepsilon_L), \text{sign}(\varepsilon_T), \frac{|\varepsilon_L|}{|\varepsilon_L| + |\varepsilon_T|}, \frac{|\varepsilon_T|}{|\varepsilon_L| + |\varepsilon_T|} \right\}.$$

Во всех случаях в зависимости от набора параметров для материала выбирается определенный набор упругих констант и используется известная ортотропная линейно-упругая модель материала. В некоторых случаях, соответствующие определяющие соотношения (либо упругий потенциал) имеют разрыв первого или второго рода при переходе от одной зоны, соответствующей определенному набору параметров и, как следствие, определенному набору жесткостей, к другой. По-видимому, такой подход не вызывает существенных затруднений в случае статического пропорционального нагружения, где такой переход случается редко, и проблемы энергетического баланса, несимметричности матрицы упругих модулей, а также, скачкообразное появление деформаций не проявляют себя в полной



мере.

Второй источник упругой нелинейности в композитах связан со сдвиговыми нагрузками вдоль армирующих элементов при интенсивном нагружении материала связующего. В плане обзора работ, связанных с таким эффектом, доминируют экспериментальные исследования [132, 253, 282, 297, 306, 308, 315]. Определяющих соотношений, учитывающих анизотропию материала совместно со сдвиговой нелинейностью, практически нет. Единственная работа, где модель материала выписана в форме определяющих соотношений на основе предложенного потенциала, сделана Ханом и Цаем [183]. В данной работе предлагался упругий потенциал, где для податливости сдвиговых компонент вводилось дополнительное слагаемое 4-й степени, что в случае плоского напряженного состояния приводит:

$$W = \frac{1}{2}a_{1111}\sigma_{11}^2 + \frac{1}{2}a_{2222}\sigma_{22}^2 + a_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{1}{2}a_{1212}\sigma_{12}^2 + \frac{1}{4}\tilde{a}_{1212}\sigma_{12}^4.$$

Это свою очередь, позволяет, используя предложенный потенциал, выписать определяющие соотношения в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1111} & a_{1122} & 0 \\ a_{1111} & a_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & a_{1212} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} + \tilde{a}_{1212}\sigma_{12}^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}.$$

Таким образом можно получить нелинейную связь для сдвиговых компонент:

$$\varepsilon_{12} = (a_{1212} + \tilde{a}_{1212}\sigma_{12}^2)\sigma_{12}.$$

Остальные работы, выполненные в таком направлении, можно разделить на две группы, где в первой предлагаемые подходы можно описать

как алгоритмы [130, 140, 191], во второй нелинейность связана только с необратимыми деформациями [120, 223, 256, 284]. В этом смысле интересно отметить экспериментальную работу по анализу падения сдвиговой жесткости в случае термопластичного композита, где было ясно показано, что снижение жесткости на величину порядка 40% ~ 50% не связано с появлением дефектов в матрице [224].

## **1.4 Моделирование прочности слоистых композитов**

Тема моделирования разрушения композитов довольно давно изучается и имеет существенное количество научных публикаций. Учеными и прикладными специалистами написано большое количество обзоров не по композитам в общем, а именно о проблеме разрушения [153, 205, 229, 276, 298, 313, 316]. В некоторых работах такого плана количество ссылок превышает 300 [172].

В отличие от металлов или даже неоднородных сложных материалов, в слоистых композитах разрушение одного слоя в большинстве случаев не приведёт к полному разрушению всего пакета. Более того, такое разрушение может не вызвать даже малейшего изменения в общей диаграмме нагружения в терминах сила - перемещение. Поэтому на первый план выходит именно последующая деградация материала.

Тем не менее стоит отметить наиболее известные критерии инициации разрушения — это критерий Цай-Бу [317], который уже приводился в предыдущих разделах (1.8), и критерий Хашина [190]. Критерий Хашина состоит из набора условий, каждое из которых ассоциируется с различны-

ми типами разрушения:

для растяжения волокон ( $\sigma_{11} \geq 0$ ) —

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_t}\right)^2 + \alpha \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1,$$

для сжатия волокон ( $\sigma_{11} < 0$ ) —

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_c}\right)^2 = 1,$$

для трансверсального растяжения ( $\sigma_{22} \geq 0$ ) —

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1,$$

для трансверсального сжатия ( $\sigma_{22} < 0$ ) —

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1,$$

здесь  $\sigma_{ij}$  — компоненты напряжений в главных осях анизотропии,

$X_c$  — напряжения разрушения при сжатии вдоль волокон,

$X_t$  — напряжения разрушения при растяжении вдоль волокон,

$Y_c$  — напряжения разрушения при сжатии в трансверсальном направлении,

$Y_t$  — напряжения разрушения при растяжении в трансверсальном направлении,

$S$  — сдвиговая прочность,

$\alpha$  — константа материала.

Критерии Цай-Ву и критерий Хашина, демонстрируют две основные

тенденции критериев, используемых в композитах, первый записан в непрерывной форме и представляет собой одну поверхность предельного состояния для всех случаев нагружения, второй вводит несколько условий для различных типов нагружения.

Анализ именно разрушения композитных слоев, собранных в пакет с произвольной ориентацией, помимо условия инициации, требует введение упругой модели материала и последующего правила деградации. Сравнение и анализ таких подходов в комплексе, то есть полного набора — упругих соотношений совместно с критерием и правилами деградации, довольно сложен и требует выработки стратегии и детального анализа. В этом смысле интересен проект "World-Wide Failure Exercise"(WWFE) [193], который поставил перед собой именно такую цель — сравнение различных подходов по моделированию разрушения слоистых композитов. В целом, работа по проведению экспериментов, сбору научных групп, желающих участвовать в исследованиях, обмену необходимыми данными и анализу результатов, заняла 12 лет. В итоговой книге представлено 19 различных теорий, с анализом и результатами моделирования, выбранных и проведенных организаторами прочностных экспериментов. В таблице 1.1 приведен итоговый рейтинг представленных теорий, предложенный авторами проекта на основе близости к экспериментальным данным.

Видно, что на первом месте в рейтинге стоит подход, предложенный Зиновьевым. П.А. [342]. Интересно отметить, что данный подход основывается на довольно простых предположениях, в которые входит критерий максимальных напряжений и линейная упругость. Единственное общее замечание, к данному подходу, которое авторы сделали после анализа представленных результатов — это "угловатость" теории, то есть, имеется ввиду

Таблица 1.1: Рейтинг теорий разрушения построенный по близости к экспериментальным данным (WWFE)

<i>Теория - автор</i>	<b><i>Рейтинг</i></b>	<i>Теория упругости</i>	<i>3-х мерная задача</i>
Zinoviev [342]	<b>96</b>	Линейная	Нет
Bogetti [120]	<b>95</b>	Нелинейная	Нет
Puck [284]	<b>94</b>	Нелинейная	Нет
Cuntze [141]	<b>94</b>	Нелинейная	Да
Tsai [228]	<b>85</b>	Линейная	Нет
Sun(L)	<b>83</b>	Линейная	Нет
Edge [155]	<b>82</b>	Нелинейная	Нет
Huang [200]	<b>80</b>	Нелинейная	Нет
Mayes [257]	<b>79</b>	Нелинейная	Да
Wolfe [338]	<b>70</b>	Нелинейная	Нет
Hart-Smith (3) [188]	<b>69</b>	Линейная	Нет
Chamis [175]	<b>68</b>	Линейная	Да
Rotem [289]	<b>67</b>	Нелинейная	Нет
Hart-Smith (1) [186]	<b>57</b>	Линейная	Нет
Hart-Smith (2) [187]	<b>55</b>	Линейная	Нет
Sun(NL) [312]	<b>38</b>	Нелинейная	Нет
Eckold [154]	<b>34</b>	Линейная	Нет
McCartney [258]	<b>14</b>	Линейная	Да

резкое изменение диаграмм напряжений и деформаций. Довольно высокий рейтинг показали Цай и его группа, но только после существенных изменений своей теории после предоставления организаторами результатов испытаний [222]. Здесь интересным является сравнение двух данных подходов. Цай продемонстрировал практически идеальное совпадение двухосных испытаний однонаправленных слоев и практически не попал в эксперименты для произвольных укладок. В подходе Зиновьева, видимо в принципе не ставилась задача создать сложный критерий для инициации разрушения, поэтому все эксперименты с однонаправленными ламинатами далеки от предсказаний. Такая же ситуация при анализе промежуточных значений диаграмм напряжений и деформаций в случае нагружений укладок типа  $\pm 45^\circ$  и  $\pm 55^\circ$ , где интенсивно деформируется связующие материала и диаграммы имеют сильно нелинейный вид. Например, в подходе Боgetti [120], где используется падение сдвиговой жесткости материала с ростом деформаций, такой проблемы нет. Но с другой стороны, если рассматривать задачу именно как предсказание разрушения укладки в целом и отбросить вопросы, связанные с прочностью только однонаправленных слоев и упругой нелинейностью, которые дают дополнительный вклад в рейтинг таблицы 1.1, то модель Зиновьева становится просто не достижима для представленных в проекте аналогов.

В качестве общих выводов по анализу представленных критериев можно отметить следующие. Теории, которые использовали в своих подходах довольно простые критерии начала разрушения [120,342] и концентрировались в целом на деградации материала получили существенно лучшие результаты в сравнении с теориями, где вводились очень сложные критерии для однонаправленного композита, исключение составляет только подход,

описанный Паком [284]. Также можно отметить, что предложенные теории разделились на две равные группы в вопросе использования и не использования нелинейности в упругой стадии деформирования. Практически все теории рассматривали различные условия разрушения для разных типов нагружения. Равное количество участников использовали и не использовали микромеханические подходы. Только четверть подходов не рассматривали процесс деградации в принципе. Также стоит отметить некоторые числа, демонстрирующие разброс предсказанных теориями значений для довольно простых и ключевых экспериментов. Для двухосных испытаний однонаправленных образцов расхождение предсказанных значений составило 690%. Для испытаний одноосного растяжения квази-изотропных укладок расхождение теорий составило 450%, одноосное растяжение укладок  $\pm 45^\circ$  — 870%, двухосное растяжение укладок  $\pm 55^\circ$ , в случае отношения нагрузок 2:1 — 870%, в случае 1.31:1 — 1300%. В некоторых работах различия экспериментальных данных с предсказанными превышали 2000%, в некоторых получались незамкнутые контуры предельных поверхностей разрушения.

Рассмотрим основные идеи подхода к моделированию разрушения слоистого композита предложенного Зиновьевым П.А. [342]. В качестве условия начального разрушения композита использовался критерий максимальных напряжений:

$$X_c \leq \sigma_{11} \leq X_t, Y_c \leq \sigma_{22} \leq Y_t, |\sigma_{12}| \leq S. \quad (1.12)$$

Основу подхода составляет введение трех скалярных множителей  $\psi_1, \psi_2$ , и  $\psi_3$ , которые характеризуют повреждение материала. Данные скалярные параметры умножаются на соответствующие модули жесткости  $E_1$ ,

$E_2$  и  $G$  и изменяют их значения. Значение любого из введенных множителей может изменяться в пределах от 0 до 1. Начальные значения введенных множителей  $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} = \{1, 1, 1\}$ . В процессе деформирования и деградации материала их значения могут изменяться, и абсолютно разрушенному слою соответствует набор  $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} = \{0, 0, 0\}$ . Значения  $\psi_1, \psi_2$  и  $\psi_3$  можно определить следующим образом:

$$\psi_1 = \frac{E_1}{E_1^0}, \quad \psi_{22} = \frac{E_{22}}{E_{22}^0}, \quad \psi_3 = \frac{G}{G_0},$$

где  $E_1^0, E_2^0$  и  $G_0$  — жесткостные модули, соответствующие начальному состоянию, а  $E_1, E_2$  и  $G$  — соответствуют текущему состоянию. Основу алгоритма для построения численного моделирования составляет Таблица 1.2.

Таблица 1.2: Алгоритм получения жесткостей

Состояние слоя	Параметры деформационного состояния		$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$
	поперечная компонента	сдвиговая компонента			
открытые трещины $\sigma_{22} > 0$	$\bar{\varepsilon}_{22} < \bar{\varepsilon}_{22}^*$	$ \gamma_{12}  <  \gamma_{12}^* $	1	$\frac{E_{22}}{E_{22}^0}$	$\frac{G}{G_0}$
	$\bar{\varepsilon}_{22} = \bar{\varepsilon}_{22}^*$ $\Delta \bar{\varepsilon}_{22} > 0$		1	0	$\frac{G}{G_0}$
		$ \gamma_{12}  =  \gamma_{12}^* $ $\Delta  \gamma_{12}  > 0$	1	0	0
	$\bar{\varepsilon}_{22} < \bar{\varepsilon}_{22}^*$		1	$\frac{E_{22}}{E_{22}^0}$	0
закрытые трещины $\sigma_{22} < 0$	$\Delta \bar{\varepsilon}_{22} < 0$		1	1	0
		$ \gamma_{12}  <  \gamma_{12}^* $	1	1	$\frac{G}{G_0}$

Где введены следующие обозначения:  $E_2 = \left[ \frac{\bar{\varepsilon}_{22}^*}{\sigma_{22}^*} + \frac{\nu_{12}^2}{E_1} \right]^{-1}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{22}^*$  — мак-



симальное значение  $\bar{\varepsilon}_{22}$  за всю историю нагружения,  $\sigma_{22}^*$  — максимальные значения напряжений в поперечном направлении ( $\sigma_{22}$ ), при которых начинается разрушение,  $\Delta\bar{\varepsilon}_{22}$  — инкремент приращений деформаций  $\bar{\varepsilon}_{22}$ ,  $G = \sigma_{12}^*/\gamma_{12}^*$ ,  $\gamma_{12}^*$  — максимальное значение  $\gamma_{12}$  за всю историю нагружения,  $\sigma_{12}^*$  — сдвиговые напряжения в системе координат, связанной с направлением армирующих волокон, при которых начинается разрушение материала,  $\Delta|\gamma_{12}|$  — инкремент приращения абсолютной величины сдвиговых деформаций  $\gamma_{12}$ .

Типовые диаграммы нагружения однонаправленного слоя, описывающие выбранный подход к моделированию, продемонстрированы на рис. 1.3. Левая диаграмма (а) демонстрирует нагружение вдоль волокон, при этом видно, что, при достижении определенных значений напряжений при растяжении и сжатии, однонаправленный слой сразу разрушается без предварительной стадии деградации свойств. Крайняя правая диаграмма (в) иллюстрирует нагружение при сдвиге. Видно, что при достижении напряжений определенного уровня, кривая нагружения представляет собой линию параллельную оси деформаций, при этом разгрузка и последующие нагружение реализуется по новому линейному модулю (отрезки 2-3-4). Центральная диаграмма (б) демонстрирует нагружение в поперечном относительно волокон направлении. Диаграмма аналогична сдвиговой, с той лишь разницей, что отрезок 3-4 всегда проходит в соответствии с изначальным модулем, при этом, по достижении сжимающими напряжениями определенного уровня, материал считается разрушенным.

В данной работе предложен подход, который сформулирован в виде алгоритма. При этом следует отметить, что в работе [160] предложенные процедуры переформулированы автором в виде определяющих соотношений,

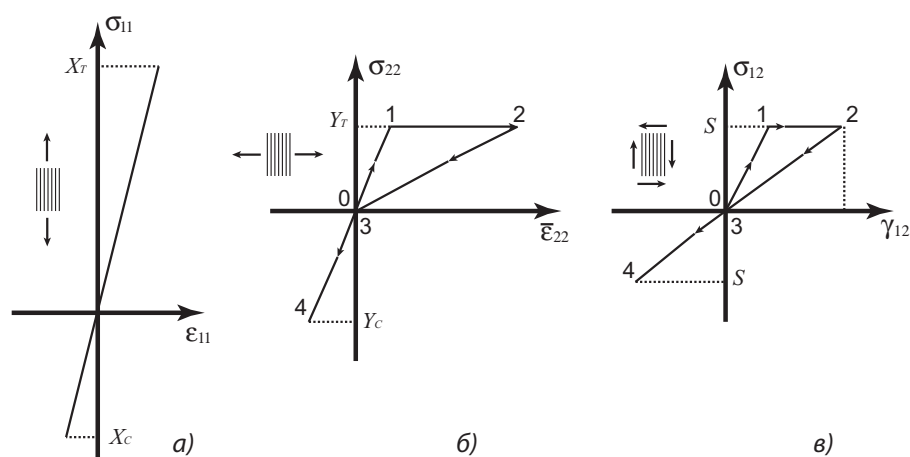


Рис. 1.3: Диаграммы модели Зинovieва.

принятых в механике сплошной среды, и реализованы в виде подпрограммы для анализа прочности в системе конечно-элементного моделирования Abaqus.

## 1.5 Выводы к главе 1

Моделирование деформирования материалов со сложной структурой опирается на теоретический аппарат и экспериментальные исследования имеющие существенную историю. Существует большое разнообразие аспектов, которые необходимо учитывать при построении подобных моделей.

В качестве общих утверждений можно заключить следующие. На примере практически всех разделов ощущается нехватка универсальности и систематизации разработанных теорий. В различных индустриях и областях нет полноценного обмена наработанным опытом и созданным научным материалом. Нехватка общего понятийного аппарата сказывается на формулировках и описании подходов, а также, на построении планов по экспериментальным исследованиям и созданию инженерных программных приложений.

Также следует отметить, что нелинейная упругость для материалов с неоднородной структурой практически не развита и не применяется. Во всех известных инженерных программах моделирования прочности, нет ни одного решения для подобного моделирования. Более того при моделировании разрушения материала в процессе деградации используются разномодульные теории, противоречивость которых отмечена многими авторами.

При анализе композитов не хватает междисциплинарных работ и подходов, которые учитывают влияние способов создания конкретных деталей и элементов конструкций, или обосновывают их малое влияние на эксплуатационный цикл такого изделия. Нет четких параметров технологических переделов и их формулировки для постановки понятных условий для последующего прочностного анализа.

При таком разнообразии теорий для проведения моделирования, нет цепочек сравнения различных подходов от простых к сложным для понимания необходимости введения в модели тех или иных функций и параметров. Такие цепочки необходимо создавать с непосредственной привязкой к экспериментам, чтобы был понятен смысл усложнения модели, и можно было бы оценить затраты на необходимые исследования.

Тем не менее, наработанный математический и механический аппарат довольно существенен и при профессиональном использовании позволяет решать и анализировать практически любые задачи, встречающиеся в современной промышленной и инженерной практике.

## **Глава 2**

# **Задачи пластичности дилатирующих сред**

## 2.1 Формализация вида напряженного состояния в сплошной среде

Существует достаточно большой класс материалов, для которых классические критерии пластичности и прочности, основанные в общем случае на величине сдвиговых напряжений, не согласуются с экспериментами. Данные материалы являются микронеоднородными — имеют трещины, поры, включения и другие особенности структуры. Такие материалы будучи достаточно хрупкими в обычных условиях при больших гидростатических напряжениях могут проявлять пластические свойства и наоборот при большом всестороннем растяжении материал, в обычных условиях пластичный, может проявлять свойства достаточно близкие к хрупким. Деформирование таких материалов может сопровождаться необратимыми объемными деформациями. Этот эффект получил название дилатансии и впервые экспериментально был обнаружен Рейнольдсом [288], такой эффект проявляется наиболее ярко при деформировании сыпучих сред.

Основные свойства материалов, которые рассматриваются в данной работе — это отсутствие "единой кривой" для зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций и несправедливость обычно принимаемых гипотез об упругой сжимаемости материала и пластической несжимаемости. Для многих материалов диаграммы зависимости интенсивности деформации от интенсивности напряжений при простом растяжении, сжатии, сдвиге, двухосном сжатии и других видах нагружения различны, причем расхождение диаграмм может быть весьма значительное. Такими свойствами обладают многие конструкционные материалы, в том числе: композиты, конструкционные графиты, чугуны, бетоны, полимерные

материалы, конструкционные стали, керамики и многие другие.

Таким образом для моделирования поведения таких сложных сред требуется формализация вида напряженного состояния в материале. В общем случае, для изотропного материала необходимо анализировать между тремя главными напряжениями. Тем не менее, на практике удобнее использовать инварианты тензора напряжений: среднее напряжение, интенсивность напряжений и угол подобия девиаторов напряжений. Выражения для главных напряжений, через упомянутые инварианты выглядят следующим образом [67],

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma + \frac{2}{3}\sigma_0 \cos(\Theta), & \sigma_2 &= \sigma + \frac{2}{3}\sigma_0 \cos(\Theta - 2/3\pi), \\ \sigma_3 &= \sigma + \frac{2}{3}\sigma_0 \cos(\Theta - 4/3\pi),\end{aligned}$$

где  $\sigma = 1/3\sigma_{ii}$  — среднее напряжение,  $\sigma_0 = \sqrt{3/2S_{ij}S_{ij}}$  — интенсивность напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$  — девиатор напряжений. Угол  $\Theta$  называется углом подобия девиаторов тензора напряжений и определяется соотношением

$$\cos \Theta = 9/2(S_{III}/\sigma_0^3),$$

где  $S_{III} = S_{ik}S_{kj}S_{ij}$  — третий инвариант девиатора напряжений.

Относительные величины главных напряжений можно представить в виде

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_1}{\sigma_0} &= \xi + \frac{2}{3} \cos(\Theta), & \frac{\sigma_2}{\sigma_0} &= \xi + \frac{2}{3} \cos(\Theta - 2/3\pi), \\ \frac{\sigma_3}{\sigma_0} &= \xi + \frac{2}{3} \cos(\Theta - 4/3\pi),\end{aligned}$$

где  $\xi = \sigma/\sigma_0$ .

Интенсивность напряжений  $\sigma_0$  можно выразить через второй инвариант тензора напряжений  $S_{II} = \sigma_{ij}\sigma_{ij}$  и параметр  $\xi$  таким образом —  $\sigma_0 = \sqrt{S_{II}(2/3 + 3\xi^2)}$  и после подстановки

$$\frac{\sigma_1}{\sqrt{S_{II}}} = \frac{\xi + 2/3 \cos(\Theta)}{\sqrt{2/3 + 3\xi^2}}, \quad \frac{\sigma_2}{\sqrt{S_{II}}} = \frac{\xi + 2/3 \cos(\Theta - 2/3\pi)}{\sqrt{2/3 + 3\xi^2}},$$

$$\frac{\sigma_3}{\sqrt{S_{II}}} = \frac{\xi + 2/3 \cos(\Theta - 4/3\pi)}{\sqrt{2/3 + 3\xi^2}}.$$

Инвариант  $S_{II}$  в последних соотношениях представляет собой квадрат модуля вектора напряжений, то есть данные соотношения представляют собой выражения для направляющих косинусов этого вектора в главных осях тензора напряжений. Таким образом, вид напряженного состояния определяется только двумя параметрами  $\xi$  и  $\Theta$ . Имеется ввиду, что количественная характеристика напряжений обычно включена в определяющие соотношения, которые используются в конкретных моделях, а вид вектора напряжений при его учете определяется данными двумя параметрами.

Стоит отметить, что параметр  $\Theta$  непосредственно связан с известным параметром Лоде следующим выражением:

$$\mu_\sigma = s \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 = -\sqrt{3} \operatorname{ctg}(\Theta + \pi/3).$$

Физический смысл параметров вида напряженного состояния [61], можно представлять так:  $\sigma$  — это среднее нормальное напряжение в точке сплошной среды,  $\sigma_0$  определяет значение среднего касательного напряжения в той же точке. Таким образом, параметр  $\xi$  характеризует в среднем соотношение между вкладом касательных напряжений и вкладом нормальных напряжений. Параметр  $\Theta$  или, что тоже самое, параметр Лоде  $\mu_\sigma$  опре-

деляют отклонение от значения параметра  $\xi$ , характеризующего в среднем вид напряженного состояния.

На практике сохранение сразу двух параметров в определяющих соотношениях приводит к сложным зависимостям и, что более важно, существенно осложняет экспериментальные программы, связанные с испытаниями конкретных материалов. Необходимо сохранять баланс между возможной применимостью модели и теми эффектами, которые она может отразить. В этом смысле в пользу параметра  $\xi$  говорит его понятный физический смысл и возможность изменять свои значения при изменении гидростатической компоненты тензора напряжений. Последнее замечание является наиболее критическим для большинства материалов со сложной структурой, в известные модели которых входит давление в чистом виде.

Тем не менее, пренебречь параметром Лодэ в общем случае невозможно. Существуют работы, показывающие неспособность различать некоторые случаи нагружения, при которых появляются необратимые пластические деформации, основанные только на параметре  $\xi$  [143, 202, 271]. Для более полного описания свойств материалов и построения наиболее законченных моделей необходимо рассматривать оба параметра.

Таким образом, можно выделить параметр  $\xi$  как основной и связать с ним основную формализацию вида напряженного состояния в материале. При этом, параметр подобия  $\Theta$  можно рассматривать как вспомогательный для более детального моделирования и включать его в определяющие соотношения для уточнения основного подхода.



## 2.2 Моделирование пластического течения дилатирующих сред

В этой главе будет рассмотрен возможный подход к описанию зависимости характеристик пластического деформирования дилатирующей среды от реализуемого при нагружении вида напряженного состояния. Будут построены соотношения между напряжениями и пластическими деформациями в условиях предположения о жестко-пластическом поведении тела с использованием аналитических подходов. Далее, на примере конкретных задач плоской деформации будут получены численные решения задач предельного состояния для упругопластических тел, а также проведено сравнение с полученными аналитическими решениями на основе жесткопластического подхода.

В общем случае дилатирующей средой, считается материал, в котором сдвиговые и объемные деформационные характеристики взаимосвязаны. А эффект, под действием чистой сдвиговой нагрузки происходит объемное деформирование называется дилатансией. Механизм такой связи наиболее наглядно демонстрирует опыт Рейнольдса, в котором плотная упаковка шаров при приложении сдвиговых напряжений на поверхности становится менее регулярной и, следовательно, разрыхляется или более точно в деформированном состоянии занимает больший объем. На следующем рисунке показана схема такого опыта.

Интересно, что такое разрыхление может происходить и при дополнительной сжимающей нагрузке, то есть положительные объемные деформации могут возникать и при сжимающих нагрузках. Основа такого эффекта, в данном случае, лежит во внутреннем трении между поверхностями ша-

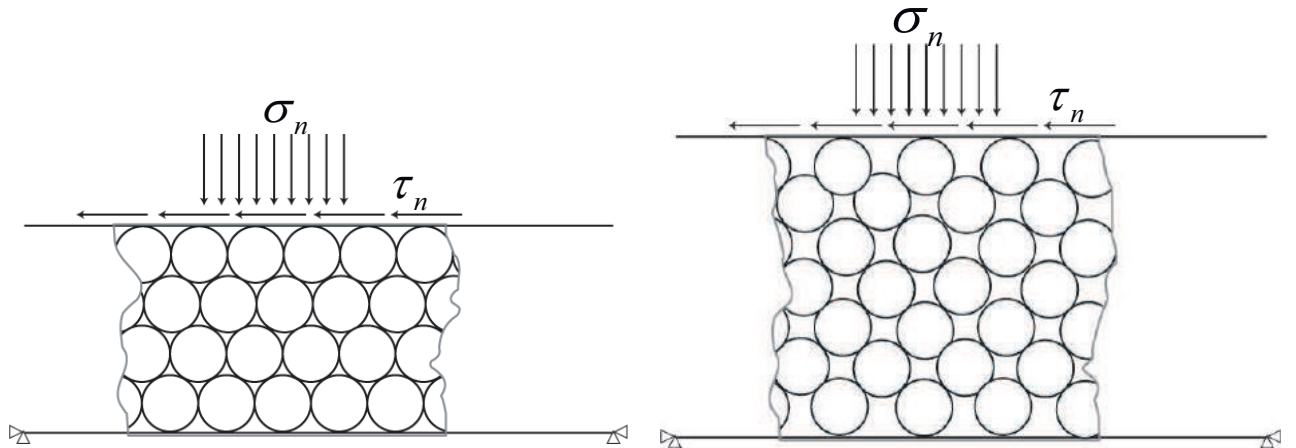


Рис. 2.1: Схема опыта Рейнольдса, недеформированная плотная упаковка шаров (слева), деформированное состояние с увеличением объема (справа).

ров, в более же общем случае, при рассмотрении материалов, этот эффект связан с их сложной внутренней структурой.

В следующем разделе будет продемонстрирован возможный подход к моделированию таких сред, будут показаны определяющие соотношения и примеры решения конкретных задач.

### 2.2.1 Определяющие соотношения пластического течения с зависимостью свойств материалов от вида нагружения

Следуя работам [43–46,82] в качестве критерия пластичности примем условие в следующем обобщенном виде:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k. \quad (2.1)$$

Здесь  $\xi$ , как и ранее, параметр вида напряженного состояния, характеризующий в среднем соотношение между нормальными и касательными на-

пряжениями в точке сплошной среды равный  $\sigma/\sigma_0$ , где  $\sigma = 1/3\sigma_{ii}$  - среднее нормальное напряжение, а  $\sigma_0 = \sqrt{3/2S_{ij}S_{ij}}$  - интенсивность касательных напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ . Не нарушая общности, можно принять, что при чистом сдвиге ( $\xi = 0$ ) значение функции  $f(0) = 1$ . Тогда  $k = \sqrt{3}\tau_s$ , где  $\tau_s$  предел текучести при сдвиге. При произвольном виде напряженного состояния параметр  $\xi$  принимает значения в диапазоне от  $-\infty$  (равномерное трехосное сжатие) до  $+\infty$  (равномерное трехосное растяжение).

Принимая различные аналитические выражения для функции  $f(\xi)$ , можно получить некоторые из известных условий пластичности используемых в механике гранулированных, пористых и поврежденных сред. Рассмотрим случай линейной зависимости функции  $f$  от параметра  $\xi$ :

$$f(\xi) = 1 + C\xi. \quad (2.2)$$

При таком выборе функции  $f(\xi)$ , условие (2.1) совпадает с обобщенным критерием Кулона-Мора [151]:

$$\sigma_0 + C\sigma = k. \quad (2.3)$$

Если же в качестве функции от параметра вида напряженного состояния  $\xi$  выбрать следующую зависимость:

$$f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}, \quad (2.4)$$

то мы получим известное соотношение Грина ([23]):

$$\sqrt{\sigma_0^2 + \alpha\sigma^2} = \beta k. \quad (2.5)$$

Далее в работе коэффициент  $\beta$  использоваться не будет, будет предполагаться, что зависимость критерия от параметра  $\beta$  включена в параметр  $k$ , и теперь параметры  $k$  и  $\alpha$  будут предполагаться зависящими от пористости среды, обозначение  $\beta$  далее будет использоваться для других целей.

При  $f(\xi) \equiv 1$  обобщенное условие (2.1) совпадает с условием пластичности Губера - Мизеса  $\sigma_0 = k$ .

Таким образом, при помощи уравнения (2.1), получается обобщить выбранный для рассмотрения ранее класс критериев. Также, данный результат можно рассматривать как обоснование выбора приведенного вида обобщения для критериев пластичности дилатирующих сред или более обще – сред, поведение которых зависит от параметра  $\xi$ .

Теперь, следуя [47], выпишем соотношения между напряжениями и деформациями, сохраняя при этом общий вид функции  $f(\xi)$  в критерии пластичности.

Принимая ассоциированный с условием (2.1) закон течения  $\dot{\varepsilon}_{ij} = h' \partial F / \partial \sigma_{ij}$ , в случае жесткопластического тела получим связь между скоростями деформаций и напряжениями

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= h' [1/3 \Lambda(\xi) \delta_{ij} + \lambda(\xi) f(\xi) S_{ij} / k], \\ \Lambda(\xi) &= f'(\xi), \quad \lambda(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi), \quad h' = H / \chi(\xi), \\ H &= \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}, \quad \chi(\xi) = \sqrt{1/3 \Lambda^2(\xi) + 3/2 \lambda^2(\xi)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Функции  $\lambda(\xi)$  и  $\Lambda(\xi)$  и их производные связаны соотношениями

$$\lambda(\xi) + \xi \Lambda(\xi) = f(\xi), \quad \lambda'(\xi) + \xi \Lambda'(\xi) = 0. \quad (2.7)$$

Согласно (2.6) можно получить выражения для интенсивности скоро-

стей пластических деформаций

$$\Gamma = \sqrt{2/3 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} = h' \lambda(\xi), \quad (2.8)$$

где

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - 1/3 \dot{\epsilon} \delta_{ij},$$

и скорость объемной деформации

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} = h' \Lambda(\xi). \quad (2.9)$$

Из данных выражений видно, что функция  $\lambda(\xi)$  должна быть положительно определенной. При этом скорость остаточной объемной деформации пропорциональна интенсивности скоростей деформации

$$\dot{\epsilon} = \Gamma \Lambda(\xi) / \lambda(\xi). \quad (2.10)$$

Коэффициент пропорциональности  $\Lambda(\xi) / \lambda(\xi)$ , в общем случае, зависит от параметра вида напряженного состояния  $\xi$ , то есть принимает различные значения для разных соотношений между нормальными и касательными напряжениями в среде. В случае, когда функция  $f(\xi)$  представляется выражением (2.2), коэффициент в соотношении (2.10) постоянный.

Согласно (2.6) скорость диссипации механической энергии, приходящаяся на единицу объема, выражается следующим образом:

$$D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = kH / \chi(\xi). \quad (2.11)$$

В условиях активного процесса нагружения  $dF > 0$  и должно выпол-

няться следующее условие:

$$dF(\sigma_{ij}) = \Lambda(\xi)d\sigma + \lambda(\xi)d\sigma_0 > 0, \quad (2.12)$$

что приводит к условию для приращений характеристик напряженного состояния  $\sigma_0$  и  $\sigma$ :

$$d\sigma_0 > -[\Lambda(\xi)/\lambda(\xi)]d\sigma. \quad (2.13)$$

Поверхность  $F$  должна быть невогнутой, то есть  $d^2F \geq 0$ , используя очевидное соотношение  $3/2S_{ij}dS_{ij} = \sigma_0d\sigma_0$  получим:

$$\begin{aligned} d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} d\sigma_{kl} = \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} (d\sigma)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_0^2} (d\sigma_0)^2 + \\ + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma \partial \sigma_0} d\sigma d\sigma_0 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_0} \left( \frac{3}{2} \frac{dS_{ij} dS_{ij}}{\sigma_0} - \frac{(d\sigma_0)^2}{\sigma_0} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

При этом коэффициенты, использованные в предыдущем выражении, или производные функции  $F$  от параметров  $\sigma$  и  $\sigma_0$  имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_0} = \xi f'(\xi) + f(\xi), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} = \frac{f''(\xi)}{\sigma_0}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_0^2} = \frac{\xi^2 f''(\xi)}{\sigma_0}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma \partial \sigma_0} = -\frac{\xi f''(\xi)}{\sigma_0}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Тогда выражение для  $dF^2$  в случае принятого критерия примет следующее выражение:

$$dF^2 = \frac{f''}{\sigma_0} (d\sigma - \xi d\sigma_0)^2 - \frac{f - \xi f'}{\sigma_0} (d\sigma_0)^2 + \frac{f - \xi f'}{\sigma_0} \frac{3}{2} dS_{ij} dS_{ij}. \quad (2.16)$$

Учитывая, что  $f - \xi f' = \lambda(\xi) > 0$  и  $3/2 dS_{ij} dS_{ij} \geq (d\sigma_0)^2$ , получим

$$d^2 F \geq f'' \frac{(d\sigma_0 - \xi d\sigma_0)^2}{\sigma_0} \geq 0. \quad (2.17)$$

Следовательно, чтобы поверхность текучести  $F(\sigma_{ij})$  в пространстве напряжений, определяемая выражением (2.1), являлась невогнутой, достаточно выполнения условия  $f''(\xi) \geq 0$ . Критерии, рассмотренные в качестве частных случаев, удовлетворяют данному условию. Далее в разделе, посвященном построению численного анализа, свойства данной зависимости будут разобраны более подробно на примере линейной зависимости критерия от параметра  $\xi$ .

## 2.2.2 Основные соотношения для условий плоской деформации

Рассмотрим случай плоской деформации, пренебрежем упрочнением и попытаемся выяснить некоторые характерные особенности пластического течения в телах с использованием определяющих соотношений (2.6).

В случае плоской деформации  $\dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{13} = \dot{\epsilon}_{23} = 0$  и, воспользовавшись соотношениями (2.6), можно выразить напряжение  $\sigma_{33}$  через  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$

$$\sigma_{33} - \sigma = -\frac{2 \Lambda(\xi)}{9 \lambda(\xi)} \sigma_0. \quad (2.18)$$

Данное выражение является нелинейной связью между компонентой напряжения  $\sigma_{33}$  и компонентами напряжений в плоскости  $(x_1, x_2)$ , остальные компоненты  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{23}$  равны нулю, что непосредственно следует из ассоциированного закона течения (2.6). Используя выражение (2.18) для напря-

жения  $\sigma_{33}$ , нетрудно получить следующие соотношения для интенсивности напряжений и среднего напряжения:

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \left[ 1 - \frac{\Lambda^2(\xi)}{9\lambda^2(\xi)} \right]^{1/2}, \\ \sigma &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{\Lambda(\xi)}{9\lambda(\xi)}.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Напряжение  $\sigma_{33}$  представляет собой главное напряжение, выражение для которого теперь можно записать так:

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{3}\sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)}.\quad (2.20)$$

Два других главных напряжения в плоскости имеют следующие значения:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22} \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}).\quad (2.21)$$

Из соотношений (2.18) – (2.21) видно, что  $\sigma_{33}$  не является в общем случае промежуточным напряжением и поэтому максимальное касательное напряжение может действовать в плоскостях, непараллельных  $x_3$ .

Обозначим через  $\zeta$  параметр, определяемый отношением

$$\zeta = \frac{S}{S_0}; \quad S = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}); \quad S_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}.\quad (2.22)$$

Используя соотношения (2.19) – (2.22) можно получить зависимость

$$\xi = \sqrt{1 - \frac{\Lambda^2(\xi)}{9\lambda^2(\xi)}} \zeta - \frac{\Lambda(\xi)}{9\lambda(\xi)}.\quad (2.23)$$



Если функция  $f(\xi) \equiv const$ , эти параметры совпадают,  $\xi = \zeta$ . Соотношение (2.23) определяет взаимно однозначное соответствие между параметрами  $\xi$  и  $\zeta$  при выполнении условий  $1 - \Lambda^2(\xi)/[9\lambda^2(\xi)] > 0$  и  $\Lambda'(\xi) \geq 0$ . Поскольку  $\Lambda'(\xi) = f''(\xi)$ , то второе условие совпадает с условием выпуклости поверхности текучести.

Условие текучести (2.1) теперь можно записать в следующем виде:

$$f(\xi)(1 - \Lambda^2(\xi)/[9\lambda^2(\xi)])^{-1/2}S_0 = k. \quad (2.24)$$

Если заменить в данном равенстве параметр  $\xi$  выражением через  $\zeta$ , то условие (2.1) примет следующий вид:

$$f_1(\zeta)S_0 = k, \quad f_1(\zeta) = f[\xi(\zeta)]. \quad (2.25)$$

В условие (2.25) входят только компоненты напряжения  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{12}$ . В случае идеальной пластичности  $k = \sqrt{3}\tau_s$  и система уравнений для определения напряженного состояния имеет вид

$$\begin{aligned} f_1^2(\zeta)[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2] &= 4\tau_s^2, \\ \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

К этим уравнениям необходимо присоединить соотношения, связывающие напряжения со скоростями деформации, то есть уравнения (2.6). В случае плоской деформации остаются только три уравнения, из которых

легко находим

$$\begin{aligned}\frac{v_{1,1} - v_{2,2}}{v_{1,2} + v_{2,1}} &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}, \\ \frac{v_{1,1} + v_{2,2}}{v_{1,2} + v_{2,1}} &= \frac{\sqrt{3}\Lambda_1(\zeta)}{\sqrt{9\lambda_1^2(\zeta) - \Lambda_1^2(\zeta)}} \frac{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{2\sigma_{12}},\end{aligned}\quad (2.27)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — компоненты скорости,  $\Lambda_1 = \Lambda(\xi(\zeta))$ ,  $\lambda_1 = \lambda(\xi(\zeta))$ . Для определения характеристик системы уравнений (2.26) воспользуемся известными формулами для напряжений, которые в случае плоской деформации могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= S - (S_0/\sqrt{3}) \sin 2\theta, & \sigma_{22} &= S + (S_0/\sqrt{3}) \sin 2\theta, \\ \sigma_{12} &= (S_0/\sqrt{3}) \cos 2\theta.\end{aligned}\quad (2.28)$$

Здесь  $\theta$  — угол между осью  $x_1$  и направлением площадки на которой действует максимальное касательное напряжение в плоскости  $(x_1, x_2)$ .

Воспользуемся соотношениями  $\zeta = S/S_0 = S f_1(\zeta)/k$  и  $S_0 = k/f_1(\zeta)$  и выразим параметр  $\zeta$  через  $S$ , тогда соотношения (2.28) переписутся так:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= S - kF_1(S) \sin 2\theta, & \sigma_{22} &= S + kF_1(S) \sin 2\theta, \\ \sigma_{12} &= kF_1(S) \cos 2\theta,\end{aligned}\quad (2.29)$$

где

$$F_1(S) = [\sqrt{3}f_1(\zeta(S))]^{-1}.\quad (2.30)$$

Теперь подставим данные выражения (2.29) для компонент напряжений в

уравнения равновесия (2.26) и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} S_{,1} + kF_2(S)(S_{,1} \sin 2\theta - S_{,2} \cos 2\theta) - 2kF_1(S)(\theta_{,1} \cos \theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) &= 0, \\ S_{,2} - kF_2(S)(S_{,1} \cos 2\theta + S_{,2} \sin 2\theta) - 2kF_1(S)(\theta_{,1} \sin \theta - \theta_{,2} \sin 2\theta) &= 0, \end{aligned}$$

где  $F_2(S) = -F_1'(S)$ .

(2.31)

Таким образом, получена система уравнений, которая по своей форме близка к уравнениям общей плоской задачи теории пластичности, которые достаточно полно описаны в литературе, например, в работах Качанова Л. М. [35], также описание можно найти в работах [33, 76, 85]. В этих работах постулировалась связь между максимальным касательным и средним напряжением, а также предполагалось условие несжимаемости, что отличается от свойств рассматриваемых в данной работе материалов.

Характеристики системы уравнений (2.31) и соотношения вдоль характеристик имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - k^2 F_2^2}}{kF_2 + \sin 2\theta}, \\ dS \mp \frac{2kF_1 d\theta}{\sqrt{1 - k^2 F_2^2}} &= 0. \end{aligned}$$

(2.32)

Как видно из уравнений характеристик (2.32), система уравнений (2.31) является гиперболической при  $|kF_2| < 1$ , параболической при  $|kF_2| = 1$  и эллиптической при  $|kF_2| > 1$ . Стоит отметить, что в отличие от задач, рассмотренных в [35], характеристики не являются ортогональными в общем случае.

С помощью выражений (2.29) уравнения для компонент скоростей

(2.27) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} (v_{1,2} + v_{2,1}) \operatorname{tg} 2\theta + v_{1,1} - v_{2,2} &= 0, \\ v_{1,1} + v_{2,2} - (v_{1,2} + v_{2,1})kF_2(S)/\cos 2\theta &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Нетрудно показать, что характеристики полученной системы уравнений (2.33) совпадают с линиями характеристик системы уравнений для напряжений (2.31) и вдоль них выполняются соотношения

$$dv_\alpha - v_3 d\varphi_\alpha = 0, \quad dv_\beta - v_4 d\varphi_\beta = 0. \quad (2.34)$$

Здесь  $v_\alpha$  и  $v_\beta$  компоненты скорости вдоль разных семейств характеристик,  $v_3$  и  $v_4$  компоненты скорости вдоль направлений, нормальных к линиям характеристик

$$v_3 = (v_\beta - v_\alpha \cos \varphi)/\sin \varphi, \quad v_4 = (v_\beta \cos \varphi - v_\alpha)/\sin \varphi, \quad \varphi = \varphi_\beta - \varphi_\alpha. \quad (2.35)$$

Здесь  $\varphi_\alpha$  и  $\varphi_\beta$  углы наклона характеристик отсчитываемые от направления оси  $x_1$ , которые имеют следующие выражения

$$\operatorname{tg} \varphi_\alpha = \frac{-\cos 2\theta + \sqrt{1 - k^2 F_2^2}}{kF_2 + \sin 2\theta}, \quad \operatorname{tg} \varphi_\beta = \frac{-\cos 2\theta - \sqrt{1 - k^2 F_2^2}}{kF_2 + \sin 2\theta}. \quad (2.36)$$

Теперь рассмотрим упомянутые ранее конкретные варианты зависимости  $f(\xi)$ , и ограничимся случаем гиперболичности системы уравнений (2.31).

Если зависимость от  $\xi$  линейная  $f(\xi) = 1 + C\xi$ , то связь между пара-

метрами  $\zeta$  и  $\xi$  также линейная

$$\xi = \sqrt{1 - C^2/9}\zeta - C/9. \quad (2.37)$$

Функция  $F_1(S)$  представляется следующим выражением:

$$F_1(S) = m(C^{-1} - S/k), \quad \text{где } m = \sqrt{3}C/\sqrt{9 - C^2}. \quad (2.38)$$

При этом соотношения вдоль характеристик могут быть проинтегрированы и уравнения (2.32) переписутся в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - m^2}}{m + \sin 2\theta}, \\ \frac{\sqrt{1 - m^2}}{2m} \ln \left( 1 - C \frac{S}{k} \right) \pm \theta &= \text{const}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Система уравнений (2.31) гиперболическая, при  $|m| < 1$ , что соответствует условию  $-3/2 < C < 3/2$ .

Рассмотрим теперь случай, когда функция  $f(\xi)$  представлена выражением  $f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}$ , где параметр  $\alpha \geq 0$ . Используя соотношение для  $\xi$  и  $\zeta$  (2.23), получим

$$\xi = \frac{\zeta}{\sqrt{(1 + \alpha/9)^2 + \zeta^2\alpha^2/9}}. \quad (2.40)$$

При этом

$$f_1(\zeta) = \frac{\sqrt{1\alpha/9 + \alpha\zeta^2}}{\sqrt{1 + \alpha/9}}. \quad (2.41)$$

Тогда функции  $F_1(S)$  и  $F_2(S)$  в уравнения (2.32) представляются в виде

$$\begin{aligned} F_1(S) &= \frac{\sqrt{1/\beta - S^2/k^2}}{\sqrt{3/\beta}}, \\ F_2(S) &= \frac{S/k}{k\sqrt{3/\beta}\sqrt{1/\beta - S^2/k^2}}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha/9}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Условие гиперболичности в данном случае сводится к неравенству:

$$S^2 < \frac{3k^2}{\beta(3 + \beta)}. \quad (2.43)$$

Соотношения (2.32) в данном случае также могут быть проинтегрированы

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{(1 - \beta S/k)^2/[3(1 - \beta S^2/k^2)]}}{\beta S/k \sqrt{3(1 - \beta S^2/k^2)} + \sin 2\theta}, \\ \sqrt{\frac{3 + \beta}{\beta}} \arcsin \left[ \sqrt{\frac{\beta(3 + \beta) S}{3 k}} \right] - \arcsin \left[ \frac{\beta S}{k \sqrt{3(1 - \beta S^2/k^2)}} \right] \mp 2\theta &= \text{const}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Условие Грина (2.5) предлагалось для описания пластического деформирования пористых материалов и коэффициенты  $\alpha$  и  $k$  считались функциями пористости. Далее в работе будут рассмотрены задачи предельного состояния, в рамках такого подхода можно предполагать, что материал уже достиг некоторого предельного состояния пористости, и коэффициенты  $\alpha$  и  $k$  достигли соответствующих предельных значений.

### 2.2.3 Аналитические решения конкретных задач

Теперь рассмотрим некоторые конкретные задачи с точки зрения следующего подхода. Будем исследовать распределение полей напряжений и скоростей деформации в условиях предельного пластического состояния тела. То есть предполагается состояние развитого пластического течения, с включением больших областей тела в процесс пластического деформирования. Предполагается рассматривать состояния, когда приложенной нагрузке уже не сопротивляются области, сохранившие упругие свойства. В таких условиях можно пренебречь упругими деформациями по сравнению с пластическими, также пренебрежем влиянием упрочнения. Такие допущения приводят к рассмотрению жестко-идеально пластической идеализации поведения материала, что в условиях плоской деформации приводит к возможности рассмотрения задачи в напряжениях.

Такого рода задачи в работах Д.Друкера и В.Прагера [151] получили название — "задачи предельного проектирования в случае классических критериев пластичности решения таких задач широко отражены в литературе [31–35, 66, 75, 76]. В данной работе предлагается рассмотреть описанные задачи предельного состояния, но с использованием критерия пластичности (2.1) и проанализировать влияние на результаты зависимости критерия от параметра вида напряженного состояния  $\xi$ .

Особенностью решения таких задач является неизвестность величины нагрузки приложенной к телу. При этом предполагается, что нагрузка меняется пропорционально некоторому параметру, все остальные характеристики нагрузки, такие как направление и область приложения являются постоянными  $\bar{P} = t\bar{P}_0$ , где  $\bar{P}_0 \equiv Const$ . Основной целью решения задачи является определение величины нагрузки при которой предельное состояние

будет достигнуто. При этом теорем единственности решения для данного класса задач нет, но существуют экстремальные теоремы при помощи которых можно оценить только величину предельной нагрузки. Эти вопросы хорошо изложены и распространены в литературе, например [35], данные теоремы справедливы и в случае обсуждаемого критерия пластичности (2.1). Основные утверждения теорем говорят о том, что статически допустимое решение оценивает значение предельной нагрузки снизу, а кинематически возможное решение оценивает предельную нагрузку сверху. Если же удастся построить такие решения, что верхняя и нижняя оценки совпадают, то полученное значение предельной нагрузки является точным. На рис. 2.2 схематически отображена постановка задачи, демонстрирующая основные предположения.

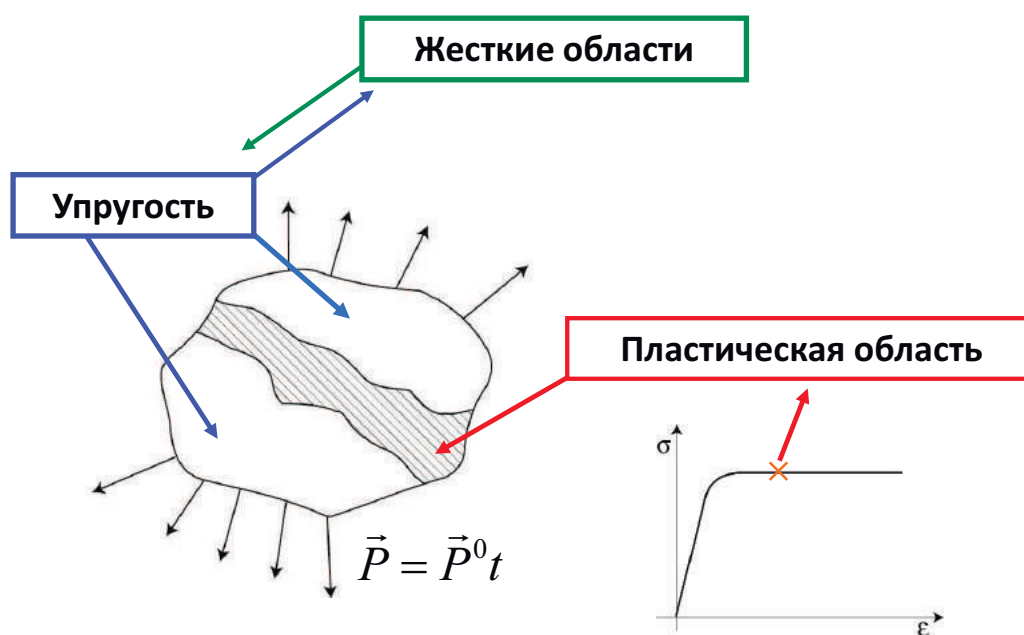


Рис. 2.2: Схема жесткопластической постановки задачи.

Перейдем к рассмотрению конкретных задач. Первой предлагается рассмотреть задачу о растяжении полосы ослабленной угловыми вырезами [49–51, 81]. Данная задача будет проанализирована наиболее подробно и



детально, чтобы при рассмотрении других примеров была возможность ссылаться на предложенный подход.

Постановка задачи выглядит следующим образом: полоса геометрии, приведенной на рис. 2.3, растягивается при помощи силы  $P$ . Величина скорости растяжения полосы вдали от вырезов предполагается равной  $V$ , берега вырезов свободны от нагрузки. Глубина вырезов предполагается хотя и произвольной, но достаточно глубокой, в противном случае предлагаемый вид пластических областей представленный на рис. 2.3 может не реализоваться, а именно, на срединной линии  $OM$  могут отсутствовать пластические деформации вплоть до достижения предельного состояния.

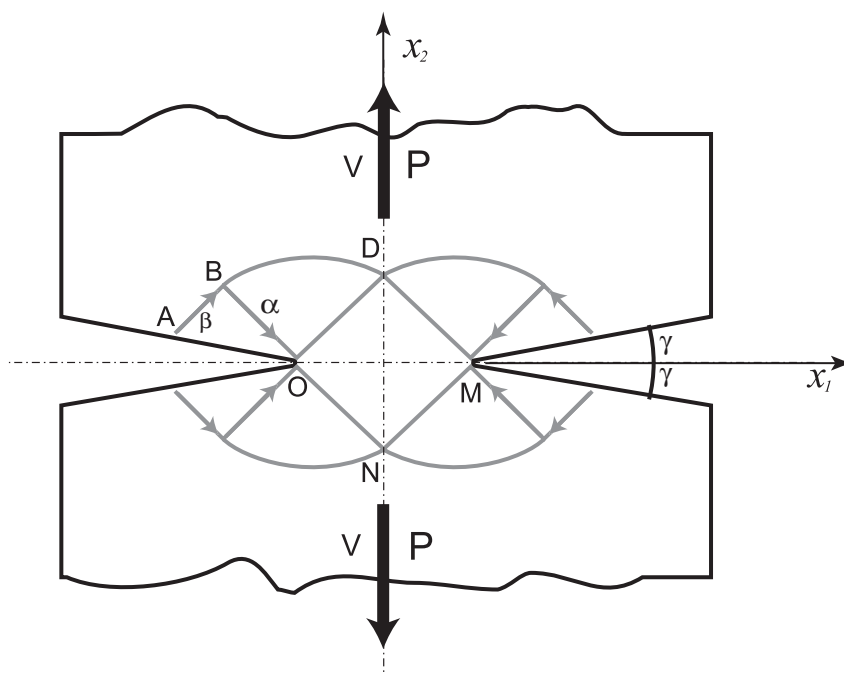


Рис. 2.3: Растяжение полосы ослабленной угловыми вырезами.

Будем использовать критерий в виде (2.3), когда зависимость  $f(\xi)$  представлена в виде (2.2). На рис. 2.3 представлен возможный вид полей характеристик.

Поверхности вырезов свободны от нагрузок, что приводит к тому, что

на  $AO$  выполняется:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= S - kF(S) \sin 2(\theta - \varphi_n), \\ \sigma_n &= 0,\end{aligned}\tag{2.45}$$

где  $\sigma_n$  — нормальное напряжение на поверхности выреза,  $\varphi_n$  — угол между нормалью к поверхности границы выреза и направлением оси  $x_1$ . Соотношение (2.45) приводит к уравнению

$$S = kF(S) \sin 2(\theta - \varphi_n).\tag{2.46}$$

Для касательных напряжений  $\tau_n$  на границе свободной от нагрузок справедливо

$$\tau_n = kF(S) \cos 2(\theta - \varphi_n), \quad \tau_n = 0,\tag{2.47}$$

откуда следует

$$\cos 2(\theta - \varphi_n) = 0,\tag{2.48}$$

угол  $\theta$  выбираем следующий

$$\theta = \varphi_n + \pi/4.\tag{2.49}$$

Здесь возникает необходимость выбора угла  $\theta$ , выбор осуществляется из физических соображений и соображений простоты последующих выкладок. Также можно выбирать угол таким образом, чтобы при предельном переходе материальной константы  $C$  к нулю, что приводит к стремлению критерия к классическому критерию пластичности Губера-Мизеса, решение в точности совпадало с классическим, что значительно облегчает анализ полученного решения. Здесь угол выбран с учетом всех упомянутых

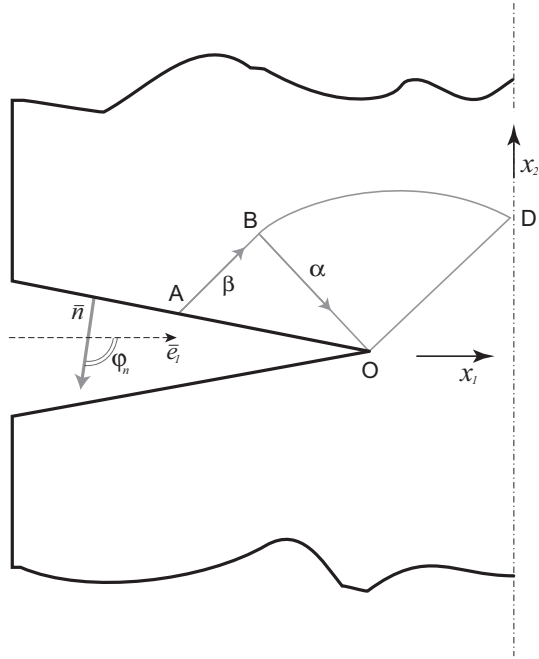


Рис. 2.4:  $\varphi_n$  — угол между нормалью к границе выреза и осью  $x_1$ .

соображений, и далее значение параметра  $\theta$  всегда будет выбираться аналогичным образом. После определения угла из (2.46) следует

$$S = \frac{k}{C} \frac{m}{1+m}. \quad (2.50)$$

Выражения для  $S$  и  $\theta$  верны во всем треугольнике ABO, в силу прямолинейности линий характеристик. Зная значения для  $S$  и  $\theta$  можно с помощью соотношений (2.29) выписать выражения для напряжений в области ABO:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{k}{C} \frac{m}{m+1} (1 - \cos 2\varphi_n), \\ \sigma_{22} &= \frac{k}{C} \frac{m}{m+1} (1 + \cos 2\varphi_n), \\ \sigma_{12} &= -\frac{k}{C} \frac{m}{m+1} (\sin 2\varphi_n). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Рассмотрим теперь область ODMN. Соотношения (2.32) вдоль характе-

ристик интегрируются и вдоль  $\beta$ -линии выполняется соотношение

$$\ln \left( 1 - \frac{C}{k} S \right) = \frac{2m}{\sqrt{1-m^2}} \theta + Const. \quad (2.52)$$

В области ODMN линии характеристик также являются прямолинейными, что, как следствие, приводит к постоянству в этой области параметров  $S$  и  $\theta$ . Угол  $\theta$  можно определить из следующих соображений: из симметрии решения следует, что на серединной линии OM напряжение  $\sigma_{12} = 0$ , из чего непосредственно следует, что можно положить угол  $\theta = -3/4\pi$ . Откуда, зная  $S$  и  $\theta$  в области ABO и зная значение  $\theta$  в области ODMN, можно вычислить значение неизвестной константы в соотношении (2.52) и определить напряжение  $S$  в ODMN:

$$S_{ODMN} = \left( \frac{k}{C} \right) \left[ 1 - \frac{\exp(-(2m/\sqrt{1-m^2})[\pi + \varphi_n])}{1+m} \right]. \quad (2.53)$$

С помощью соотношений (2.29) можно найти напряжения в ODMN:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{k}{C} \left[ 1 - \exp(-(2m/\sqrt{1-m^2})[\pi + \varphi_n]) \right], \\ \sigma_{22} &= \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \exp(-(2m/\sqrt{1-m^2})[\pi + \varphi_n]) \right], \\ \sigma_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

поскольку  $\sigma_{22}$  постоянно в ODMN, то предельная нагрузка  $P$  равна

$$P = 2h\sigma_{22}. \quad (2.55)$$

На рис. 2.5 изображено несколько зависимостей предельной нагрузки отнесенной к  $2hk$  от  $C$  для разных углов надрезов. Таким образом вид-

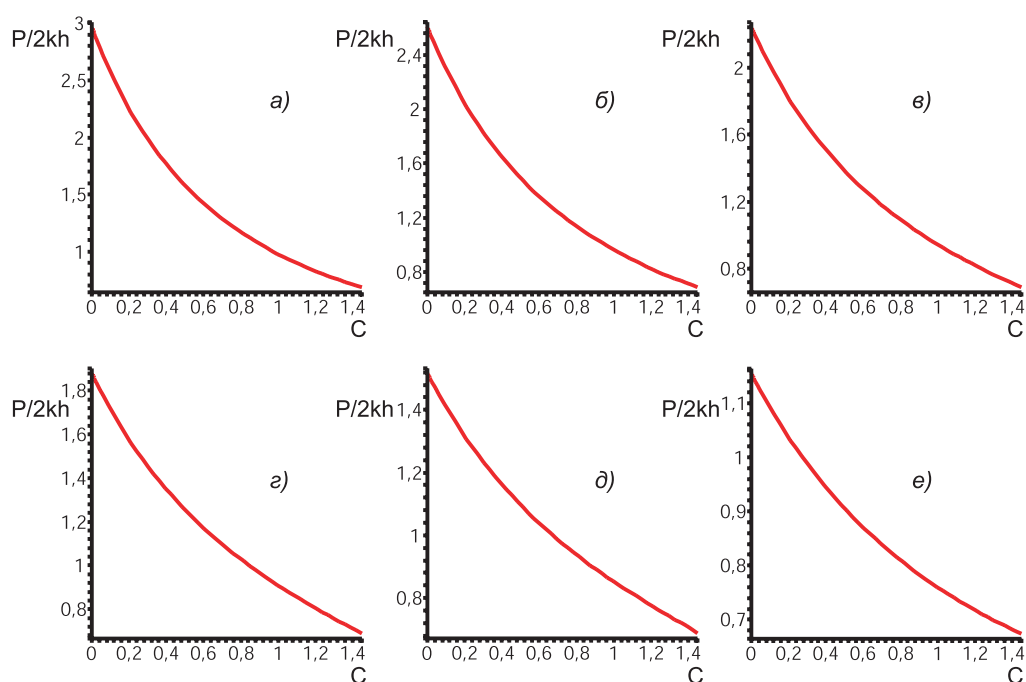


Рис. 2.5: Предельная нагрузка деленная на  $k$  и  $2h$  в случае (2.2) где а)  $\varphi_n = -\pi/2$ , б)  $\varphi_n = -\pi/2 - \pi/10$ , в)  $\varphi_n = -\pi/2 - 2\pi/10$ , г)  $\varphi_n = -\pi/2 - 3\pi/10$ , д)  $\varphi_n = -\pi/2 - 4\pi/10$ , е)  $\varphi_n = -\pi$ .

но, что предельная нагрузка падает с ростом значений  $C$  для всех углов вырезов и неучет введенных здесь свойств в критерий может достаточно сильно изменить результат, например, для полиэтилена высокого давления экспериментальные данные соответствуют константе  $C = 0.12$  [2, 3, 43] и в данном случае разница полученных результатов с классическим подходом для конкретных углов вырезов может достигать 16%.

Исследуем теперь поле скоростей в области ODMN. Пусть распределение скоростей линейно зависит от координат  $(x_1, x_2)$ , чтобы как следствие получить постоянные в ODMN деформации и напряжения, тогда компоненты скоростей запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \\ v_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Стоит заметить, что, если компоненты скоростей записаны в форме (2.56), то в области ODMN, в которой  $\theta = -3/4\pi$ , система уравнений для определения скоростей (2.33) удовлетворяется тождественно. Вследствие симметрии распределения скоростей относительно осей  $x_1$  и  $x_2$  имеем следующие условия для определения коэффициентов:  $v_1 = 0$  при  $x_1 = 0$ ,  $v_2 = 0$  при  $|x_1| \leq h$ ,  $x_2 = 0$ . Из чего следует, что  $\alpha_0 = \alpha_2 = \beta_0 = \beta_1 = 0$ . Далее предполагается что в жестких областях величина скорости равна  $V$ , а направление совпадает с осью  $x_2$ . В области ODMN только точки D и N соприкасаются с жесткими областями. Координаты данных точек легко восстанавливаются при помощи выражений для углов наклона характеристик (2.39) и воспользовавшись условием непрерывности поля скоростей на границе пластических и жестких областей (в данном случае это точки D и N), находим выражения для остальных коэффициентов  $\alpha_1 = -(1-m)/(1+m)\beta_2$ ,  $\beta_2 = \sqrt{(1+m)/(1-m)}V/h$ . Таким образом, можно получить выражения для компонент скорости в области ODMN

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{V}{h}\sqrt{(1-m)/(1+m)}x_1, \\ v_2 &= \frac{V}{h}\sqrt{(1+m)/(1-m)}x_2, \end{aligned} \quad (2.57)$$

после чего можно выписать значения скоростей деформации

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= -\frac{V}{h}\sqrt{(1-m)/(1+m)}, \\ \dot{\epsilon}_{22} &= \frac{V}{h}\sqrt{(1+m)/(1-m)}, \\ \dot{\epsilon}_{12} &= 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Рассмотрим поле скоростей в области OBD. На BD из условия непрерывности решения на границе жестких и деформируемых областей выпол-

няется:

$$\begin{aligned}v_{\alpha} &= V \sin \varphi_{\alpha}, \\v_{\beta} &= V \sin \varphi_{\beta}.\end{aligned}\tag{2.59}$$

Вдоль характеристик для поля скоростей выполняются соотношения Гейрингер (2.34):

$$\begin{aligned}dv_{\alpha} - v_3 d\varphi_{\alpha} &= 0, \quad dv_{\beta} - v_4 d\varphi_{\beta} = 0, \\v_3 &= (v_{\beta} - v_{\alpha} \cos \varphi) / \sin \varphi, \quad v_4 = (v_{\beta} \cos \varphi - v_{\alpha}) / \sin \varphi,\end{aligned}\tag{2.60}$$

где

$$\varphi = \varphi_{\beta} - \varphi_{\alpha}.\tag{2.61}$$

Учитывая, что в случае выбора зависимости критерия от параметра  $\xi$  в виде (2.2),  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{const}$  во всей области решения, что можно проверить простым вычислением. На основании (2.60) можно получить уравнение для определения  $v_{\beta}$ :

$$\frac{dv_{\beta}}{d\varphi_{\alpha}} = \operatorname{ctg} \varphi v_{\beta} - \frac{V}{\sin \varphi} \sin \varphi_{\alpha}.\tag{2.62}$$

Решение этого уравнения находится аналитически:

$$v_{\beta} = V \sin \varphi_{\beta} + C_1 \exp [\operatorname{ctg}(\varphi) \varphi_{\beta}],\tag{2.63}$$

где  $C_1$  неизвестная константа зависящая от распределения скоростей на

OD. Выпишем выражения для скоростей  $v_\alpha$  и  $v_\beta$  в области ODMN

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-mx_1} - \sqrt{1+mx_2})V/h, \\ v_\beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-mx_1} + \sqrt{1+mx_2})V/h. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Тогда с одной стороны значение  $v_\beta$  на OD запишется в виде

$$v_\beta|_{OD} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-m\tilde{x}_1} + \sqrt{1+m\tilde{x}_2})\frac{V}{h}, \quad (2.65)$$

где  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$  есть координаты точек  $(x_1; x_2)$ , которые лежат на линии OD. С другой стороны значение для  $v_\beta$  на OD можно получить из полученного решения (2.63)

$$v_\beta|_{OD} = V \sin \varphi_\beta + C_1 \exp(\varphi_\beta ctg \varphi). \quad (2.66)$$

Теперь приравниваем (2.65) и (2.66)

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-m\tilde{x}_1} + \sqrt{1+m\tilde{x}_2})\frac{V}{h} = V \sin \varphi_\beta + C_1 \exp(\varphi_\beta ctg \varphi), \quad (2.67)$$

откуда, учитывая, что  $\sin \varphi_\beta|_{OD} = -\sqrt{(1-m)/2}$ , получаем следующие выражение для константы  $C_1$

$$C_1 = -V \left[ \frac{1}{h} \frac{\sqrt{1-m}}{\sqrt{2}} \tilde{x}_1 + \frac{1}{h} \frac{\sqrt{1+m}}{\sqrt{2}} \tilde{x}_2 - \frac{\sqrt{1-m}}{\sqrt{2}} \right] \exp -\varphi_\beta ctg \varphi. \quad (2.68)$$

Если мы хотим найти выражение  $v_\beta(x_1; x_2)$  в произвольной точке OBD, то остается только для каждой точки  $(x_1; x_2)$  области OBD найти их образ на



OD или другими словами найти выражение для неизвестных функций:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \tilde{x}_1(x_1; x_2), \\ \tilde{x}_2 &= \tilde{x}_2(x_1; x_2).\end{aligned}\tag{2.69}$$

При этом нам известно, что отображение строится так: фиксируется точка

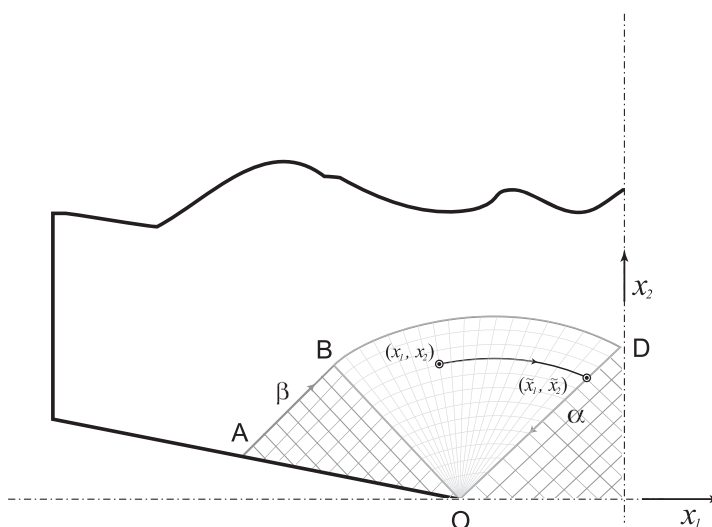


Рис. 2.6: Отображение из  $(x_1, x_2)$  в  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  в области BOD.

$(x_1; x_2)$  принадлежащая области BOD; выясняется какая именно  $\beta$ -линия проходит через эту точку; далее следует узнать пересечение этой линии с OD; координаты точки пересечения и есть интересующие нас значения функций (2.69). Далее попытаемся вывести аналитический вид описанного отображения. Для этого необходимо в явном виде выписать семейство  $\beta$ -линий в зависимости от координат  $(x_1, x_2)$ .

Множество таких кривых описывается уравнением:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \varphi_\beta.\tag{2.70}$$

Теперь нам необходимо найти выражение для  $tg\varphi_\beta$  через  $x_1$  и  $x_2$ . Воспользуемся двумя фактами: первое, что для  $tg\varphi_\alpha$  в области BOD справедливо очевидное уравнение:

$$tg\varphi_\alpha = \frac{x_2}{x_1 + h}, \quad (2.71)$$

и второй факт, это то, что  $tg\varphi$  всюду константа, а именно:

$$tg\varphi = tg(\varphi_\beta - \varphi_\alpha) = -\frac{\sqrt{1-m^2}}{m} =: c, \quad (2.72)$$

используя выражение для тангенса разности можно выразить  $tg\varphi_\beta$  через  $tg\varphi_\alpha$  и, учитывая выражение  $tg\varphi_\alpha$  через  $x_1$  и  $x_2$  (2.71), получить уравнение для множества  $\beta$ -линий в области OBD, в итоге получим:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{cx_1 + x_2 + ch}{x_1 - cx_2 + h}. \quad (2.73)$$

Решение этого дифференциального уравнения выглядит так:

$$-1/2 \ln \frac{(x_1 + h)^2 + x_2^2}{(x_1 + h)^2} - \frac{1}{c} \operatorname{arctg} \left( -\frac{x_2}{(x_1 + h)} \right) - \ln \left( \frac{(x_1 + h)}{h} \right) - Const = 0, \quad (2.74)$$

где

$$c = -\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}. \quad (2.75)$$

Если сделать следующую замену:

$$\begin{aligned} (x_1 + h)^2 + x_2^2 &= \rho, \\ x_1 + h &= \rho \cos \varphi_\alpha, \\ x_2 &= \rho \sin \varphi_\alpha, \end{aligned} \quad (2.76)$$

тогда семейство кривых можно будет записать следующим образом:

$$-\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\rho^2}{\rho^2 \cos^2 \varphi_\alpha} \right) - \frac{\operatorname{arctg}(-tg\varphi_\alpha)}{c} - \ln \left( \frac{\rho \cos \varphi_\alpha}{h} \right) - Const = 0, \quad (2.77)$$

или после упрощения

$$\frac{\varphi_\alpha}{c} - \ln \frac{\rho}{h} - Const = 0. \quad (2.78)$$

Теперь если зафиксировать точку  $(x_1; x_2)$  в области OBD, то мы можем найти константу из уравнения (2.78) и потом, зная первоначальные  $\rho$  и  $\varphi_\alpha$ , можно определить чему будет равно значение  $\rho$ , когда данная кривая пересечет OD, и по этому значению  $\rho|_{OD} =: \tilde{\rho}$  определить значение искомых функций  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$ .

$$\tilde{\rho} = \rho \exp \frac{\varphi_\alpha - \varphi_\alpha|_{OD}}{c}. \quad (2.79)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 + h &= \rho \exp \frac{\varphi_\alpha - \varphi_\alpha|_{OD}}{c} \cos \varphi_\alpha|_{OD}, \\ \tilde{x}_2 &= \rho \exp \frac{\varphi_\alpha - \varphi_\alpha|_{OD}}{c} \sin \varphi_\alpha|_{OD}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Причем из того, что в ODMN значение  $\theta = -3/4\pi$ , можно определить значение  $tg\varphi_\alpha|_{OD}$  и получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_\alpha|_{OD} &= -\sqrt{(1-m)/2}, \\ \cos \varphi_\alpha|_{OD} &= -\sqrt{(1+m)/2}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Подставляя в выражения для  $v_\beta$  значения  $\tilde{x}_1(x_1; x_2)$  и  $\tilde{x}_2(x_1; x_2)$ , получим:

$$v_\beta|_{BOD} = V \sin \varphi_\beta - \frac{V}{h} \left[ \rho \exp \frac{\varphi_\alpha - \varphi_\alpha|_{OD}}{c} \sqrt{1 - m^2} - h \sqrt{2(1 - m)} \right] \exp \left[ -\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \left( \varphi_\beta + \arcsin \sqrt{\frac{1 - m}{2}} \right) \right]. \quad (2.82)$$

При этом параметры  $\rho$ ,  $\varphi_\alpha$  и  $\varphi_\beta$  есть функции координат  $(x_1; x_2)$  точек области ODB.

Значения для компоненты скорости  $v_\alpha$  можно получить из следующих соображений. Так как в области BOD  $\alpha$ -линии есть прямые, то из соотношений Гейренгер (2.34) следует, что  $v_\alpha$  остаются постоянными вдоль каждой  $\alpha$ -линии. А так как на BD значения  $v_\alpha$  известны, то эти значения сохраняются на каждой характеристике, то есть:

$$v_\alpha|_{BOD} = V \sin \varphi_\alpha. \quad (2.83)$$

Рассмотрим область ABO. В ABO известны значения  $S$  и  $\theta$ , что позволяет определить  $tg\varphi_\alpha$  и  $tg\varphi_\beta$ :

$$\begin{aligned} tg\varphi_\alpha &= \frac{-\cos 2\theta + \sqrt{1 - m^2}}{m + \sin 2\theta} = \frac{\sin 2\varphi_n + \sqrt{1 - m^2}}{m - \cos 2\varphi_n}, \\ tg\varphi_\beta &= \frac{-\cos 2\theta - \sqrt{1 - m^2}}{m + \sin 2\theta} = \frac{\sin 2\varphi_n - \sqrt{1 - m^2}}{m - \cos 2\varphi_n}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Таким образом, можно найти значение  $\sin \varphi_\alpha$ :

$$\sin \varphi_\alpha = \frac{\sin 2\varphi_n + \sqrt{1 - m^2}}{\sqrt{2 + 2 \sin \varphi_n \sqrt{1 - m^2} - 2m \cos 2\varphi_n}}. \quad (2.85)$$

Пользуясь тем, что линии характеристик прямые, из чего следует, что

компоненты скоростей постоянны вдоль каждой конкретной линии характеристик, получаем:

$$v_\alpha|_{ABO} = V \sin \varphi_\alpha = V \frac{\sin 2\varphi_n + \sqrt{1 - m^2}}{\sqrt{2 + 2 \sin \varphi_n \sqrt{1 - m^2} - 2m \cos 2\varphi_n}}. \quad (2.86)$$

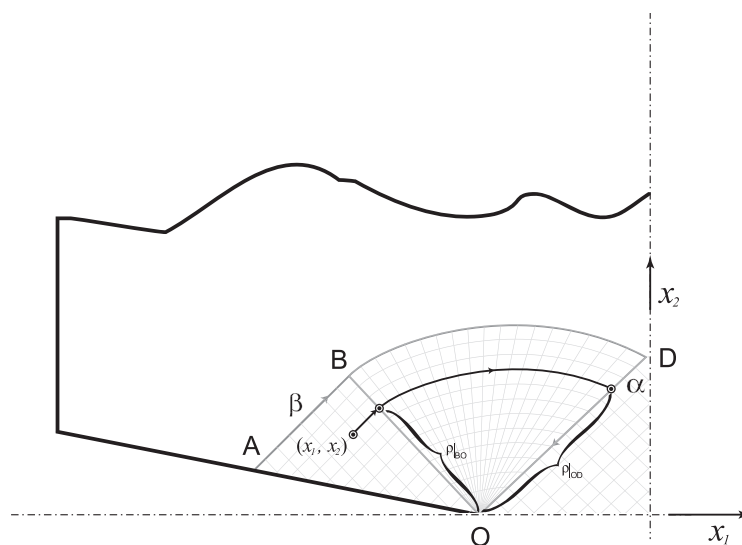


Рис. 2.7: Величина  $v_\beta$  в области АВО определяется значениями скорости на линии ОВ.

Компонента скорости  $v_\beta$  в области АВО определяется значениями этой компоненты на линии ВО. Пользуясь тем, что линии семейства  $\beta$ -характеристик прямолинейны, значение скорости  $v_\beta$  сохраняется вдоль каждой конкретной линии и тем самым полностью определяет распределение скоростей во всей области АВО. Для того чтобы получить выражение для данной компоненты необходимо воспользоваться формулой (2.82) с заменой значений параметров  $\varphi_\beta$ ,  $\varphi_\alpha$  и  $\rho$  на соответствующие значения на линии ОВ. При этом значения углов  $\varphi_\beta$  и  $\varphi_\alpha$  постоянны и находятся из выражений (2.84), а выражение для  $\rho|_{BO}$  необходимо рассматривать как функцию координат точек  $(x_1; x_2)$  области ОВД, которая примет следующую

щий вид:

$$\rho|_{BO} = |\omega| \sqrt{1 + tg\varphi_\alpha}, \quad (2.87)$$

где

$$\omega = \frac{tg\varphi_\beta(x_1 + h) - x_2}{tg\varphi_\beta - tg\varphi_\alpha}. \quad (2.88)$$

После всех преобразований составляющая скорости  $v_\beta$  вычисляется непосредственно из измененной формулы (2.82)

$$v_\beta|_{BOD} = V \sin \varphi_\beta|_{BO} - \frac{V}{h} \left[ \rho|_{OB} \exp \frac{\varphi_\alpha|_{OB} - \varphi_\alpha|_{OD}}{c} \sqrt{1 - m^2} - h\sqrt{2(1 - m)} \right] \exp \left[ -\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \left( \varphi_\beta|_{OB} + \arcsin \sqrt{\frac{1 - m}{2}} \right) \right]. \quad (2.89)$$

Таким образом, рассматривая линейную зависимость условия пластичности от параметра вида напряженного состояния  $\xi$  в виде (2.2), мы получили решение задачи, построены поля напряжений и скоростей и найдено аналитическое выражение для предельной нагрузки.

Аналогично можно решить эту задачу, но с выражениями для  $f(\xi)$  в форме (2.4),  $f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}$ .

Граница вырезов свободна от нагрузок, следовательно аналогично предыдущим рассуждениям на  $AO$

$$\theta = \varphi_n + \pi/4. \quad (2.90)$$

В силу (2.45) и (2.46) и учитывая, что выражения для  $F_1(S)$  и  $F_2(S)$  теперь представлены в виде (2.42), получим формулу, аналогичную (2.50)

$$S = \frac{k}{\sqrt{3 + \beta}}, \quad \text{где } \beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha/9}. \quad (2.91)$$

Исследуем случай гиперболичности системы уравнений (2.31). Тогда, выходящая из границы выреза АО,  $\beta$ -линия характеристик этой системы пересечет центральную линию полосы ОМ. Зная значения  $S$  и  $\theta$  на границе, можно определить константу для этой линии, входящую в соотношения (2.44). Обозначим ее

$$C_1 = \sqrt{\frac{3+\beta}{\beta}} \arcsin \left[ \sqrt{\frac{\beta}{3}} \right] - \arcsin \left[ \frac{\beta}{3} \right] + \varphi_n + \pi/4. \quad (2.92)$$

Теперь, зная константу  $C_1$ , можно воспользоваться соотношением (2.44) для  $\beta$ -линии и условием того, что на центральной линии, как и в предыдущих рассуждениях,  $\theta = -3\pi/4$ , можно определить значение  $S$  в центральной области. При этом для определения  $S$  надо решить уравнение

$$\sqrt{\frac{3+\beta}{\beta}} \arcsin \left[ \sqrt{\frac{\beta(3+\beta)}{3}} \frac{S}{k} \right] - \arcsin \left[ \frac{\beta S}{k\sqrt{3(1-\beta S^2/k^2)}} \right] + 2\theta = C_1. \quad (2.93)$$

При условии того, что  $C_1$  определяется выражением (2.92), по формулам (2.29), зная значения  $S$  и  $\theta$ , можно определить напряжение  $\sigma_{22}$  на центральной линии ОМ. Теперь воспользуемся следующими соображениями: в силу того, что на поверхностях вырезов нагрузки отсутствуют, значения  $S$  и  $\theta$  постоянны на границе вырезов. В силу соотношений (2.44) значения  $S$  и  $\theta$  постоянны на линии ОМ и напряжения на центральной линии также постоянны. Постоянство напряжения  $\sigma_{22}$  позволяет определить значение предельной нагрузки простым соотношением:

$$p = 2h\sigma_{22}. \quad (2.94)$$

К сожалению уравнение (2.93) не удается разрешить относительно  $S$

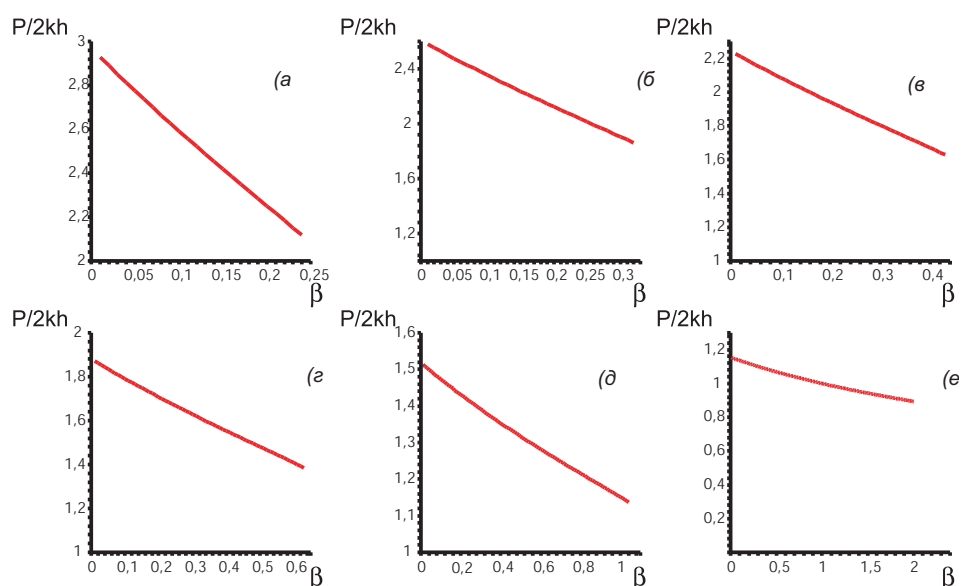


Рис. 2.8: Предельная нагрузка деленная на  $k$  и  $2h$  в случае функции  $f(\xi)$ , представляемой выражением (2.4): а)  $\varphi_n = -\pi/2$ , б)  $\varphi_n = -\pi/2 - \pi/10$ , в)  $\varphi_n = -\pi/2 - 2\pi/10$ , г)  $\varphi_n = -\pi/2 - 3\pi/10$ , д)  $\varphi_n = -\pi/2 - 4\pi/10$ , е)  $\varphi_n = -\pi$ .

аналитически, поэтому проделаем эту процедуру численно и построим ряд зависимостей  $p/(2hk)$  от константы, определяемой свойствами материала  $\beta$ , для конкретных углов вырезов (рис. 2.8).

Стоит отметить, что данное решение получено в предположении что система (2.31) гиперболическая в каждой точке среды, что нельзя утверждать однозначно, так как условие гиперболичности зависит от решения. В условие (2.43) входит параметр  $S$ , поэтому условие гиперболичности может быть нарушено, и предположение о том, что  $\beta$  линия пересечет срединную линию  $OM$ , может не выполняться. В том случае, когда условие гиперболичности во всей области пластичности справедливо, то построенное таким образом решение существует и предельная нагрузка будет равна значению из приведенных зависимостей (рис. 2.8). Получение аналитических формул, описывающих поля скоростей и напряжений в данном случае осложнено тем обстоятельством, что построение характеристических линий возможно только численным образом и только для каждого



конкретного угла выреза. При этом в данной задаче имеются две особые точки  $O$  и  $M$ , что сильно осложняет построение численного решения. При рассмотрении критерия в виде (2.3) таких вопросов не возникало в связи с тем, что из соотношений (2.39) следовало постоянство угла  $\varphi = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ , что означало постоянство угла между линиями характеристик в каждой точке среды, при этом данный угол зависел только от материальной константы  $C$  из критерия пластичности, которая для каждого решения была постоянной во всех деформируемых областях. Этот факт, в свою очередь, позволял использовать те же соображения и приемы при построении полей характеристик, что и в классическом случае, когда угол между характеристиками постоянен и равен  $90$  градусам. Это позволило, например, легко обойти проблему особых точек соединив равномерно нагруженные области центрированным полем —  $OBD$ . В случае же зависимости  $f(\xi)$  в виде (2.4) такого постоянства угла нет, и угол между линиями характеристик зависит от решения или, что тоже самое, от значений параметров  $S$  и  $\theta$  в каждой точке среды.

Таким образом, на примере задачи о растяжении полосы, ослабленной угловыми вырезами, был показан подход, позволяющий при помощи жестко-идеальнопластической схемы решения, получать значения предельной нагрузки и анализировать поля скоростей и напряжений в предельном состоянии, учитывая при этом посредством параметра  $\xi$  чувствительность пластических свойств среды к виду напряженного состояния. Данный пример демонстрирует, что рассуждения и последовательность решения с критерием пластичности в виде (2.3) достаточно близки к классическим. Кроме того рассмотренный подход к анализу полей скоростей позволяет описать дилатансию среды и установить зависимость скоростей пластических

деформаций от скорости приложения нагрузок.

Рассмотрим задачу о растяжении полосы с круговым отверстием [52, 53, 159]. Полоса приведенная на рис. 2.9, растягивается силами  $P$  со скоростью  $V$ , границы отверстия свободны от нагрузок. При этом также как и ранее предполагается достаточно большой размер выреза, то есть радиус кругового отверстия достаточно велик по сравнению с общей шириной полосы.

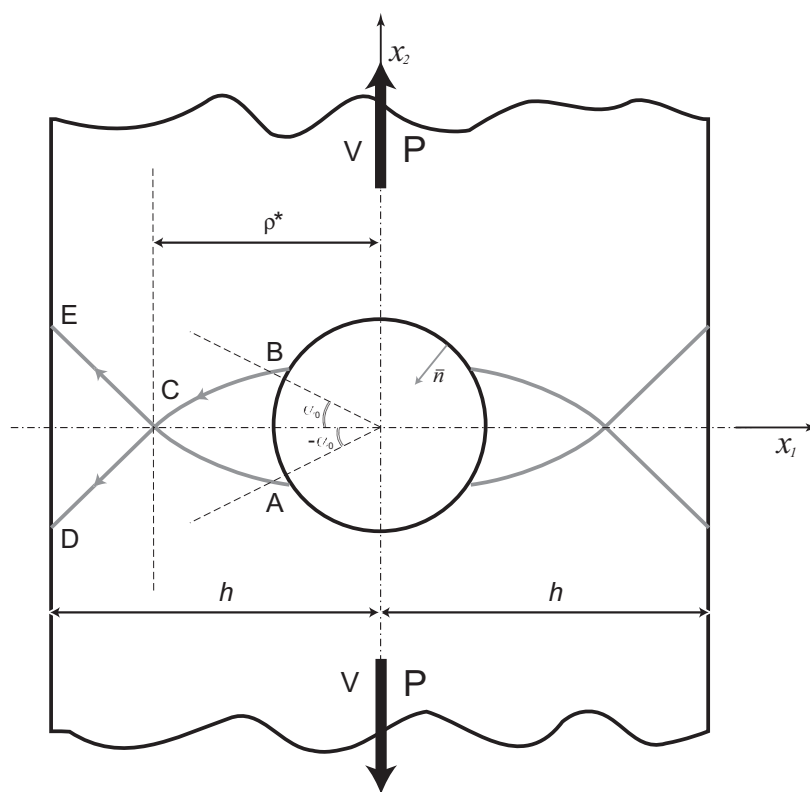


Рис. 2.9: Растяжение полосы с круговым отверстием.

Рассмотрим вариант зависимости (2.2) для функции  $f(\xi)$ . В данной задаче существует несколько возможностей построения линий характеристик системы (2.31). Поскольку круговой контур отверстия свободен от нагрузок, то к нему может прилегать осесимметричная область логарифмических спиралей —  $ABC$ , с другой стороны к свободным прямолинейным боковым границам может прилегать поле одноосного прямолинейного растяжения

— ECD. И пусть эти поля смыкаются в некоторой точке С. Положение точки С не определено однозначно, что означает что мы можем построить множество решений, меняя положение точки С на срединной линии и уменьшая или увеличивая тем самым области спиралей или одноосного растяжения. Для устранения данной неоднозначности попробуем вывести значение предельной нагрузки для произвольного положения точки С и, воспользовавшись утверждениями экстремальных теорем осуществить выбор координаты для этой точки.

Установим аналитический вид характеристических линий в логарифмической области. Все что нам известно, это то, что граничная область это окружность и кривые пересекаются под углом  $\varphi = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ . В случае линейной зависимости от параметра вида напряженного состояния  $\xi$  угол  $\varphi$  определяется свойствами среды через параметр  $m$  и имеет место следующее выражение:  $\text{tg } \varphi = -\sqrt{1 - m^2}/m$ . Способ построения таких кривых подобен тому, который был продемонстрирован при получении аналитического вида семейства  $\beta$ -линий в предыдущем примере в центрированном поле области OBD. При этом решаются те же уравнения с одним лишь изменением – угол между центральной  $\alpha$ -линией из предыдущего решения должен быть изменен с  $\varphi$  на его половину  $\varphi/2$ . Это связано с тем, что раньше центральная линия являлась характеристикой и угол между этой линией и спиралью должен был быть постоянен и равняться  $\varphi$ . В данной ситуации обе характеристики являются спиралями, и линия, проведенная из центра отверстия в точку пересечения любых двух характеристик, разделяет угол между характеристиками на две равные части.

Таким образом, аналитический вид характеристических линий в области ABC, записанный в полярных координатах  $(\rho; \alpha)$  с началом в центре

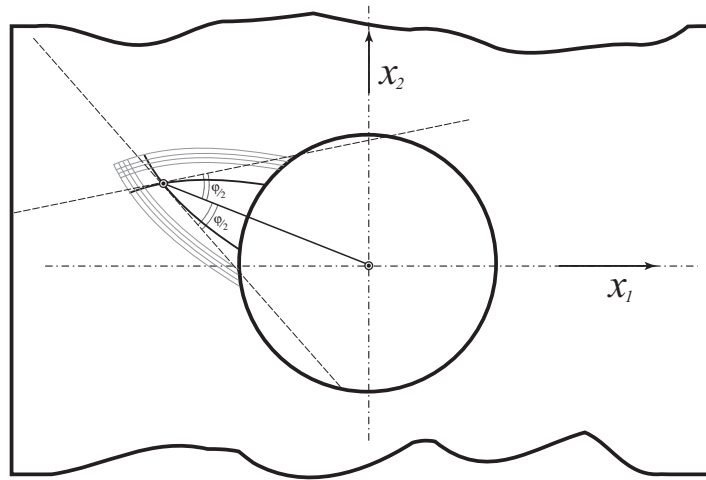


Рис. 2.10: Пересечение логарифмических линий характеристик.

отверстия, выглядит следующим образом:

$$\pm \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \varphi/2} - \ln \frac{\rho}{R} = \text{Const}, \quad (2.95)$$

здесь  $R$  — радиус отверстия. В данном случае вид семейства  $\alpha$ -линий возможно записать так:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha}{\operatorname{tg} \varphi/2} = \ln \frac{\rho}{R}. \quad (2.96)$$

Запись в таком виде означает, что точка пересечения  $\alpha$ -характеристики с контуром отверстия есть  $(1; \alpha_1)$  в полярных координатах.

Стоит отметить, что при рассмотрении решения с критерием в виде Губера-Мизеса, что эквивалентно равенству константы  $C = 0$ , угол между характеристиками будет равен  $\pi/2$ , что соответствует значению  $\operatorname{tg} \varphi/2 = 1$  и приводит к уравнениям логарифмических спиралей. В рассматриваемом случае уравнения характеристик получаются такие же с точностью до постоянного множителя  $\operatorname{tg} \varphi/2$  определяемого свойствами материала, что оправдывает выбранное название — область логарифмических спиралей и в нашем случае.

Далее необходимо найти значения напряжений  $\sigma_{22}$  на срединной линии в обеих областях решения ABC и EDC. Прделаем данную процедуру сначала в области спиралей. Как и в предыдущей задаче выписываем условие отсутствия нагрузок на контуре отверстия, чтобы определить граничные значения  $S$  и  $\theta$ . Отсутствие касательных напряжений  $\tau_n = 0$  приводит к уравнению

$$\cos 2(\theta - \varphi_n) = 0, \quad (2.97)$$

откуда следует что значение параметра  $\theta$  можно выразить через угол  $\varphi_n$

$$\theta = \varphi_n + \pi/4. \quad (2.98)$$

Условие  $\sigma_n = 0$  соответствует уравнению

$$0 = S - kF(S) \sin 2(\theta - \varphi_n). \quad (2.99)$$

Это дает возможность, зная значение  $\theta$ , определить значение  $S$

$$S = \frac{km}{C(1+m)}. \quad (2.100)$$

При этом имеет смысл выразить параметр  $\varphi_n$  через угол полярных координат следующим образом:

$$\varphi_n = \pi + \alpha. \quad (2.101)$$

Используя (2.98) можно представить значение параметра  $\theta$  на дуге окружности АВ в виде

$$\theta = \pi + \alpha + \pi/4. \quad (2.102)$$

Соотношения (2.100) и (2.102) позволяют найти значения  $\theta$  и  $S$  на цен-

тральной линии в области спиралей, используя при этом соотношения вдоль характеристик. Рассмотрим две симметричные характеристики - одну из семейства  $\alpha$  линий, другую из семейства  $\beta$  линий. В аналитической записи это означает что будут взяты разные, но симметричные углы  $\varphi_n$ . То есть  $\varphi_{n\alpha} = \pi + \alpha_0$  для  $\alpha$ -линии,  $\varphi_{n\beta} = \pi - \alpha_0$  для  $\beta$ -линии.

Соотношения вдоль характеристик в этом случае для  $\alpha$  и  $\beta$  линий соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned}\ln\left(1 - \frac{C}{k}S\right) &= \frac{2m}{\sqrt{1-m^2}}\theta + const_1, \\ \ln\left(1 - \frac{C}{k}S\right) &= -\frac{2m}{\sqrt{1-m^2}}\theta + const_2.\end{aligned}\tag{2.103}$$

Подставляя соответствующие значения  $\theta$  и  $S$  на границе можно найти значения констант, которые в данном случае получаются:

$$\begin{aligned}const_1 &= -\ln(1+m) - \frac{2m}{\sqrt{1-m^2}}\left[\frac{5}{4}\pi + \alpha_0\right], \\ const_2 &= -\ln(1+m) + \frac{2m}{\sqrt{1-m^2}}\left[\frac{5}{4}\pi - \alpha_0\right].\end{aligned}\tag{2.104}$$

Далее подставляя уже известные значения констант в соотношения (2.103), справедливые вдоль характеристик, получаем два уравнения, из которых легко находятся выражения для  $\theta$  и  $S$  на центральной линии в области ABC. После соответствующих преобразований мы получаем следующие значения:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{5}{4}\pi, \\ S &= \frac{k}{C}\left[1 - \frac{1}{1+m}\exp\left(-\frac{2m}{\sqrt{1-m^2}}\alpha_0\right)\right],\end{aligned}\tag{2.105}$$

Теперь можно выразить напряжения  $\sigma_{22}$  на центральной линии в зависимости от  $\alpha_0$ , аналогично предыдущей задаче, используя соотношения (2.29). Меняя  $\alpha_0$ , будем получать разные точки на центральной линии области спиралей. После всех подстановок получим

$$\sigma_{22} = \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \exp \left( -\frac{2m}{\sqrt{1-m^2}} \alpha_0 \right) \right]. \quad (2.106)$$

Чтобы картина была более прозрачной, сделаем замену - выразим  $\alpha_0$  через соответствующий ему радиус  $\rho_0$ . Воспользовавшись уравнением для характеристических линий (2.96) и приравняв  $\alpha$  нулю (это условие того, что точка лежит на центральной линии), можно получить следующую зависимость  $\sigma_{22}$  от  $\rho_0$  в области спиралей:

$$\sigma_{22} = \frac{k}{C} \left[ \left( 1 - \frac{1-m}{1+m} \left( \frac{\rho_0}{R} \right)^{-2m/(1-m)} \right) \right]. \quad (2.107)$$

В данном случае имеется ввиду, что линии характеристик с начальной точкой на дуге окружности  $(1; \alpha_0)$  соответствует точка пересечения ею срединной линии, координаты которой  $(\rho_0; 0)$ . Именно это значение  $\rho_0$  используется в полученной формуле.

Теперь нужно найти напряжения  $\sigma_{22}$  на центральной линии в области прямолинейных характеристик.

Поступаем аналогичным образом, получаем значения для  $\theta$  и  $S$  на границе. Поскольку характеристики есть прямые линии, то эти значения постоянны во всем треугольнике EDC и равны найденным на границе.

Условие  $\tau_n = 0$  на границе ED приводит к уравнению

$$\cos 2(\theta - \varphi_n) = 0. \quad (2.108)$$

Так как граница перпендикулярна оси  $x_1$ , то  $\varphi_n = 0$ , что позволяет выбрать

$$\theta = \frac{5}{4}\pi. \quad (2.109)$$

Здесь  $\theta$  специально подобрано так, чтобы оно совпадало со значением в логарифмической части решения. Из отсутствия нормальных нагрузок  $\sigma_n = 0$  следует

$$S - kF(S) \sin 2(\theta - \varphi_n) = 0. \quad (2.110)$$

И в итоге для  $S$  в области EDC получаем

$$S = \frac{k}{C} \frac{m}{1+m}. \quad (2.111)$$

Воспользовавшись соотношениями (2.29) получим выражение для напряжения  $\sigma_{22}$

$$\sigma_{22} = \frac{2k}{C} \frac{m}{1+m}. \quad (2.112)$$

Теперь, зная значения  $\sigma_{22}$  в обеих деформируемых областях, исследуем поведение значения предельной нагрузки в зависимости от положения точки сопряжения данных областей. Выпишем значение предельной нагрузки:

$$P = 2 \int_1^{\rho^*} \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{-2m/(1-m)} \right] d\rho + 2 \int_{\rho^*}^h \frac{2k}{C} \frac{m}{1+m} d\rho. \quad (2.113)$$

В данной формуле предел интегрирования  $\rho^*$  есть радиальная координата в полярной системе координат точки сопряжения областей. Далее воспользуемся утверждением экстремальной теоремы о том, что значение предельной нагрузки полученное из кинематически возможного решения является для предельной нагрузки оценкой сверху. Так как все множество построенных решений является множеством кинематически возможных решений, то из



этого следует, что для наиболее подходящего решения должен достигаться минимум полученной предельной нагрузки. Все множество полученных решений параметризовано нами посредством параметра  $\rho^*$ , то, следовательно, нам необходимо найти значение  $\rho^*$ , при котором будет достигаться минимальное значение для  $P$ . Фактически, нам надо зафиксировать значение константы  $C$  (из поверхности текучести) найти значения  $\rho^*$  в котором функция  $P$  будет достигать минимума, и проделать это для каждого конкретного значения коэффициента входящего в условие пластичности  $C$ . Выделим из выражения для предельной нагрузки (2.113) только то, что после интегрирования не будет константой, и будем исследовать эту часть на монотонность. Тогда выражение (2.113) можно переписать следующим образом:

$$P/2k = \int \frac{1}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{-2m/(1-m)} \right] - \frac{2}{C} \frac{m}{1+m} d\rho^* + const \quad (2.114)$$

Аналитическая запись первообразной в выражении (2.114) и поиск минимума функции достаточно затруднителен аналитически, поэтому исследуем функцию в (2.114) численно. Воспользуемся тем фактом, что константа  $C$  в условии пластичности ограничена  $|C| < 3/2$ , и построим трехмерный график зависимости предельной нагрузки от  $\rho^*$  и  $C$ , то есть изобразим функцию  $P(\rho^*; C)/2k$  (рис. 2.11).

Из рис. 2.11 видно, что функция  $P(\rho^*; C)/2k$  с увеличением параметра  $\rho^*$  возрастает при произвольной фиксированной материальной константе  $C$ . Это означает, что более наглядный способ доказательства роста предельной нагрузки  $P$  от параметра  $\rho^*$  — это анализ знака подынтегрального выражения в (2.114). Построим трехмерную зависимость этого выражения в зависимости от  $\rho^*$  и  $C$  (рис. 2.12).

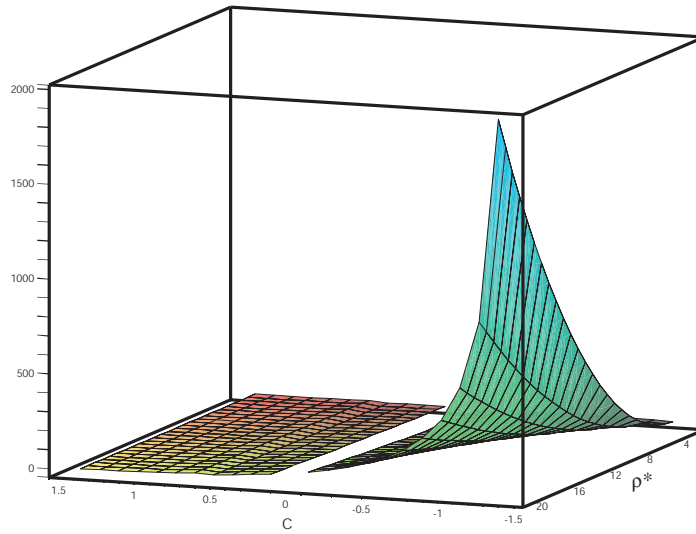


Рис. 2.11: Значение предельной нагрузки  $P(\rho^*; C)/2k$ .

Из рис. 2.12 видно, что подынтегральное выражение всюду положительно, что не оставляет никаких сомнений в том, что предельная нагрузка возрастает с ростом деформируемой области ABC, и как следствие, мы должны положить значение искомого параметра минимальным, то есть  $\rho^* = 1$ .

Значение параметра  $\rho^* = 1$  означает, что решение задачи тривиально и деформируемые области состоят только из областей одноосного растяжения, а область с логарифмическими спиралями отсутствует. Так как решение состоит из линейных характеристических линий, то во всей деформируемой области поле напряжений постоянно и, как и в предыдущей задаче, воспользовавшись соотношениями для напряжений (2.29), получим:

$$\sigma_{22} = \frac{2k}{C} \frac{m}{1+m}. \quad (2.115)$$

Все остальные напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{12}$  при этом равны нулю.

Поле скоростей также тривиально – в силу того что на границах с жесткими областями должны выполняться условия  $v_\alpha = V \sin \varphi_\alpha$  и  $v_\beta = V \sin \varphi_\beta$ .

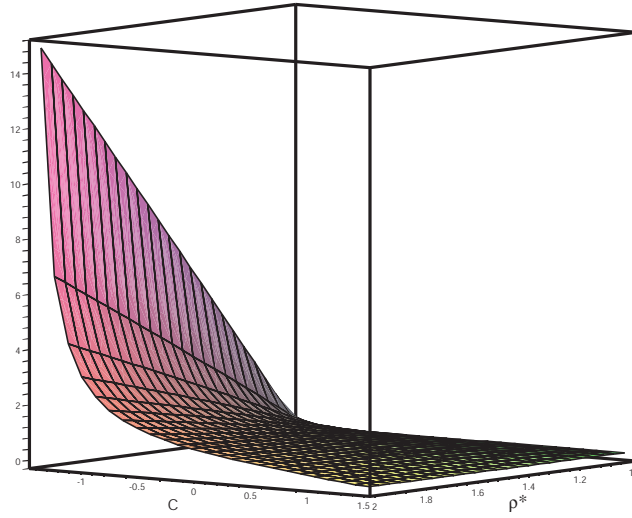


Рис. 2.12: График подинтегрального выражения (2.114).

Из соотношений (2.39) можно найти значения  $\sin \varphi_\alpha = \sqrt{(1-m)/2}$  и  $\sin \varphi_\beta = -\sqrt{(1-m)/2}$  и, в силу линейности семейств характеристик, поле скоростей в нашем решении получается следующим:

$$\begin{aligned} v_\alpha &\equiv V \sqrt{\frac{1-m}{2}}, \\ v_\beta &\equiv -V \sqrt{\frac{1-m}{2}}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Наши рассуждения показывают, что при растяжении полосы с круговым отверстием мы получили оценку для предельной нагрузки сверху в виде  $P = 2(h-1)\sigma_{22}$ , что окончательно можно записать так:

$$P = \frac{4k}{C} \frac{m}{1+m} (h-R). \quad (2.117)$$

Поле напряжений, полученное в решении, очевидно можно продолжить во всем теле, то есть в жесткие области где напряжения не определены. Как показано на рис. 2.13, мы строим две полосы с полем одноосного растяжения и оставляем напряжения равными нулю в заштрихованной области.

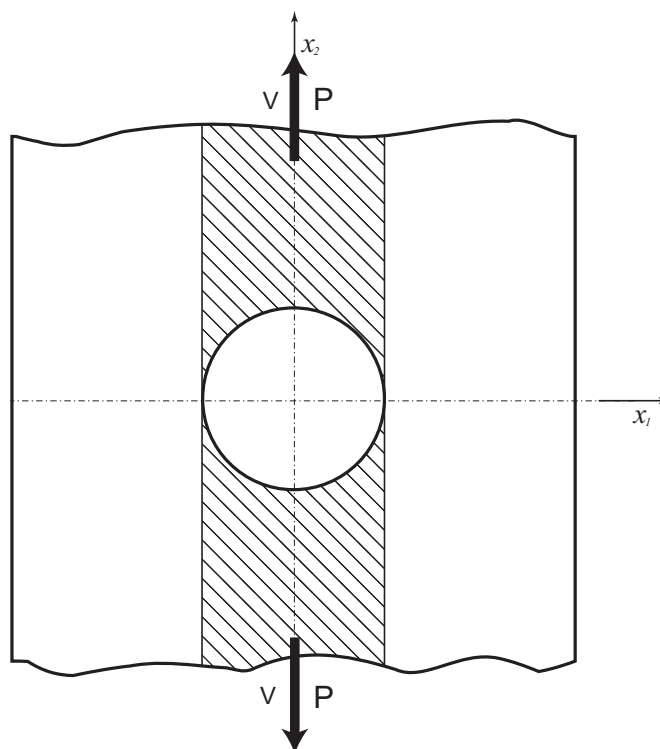


Рис. 2.13: Статически возможное решение.

Значение предельной нагрузки для такого поля напряжений будет таким же (2.117), но такое поле уже является статически возможным, так как оно определено во всем теле, и оценивает предельную нагрузку снизу. То есть мы получили полное решение с точным значением предельной нагрузки.

Это решение, в случае зависимости критерия от параметра  $\xi$  в виде (2.2), наиболее наглядно демонстрирует близость данного подхода к классическому в случае критерия пластичности Губера-Мизеса. Также, как и в аналогичной задаче с классическим критерием, показано, что из соображений минимальности предельной нагрузки следует отсутствие области с логарифмическими спиралями, прилегающей к контуру кругового отверстия. Метод решения подобен тому, который использовался при получении решения на основе классического условия пластичности Губера-Мизеса.

Рассмотрим растяжение полосы с вырезами с круглым основанием [83]. Геометрия приведена на рис. 2.14. Вырезы, как и ранее, предполагаются произвольными, но достаточно глубокими. Радиус кругового контура границы для простоты выкладок будем считать равным единице. Полоса растягивается силой  $P$  со скоростью  $V$ . Границы вырезов свободны от нагрузок.

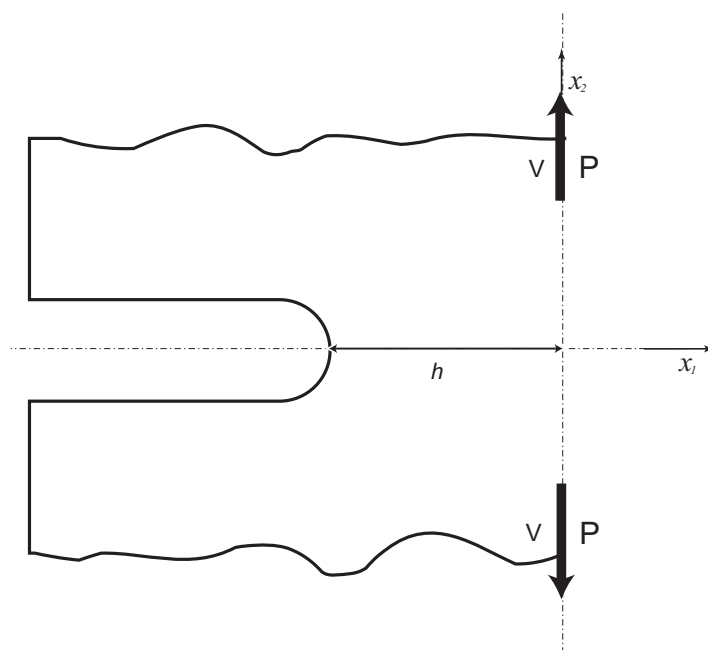


Рис. 2.14: Растяжение полосы ослабленной вырезами с круглым основанием.

Рассмотрим критерий пластичности в виде (2.2). Построение поля характеристик здесь возможно двумя способами и выбор одного из них зависит от ширины ослабленного сечения, или от значения параметра  $h$ , и значения материальной константы  $C$ , входящей в критерий пластичности. Первый вариант решения состоит только из двух логарифмических областей (рис. 2.15). Необходимо выяснить, когда такое решение возможно. Для этого выпишем аналитический вид семейств характеристик. Пусть центр окружности, которой принадлежит круговой контур границы  $SS'$  ле-

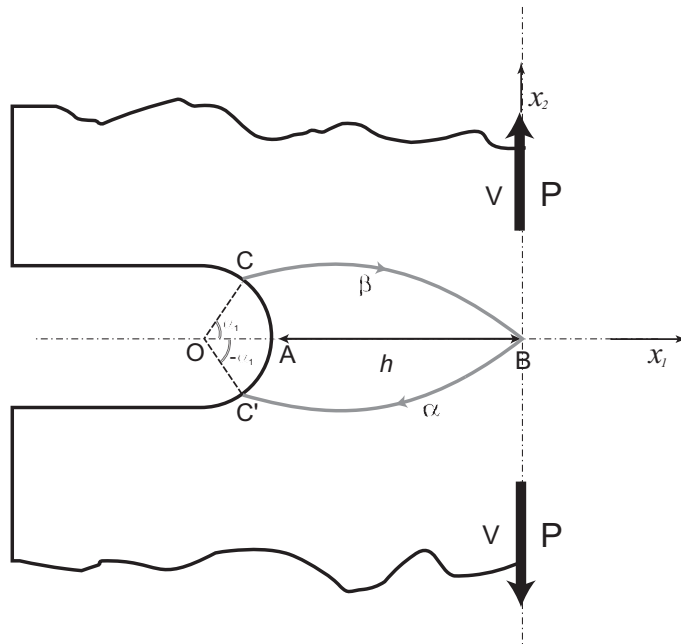


Рис. 2.15: Вариант решения только с логарифмическими областями.

жит в точке  $O$ . К свободному от нагрузки круговому контуру границы может прилегать область логарифмических спиралей, аналитический вид которых был получен в предыдущей задаче и в полярных координатах с центром в точке  $O$  выглядит следующим образом:

$$\frac{\alpha_1 \pm \alpha}{\operatorname{tg} \varphi/2} = \ln \frac{\rho}{R}. \quad (2.118)$$

Далее, для облегчения последующих выкладок будем считать, что  $R = 1$ , а значение параметра  $\rho$  уже отнесенным к  $R$  и безразмерным. Таким образом, можно выражение (2.118) записать в виде:

$$\frac{\alpha_1 \pm \alpha}{\operatorname{tg} \varphi/2} = \ln \rho. \quad (2.119)$$

Теперь выясним максимальное значение  $h$  для которого возможно построение областей логарифмических спиралей таким образом, чтобы все центральное сечение было вовлечено в пластичность. Для этого рассмотрим

аналитическую запись, например,  $\alpha$ -семейства характеристик:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha}{\operatorname{tg} \varphi/2} = \ln \rho. \quad (2.120)$$

Максимальное значение  $\rho$  для предлагаемой деформируемой области, очевидно, достигается на срединной линии  $\alpha = 0$ , при этом максимум должен достигать значения  $\rho = R + h$ , когда все срединное сечение переходит к пластическому деформированию и реализуется предельное состояние. Так как максимальное значение  $\rho$  достигается на характеристике, для которой начальная угловая координата  $\alpha_1$  максимальна, а параметр  $\alpha_1$  ограничен значением  $\pi/2$ , то мы получаем условие:

$$\frac{\pi}{2} \geq \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \ln(1 + h). \quad (2.121)$$

Таким образом, возможность решения с использованием только логарифмических спиралей, окончательно, можно записать так:

$$h \leq \exp\left(\frac{\pi}{2 \operatorname{tg}(\varphi/2)}\right) - 1. \quad (2.122)$$

Остановимся на полученном условии подробнее. Рассмотрим случай, когда материальная константа  $C = 0$ . Тогда критерий пластичности в точности совпадает с критерием Губера-Мизеса. В таком случае, угол между характеристиками  $\varphi = \pi/2$ , что соответствует  $\operatorname{tg}(\varphi/2) = 1$  и условие, ограничивающее значение  $h$ , будет представлено в виде  $h \leq \exp(\pi/2) - 1 \approx 3.81$ . То есть, если рассматривать классическое решение, то мы можем просто считать, что если значение  $h$  превысило 3.81, то получение решения только при помощи спиральных областей невозможно и необходимо пользовать-

ся дополнительными построениями. В рассматриваемом случае параметр  $\operatorname{tg} \varphi/2$  непостоянный и определяется свойствами материала. В зависимости от  $C$  ограничения на  $h$  различны, то есть значение  $h$  не ограничено просто числом, и утверждение, что для достаточно большой ширины ослабленного сечения невозможно решение состоящее только из спиралей, может быть неверным. Выражение  $\exp(\pi/2 \operatorname{tg}(\varphi/2)) - 1$ , ограничивающее значения  $h$ , при величине параметра  $C$  приближающегося к  $C = 1.5$  стремится к бесконечности, а при  $C = 0$  падает, примерно, до 3.81. Таким образом, если на плоскости вдоль одной оси откладывать значение материальной константы  $C$ , а вдоль другой величину  $h$ , то линия, получаемая при помощи замены знака нестрогого неравенства в выражении (2.122) на равенство, будет описывать линию раздела в данной плоскости параметров между двумя решениями — решением только со спиральными областями и решением с дополнительными построениями. Из рис. 2.16 видно, что если рассматривается материал для которого экспериментальные данные соответствуют  $C = 0.5$ , то решения только со спиральными областями возможны для образцов у которых максимальное значение  $h$  примерно ограничено числом 7.36, если же  $C = 1$ , то максимум  $h$  не превосходит 23.62.

Для нахождения значения предельной нагрузки нам, как и ранее, необходимо найти значения напряжений  $\sigma_{22}$  в центральном сечении. В данной ситуации мы можем воспользоваться результатами решения задачи о растяжении полосы с круговым отверстием, в которой в случае спиральной области напряжение  $\sigma_{22}$  было представлено в следующем виде:

$$\sigma_{22} = \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \rho_0^{-2m/(1-m)} \right]. \quad (2.123)$$

Здесь  $\rho_0$  — радиальная координата пересечения срединной линии характе-



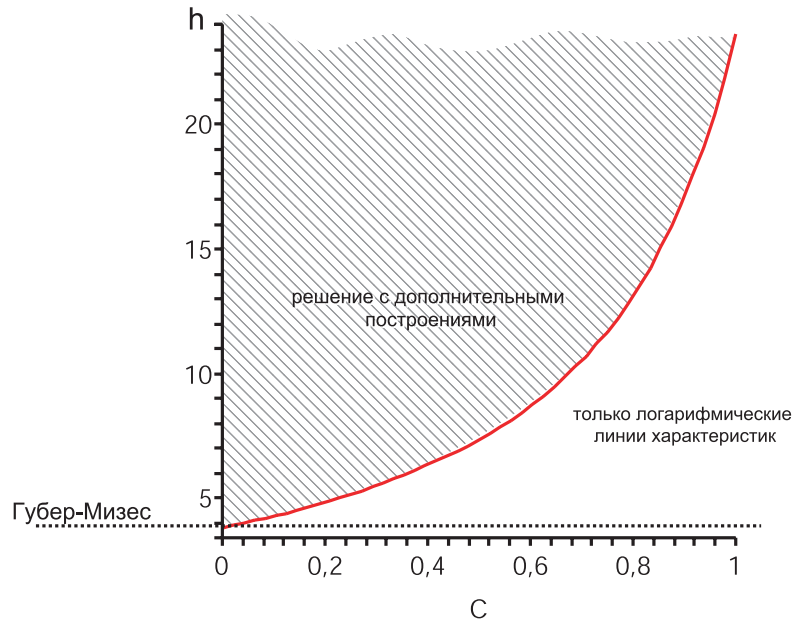


Рис. 2.16: Условие выбора вида решения.

ристикой, выходящей из кругового контура под углом  $\pm\alpha_1$ . В результате, можно выписать значение предельной нагрузки:

$$P = 2 \int_1^{h+1} \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \rho_0^{-2m/(1-m)} \right] d\rho_0, \quad (2.124)$$

после интегрирования получим

$$P = 2 \frac{k}{C} \left[ h - \left( (1+h)^{-(3m-1)/(1-m)} - 1 \right) \frac{(1-m)^2}{(1+m)(3m-1)} \right]. \quad (2.125)$$

Полученное выражение для предельной нагрузки зависит от параметра  $C$ , характеризующего свойства материала и геометрического параметра  $h$ .

Поле скоростей в логарифмических областях восстанавливается из решения системы уравнений (2.33) и условия непрерывности нормальных составляющих на границе между жесткими областями и деформируемыми.

Рассмотрим теперь решение, когда условие (2.122) не выполнено и мно-

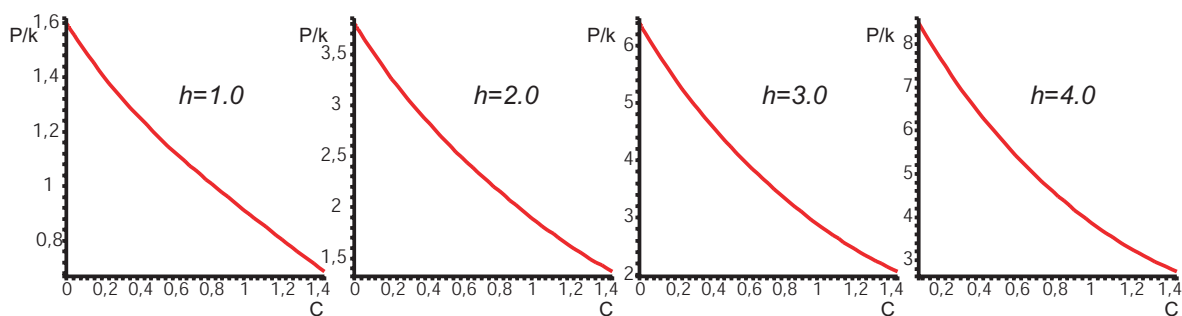


Рис. 2.17: Предельная нагрузка, деленная на  $k$  в случае только логарифмических областей для конкретных  $h$ .

жество параметров  $C$  и  $h$  лежит слева и выше от линии, приведенной на рис. 2.16. В таком случае предлагается рассмотреть возможный вид характеристик, представленный на рис. 2.18. Область VEFC состоит из линий, параллельных логарифмической спирали BC и прямых линий, исходящих из BC под углом  $\varphi$ , как продолжение семейства  $\alpha$  характеристик области СС'В.

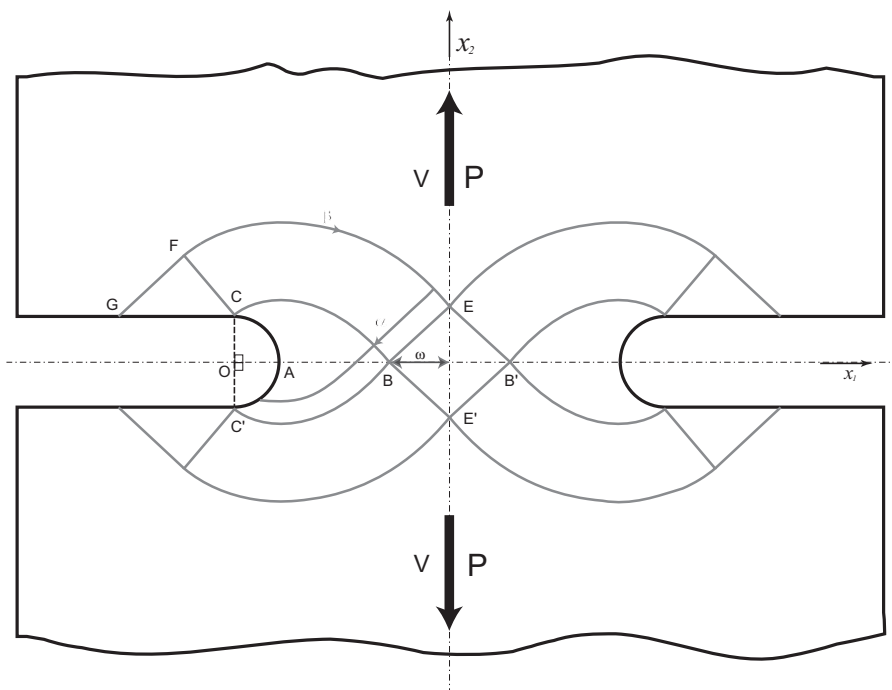


Рис. 2.18: Вариант решения с дополнительными построениями.

Очевидно, что выражения для напряжений  $\sigma_{22}$  на срединной линии в

логарифмических областях аналогичны (2.123) и справедливы на отрезке АВ. Координаты точки В определяются из условия (2.122), что позволяет нам выписать пределы интегрирования для логарифмических областей при нахождении предельной нагрузки. Следует заметить, что здесь, в отличие от классического критерия, предел интегрирования зависит от свойств материала.

Далее можно, как и в рассмотренных ранее случаях, определить значения параметров  $S$  и  $\theta$  на границе GС из условия отсутствия нагрузок. Из симметрии решения и прямолинейности характеристик находим, что в области ЕВЕ'В' параметр  $\theta = 5/4\pi$ . Значение  $5/4\pi$  выбрано так, чтобы оно совпало со значением на срединной линии области логарифмических спиралей с соответствующим значением  $\theta$ . В результате находим значение напряжений  $\sigma_{22}$  на отрезке В'В'

$$\sigma_{22} = \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \exp \left( -(2m/\sqrt{1-m^2}) \left[ \frac{\pi}{2} \right] \right) \right]. \quad (2.126)$$

Построение поля напряжений здесь аналогично рассмотренной задаче о растяжении полосы с угловыми вырезами для случая нулевого угла. При этом надо только заменить в полученных ранее формулах параметр  $\theta$  на значение  $5/4\pi$  и  $\varphi_n$  на  $-\pi/2$ . С другой стороны, к тому же результату можно прийти в результате следующего анализа. Поле напряжений в области ЕВЕ'В' можно восстановить из соображений непрерывности, и в качестве поля напряжений в построенном нами ромбе взять напряжения в точке сопряжения с областью логарифмических спиралей В, а в треугольнике GFC восстановить поле напряжений по точке С. В силу прямолинейности характеристик полученные напряжения распространятся во всей области, как для ЕВЕ'В', так и для GFC.

Теперь можно выписать значение предельной нагрузки в случае полного решения

$$P = 2 \int_1^a \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \rho_0^{-2m/(1-m)} \right] d\rho_0 + 2 \int_a^{h+1} \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \exp \left( -(2m/\sqrt{1-m^2}) \left[ \frac{\pi}{2} \right] \right) \right] d\rho_0, \quad (2.127)$$

где предел интегрирования  $a$  определяется следующим образом:

$$a = \exp \left( \frac{\pi}{2 \operatorname{tg}(\varphi/2)} \right). \quad (2.128)$$

После интегрирования получим

$$P = \frac{2k}{C} \left[ a - 1 + \left( a^{(3m-1)/(m-1)} - 1 \right) \frac{(m-1)^2}{(m+1)(3m-1)} \right] + \frac{2k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \exp \left( -(2m/\sqrt{1-m^2}) \left[ \frac{\pi}{2} \right] \right) \right] [h+1-a]. \quad (2.129)$$

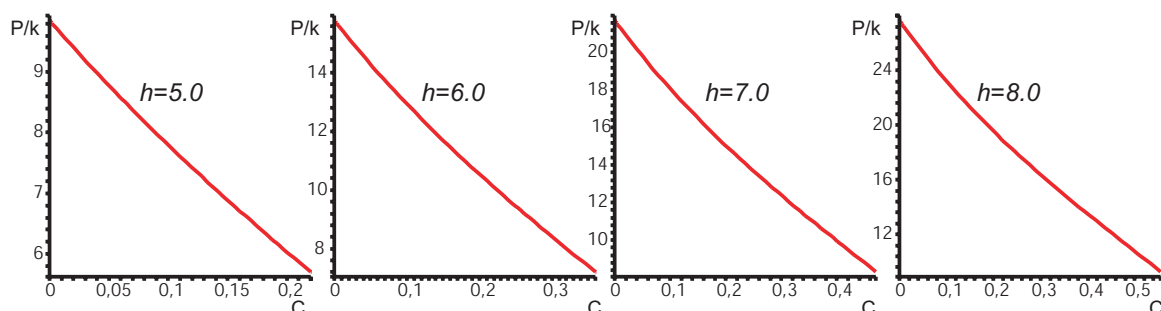


Рис. 2.19: Предельная нагрузка, деленная на  $k$ , в случае решения с дополнительными построениями для конкретных  $h$ .

Распределение скоростей следующее. Хотя в области логарифмических спиралей поле скоростей надо восстанавливать численно, в остальных деформируемых областях скоростей все же можно получить аналитические зависимости. Например, в ромбе  $EVE'B'$  поле скоростей будет аналогич-

но полю, построенному в области ODMN в задаче о растяжении полосы ослабленной угловыми вырезами. Здесь выполнены все те же условия: симметрия относительно обеих осей и условия непрерывности в точках E и E', для той же скорости жестких областей в направлении оси  $x_2$  и величиной  $\pm V$ , соответственно. Таким образом, мы можем сразу выписать выражения для компонент скорости в области EBE'B'

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-mx_1} - \sqrt{1+mx_2})V/h, \\ v_\beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-mx_1} + \sqrt{1+mx_2})V/h. \end{aligned} \quad (2.130)$$

В области BEFC для компоненты  $v_\alpha$  в силу линейности  $\alpha$ -характеристик и граничных условий на FE возможно записать выражение:

$$v_\alpha = V \sin \varphi_\alpha. \quad (2.131)$$

Для компоненты  $v_\beta$  в силу тех же рассуждений, что и в задаче о растяжении полосы с угловыми вырезами, можно составить уравнение

$$\frac{dv_\beta}{d\varphi_\alpha} = \operatorname{ctg} \varphi v_\beta - \frac{V}{\sin \varphi} \sin \varphi_\alpha. \quad (2.132)$$

Решение этого уравнения, как и раньше, будет содержать константу  $C_1$ , которая, в свою очередь, будет определяться значениями компоненты  $v_\beta$  на линии EB. Таким образом, повторяя предыдущие рассуждения, можем

выписать следующее выражение:

$$v_{\beta} = V \sin \varphi_{\beta} - V \left[ \frac{1}{h} \frac{\sqrt{1-m}}{\sqrt{2}} \tilde{x}_1 + \frac{1}{h} \frac{\sqrt{1+m}}{\sqrt{2}} \tilde{x}_2 - \frac{\sqrt{1-m}}{\sqrt{2}} \right] \times \\ \times \exp \left[ -\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \left( \varphi_{\beta} + \arcsin \sqrt{\frac{1-m}{2}} \right) \right]. \quad (2.133)$$

Здесь  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$ , аналогично предыдущей задаче, координаты точек, лежащих на линии ребра ромба EB.

Поле скоростей в треугольнике GFC восстанавливается следующим образом. В силу прямолинейности характеристик компоненты  $v_{\beta}$  постоянны вдоль  $\beta$ -линий характеристик и являются продолжением своих значений на линии FC. Для компонент  $v_{\alpha}$  из условия непрерывности поля скоростей на границе жестких и деформируемых областей, и из прямолинейности  $\alpha$ -характеристик справедливо соотношение  $v_{\alpha} = V \sin \varphi_{\alpha}$ .

Таким образом, получено решение задачи о растяжении полосы с вырезами с круглым основанием. Отличием от классического решения в данном случае является более сложное условие выбора вида решения (2.122), а также построение полей скоростей. Здесь переключение с построения решения в виде только логарифмических спиралей к виду с более сложным построением зависит не только от одного геометрического параметра  $h$ , а еще и от константы  $C$  определяющей свойства материала тела. Необычным является факт, что для произвольного параметра  $h$  всегда можно подобрать значение константы  $C$ , такое, что решение с построением только логарифмических областей возможно. По сравнению с решением в случае критерия Губера-Мизеса при  $h > 3.81$  для достижения предельного состояния необходимо вовлекать в пластичность значительно большие области тела.

## 2.2.4 Метод конечных элементов для физически нелинейного материала

В предыдущих разделах были получены аналитические решения некоторых задач плоской деформации, на основе жестко-пластической модели материала. Погрешность такого приближения достаточно трудно оценить. Для этого нужно получить упруго-пластическое решение, что сопряжено с известными трудностями. По сути, нет оснований утверждать, что при стремлении модуля Юнга  $E$  к бесконечности, упруго-пластическое решение будет стремиться к решению, построенному при помощи использованного нами подхода. Очевидно, что разница между полной упруго-пластической и использованной жестко-пластической схемой решения может существенно зависеть от типа рассматриваемой задачи, от геометрии и степени развития пластических процессов в областях тела. Так или иначе, чтобы рассуждать о справедливости полученных решений, необходимо получить экспериментальные данные на реальных телах или строить численные упруго-пластические решения.

Следующая часть работы посвящена численному построению разобранных ранее аналитически решений задач, но с использованием упруго-пластической модели материала. В качестве критерия пластичности будет использовано соотношение (2.1) с зависимостью от параметра  $\xi$  в виде (2.2). Будет проиллюстрирована кинематика деформирования среды и проанализирована разница в получаемых значениях для предельной нагрузки.

На современном этапе развития численных методов и производительности вычислительной техники большое распространение получил метод конечных элементов. Об истоках этого метода говорить достаточно трудно. Это связано с тем, что многие методы, используемые традиционно

давно, можно было получить из метода конечных элементов соответствующим выбором функций форм и наоборот, используя известные методы решения задач, вводя соответствующие базисные функции можно получить метод, именуемый теперь как "метод конечных элементов". Именно в задачах прочности этот метод занимает особое место, благодаря во многом наглядному физическому смыслу и был интенсивно поддержан и востребован инженерами-расчетчиками. Если говорить об истоках именно в смысле инженерных или промышленных расчетов на прочность, то стоит упомянуть работы таких ученых как Аргирис [73-75], Айронс [206, 207], Зенкевич [29, 30, 274], хотя в силу столь стремительного развития метода сложно выделить кого-либо особенно.

В последние годы получили свое развитие специализированные численные пакеты, основанные на методе конечных элементов. Благодаря достаточной дешевизне численных операций стало возможным решать задачи с довольно большим количеством элементов и получать результаты настолько близкие к реальности, что во многих промышленных компаниях привело к серьезному снижению затрат на постановку экспериментов.

Среди конечноэлементных пакетов стоит особенно выделить такие как MSC.Marc и Abaqus. Данные пакеты посвящены именно нелинейным расчетам на прочность. Оба эти пакета предоставляют возможность описать свою модель материала. Такая возможность реализована посредством подключения при расчете подпрограммы, написанной пользователем с заранее зарезервированными переменными, для установления связи между деформациями и напряжениями.

Численное моделирование, интересующих нас задач, будет производиться с использованием конечноэлементной программы Abaqus посред-



ством написанной подпрограммы, отвечающей за реализацию упруго-пластической модели материала в случае критерия (2.3), что соответствует линейной зависимости от параметра напряженного состояния  $\xi$ .

Далее в работе предлагается рассмотреть, как именно реализован процесс численного счета в современных прочностных конечноэлементных программах на примере пакета Abaqus, и проследить какие требования необходимо выполнить и как именно происходит встраивание описанной пользователем модели материала. После чего будет рассмотрен способ численного интегрирования соотношений пластичности на примере выбранного нами критерия (2.3) в случае ассоциированного закона течения.

Метод конечных элементов достаточно полно изложен в литературе и широко известен ученым и инженерам, тем не менее, в способе изложения и организации численного счета существует довольно большая специфика в тех или иных источниках. В литературе, ориентированной на инженеров, метод конечных элементов излагается с большей привязкой к физическому смыслу, что во многом и сделало его таким популярным в прочностных расчетах. Такой подход, наверное, наиболее эффективен и практичен при решении задач линейной упругости и динамики. При решении таких задач коэффициенты, входящие в линейные уравнения, получающиеся после реализации конечноэлементной дискретизации, имеют очень понятный физический смысл. Эти коэффициенты представляют собой жесткости среды между узлами построенной сетки, а также матрицу масс и матрицу, отвечающую за демпфирование в случае задач динамики. После построения таких уравнений возможен достаточно простой и наглядный анализ, как в случае обычных уравнений механики с большим количеством связей. При этом получается некоторый матричный аналог уравнений Ньютона.

При помощи такой интерпретации можно построить и объяснить многие решения задач механики деформируемого твердого тела. Проблемы изложения метода конечных элементов в таком виде появляются и становятся существенными, когда задача выходит за рамки линейной, как физически, так и геометрически. Например, в рамках такого подхода довольно сложно объяснить переход от решения задач в лагранжевых координатах к системе эйлеровых координат. Также, как правило, физическую интерпретацию достаточно тяжело сохранить при построении численного интегрирования задач физической нелинейности. По причине того, что нас интересует именно физическая нелинейность среды, далее в работе мы будем вести изложение реализации метода конечных элементов в программе Abaqus, более близкое к методу Риттца или методу Бубнова-Галеркина. Также, стоит сразу отметить, что мы разберем только интересующие нас в смысле решения поставленных задач вопросы реализации численного алгоритма. Далее мы приведем выборочную цепочку уравнений из документации системы Abaqus, позволяющую понять и объяснить как устроен способ написания и встраивания модели материала, описанной пользователем.

Рассмотрим уравнение равновесия, записанное в форме принципа виртуальных работ:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta D_{ij} dV = \int_S \sigma_{ij} n_i \delta v_j dS + \int_V f_i \delta v_i dV, \quad (2.134)$$

где

$\sigma_{ij}$  — тензор напряжений Коши,

$\delta v$  — вектор виртуальных перемещений,

$$\delta D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right),$$

$f$  — вектор массовых сил.

Теперь в правой части уравнения (2.134) переходим к интегрированию по первоначальному объему  $V^0$  или, что тоже самое, к лагранжевым координатам.

$$\int_{V^0} \Sigma_{ij} \delta E_{ij} dV^0 = \int_S \sigma_{ij} n_i \delta v_j dS + \int_V f_i \delta v_i dV. \quad (2.135)$$

Теперь тензора  $\Sigma_{ij}$  и  $E_{ij}$  образуют энергетическую пару, конкретный выбор вида тензоров зависит от вида решаемой задачи и выбора типа элементов. В данной работе мы не будем углубляться в возможности этого выбора, так как в нашем случае мы будем решать геометрически линейную задачу и будем пренебрегать изменением геометрии.

Далее положим, что истинные перемещения  $u$  выражаются в следующем виде:

$$u_i = N_N u_i^N. \quad (2.136)$$

где  $N_N$  есть аппроксимирующие функции, а  $u^N$  есть коэффициенты, ассоциируемые с конкретными узлами. Для более простого изложения, не будем останавливаться на том, что именно за функции интерполируют перемещения, данный вопрос будет объяснен позднее. Для последующего рассуждения достаточно предполагать, что просто, следуя методу Риттца, неизвестная функция  $u$  приближается в таком виде (2.136), а в качестве узлов рассматривается некоторое конечное множество точек среды, каждой

из которых соответствует коэффициент  $u^N$ .

Виртуальное поле перемещений,  $\delta v$ , предполагается удовлетворяющим граничным условиям и, учитывая, что истинное поле перемещений выражается в форме (2.136), можно  $\delta v$  представить в виде:

$$\delta v_i = N_N \delta v_i^N. \quad (2.137)$$

Теперь вариация в выражении (2.135) ограничена видом (2.137) и реализована через коэффициенты  $\delta v^N$ .

Тензор деформаций  $\delta E$ , ассоциированный с виртуальным полем перемещений  $\delta v$ , теперь можно записать в виде:

$$\delta E_{ij} = \beta_{Nij}^k \delta v_k^N. \quad (2.138)$$

Без ограничения общности можно записать  $\beta_N = \beta_N(x, N^N)$ , и теперь мы можем переписать уравнение (2.135):

$$\delta v_k^N \int_{V^0} \beta_{Nij}^k \Sigma_{ij} dV^0 = \delta v_i^N \left[ \int_S N_N \sigma_{ij} n_j dS + \int_V N_N f_i dV \right]. \quad (2.139)$$

Так как значения коэффициентов, входящих в набор  $\delta v^N$  могут быть произвольными, и каждый коэффициент является независимым, то чтобы выражение (2.139) было справедливым, должна выполняться система уравнений:

$$\int_{V^0} \beta_{Nij}^i \Sigma_{ij} dV^0 = \int_S N_N \sigma_{ij} n_j dS + \int_V N_N f_i dV. \quad (2.140)$$

Видно, что полученная система уравнений в зависимости от коэффициен-

тов  $u^N$  представлена в форме:

$$F^N (u^M) = 0. \quad (2.141)$$

Здесь опущен свободный индекс  $i$ , предполагается, что он включен в изменение индексов  $N$  и  $M$ , это облегчает дальнейшее описание рассуждений. Решение такой нелинейной системы уравнений относительно набора  $u^M$ , как правило, производится методом Ньютона. В таком методе решения нелинейных уравнения мы итерационно переходим от набора коэффициентов  $u_i^M$  к набору  $u_{i+1}^M$ . В нашем случае такая процедура записывается достаточно просто:

$$u_{i+1}^M = u_i^M + c_{i+1}^M, \quad (2.142)$$

где коэффициенты  $c_{i+1}^M$  представляют собой решение системы линейных уравнений

$$K_i^{NP} c_{i+1}^P = -F^N (u_i^M). \quad (2.143)$$

Матрица  $K_i^{NP}$  является матрицей Якоби для системы уравнений (2.141):

$$K_i^{NP} = \frac{\partial F^N (u_i^M)}{\partial u^P}. \quad (2.144)$$

Существует множество модифицированных методов Ньютона, которые для различных видов задач дают лучшую сходимость. Программа Abaqus в случае нелинейной статики предлагает "BFGS" модифицированный метод Ньютона. Так или иначе, чтобы реализовать такой итерационный процесс, необходимо получить матрицу Якоби (2.144) для нашей системы уравнений. Тут важно отметить, что такая матрица должна быть получена аналитически, она не находится численно, потому что в этом случае численный

процесс происходил бы очень долго. Подробное получение матрицы  $K_i^{NP}$  изложено в теоретическом разделе документации программы Abaqus [88].

В данном изложении нам важно, что программа одним из вариантов модифицированных методов Ньютона решает систему уравнений (2.141) относительно переменных  $u^M$ , которое было получено из принципа виртуальной работы (2.134), и для реализации такого метода нам необходима аналитически полученная матрица (2.144). Теперь, если мы хотим описать свою модель поведения материала, понятно, что нам надо описать связь между тензорами  $\Sigma_{ij}$  и  $E_{ij}$  и получить аналитический вид для выражения  $\partial\Sigma_{ij}/\partial E_{kl}$ , так как значения этого тензора будет входить в выражение для матрицы  $K^{NP}$ .

В конечноэлементном пакете Abaqus за физическую нелинейность или за модель материала отвечает подключаемая процедура UMAT, которая организована следующим образом: на вход поступают полные деформации на обрабатываемом инкременте по нагрузке, на выходе должны быть компоненты напряжений и значения компонент тензора четвертого ранга  $\partial\Sigma_{ij}/\partial E_{kl}$ .

Теперь рассмотрим вид функций  $N_N$ . Первое, что стоит отметить, что такая функция выбирается финитной, то есть равной нулю всюду кроме некоторой области вокруг соответствующего узла и непрерывной. Вариантов же такой функции и области ее ненулевых значений достаточно много, каждый вариант выбирается из практических нужд в зависимости от решаемой задачи. Продемонстрируем возможный вид такой функции на простом примере треугольного элемента. Пусть рассматривается плоская задача, это приведет к соответствующему изменению уравнений равновесия, и как следствие, изменению уравнения (2.140), но тем не менее форма

уравнений (2.141) останется той же и суть проведенных выше рассуждений не изменится. Проведем дискретизацию или просто разобьем тело на треугольники, как показано на рис. 2.20. Вершины треугольников будем

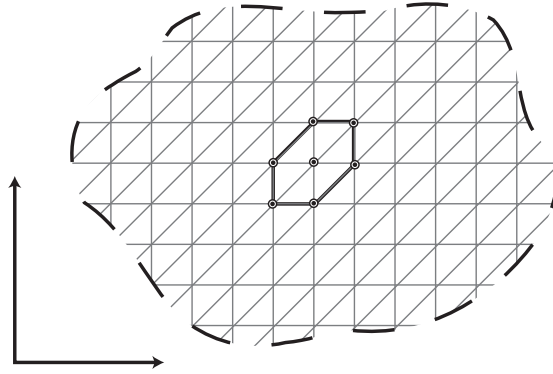


Рис. 2.20: Треугольные элементы.

называть узлами, сами треугольники — элементами. Теперь зафиксируем какой-нибудь конкретный узел и рассмотрим область из треугольников для которых он является вершиной. Далее построим пирамиду, с описанной областью в качестве основания и центром в зафиксированном узле, это и будет вид функции  $N_N$ . В результате будет построена функция, которая равна единице в выбранном нами узле и равна нулю в ближайших узлах и во вне описанной области, при этом над каждым конкретным элементом функция должна быть линейной (рис. 2.21). Таким образом, наша функция

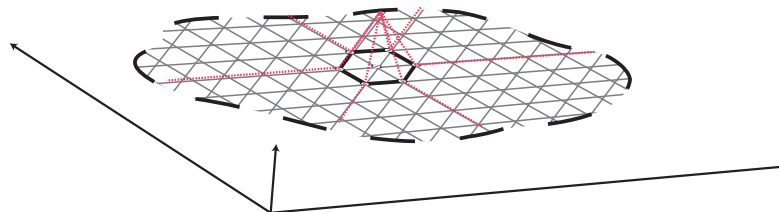


Рис. 2.21: Функция формы треугольного элемента.

кусочно-линейная в окрестности фиксированного узла и равна нулю вне этой окрестности. Далее, меняя изначально фиксированный узел, мы покроем все наше тело такими пирамидами с неизвестными высотами. После

решения системы уравнений (2.141), мы выясним значение высот, и сумма всех таких финитных функций и будет приближением нашего поля перемещений. Теперь понятно, что набор коэффициентов  $u^N$  есть приближение значений перемещений в узлах нашей модели. Функция  $N_N$  или построенная пирамида называется функцией формы. Здесь надо заметить, что очень часто в качестве функции  $N_N$  рассматриваются линейные участки пирамид с единичными высотами над одним конкретным элементом. Очевидно, что такое переопределение не меняет даже обозначений в приведенных формулах, но тем не менее определение функции формы меняется. Конкретный вид функций форм для каждого вида элементов можно найти в литературе, этот вопрос довольно широко освещен. Интересно отметить, что в настоящее время в определение элемента в прочностных программах включены, как правило, вид элемента и соответствующая функция формы, а также вид решаемой задачи: плоская деформация, плоское напряженное состояние, задача изгиба и растяжения балки и т.д., а также степени свободы и способ интегрирования интегральных соотношений (2.140).

Более детальную информацию о способе интегрирования полученных уравнений, сходимости решения в случае моделирования нелинейных процессов, а также получения из поля перемещения полей деформации и напряжения можно найти в следующих работах [109, 138, 255, 270].

Далее, задача состоит в том, чтобы описать алгоритм, которому на вход поступают полные деформации, а на выходе должны быть получены напряжения и значения компонент тензора четвертого ранга  $\partial \Sigma_{ij} / \partial E_{kl}$ . Так как мы будем решать задачу в геометрически линейной постановке, то вправе сразу писать  $\partial \sigma_{ij} / \partial \varepsilon_{kl}$ . При этом нам надо описать упруго-пластическую модель поведения материала.



До наступления пластических деформаций материал ведет себя упруго, и нам необходимо предоставить упругие соотношения между напряжениями и деформациями, которые представляют собой закон Гука:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}[\varepsilon_{kl}^{el}|_t + \Delta\varepsilon_{kl}], \quad (2.145)$$

где  $\varepsilon_{kl}^{el}|_t$  есть деформации уже достигнутые на предыдущих шагах,  $\Delta\varepsilon_{kl}$  — приращения деформаций на активном инкременте,  $E_{ijkl}$  является тензором четвертого ранга, который в случае модели изотропного тела представляется в виде:

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}. \quad (2.146)$$

При этом матрица Якоби для упругого тела очевидно выражается следующим образом:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}} = E_{ijkl}. \quad (2.147)$$

Такие соотношения сохраняются до выполнения критерия пластичности, после чего соотношения должны измениться на соотношения, которые описывают пластическую модель.

Рассмотрим критерий для зависимости  $f(\xi)$  в виде (2.2). Запишем поверхность текучести в виде:

$$F(\sigma_{ij}) = \sigma_0 + C\sigma = k(\Delta\bar{\varepsilon}^{pl}), \quad (2.148)$$

где  $\Delta\bar{\varepsilon}^{pl}$  определяет приращение эквивалентных пластических деформаций

$$\Delta\bar{\varepsilon}^{pl} = \sqrt{\Delta\varepsilon_{ij}^{pl}\Delta\varepsilon_{ij}^{pl}}. \quad (2.149)$$

То есть эквивалентные пластические деформации рассматриваются в на-

шем случае, как длина кривой, описываемой вершиной вектора пластических деформаций во время нагружения в девятимерном пространстве пластических деформаций. Символ  $\Delta$  в данном случае имеет смысл промежуточного состояния между инкрементами по нагрузке. Параметр  $k$  теперь непостоянный, как в предыдущих разделах, а зависит от параметра упрочнения  $\bar{\varepsilon}^{pl}$ . Такая зависимость  $k(\bar{\varepsilon}^{pl})$  предполагается известной и задается пользователем в виде кусочно-линейной функции.

Мы рассматриваем переход от состояния в момент  $t$  к состоянию  $t + \Delta t$ . Запишем выражения для напряжений отвечающих состоянию  $t + \Delta t$ :

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}[\varepsilon_{kl}^{el}|_t + \Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^{pl}]. \quad (2.150)$$

Остановимся на этом уравнении подробнее. Здесь  $\varepsilon_{kl}^{el}|_t$ , как и ранее, есть упругие деформации, которые произошли к моменту  $t$ ,  $\Delta\varepsilon_{kl}$  — приращения полных (в данном случае это сумма упругих и пластических) деформаций на рассматриваемом шаге,  $\Delta\varepsilon_{kl}^{pl}$  — приращение пластических деформаций на инкременте. Смысл выражения (2.150) легко продемонстрировать на диаграмме одноосного растяжения образца (рис. 2.22). Здесь предполага-

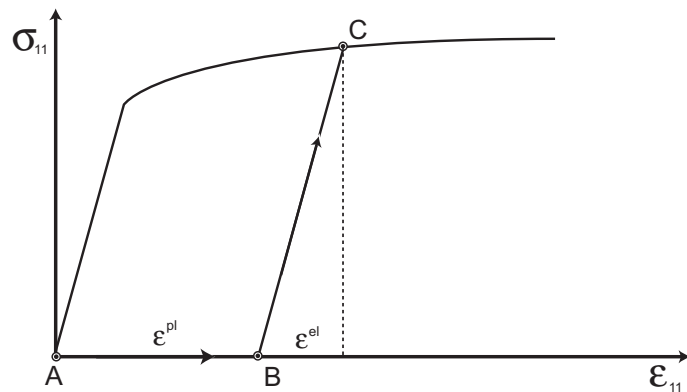


Рис. 2.22: Одноосное растяжение после разгрузки.

ется, что после приложения нагрузки и после того, как пластические де-

формации произошли, мы получили некоторые значения для величин  $\varepsilon_{11}^{pl}$  и  $\varepsilon_{11}^{el}$ . Напряжение можно восстановить следующим образом: нам надо сдвинуться по оси  $\varepsilon_{11}$  на величину  $\varepsilon_{11}^{pl}$  и далее, выходя из точки  $B$ , найти по упругому закону, используя полученные упругие деформации  $\varepsilon_{11}^{el}$ , напряжение  $\sigma_{11}$ . То есть здесь используется два факта: полные деформации  $\varepsilon$  представляют из себя сумму пластических деформаций  $\varepsilon^{pl}$  и упругих  $\varepsilon^{el}$  и что разгрузка и новая догрузка после пластического деформирования происходит по тому же упругому закону, что и при предыдущей нагрузке до наступления пластичности. Выражение (2.150) является просто многомерным аналогом проведенных рассуждений для одноосного растяжения.

Теперь рассмотрим тензор пластических деформаций. Так как длина вектора приращений пластических деформаций равна параметру  $\Delta\bar{\varepsilon}^{pl}$ , то мы можем записать:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{pl} = \Delta\bar{\varepsilon}^{pl} n_{ij}, \quad (2.151)$$

где  $n_{ij}$  вектор параллельный вектору пластических деформаций в пространстве пластических деформаций и равный единице по модулю. Так как мы будем строить ассоциированный закон пластичности то  $n_{ij}$  является нормальным к поверхности  $F(\sigma_{ij})$  и можно записать:

$$n_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} / \left| \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right|. \quad (2.152)$$

Далее, выражение для градиента поверхности текучести

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial(\sigma_0 + C\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sigma_0} + \frac{C}{3} \delta_{ij}, \quad (2.153)$$

и для квадрата модуля градиента

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right|^2 = \left( \frac{3 S_{ij}}{2 \sigma_0} + \frac{C}{3} \delta_{ij} \right) \left( \frac{3 S_{ij}}{2 \sigma_0} + \frac{C}{3} \delta_{ij} \right) = \frac{3}{2} + \frac{C^2}{3} =: B^2, \quad (2.154)$$

что приводит к выражению

$$n_{ij} = \left( \frac{3 S_{ij}}{2 \sigma_0} + \frac{C}{3} \delta_{ij} \right) / \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{C^2}{3}}, \quad (2.155)$$

или окончательно запишем

$$n_{ij} = \left( \frac{3 S_{ij}}{2 \sigma_0} + \frac{C}{3} \delta_{ij} \right) / B, \quad (2.156)$$

где  $B$  определено в выражении (2.154). Таким образом, нам удалось выразить компоненты пластических деформаций через напряжения и параметр  $\Delta \bar{\varepsilon}^{pl}$ .

Основная цель последующих выкладок заключается в определении значения приращения эквивалентных пластических деформаций  $\Delta \bar{\varepsilon}^{pl}$ , так как этот параметр полностью определяет картину деформирования и по нему можно восстановить напряжения и упругие и пластические деформации.

Обозначим известные нам деформации для простоты записи через  $\tilde{\varepsilon}$ :

$$\tilde{\varepsilon}_{kl} := \varepsilon_{kl}^{el}|_t + \Delta \varepsilon_{kl}. \quad (2.157)$$

Перепишем уравнение (2.150) в виде:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} - \Delta \bar{\varepsilon}^{pl} E_{ijkl} n_{kl}. \quad (2.158)$$

Теперь свернем полученное выражение с единичным тензором  $\delta_{ij}$ :

$$3\sigma = A - \Delta\bar{\varepsilon}^{pl}(3\lambda + 2\mu)C/B, \quad (2.159)$$

где  $A$  известное нам выражение:

$$A = E_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl}\delta_{ij}. \quad (2.160)$$

Таким образом мы получили связь между параметром  $\sigma$  и приращением  $\Delta\bar{\varepsilon}^{pl}$ . Для получения еще одного уравнения свернем выражение (2.158) само с собой, получим:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\sigma_0^2 + 3\sigma^2 + 2\frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{pl}}{B} \left[ 3 \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) C\sigma + 2\mu\sigma_0 \right] + \\ + \left( \frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{pl}}{B} \right)^2 \left[ 3 \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right)^2 C^2 + 6\mu^2 \right] = D, \end{aligned} \quad (2.161)$$

где через  $D$  обозначено также выражение, которое восстанавливается через известные нам деформации:

$$D = E_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl}E_{ijmn}\tilde{\varepsilon}_{mn}. \quad (2.162)$$

Система нелинейных уравнений, состоящая из условия пластичности (2.148) и полученных уравнений (2.159) и (2.161), позволяет определить значение параметров  $\sigma_0$ ,  $\sigma$  и  $\Delta\bar{\varepsilon}^{pl}$ . Решение такой системы уравнений, как правило, получают итерационным методом Ньютона. После получения решения мы можем восстановить, используя уравнение (2.150), поле напряжений и поля пластических и упругих деформаций.

Таким образом, связь между напряжениями и полными деформациями

получена, теперь остается получить аналитическую запись для матрицы жесткости материала или тензора  $\partial\sigma_{ij}/\partial\varepsilon_{kl}$ . Данная часть работы, наверное, самая трудоемкая и занимает основное время при описании процедуры отвечающей за поведение материала.

Используя уравнение (2.150), найдем связь между всеми приращениями входящих в него параметров.

$$\partial\sigma_{ij} = E_{ijkl}\partial\varepsilon_{kl} - \partial\bar{\varepsilon}^{pl} E_{ijkl}n_{kl} - \Delta\bar{\varepsilon}^{pl} E_{ijkl}\partial n_{kl}. \quad (2.163)$$

Теперь, используя уравнения (2.148), (2.159) и (2.161), последовательно выразим приращения всех параметров через нужные нам  $\partial\sigma_{ij}$  и  $\partial\varepsilon_{kl}$ .

Из критерия пластичности получим:

$$\partial\sigma_0 + C\partial\sigma = k'\partial\bar{\varepsilon}^{pl}, \quad (2.164)$$

где штрихом обозначена производная по  $\bar{\varepsilon}^{pl}$ . Из уравнения (2.159) находим следующую связь между приращениями:

$$\partial\sigma = \frac{1}{3}\partial A - \frac{Q}{B}\partial\bar{\varepsilon}^{pl}, \quad (2.165)$$

где

$$Q = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) C. \quad (2.166)$$

Из уравнения (2.161) можно получить:

$$\alpha_1\partial\sigma_0 + \alpha_2\partial\sigma + \alpha_3\partial\bar{\varepsilon}^{pl} = \partial D, \quad (2.167)$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 4 \left[ \sigma_0 \frac{1}{3} + \mu \frac{\Delta \bar{\varepsilon}^{pl}}{B} \right], \\
\alpha_2 &= 6 \left[ \sigma + Q \frac{\Delta \bar{\varepsilon}^{pl}}{B} \right], \\
\alpha_3 &= \frac{2}{B} (3Q\sigma + 2\mu\sigma_0) + \frac{2\Delta \bar{\varepsilon}^{pl}}{B^2} (3Q^2 + 6\mu^2).
\end{aligned} \tag{2.168}$$

Система уравнений (2.164), (2.165) и (2.167) позволяет выразить все неизвестные приращения параметров  $\partial\sigma_0$ ,  $\partial\sigma$  и  $\partial\bar{\varepsilon}^{pl}$  через известные приращения  $\partial A$  и  $\partial D$ . Для приращений  $\partial A$  и  $\partial D$  можно записать выражения:

$$\begin{aligned}
\partial A &= (3\lambda + 2\mu)\delta_{kl}\partial\varepsilon_{kl}, \\
\partial D &= [(3\lambda^2 + 4\mu\lambda)2\delta_{kl} + 8\mu^2\varepsilon_{kl}]\partial\varepsilon_{kl}.
\end{aligned} \tag{2.169}$$

Если воспользоваться уравнением (2.156) и выписать выражения для  $\partial n_{ij}$ :

$$\partial n_{ij} = \frac{3}{2B\sigma_0} \left[ \partial S_{ij} - \frac{S_{ij}}{\sigma_0} \partial\sigma_0 \right]. \tag{2.170}$$

то в уравнении (2.163) останутся только приращения  $\partial\sigma_{ij}$  и  $\partial\varepsilon_{kl}$ . Далее остается только разрешить линейные уравнения, чтобы получить зависимость в виде  $\partial\sigma_{ij} = J_{ijkl}\partial\varepsilon_{kl}$ , где  $J$  и есть искомый якобиан.

В описании подключаемой процедуры UMAT для программы Abaqus все тензоры второго ранга  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{kl}$  представляются в виде шестимерных векторов, а искомый якобиан — в виде матрицы соответствующей размерности. Искомый якобиан удобнее получать по частям и использовать суммирование отдельных небольших матриц. В данной работе мы не будем приводить окончательное выражение для искомого тензора  $J_{ijkl}$ , так как для написа-

ния программы полученных выражений вполне достаточно. Разобранный пример написания такого рода связи с примером реализованной программы для классической пластической модели Мизеса можно найти в стандартной документации конечноэлементного пакета Abaqus [88]. Аналитический вид тензора  $\partial\sigma_{ij}/\partial\varepsilon_{kl}$  для произвольного условия пластичности зависящего от среднего нормального напряжения  $\sigma$  приведен в работе [93].

### 2.2.5 Численные решения конкретных задач

Для решения задач необходимо задаться свойствами материала. Мы рассматриваем упруго-пластическую модель материала с предельной поверхностью в виде (2.3). Поэтому нам необходимо выбрать упругие постоянные, а также константу  $C$  из критерия текучести и зависимость  $k(\varepsilon^{pl})$ , характеризующую упрочнение рассматриваемой среды. Так как сложно привести конкретный пример реального материала, где изменение константы  $C$  могло бы отражать рассматриваемый нами диапазон от 0 до 1.5 при постоянном пределе текучести  $k$ , то мы рассмотрим свойства для расчетов достаточно произвольные. Единственным критерием выбора будет только близость к диаграмме жестко-идеальнопластического материала, чтобы можно было провести сравнение результатов численных расчетов с полученными аналитическими решениями. Имеется ввиду, что модуль Юнга должен быть сравнительно большим, чтобы, как следствие, получить малые упругие деформации. При этом линия зависимости напряжений и деформаций, характеризующая упрочнение среды, должна обеспечивать быстрый рост пластических деформаций, то есть быть близкой к горизонтальной оси на диаграмме нагружения. Значения упругих постоянных для модуля Юнга и



коэффициента Пуассона возьмем следующие:

$$\begin{aligned} E &= 200000, \\ \nu &= 0.3. \end{aligned} \tag{2.171}$$

Функция, описывающая зависимость от параметра упрочнения, является кусочно-линейной и задается точками, по которым потом данная зависимость интерполируется линейно уже в самой программе. В нашем случае, последовательность точек будет следующая:

$$\begin{aligned} k(0.0000) &= 200, \\ k(0.0009) &= 220, \\ k(0.0022) &= 225, \\ k(1.0000) &= 226. \end{aligned} \tag{2.172}$$

Последняя точка в зависимости является достаточно фиктивной и вводится для удобства проводимых расчетов, это позволяет добиться более быстрой сходимости решения.

Константу  $C$  при этом будем варьировать, и анализировать получаемые решения.

В качестве общих замечаний, которые можно сделать относительно всех далее рассматриваемых задач, отметим следующее: расчет происходит всегда с помощью объемных восьми узловых полностью интегрируемых элементов; во всех моделях для получения правильной постановки задачи плоской деформации используется условие симметрии относительно плоскости моделируемого сечения; перемещения прикладываются всегда только по нормали к границе, так что перемещения вдоль границы возможны; рас-

чет производится в геометрически линейной постановке; начало системы координат расположено в центре сечения рассматриваемого образца.

В качестве первого примера рассмотрим численное решение задачи о растяжении полосы ослабленной угловыми вырезами (рис. 2.3). Постановка задачи аналогична постановке в рассмотренном ранее аналитическом решении. Нагружение образца происходит путем приложения нормальных перемещений к верхней и нижней границам тела. Предельная нагрузка определяется как суммарная сила реакции в направлении оси  $x_2$ . При этом, так как сечение имеет две линии симметрии, есть возможность моделировать только четверть геометрии с соответствующими условиями симметрии на узлах модели. Далее нам нужно выбрать параметры геометрии, в данном случае это угол вырезов и ширина сечения между вырезами. Ширину ослабленного сечения выберем  $2h = 2$ , в качестве углов вырезов рассмотрим два случая  $2\gamma = 0$  и  $2\gamma = \pi/2$ . Сначала рассмотрим случай нулевого раствора угла. На рис. 2.23 можно увидеть конечноэлементную сетку, используемую в расчетах в недеформированном состоянии (слева) и в деформированном состоянии (справа) с масштабированным полем перемещения узлов с коэффициентом равным 100. На следующих рис. 2.24-2.28 отображены результаты расчетов в случае константы  $C = 0.5$ . Видно, что поля эквивалентных напряжений по Мизесу (рис. 2.24) и на основе использованного критерия пластичности (рис. 2.26) схожи, однако, как будет показано далее предельная нагрузка существенно отличается. Сравнение полей эквивалентных пластических деформаций (рис. 2.27) и объемных (рис. 2.28), говорит о значительном вкладе последних в общее пластическое деформирование, но только в области концентратора.

Из рис. 2.26 и 2.27 видно, что процесс формирования пластических об-

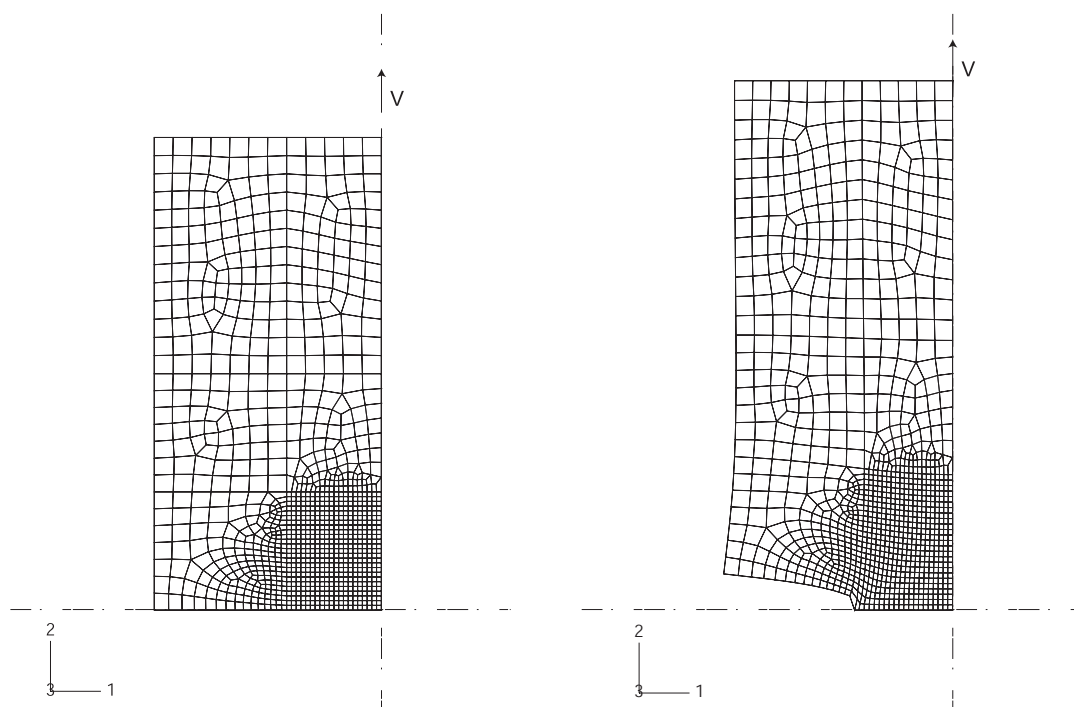


Рис. 2.23: Сетка используемая в расчетах.

ластей и сами области пластичности в предельном состоянии существенно отличаются от областей, рассмотренных в аналитическом решении (рис. 2.3). Особенно выделяются свободные берега трещин на которых полностью отсутствуют пластические деформации.

Проверим как соотносятся значения нагрузок, отвечающих предельному состоянию, полученных путем численного решения упруго-пластической задачи и на основе аналитического решения. Для этого прорешаем ту же численную задачу о растяжении полосы с нулевыми углами вырезов, но с изменением константы  $C$  в критерии текучести. На рис. 2.29 изображена зависимость предельной нагрузки от значения константы  $C$ . Красная линия отвечает аналитическому решению. Точками с шагом по параметру  $C$  равным 0.1 обозначены значения полученные из численного решения. Видно (рис. 2.29), что различие полученных значений предельной нагрузки велико при малых параметрах  $C$ , при этом начиная со значений  $C > 0.5$

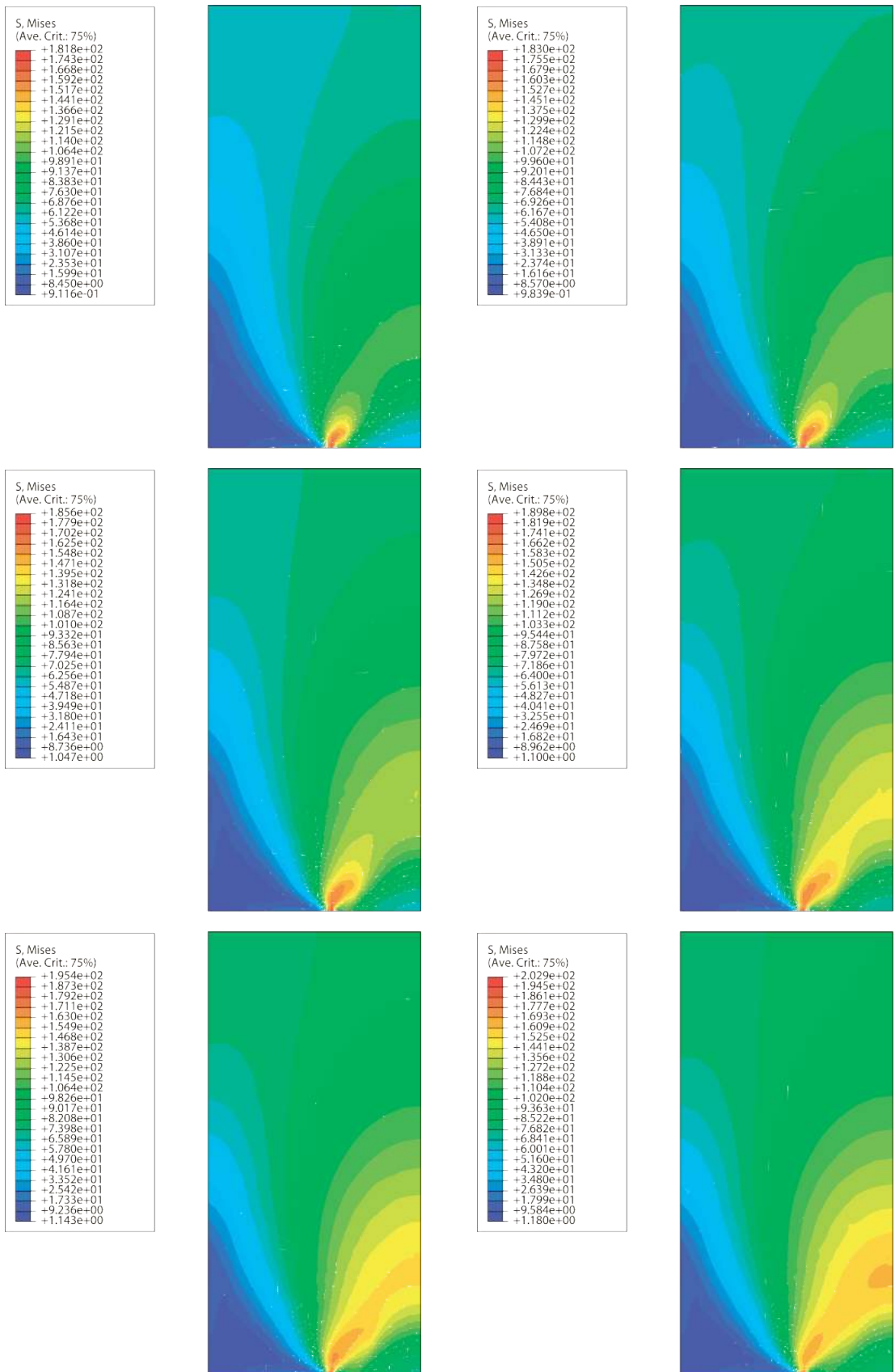


Рис. 2.24: Эквивалентные напряжения по Мизесу  $\sigma_0$ .

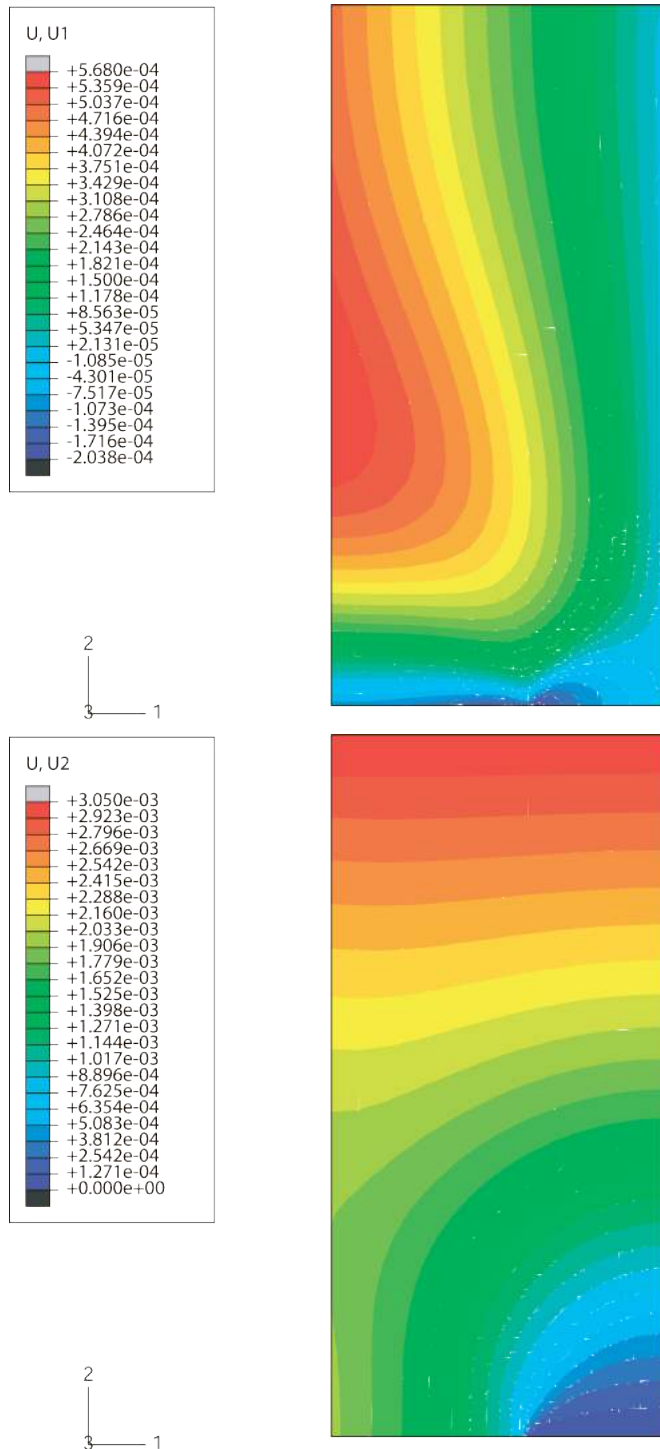


Рис. 2.25: Поле перемещений относительно осей  $x_1$  и  $x_2$  в момент предельного состояния.

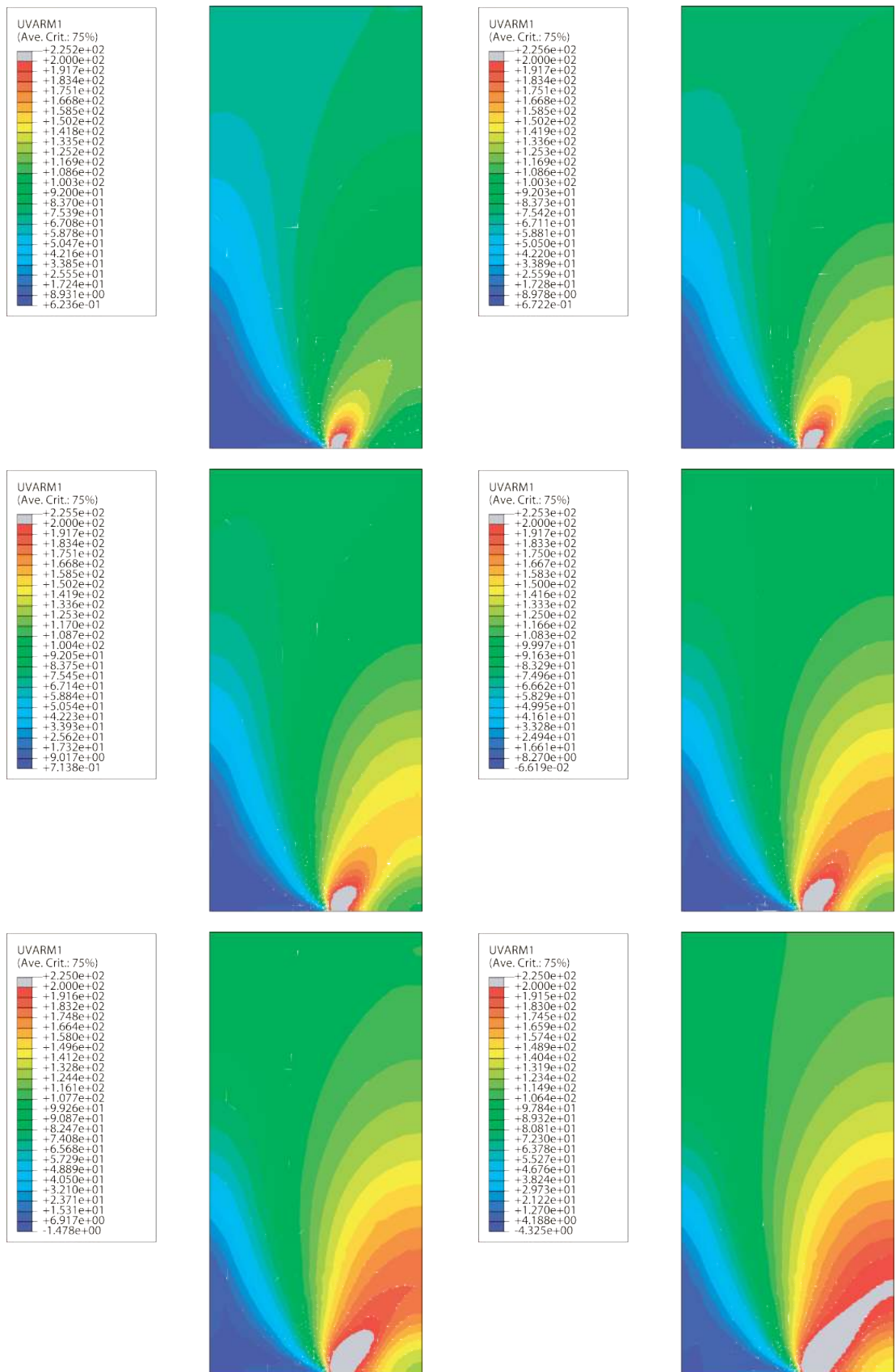


Рис. 2.26: Функция критерия пластичности  $F(\sigma_{ij}) = \sigma_0 + C\sigma$ .

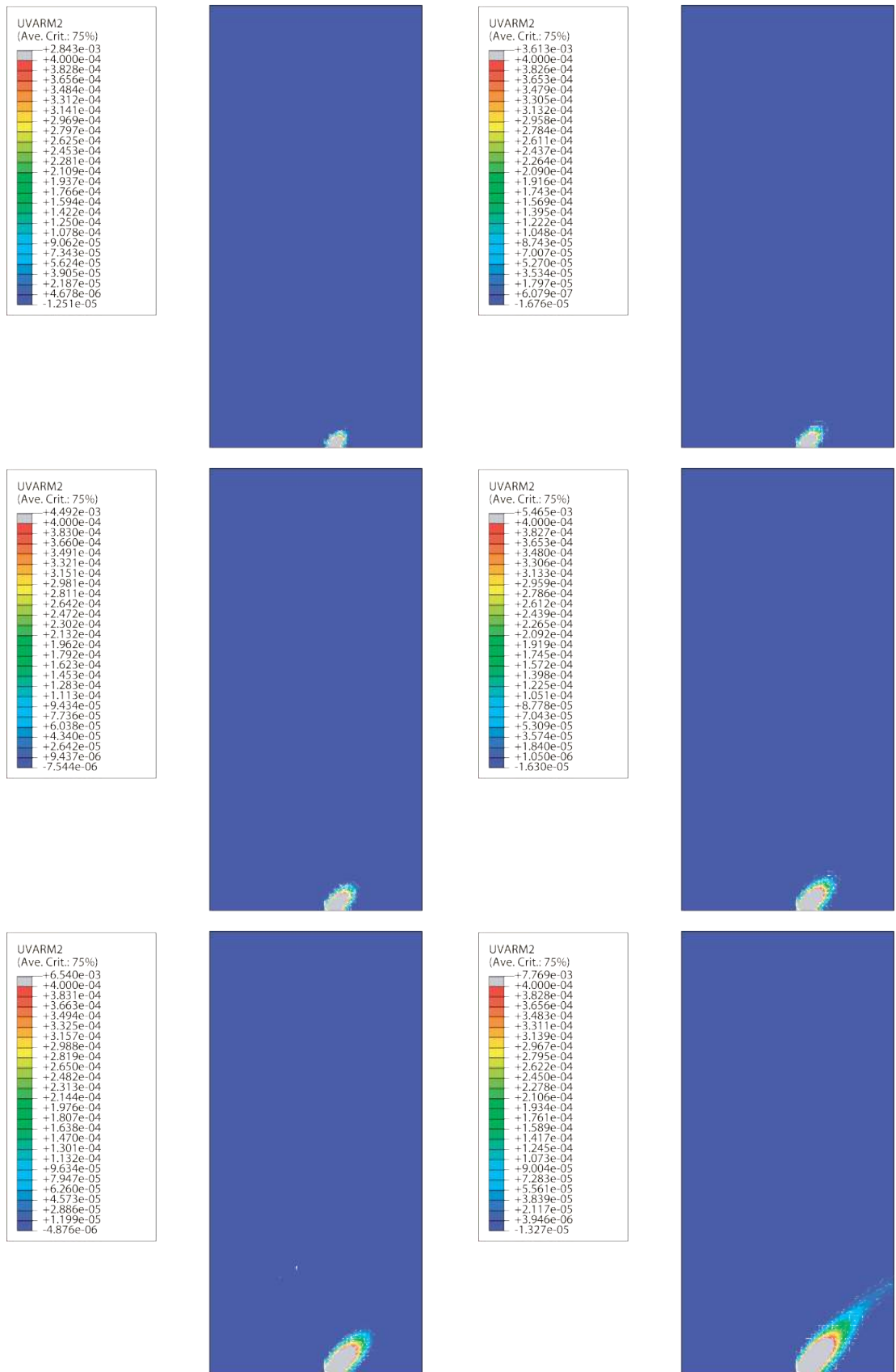


Рис. 2.27: Эквивалентные пластические деформации  $\epsilon^{pl}$ .

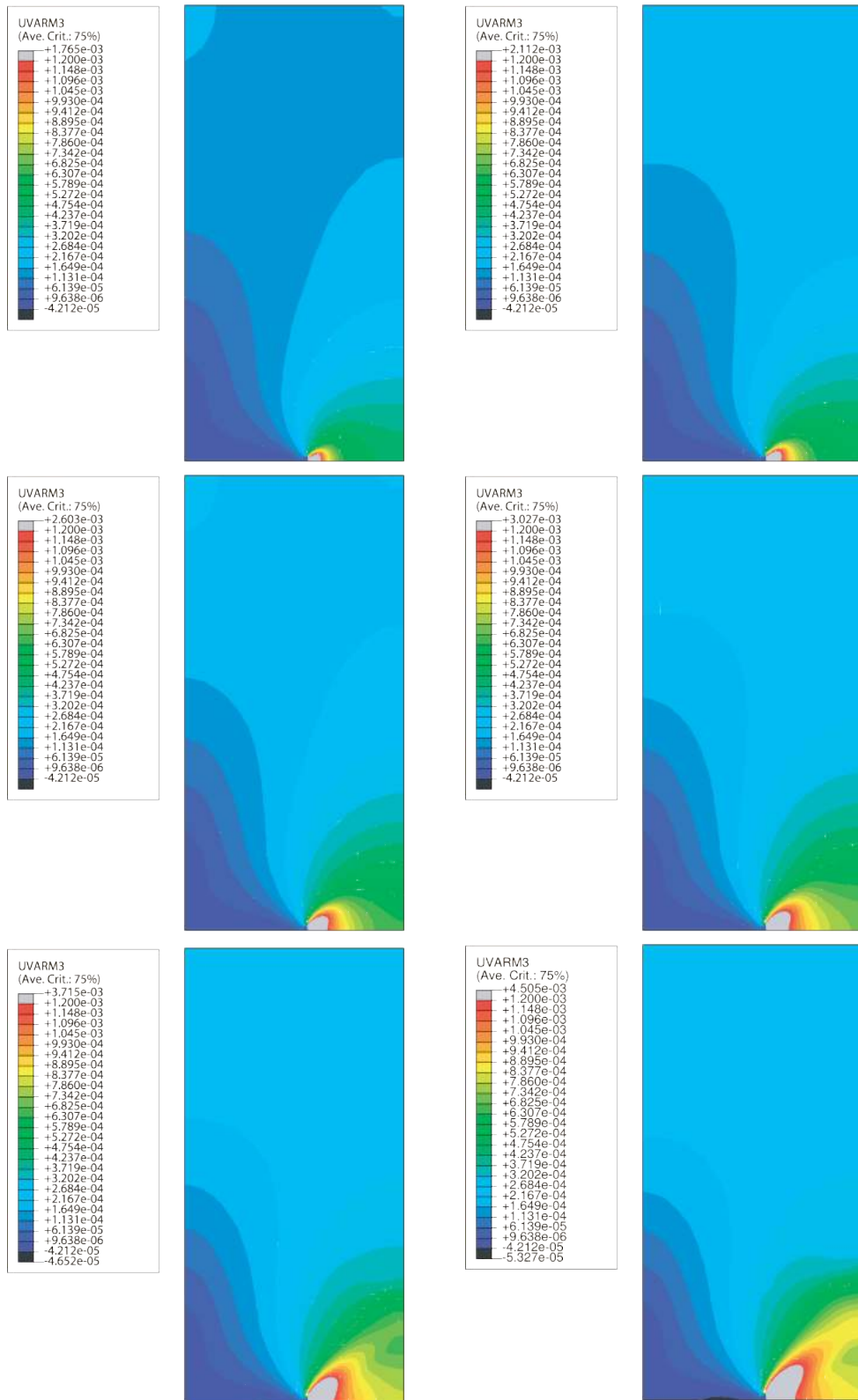


Рис. 2.28: Объемные деформации  $\varepsilon_{ii}$ .



разница существенно меньше.

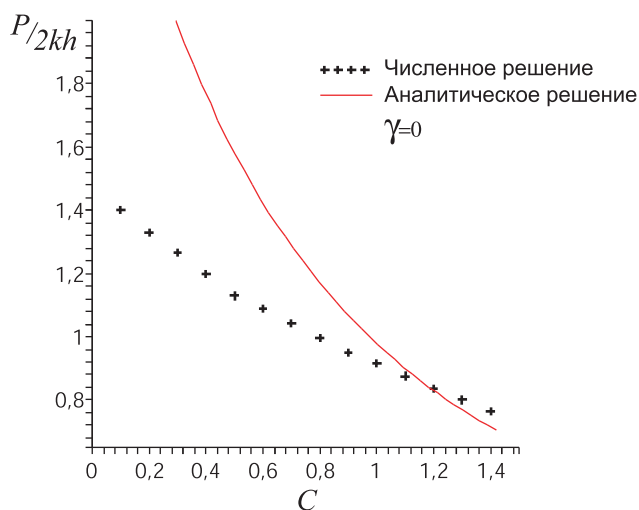


Рис. 2.29: Зависимость предельной нагрузки от  $C$  для нулевого угла выреза.

Проанализируем таким же образом соответствие между значениями предельных нагрузок, соответствующих аналитическим и численным решениям для выреза с углом  $\pi/2$ . На рис. 2.30 - 2.33 отображены результаты численного моделирования такой задачи, как и ранее для  $C = 0.5$ . Видно, что общий вид пластических областей практически совпадает.

Проанализируем значения предельных нагрузок полос с выбранными углами вырезов, построим графики зависимости между предельной нагрузкой и константой  $C$  (рис. 2.34). Отклонения результатов схожи с решением для нулевого угла выреза (рис. 2.29). Если совместить полученные графики зависимостей предельной нагрузки от параметра  $C$  для обоих рассмотренных случаев, то можно увидеть, что диаграммы, полученные численно совпадают (рис. 2.35). Таким образом, численные результаты демонстрируют независимость предельной нагрузки от величины угла выреза в рассматриваемом диапазоне. При увеличении константы  $C$  значения предельной нагрузки, полученные аналитически, становятся менее чувствительны к изменению значения угла выреза. При этом отклонение значений пре-

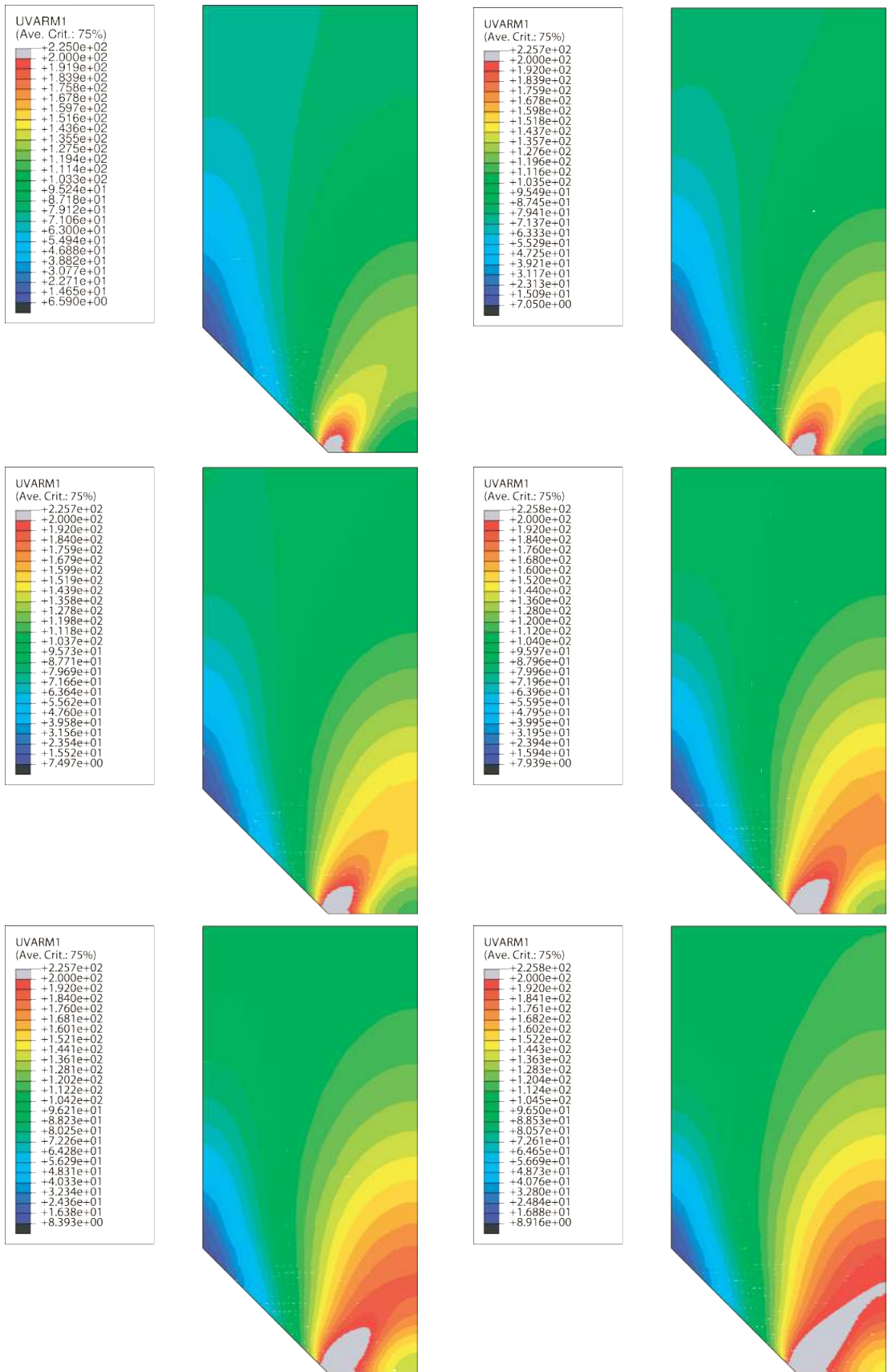


Рис. 2.30: Функция критерия пластичности  $F(\sigma_{ij}) = \sigma_0 + C\sigma$ .

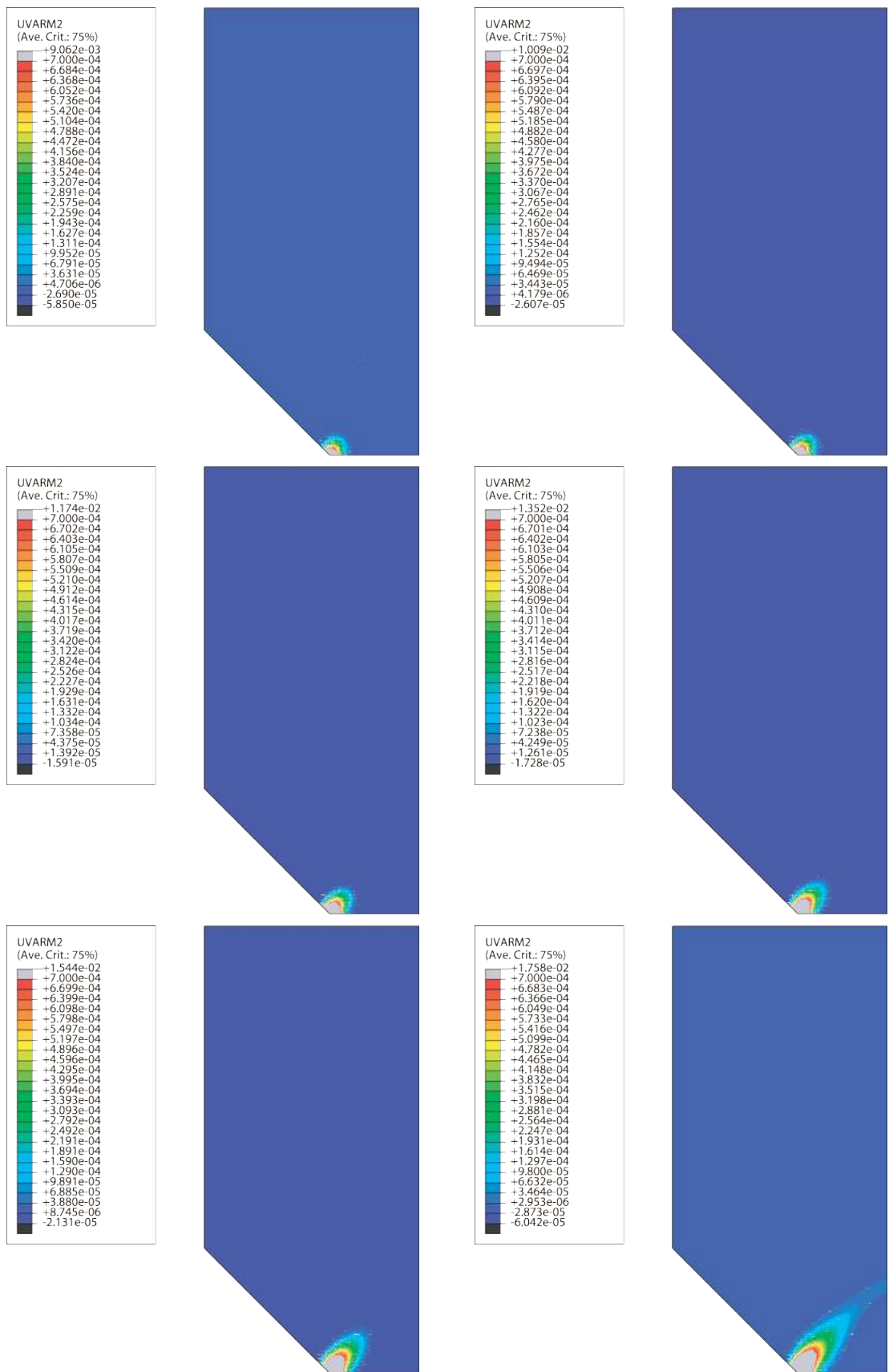


Рис. 2.31: Эквивалентные пластические деформации  $\epsilon^{pl}$ .

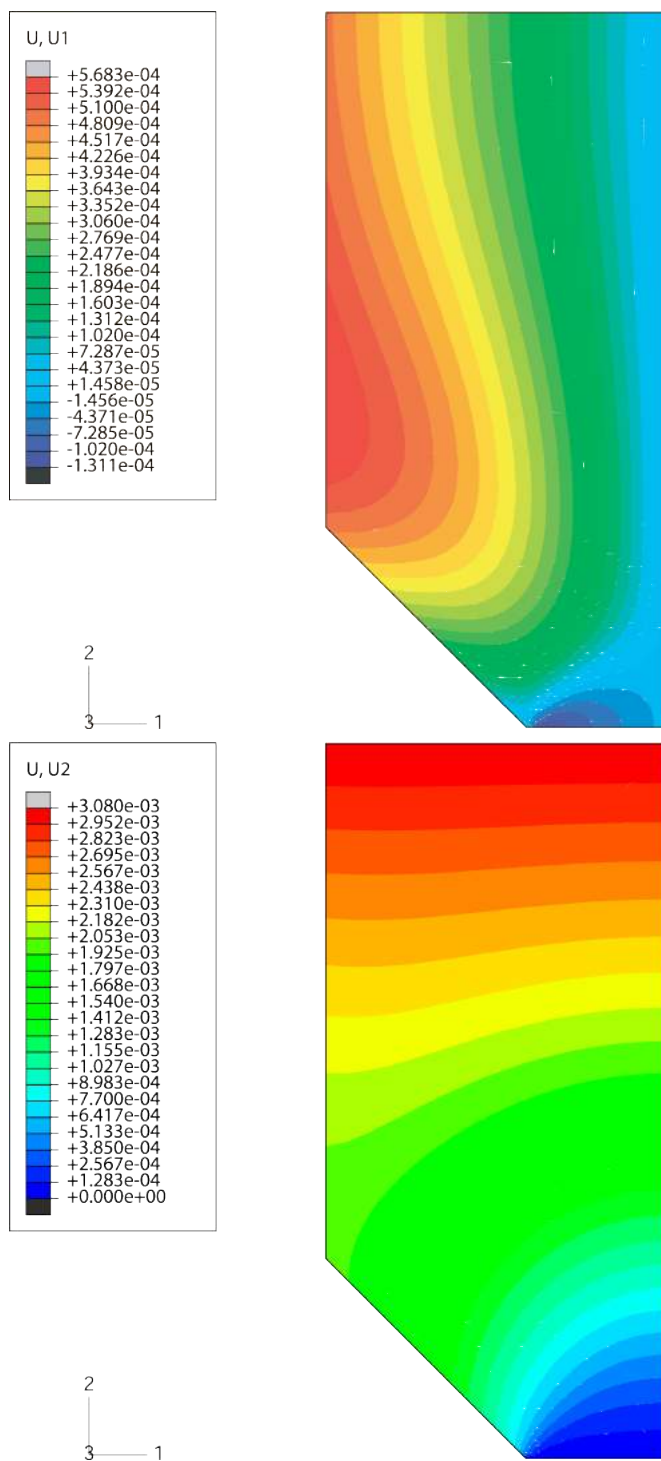


Рис. 2.32: Поле перемещений относительно осей  $x_1$  и  $x_2$  в момент предельного состояния.

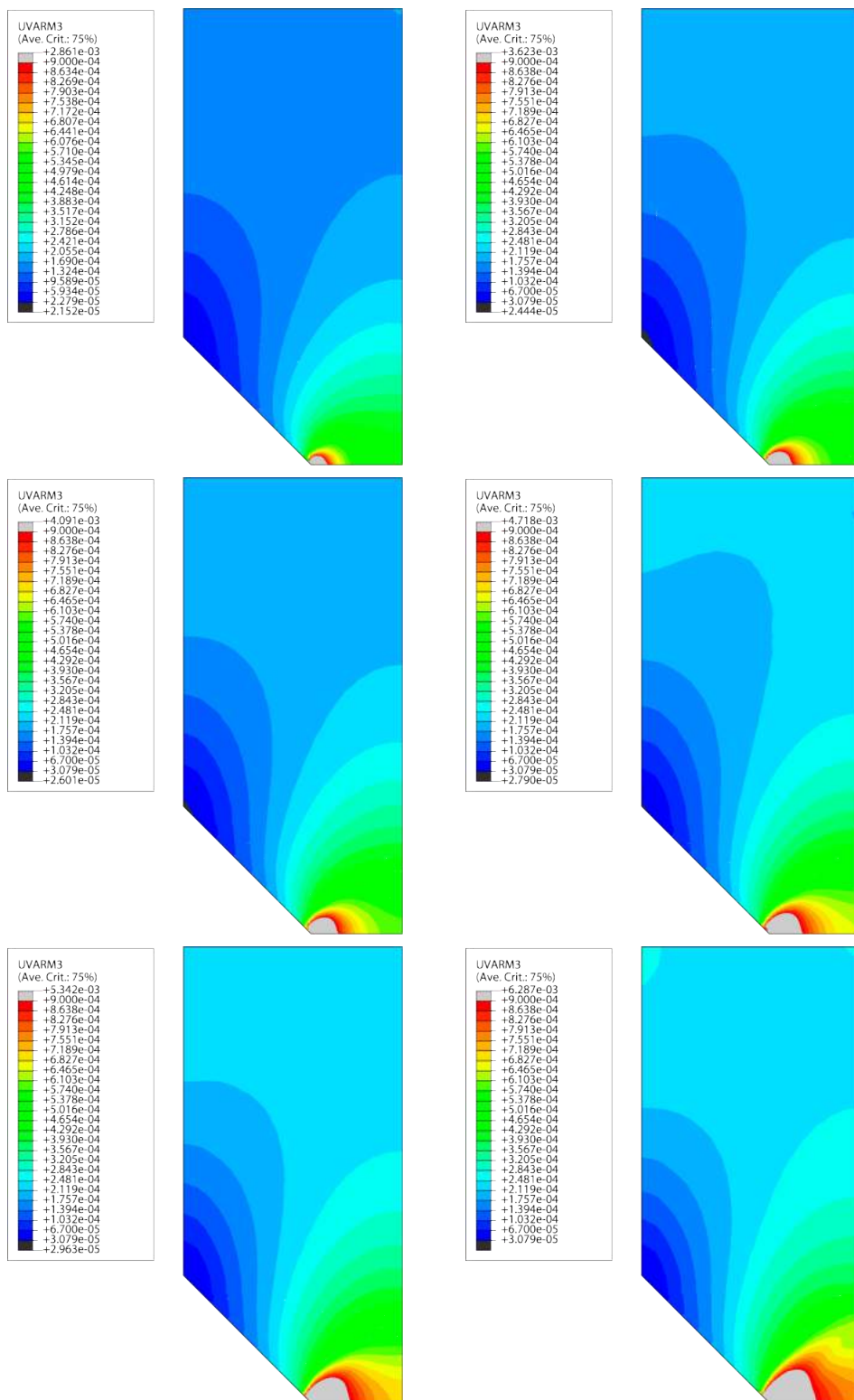


Рис. 2.33: Объемные деформации  $\varepsilon_{ii}$ .

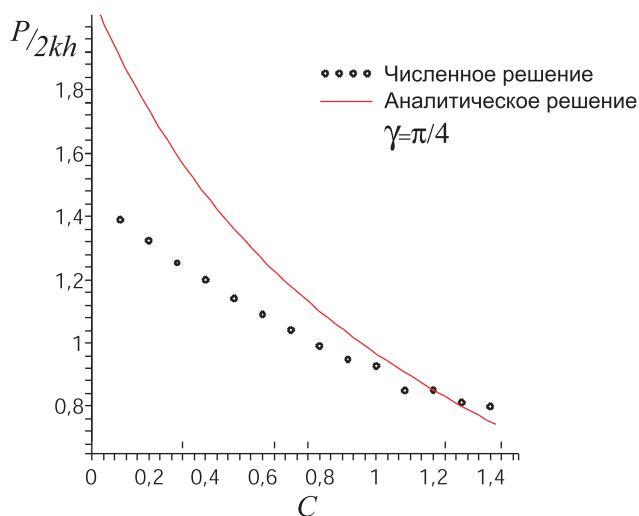


Рис. 2.34: Зависимость предельной нагрузки от  $C$  для угла выреза  $\pi/2$ .

дельных нагрузок, полученных из аналитического решения, от значений, полученных численно, уменьшаться с ростом  $C$ .

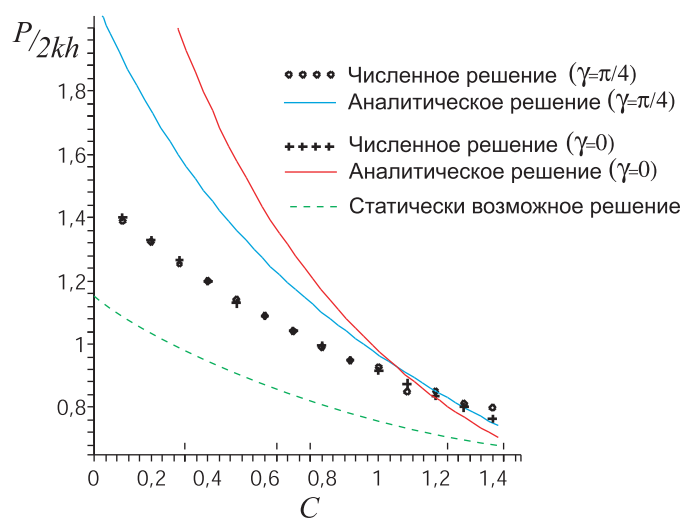


Рис. 2.35: Зависимость предельной нагрузки от  $C$ .

Данный факт можно объяснить с точки зрения экстремальных теорем о значении предельной нагрузки. В аналитическом решении для полосы ослабленной угловыми вырезами было построено кинематически возможное решение, которое дает оценку значению предельной нагрузки сверху, если построить статически возможное решение, то оно даст оценку снизу. В аналитическом решении, на линии ослабленного сечения мы можем

задаться постоянным полем напряжений  $\sigma_{22} = P/2h$  и продолжить его в область всего тела, тем самым получим статически возможное решение. На рис. 2.35 штрихованная линия отвечает значению предельной нагрузки, построенному таким образом. Видно, что полученные из численных решений значения предельной нагрузки лежат между значениями, полученными аналитически.

Чтобы картина образования пластических областей в рассмотренных задачах стала более ясной, воспользуемся следующими соображениями. Предположим, что в полосе имеются глубокие вырезы, и ширина ослабленного сечения соизмерима с радиусом кривизны на конце выреза. Таким образом, вопрос сводится к рассмотрению деформирования полосы, содержащей боковые вырезы с круговым основанием для достаточно большой (по сравнению с радиусом кругового основания) ширины ослабленного сечения. Значения радиуса выреза возьмем  $R = 1$ , ширину срединного сечения положим  $2h = 10$ . На рис. 2.36 приведена сетка, используемая в расчете.

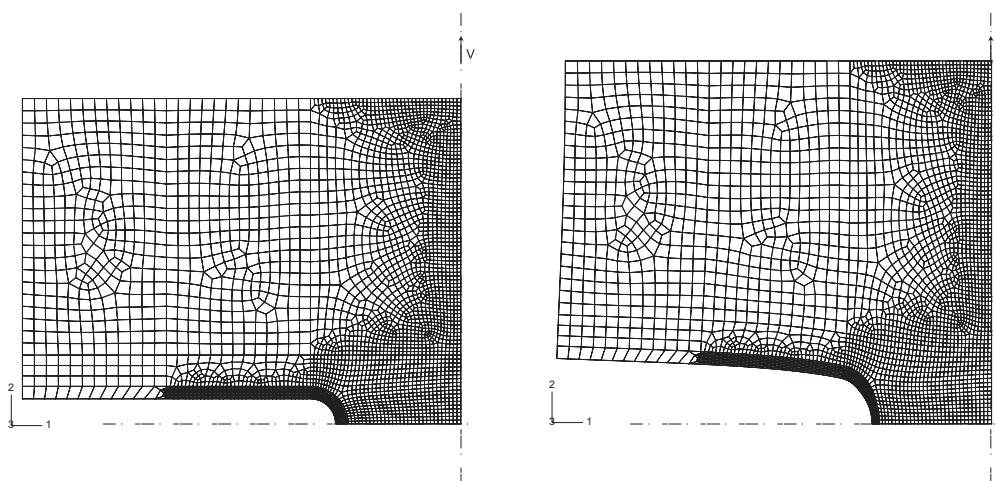


Рис. 2.36: Конечноэлементная сетка до деформирования и после с масштаб перемещения 150.

Рассмотрим последовательность роста пластических зон. Как и ранее,

на рис. 2.37 приведены значения функции критерия пластичности, где значения выше 200 выделены серым цветом. Видно, что сначала происходит рост пластической зоны вокруг отверстия, потом пластическая зона начинает развиваться под углом вверх. При этом такое развитие пластических зон схоже с развитием пластичности в рассмотренном ранее примере, где скруглений в вырезах не было. Предельное состояние пластических областей становится таким же, как и в случае линейных вырезов, при этом сохраняется упругая область в центре сечения. На рис. 2.38 приведено распределение перемещений, которое также подобно распределению, полученному в случае линейных вырезов.

Таким образом, можно сказать, что кинематика пластического деформирования, построенная в аналитическом решении, в численном решении не реализуется, что приводит к расхождению в значениях предельных нагрузок. В данном случае можно сослаться на работы [37, 38]. В этих работах рассматривался изгиб надрезанных полос, и были найдены кинематически возможные решения с более низкой оценкой предельного изгибающего момента. При этом в полученных решениях, в отличие от известных, в центре пластических областей сохранялась упругая область, что весьма схоже с полученным здесь численными решениями.

Предыдущие задачи имели достаточно большой разброс в оценке предельной нагрузки, величина полученная из статически допустимого решения сильно отличалась от величины полученной при помощи кинематически возможного. Тем самым становится интересно рассмотреть задачу о растяжении полосы с круговым отверстием, для которой такие оценки предельной нагрузки совпадают.

Нагружение, как и в предыдущем примере, происходит нормальными



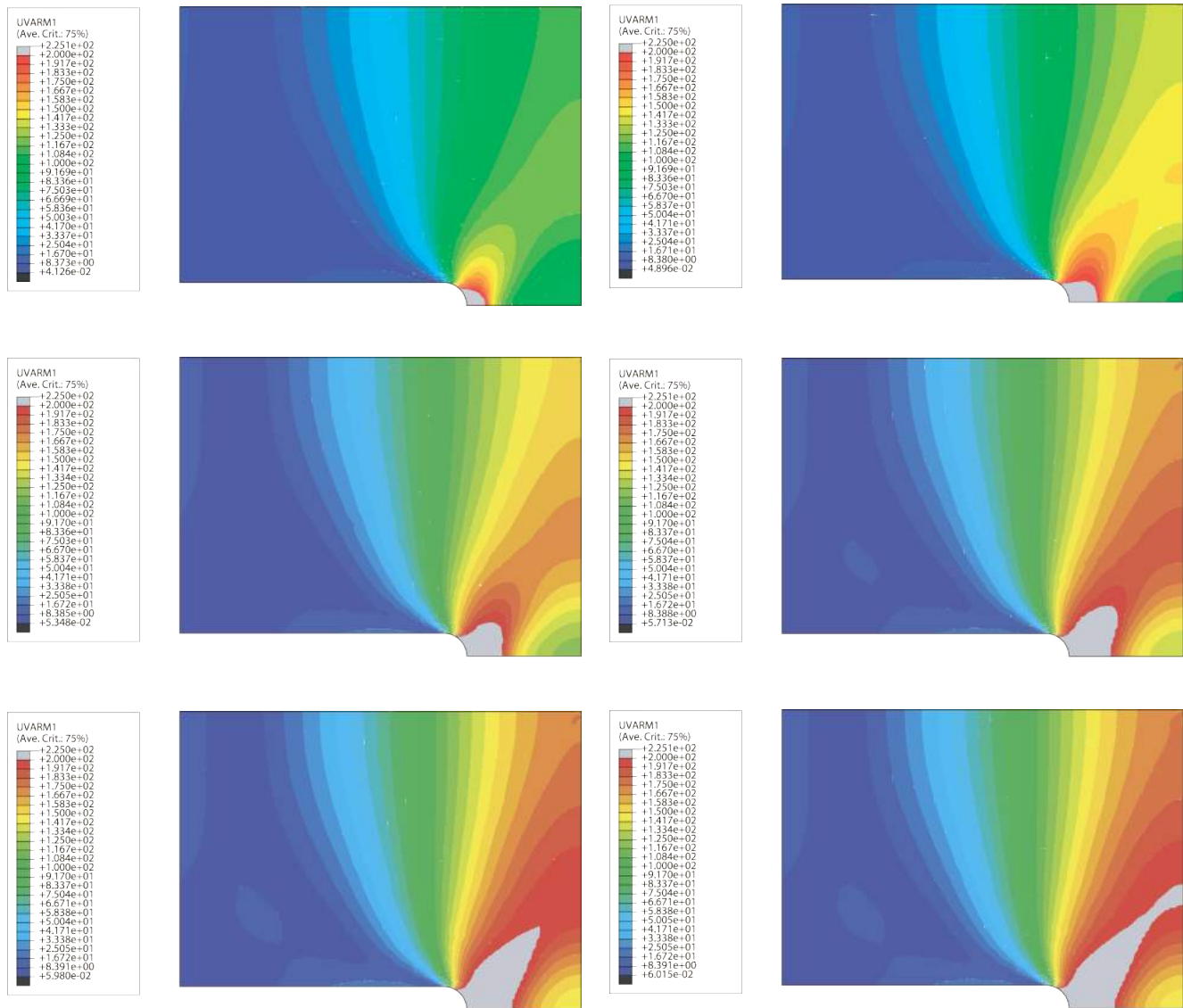


Рис. 2.37: Образование пластических областей.

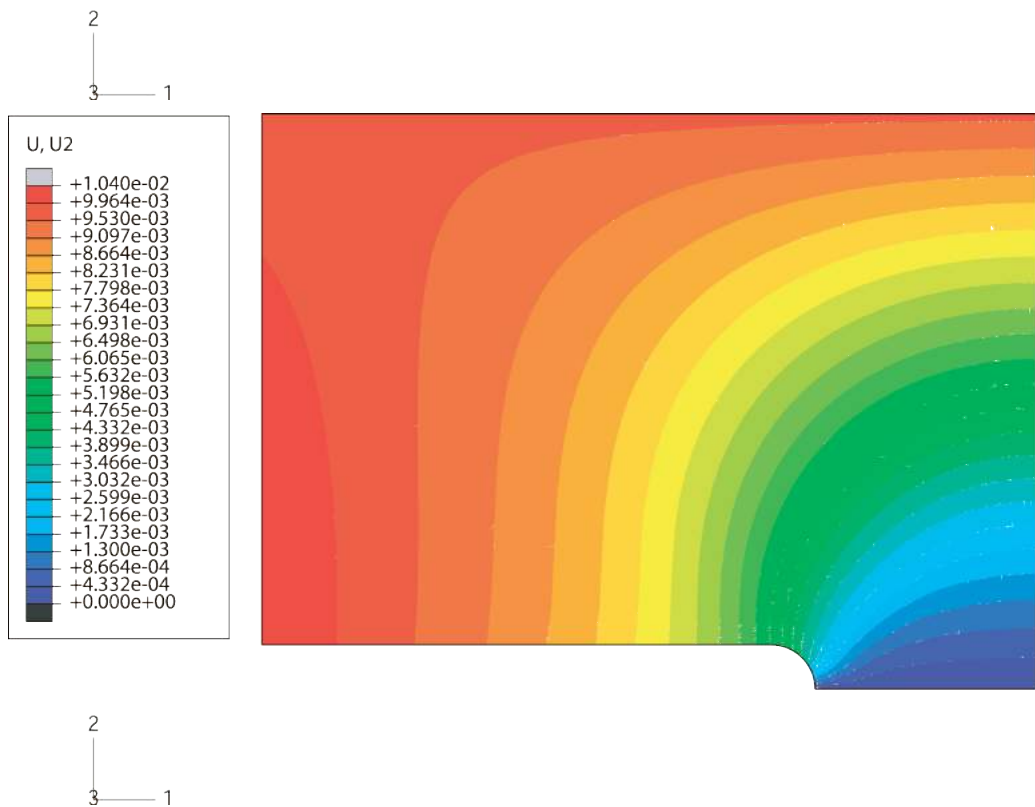
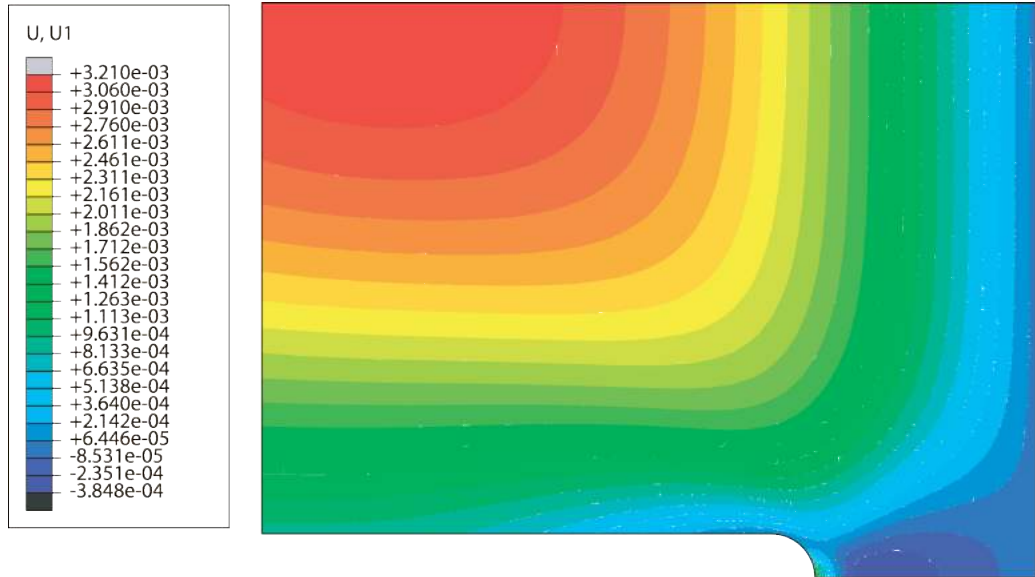


Рис. 2.38: Поле перемещений относительно осей  $x_1$  и  $x_2$  в момент предельного состояния.

перемещениями на верхней и нижней границах тела. Предельная нагрузка находится как суммарная сила реакции на узлах границы. Учитывая симметрию, моделируется только четверть геометрии сечения. В качестве параметров геометрии возьмем следующие: половина ширины полосы  $h = 2$  и радиус отверстия  $R = 1$ . На рис. 2.39 изображена конечноэлементная сетка.

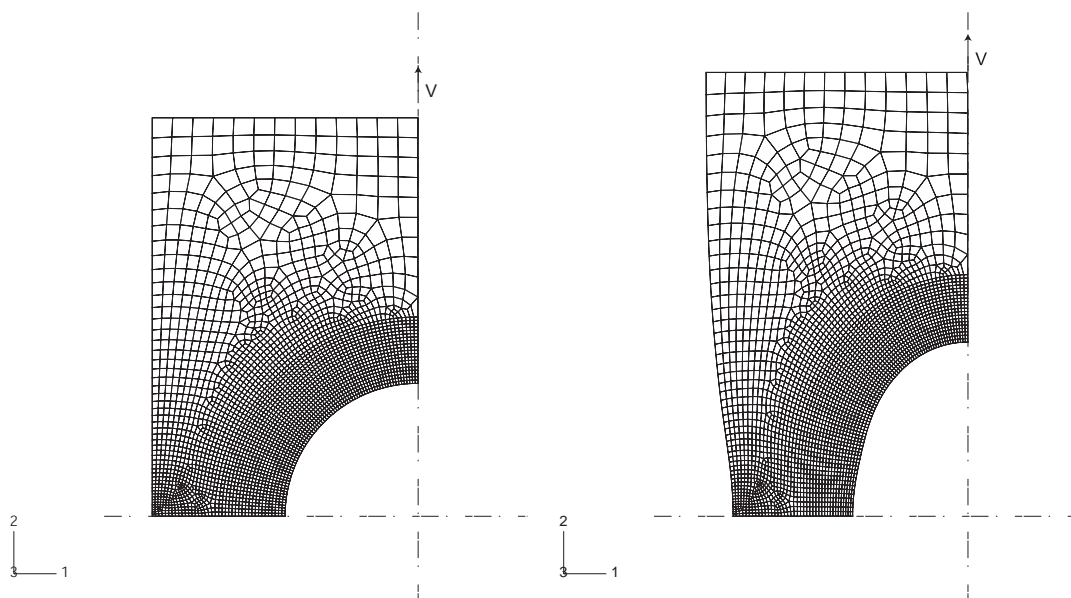


Рис. 2.39: Сетка используемая в расчетах.

Также как и в предыдущих случаях, на рисунках отображены результаты численного моделирования для  $C = 0.5$ , последняя картинка на каждом рисунке отвечает предельному состоянию. Рост пластических областей отображен на рис. 2.41 - 2.42. Далее, на рис. 2.44 изображено поле перемещений, соответствующее достижению предельного состояния полосы.

Из рис. 2.41 - 2.42 видно, что образование пластических областей и область пластичности в предельном состоянии, также как и в предыдущем примере, отличаются от областей, полученных на основе построения поля характеристик в аналитическом решении.

Исследуем теперь значения предельной нагрузки для разных значений

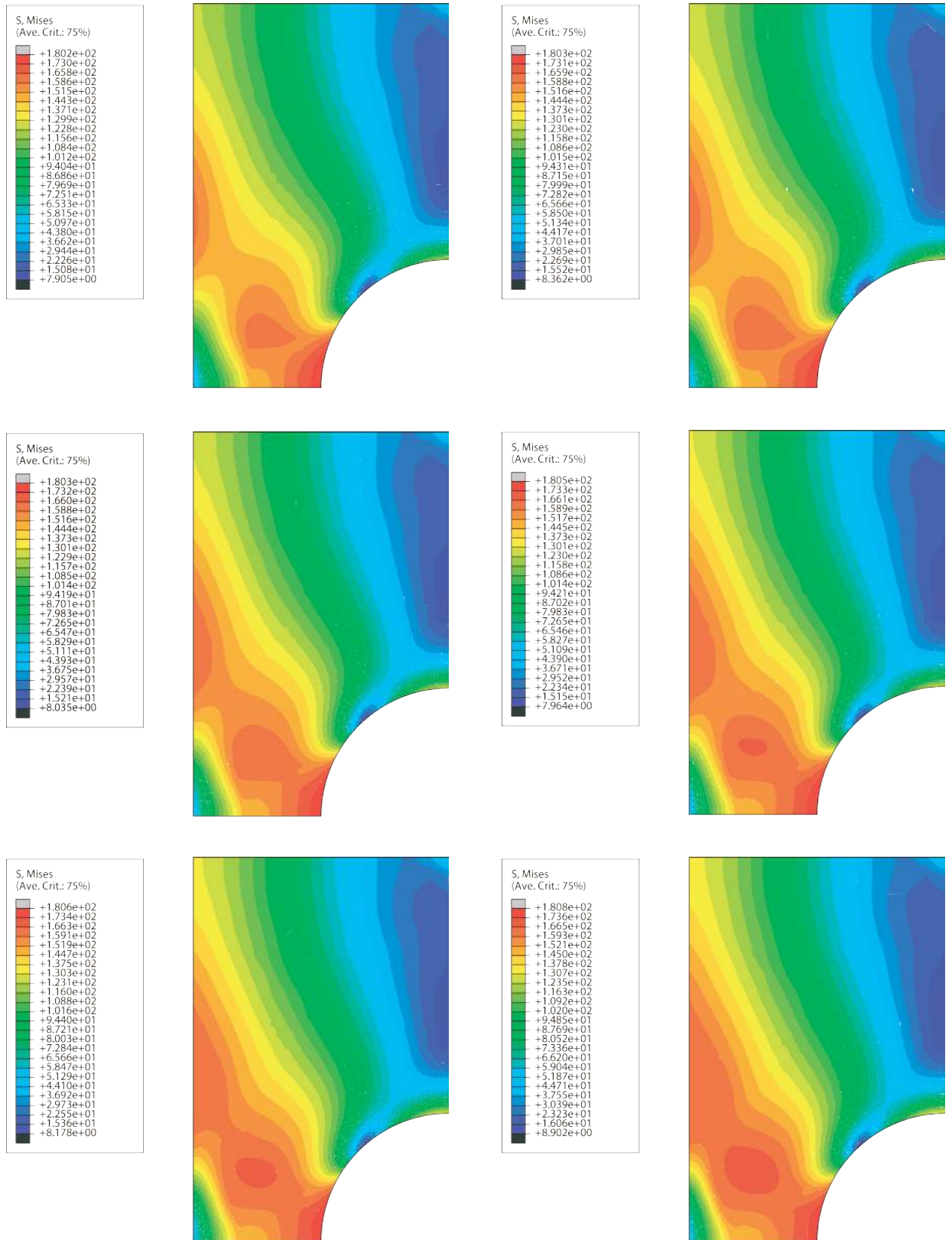


Рис. 2.40: Эквивалентные напряжения по Мизесу  $\sigma_0$ .

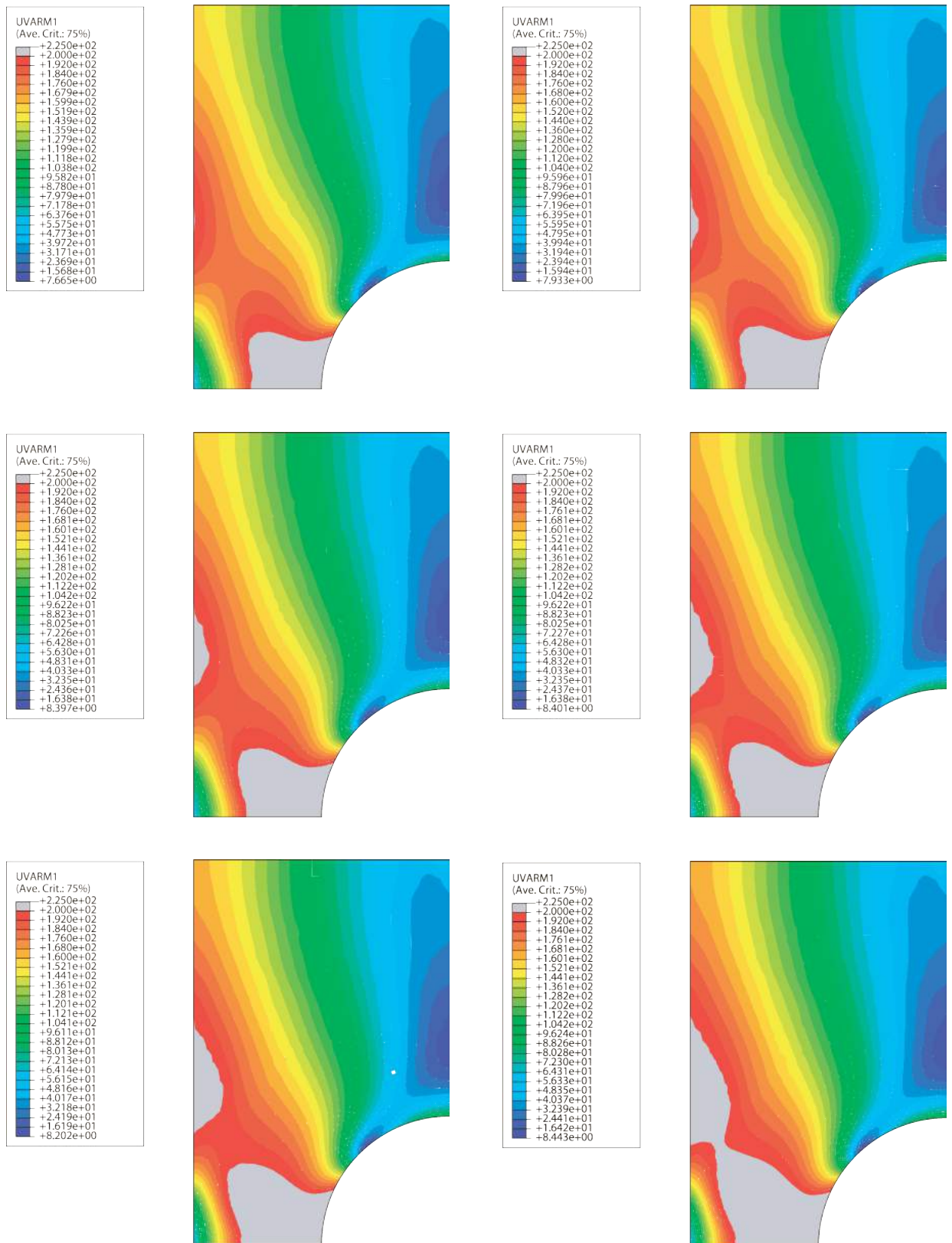


Рис. 2.41: Функция критерия пластичности  $F(\sigma_{ij}) = \sigma_0 + C\sigma$ .

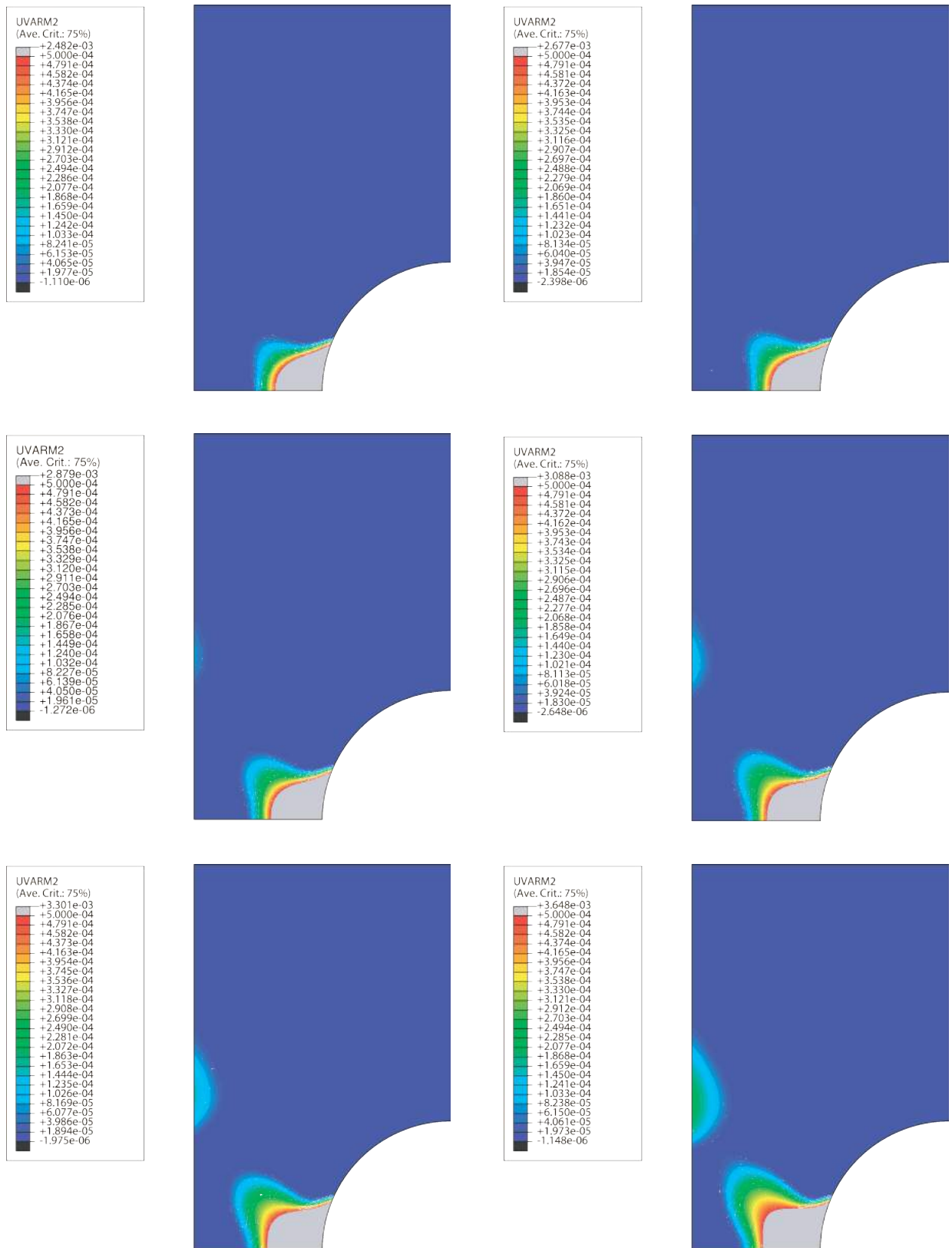


Рис. 2.42: Эквивалентные пластические деформации  $\varepsilon^{pl}$ .

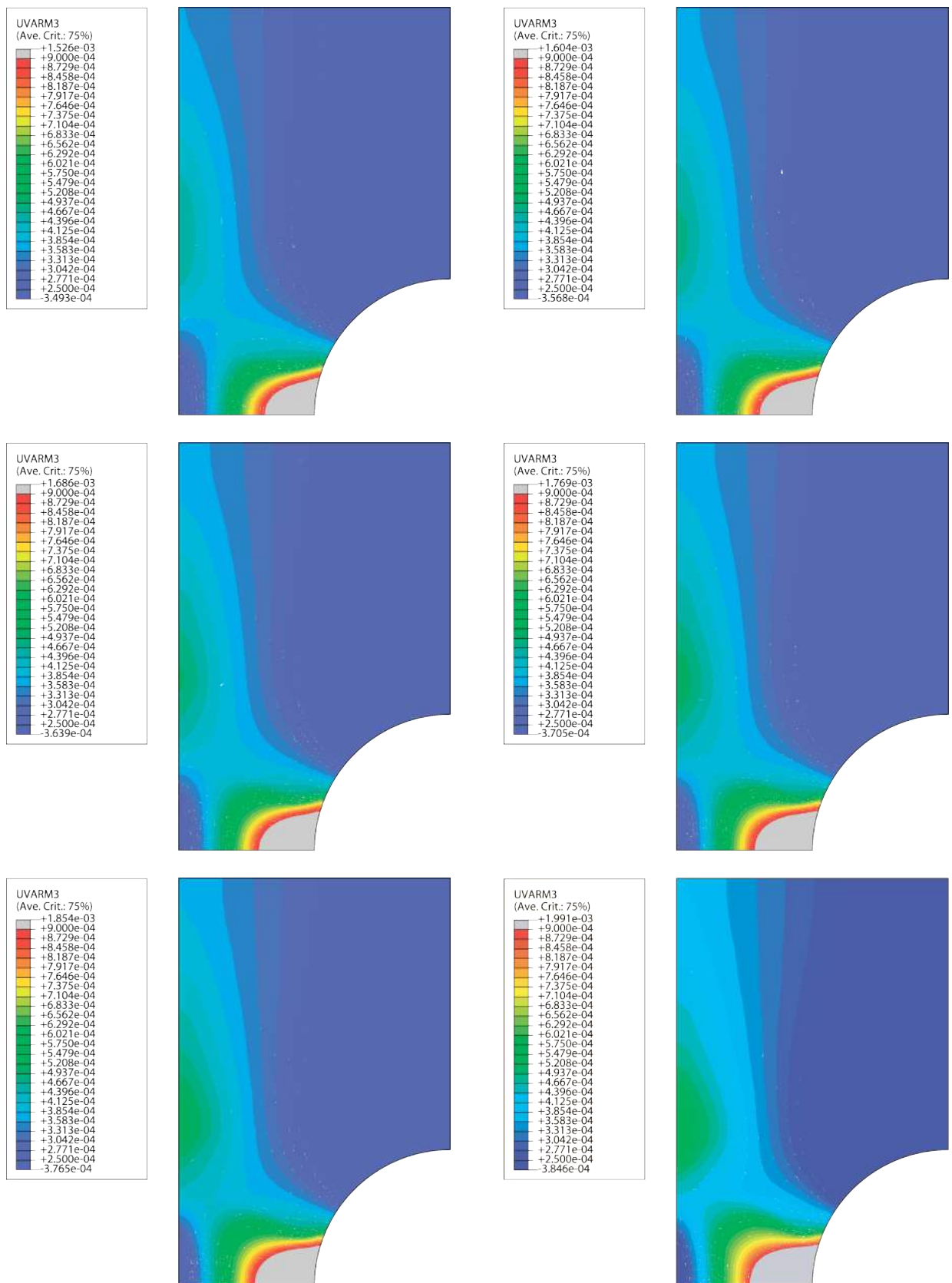


Рис. 2.43: Объемные деформации  $\epsilon_{ii}$ .

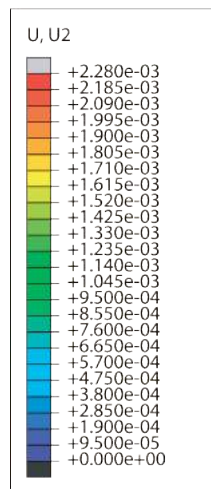
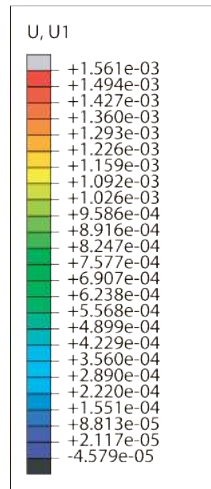


Рис. 2.44: Поле перемещений относительно осей  $x_1$  и  $x_2$  в момент предельного состояния.



параметра  $C$  и сравним со значениями, полученными в аналитическом решении. Для этого, используя ту же модель и граничные условия, проведены численные расчеты с различными значениями  $C$ . На рис. 2.45 приведена зависимость предельной нагрузки от  $C$  для выбранной геометрии в случае аналитического решения и точками обозначены результаты численного моделирования.

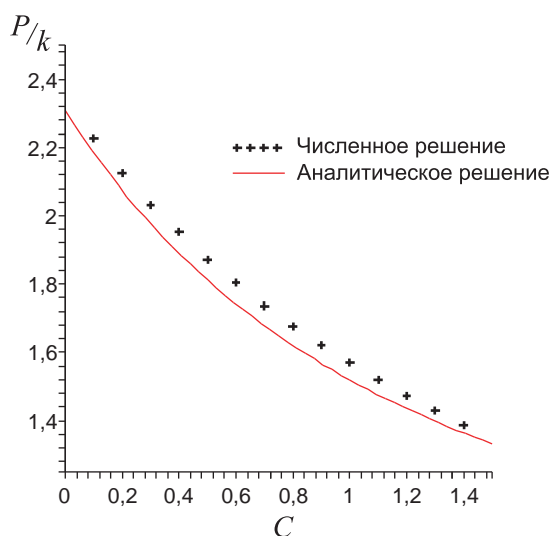


Рис. 2.45: Зависимость предельной нагрузки от  $C$ .

Из диаграммы (рис. 2.45) видно, что значения довольно близки во всем промежутке изменения значений константы  $C$ . Таким образом, несмотря на то что кинематика численного упруго-пластического решения существенно отличается от аналитического решения, значения предельной нагрузки практически совпадают, отклонение не превышает 4%, более точно 4% — это максимальное отклонение. Таким образом, в аналитическом решении были предложены кинематически возможное и статически допустимое решения, оценки предельной нагрузки при этом совпали, что говорило о том, что в данном случае удалось получить точное решение; при этом, численный расчет с более точной моделью поведения материала подтвердил данный факт во всем диапазоне рассматриваемых значений  $C$ .

## 2.3 Расширения предложенного подхода

### 2.3.1 Модель пластичности с учетом влияния высоких скоростей деформирования и вида нагружения

Существует класс задач где деформирование происходит при высоких скоростях, материал в таких условия дополнительно упрочняется, что необходимо учитывать на практике. Такие задачи, как правило, связаны с пробиванием брони, взрывами или, в общем случае, с высокоэнергетическими соударениями. Рассмотрим типовые диаграммы сжатия и растяжения на различных скоростях деформирования известного титанового сплава ВТ6 (Ti-6Al-4V) (рис. 2.46 и 2.47), детали постановки такого типа экспериментов можно найти в работах [123, 125], химический состав выбранного сплава представлен в таблице 2.1.

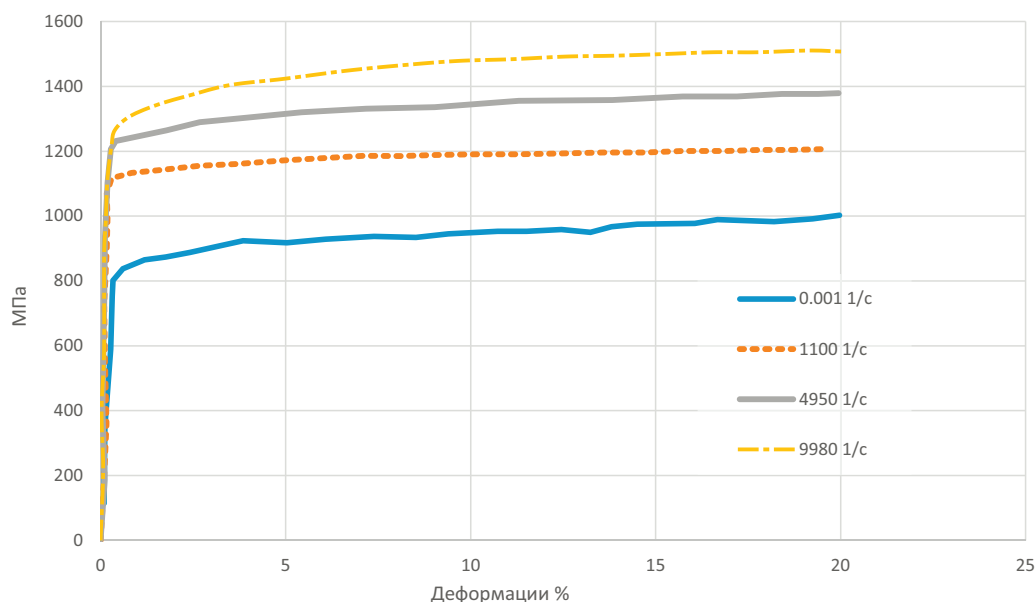


Рис. 2.46: Диаграммы сжатия при различных скоростях деформаций.

Такой материал довольно интенсивно используется в авиационном дви-

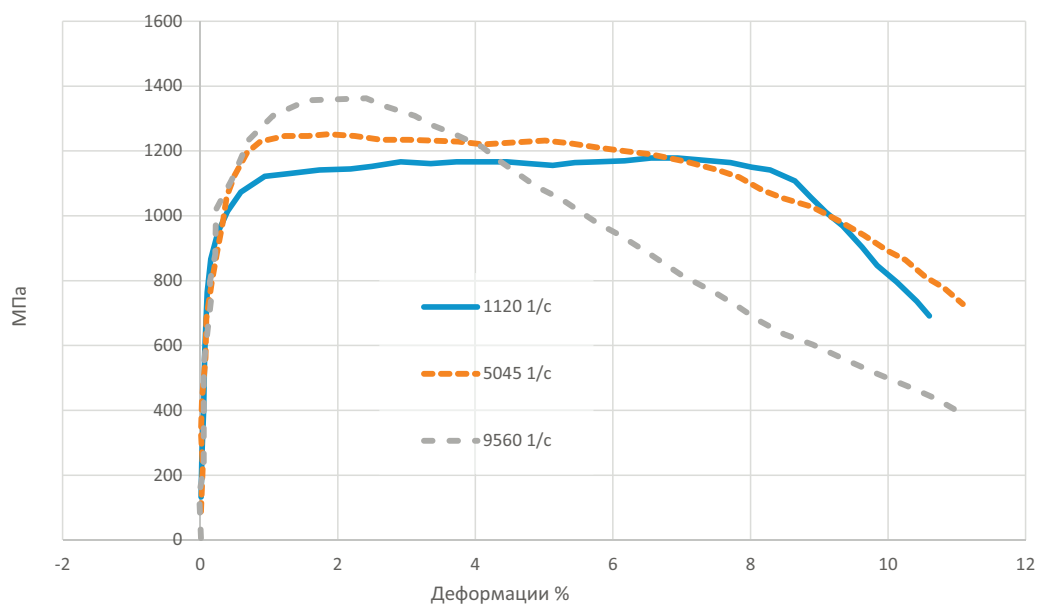


Рис. 2.47: Диаграммы растяжения при различных скоростях деформаций.

гательстроении. Одна из известных задач такого класса, это моделирование пробивания лопаткой двигателя обшивки корпуса. Как раз такие лопатки зачастую изготавливаются из рассматриваемого сплава. При соударении происходит не только сжатие такой лопатки но и существенный изгиб, на такое деформирование уходит довольно большая часть изначальной кинетической энергии. Правильная оценка энергии деформирования лопатки влечет за собой меньший консерватизм и, как следствие, снижает толщину защитного кожуха двигателя, что немаловажно для авиационной техники. Анализ диаграмм деформирования (рис. 2.46 и 2.47) показывает, что если изначальные пределы текучести при близких скоростях деформирования можно считать равными, то последующие кривые упрочнения существенно отличаются. При изгибе же часть материала работает на сжатие, а часть на растяжение, в связи с чем типовая схема моделирования основанная только на экспериментах на сжатие с последующим использованием модели Джонсона-Кука [211] не сможет дать точной оценки диссипации энергии.

Таблица 2.1: Химический состав сплава ВТ6 (Ti-6Al-4V) (%)

Fe	C	Si	V	N	Ti	Al	Zr	O	H	the rest
0.3	0.1	0.15	3.5–5.3	0.05	86.5–91.2	5.3–6.8	0.3	0.2	0.015	0.3

Таким образом проблема заключается в выборе модели пластичности, которая, с одной стороны, чувствительна к виду нагружения, а с другой учитывает скорость деформирования. При этом чувствительность к виду нагружения проявляется не мгновенно через пределы текучести, а появляется постепенно с ростом пластических деформаций. В работе [82] приводится анализ подобных моделей. Одна из наиболее известных предложена Гурсоном [177], при этом можно показать, что она очень близка к модели Грина и в таком случае сводится к критерию пластичности для функции (2.1), в случае зависимости  $f(\xi) = \sqrt{\sigma_0^2 + \alpha\sigma^2}$ . Рассмотрим оба эти критерия более подробно. Критерий пластичности Гурсона имеет следующий вид:

$$F = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_T}\right)^2 + 2g \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma}{\sigma_T}\right) - (1 + g^2) = 0.$$

где функция  $g$  зависит от пористости среды. Значение  $g = 0$  отвечает состоянию отсутствия пор или полностью плотному материалу, значение  $g = 1$  означает, что материал полностью исчерпал возможность нести нагрузку. Параметр  $\sigma_T$  — напряжение течения в полностью плотном материале и является функцией эквивалентной пластической деформации  $\sigma_T(\varepsilon^{pl})$ . Твергаард [318] внес в условие Гурсона три коэффициента —  $q_1, q_2$  и  $q_3$ , модифицированное условие выглядит следующим образом

$$F = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_T}\right)^2 + 2q_1g \cosh\left(q_2\frac{3}{2}\frac{\sigma}{\sigma_T}\right) - (1 + q_3g^2) = 0. \quad (2.173)$$

Типичный диапазон изменения параметров, внесенных Твергаардом,  $1 \leq$

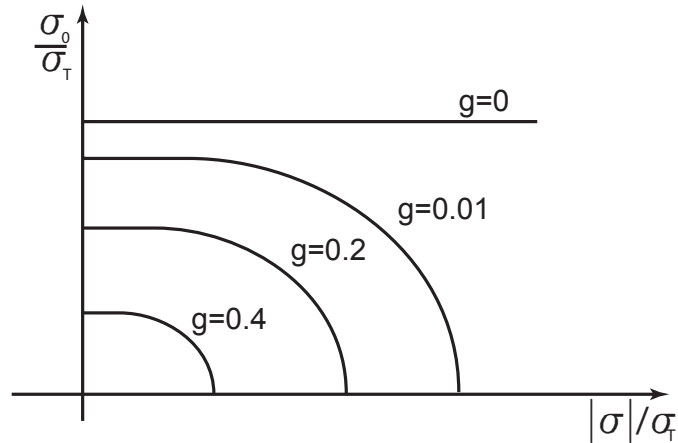


Рис. 2.48: Вид критерия модели Гурсона при различных  $f$ .

$q_1 \leq 1.5$ ,  $q_2 = 1.0$  и последний коэффициент обычно выбирается таким образом:  $q_3 = q_1^2$ . Изначальный критерий Гурсона восстанавливается, если положить все коэффициенты равными единице. В качестве соотношений между деформациями и напряжениями используется ассоциированный закон течения

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Изменение поверхности течения  $F$  в силу упрочнения происходит посредством входящего в  $F$  параметра  $\sigma_T(\epsilon^{pl})$ . Скорость изменения эквивалентных деформаций определяется выражением эквивалентной работы пластических деформаций

$$(1 - g)\sigma_T \dot{\epsilon}^{pl} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{pl}.$$

Примерный вид поверхности критерия показан на рис. 2.48 при различных значениях  $g$ . В подходе Гурсона изменение функции  $g$  происходит посредством двух составляющих

$$\dot{g} = \dot{g}_{gr} + \dot{g}_{nucl},$$

где  $g_{gr}$  это вклад в увеличение уже существующих пор и зависит от дилатансии

$$\dot{g}_{gr} = (1 - g)\dot{\epsilon}_{ii}^{pl},$$

вклад  $g_{nucl}$  подразумевает образование новых пор и определяется величиной и скоростью эквивалентной пластической деформации

$$\dot{g}_{nucl} = A\dot{\epsilon}^{pl},$$

где

$$A = \frac{g_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon^{pl} - \epsilon_N}{s_N}\right)^2\right).$$

Таким образом, предполагается, что образование новых пор определяется

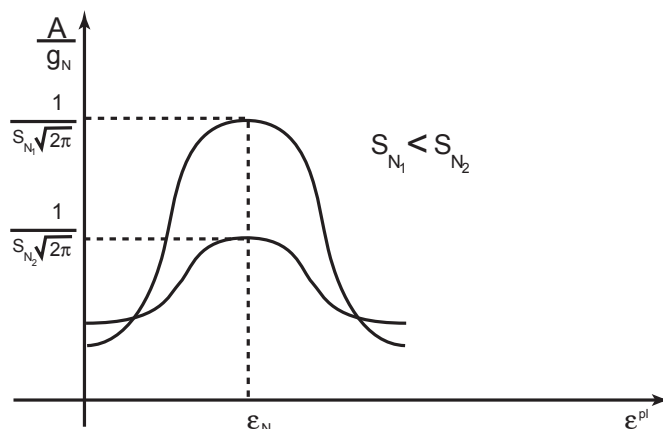


Рис. 2.49: Вид зависимостей  $g_{nucl}$  для разных материалов.

нормальным законом распределения с матожиданием вокруг определенного значения эквивалентных пластических деформаций  $\epsilon_N$  и отклонением  $s_N$ .

Критерий Гурсона выглядит довольно сложным, в его выражение входит гиперболический косинус, данная функция четная и в разложении этой функции в ряд Тейлора будут участвовать только четные степени аргумента. Достаточно естественно упростить данное выражение и пренебречь

членами разложения со степенями выше и равными четвертой. Рассмотрим, например, просто одноосное растяжение, тогда отношение  $\sigma/\sigma_T$  будет примерно равным  $1/3$ , учитывая, что коэффициенты  $q_1$  и  $q_2$  обычно порядка единицы, то аргумент гиперболического косинуса в четвертой степени будет равен примерно  $(1/2)^4$ , после чего, если учесть еще множитель  $1/4!$  и функцию пористости  $g$  равную, например, в начале нагружения  $0.04$ , то очевидно, что влияние степеней старше двух в разложении гиперболического косинуса незначительно. В работе [93], в которой рассматривается численное интегрирование уравнений пластичности и рассматривается в качестве примера соотношения Гурсона, функция  $\cosh(x)$  просто заменялась на  $1 + x^2/2$ . При такой замене соотношения (2.173) переписутся в следующей форме:

$$\sqrt{\sigma_0^2 + gq_1(q_2 3/2)^2 \sigma^2} = (1 + q_3 g^2 - 2q_1 g) \sigma_T. \quad (2.174)$$

Теперь сравним полученное выражение с критерием, предложенным Грином:

$$\sqrt{\sigma_0^2 + \alpha \sigma^2} = \beta \sigma_T.$$

Легко заметить, что соотношения Грина и Гурсона имеют одинаковую природу. Можно рассматривать полученный результат как пример представления коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  для соотношений Грина.

Описанные модели обладают необходимой чувствительностью к виду нагружения, которая проявляется в ходе роста пластических деформаций, но для описания поставленной задачи требуется введение влияния скорости деформирования. В качестве подхода, удовлетворяющего нашим требованиям можно рассмотреть скоростное упрочнение влияющего на пре-

дел текучести в виде множителя  $R$ , который находится из соотношения  $\dot{\varepsilon}^{pl} = D(R - 1)^n$  [139], где  $D$  и  $n$  константы, определяемые из экспериментов. Таким образом, окончательно можно записать критерий текучести в следующем виде:

$$\sigma_0 \sqrt{1 + \alpha \xi^2} = \beta \sigma_T R. \quad (2.175)$$

На следующих рисунках показаны кривые которые использовались для калибровки модели, диаграммы приведены к виду номинальных напряжений без учета данных о финальном сужении образцов, это связано со сложной схемой оправки образца [123].

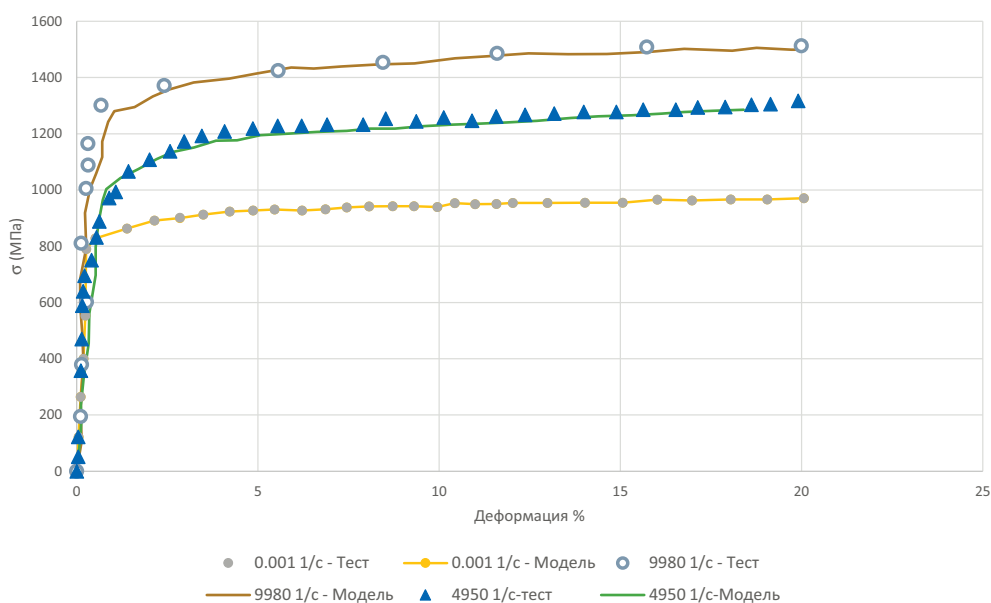


Рис. 2.50: Диаграммы сжатия при различных скоростях деформаций, полученные из экспериментов и из моделирования.

Итоговый набор параметров для модели пластичности (2.175) приведен в таблице 2.2.

Таблица 2.2: Параметры для модели пластичности сплава ВТ6(Ti-6Al-4V)

$q_1$	$q_2$	$q_3$	$\varepsilon_N$	$s_N$	$g_N$	$g_c$	$g_F$	$D, 1/c$	$n$
1.5	1	2.25	0.04	0.0211	0.0376	0.04	0.05	77850	3.575



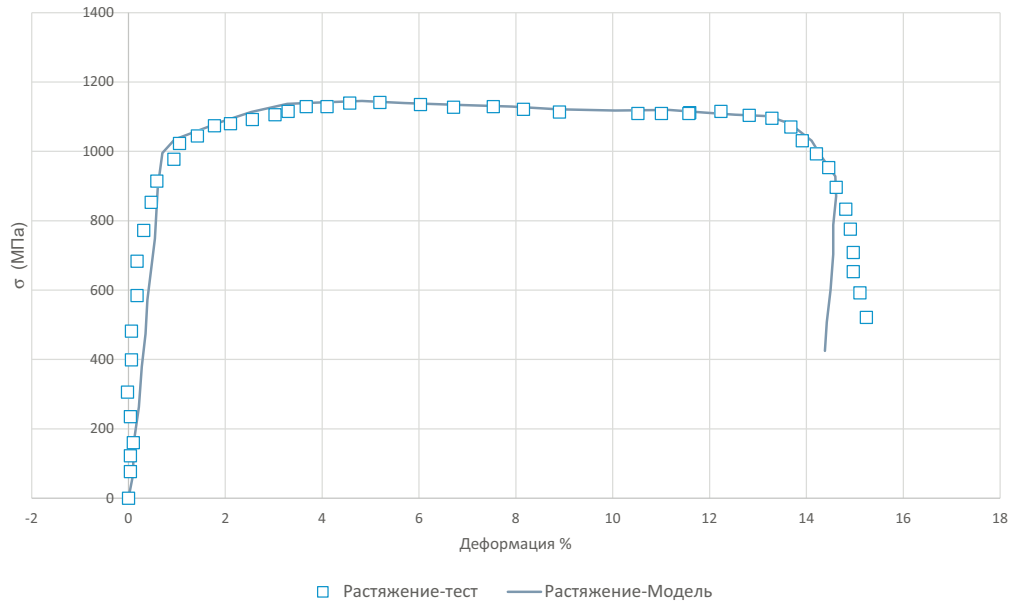


Рис. 2.51: Диаграмма растяжения при 1100 1/с., полученная из экспериментов и из моделирования.

Рассмотрим теперь более сложные задачи деформирования при больших скоростях для оценки предложенной модели. Стоит отметить, что предложенный набор констант соответствует формату модели поропластичного материала встроенной в систему конечно-элементного моделирования Abaqus, что позволяет производить численное моделирование без написания дополнительных пользовательских подпрограмм. В системе Abaqus [88], в случае моделирования разрушения, используется особенное выражение для функции  $g$ , в которое включаются предельные значения роста пор характеризующих повреждение, которые выражаются через  $g_c$  и  $g_F$ :

$$F = \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_T} \right)^2 + 2q_1 g^* \cosh \left( q_2 \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\sigma_T} \right) - (1 + q_3 g^{*2}) = 0.$$

где  $g^*(g)$  выражается следующим образом:

$$g^* = \begin{cases} g & g \leq g_c \\ g_c + \frac{G_F - g_c}{g_F - g_c}(g - g_c) & g_c < g < g_F \\ G_F & g \geq g_F, \end{cases}$$

где

$$G_F = \frac{q_1 + \sqrt{q_1^2 - q_3}}{q_3}.$$

В качестве первого примера рассмотрим задачу о растяжении цилиндрического образца с угловыми V-образным вырезом (рис. 2.52).

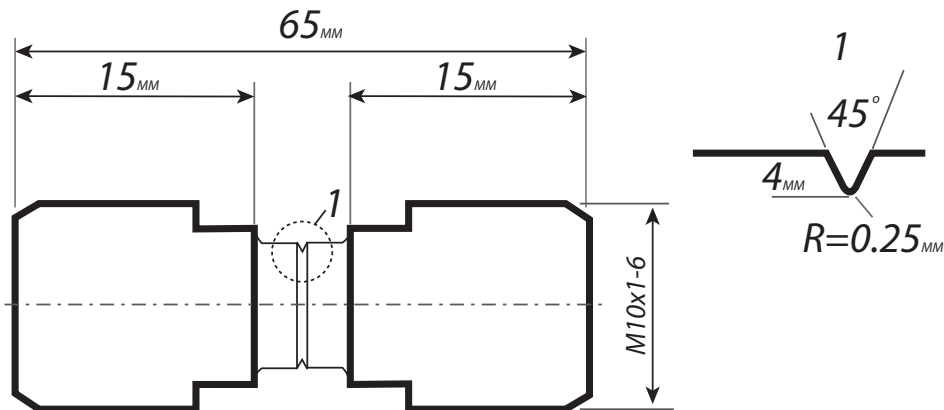


Рис. 2.52: Цилиндрический образец с V-образным вырезом.

На рис. 2.53 показаны фотографии образца после испытаний. На рис. 2.54 отображены результаты моделирования такого образца с использованием модели пластичности (2.175) и входными данными из таблицы 2.2. В модели использовались осесимметричные элементы, в качестве нагружения прикладывалось давление, определенное из эксперимента на ударных стержнях [123].

В качестве сравнения модели и результатов эксперимента можно проанализировать диаграммы деформаций, полученные из обратного импульса



Рис. 2.53: Цилиндрический образец с V-образными вырезами.

растяжения после прохождения через образец (2.55).

Видно (рис. 2.55), что совпадение по амплитудам практически точное, при этом в эксперименте импульс растянут во времени. Несоответствие по времени связано с отсутствием в модели элементов крепления образца, таких как резьба, которые демпфируют и сглаживают удар. Анализ динамических характеристик оснастки для крепления образцов и введения их в модель довольно сложен и выходит за рамки рассматриваемой темы, тем не менее совпадение по максимальным деформациям говорит в пользу выбранной модели.

Рассмотрим еще один эксперимент разрушения образца с концентратором из сплава ВТ6(Ti-6Al-4V), как и ранее, при высоких скоростях. Схема нагружения и геометрия образца схематически представлена на рис. 2.56. Такая схема нагружения имеет широко используемое название — тест Шарпи. В нашем случае титановый образец с надрезом устанавливается на два неподвижных стержня, после чего, третий стержень с обратной

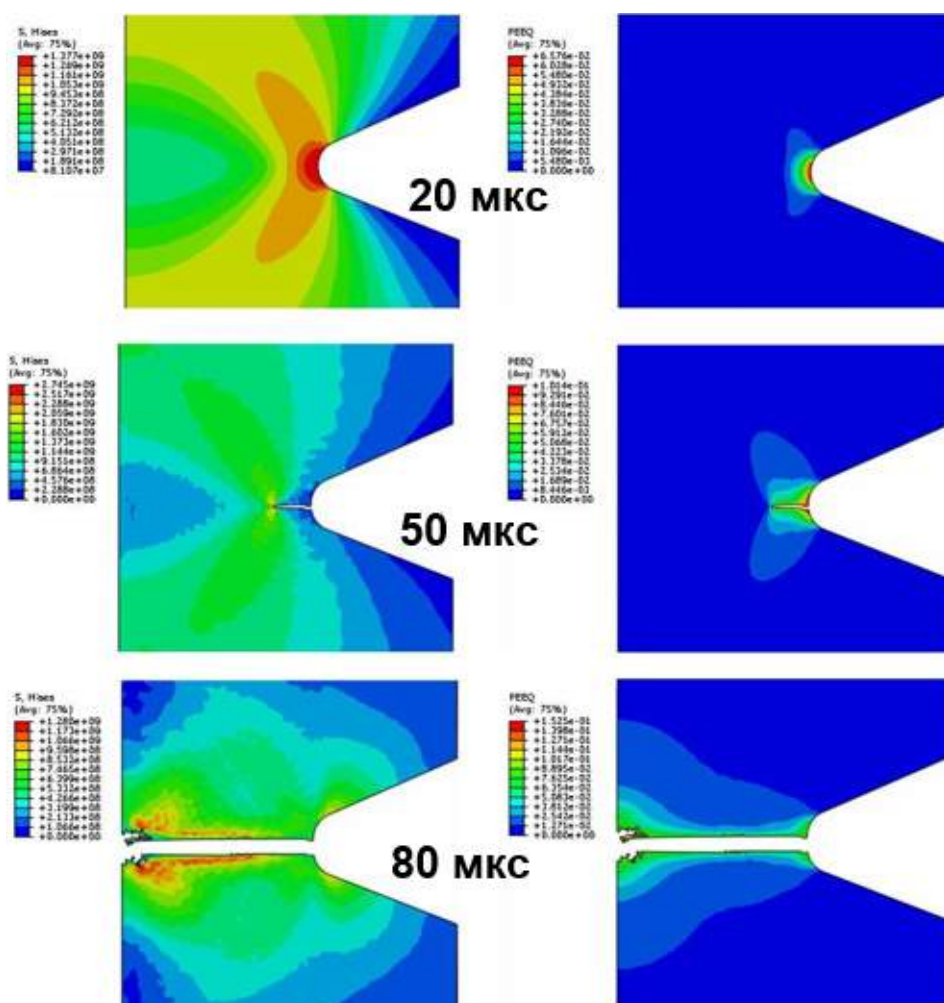


Рис. 2.54: Результаты моделирования растяжения цилиндрического образца с V-образными вырезами, слева, эквивалентные напряжения по Мизесу (Па), справа, эквивалентные пластические деформации

стороны наносит удар. Фотографии образца после такого эксперимента, но без полного разрушения представлены на рис. 2.57.

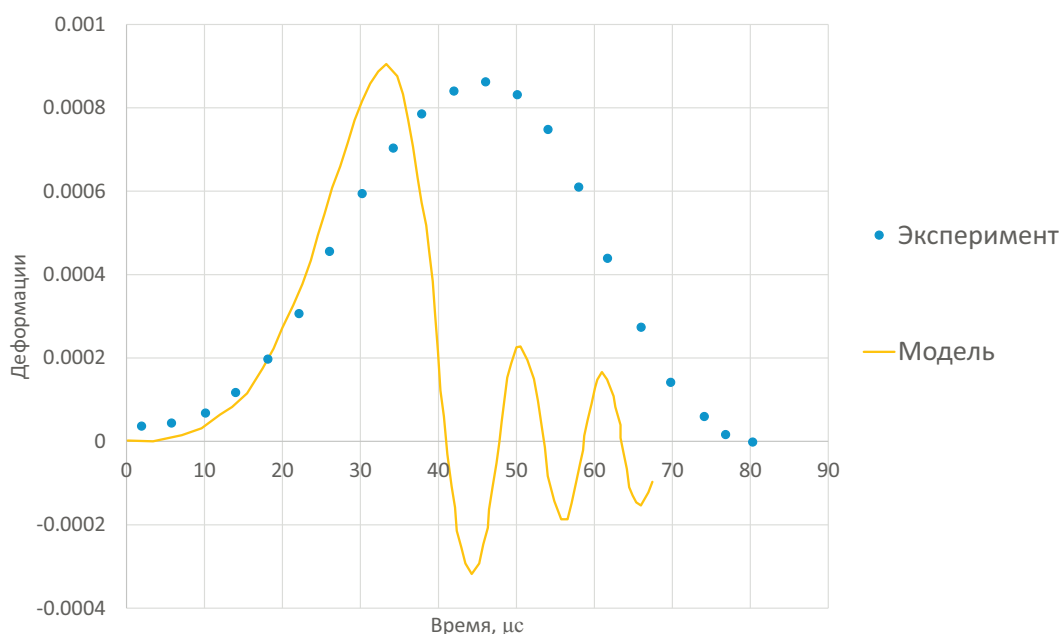


Рис. 2.55: Обратный импульс растяжения для цилиндрического образца с V-образными вырезами.

Задача моделировалась в условиях плоской деформации с соответствующими элементами. На следующем рис. 2.59 показаны результаты моделирования и стадии разрушения образца.

В качестве сравнения результатов моделирования и экспериментов можно проанализировать импульсы, прошедшие через образец, прямой и отраженный (рис. 2.58). Можно сказать, что ситуация схожа с предыдущим экспериментом, максимальные значения или амплитуды деформаций совпадают, при этом данные, полученные в тесте, растянуты во времени. Скорее всего, причиной является, как и в прошлом анализе, отсутствие в модели демпфирующих элементов. В данном эксперименте ударные наконечники имеют плоскую ударную поверхность, но при этом, скрепляются с ударными цилиндрическими стержнями через резьбу, которая не моделировалась и ее демпфирующие характеристики никак не учитывались.

В качестве общих выводов для предложенной модели можно сказать

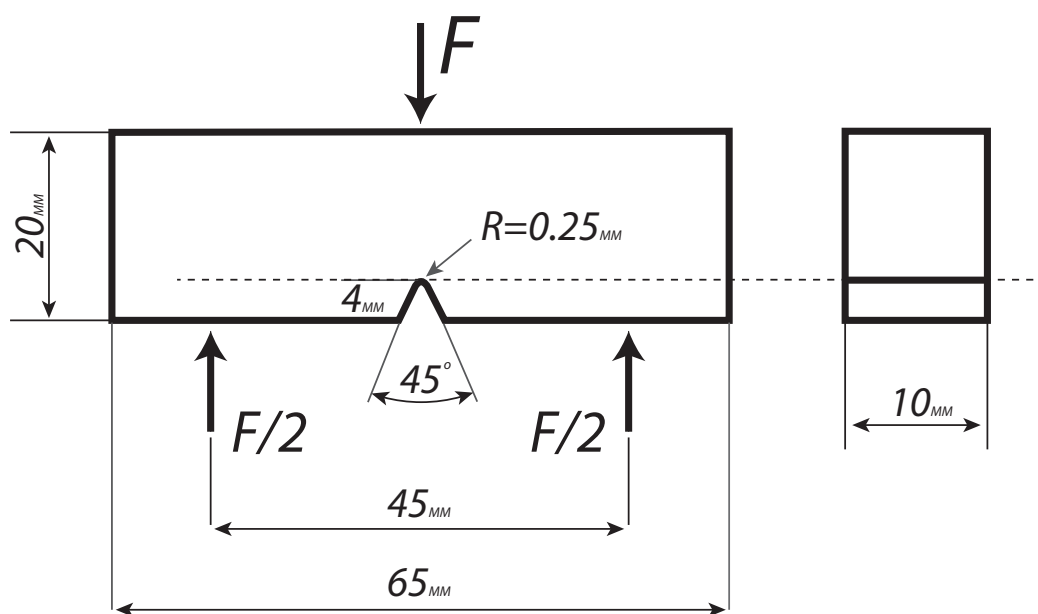


Рис. 2.56: Образец с V-образным вырезом для теста по схеме Шарпи.

что результаты моделирования повторяют экспериментальные диаграммы как количественно, так и качественно. В обоих случаях экспериментально полученные импульсы сильнее растянуты во времени, чем моделируемые, что, по видимому, связано с простотой построенных моделей, которые не учитывали сложные оснастки установки образцов, например, резьбовые соединения. С учетом того, что модель приближает эксперименты на одноосное растяжение и сжатие в большом диапазоне скоростей можно утверждать, что в целом, расширение модели пластичности в форме (2.1) до возможности учета скоростей деформаций, через модификацию параметра  $k$ , является возможным и более чем перспективным.

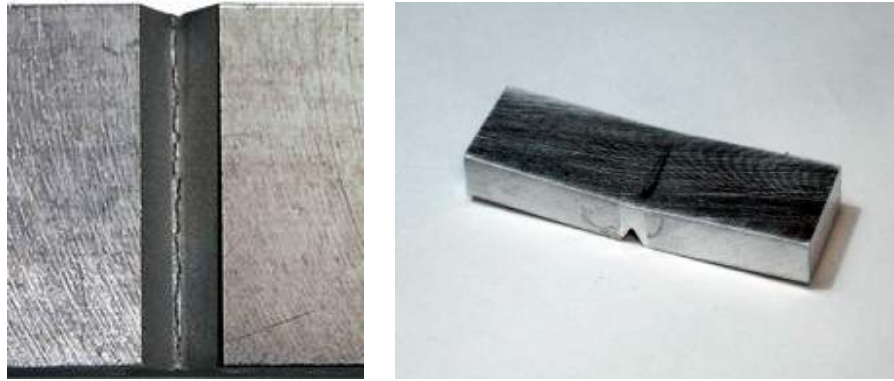


Рис. 2.57: Образец после испытаний на высокоскоростной трех-точечный изгиб.

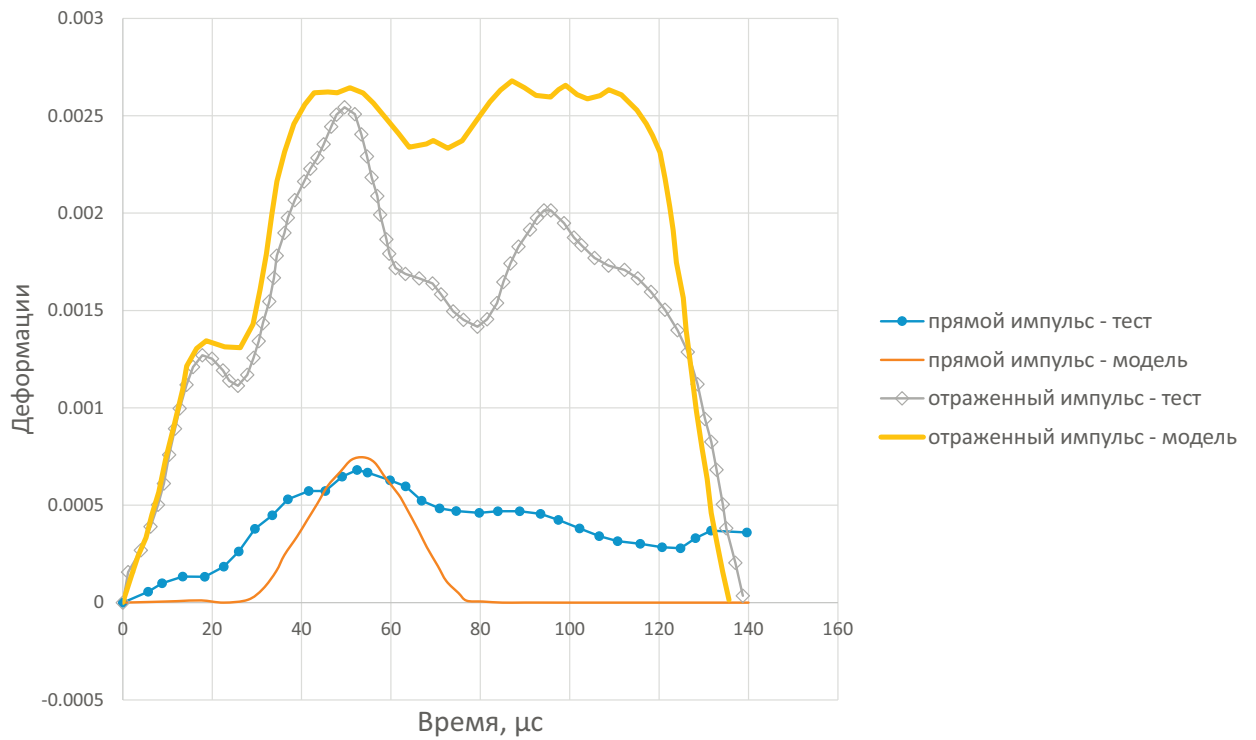


Рис. 2.58: Импульсы деформаций полученные в эксперименте и путем моделирования.

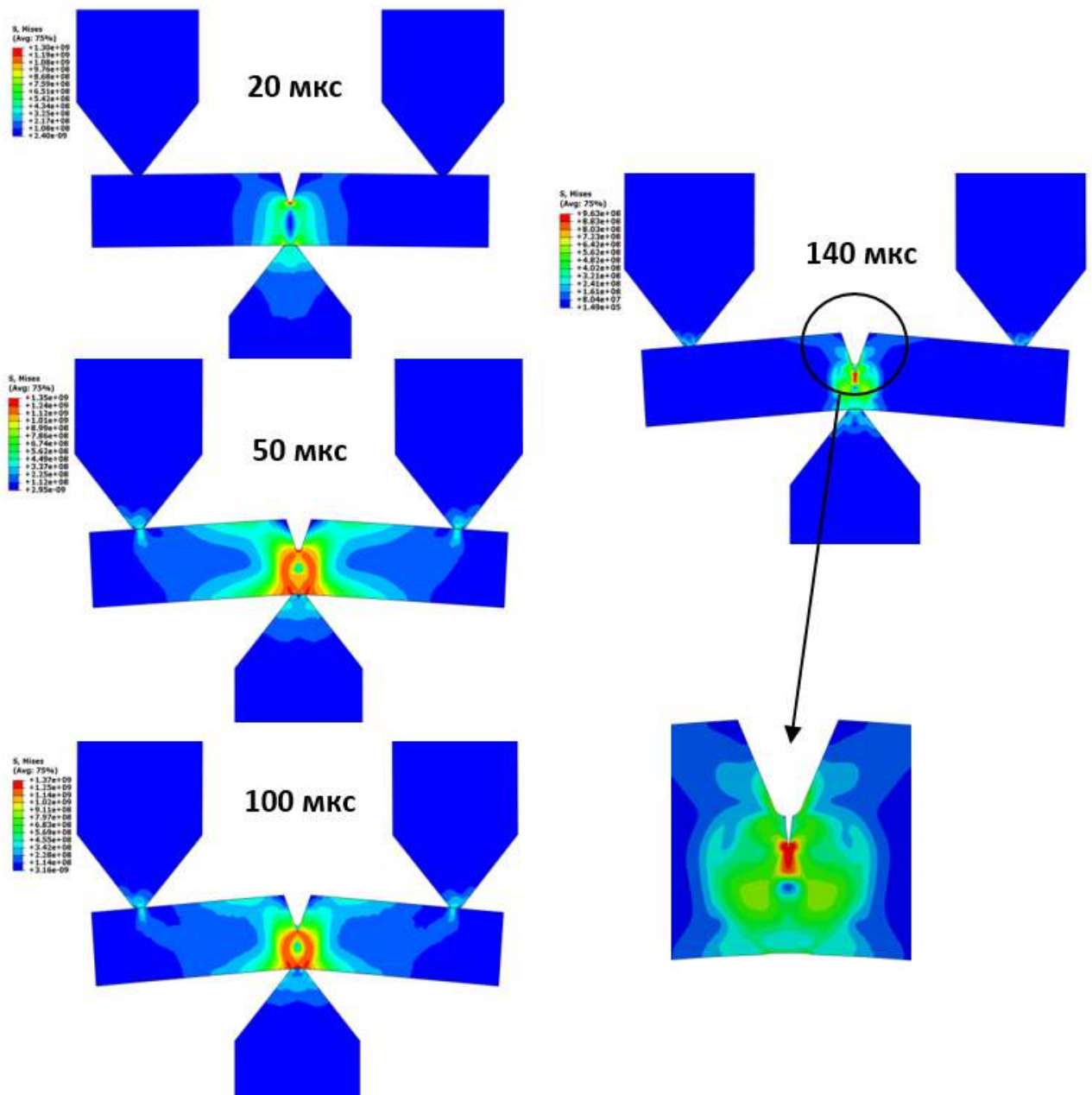


Рис. 2.59: Результат моделирования теста по схеме Шарпи. Заливка — эквивалентные напряжения по Мизесу (Па).



### 2.3.2 Модель пластичности с учетом анизотропии свойств материалов и вида нагружения

Другая проблема, с которой можно столкнуться на практике, это одновременная анизотропия пластических свойств совместно с чувствительностью к виду НДС. Большое количество примеров таких сплавов можно найти в книге [263]. Для пластических пределов такого материала существует установившаяся терминология в технической литературе L, LT и ST, где введенные индексы означают направление испытанных образцов вдоль проката, поперек проката и в плоскости плиты, а также, перпендикулярно плоскости проката, соответственно (рис. 2.60).

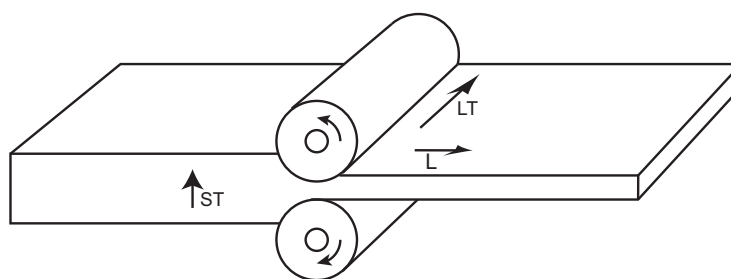


Рис. 2.60: Направления проката L, LT и ST.

Характерным примером такого класса материалов являются алюминиевые сплавы, предназначенные для последующего проката или экструзии, например, Д16, Д16Т, Д18 и т.д. Пределы текучести у прокатных плит и листов из таких сплавов разные в зависимости от направления выреза образцов [146,212] (рис. 2.62). Более того, пределы текучести еще чувствительны к виду нагружения, например, пределы текучести и сами кривые упрочнения, как правило, различны для растяжения и сжатия (рис. 2.61). Для выбранных сплавов, в случае проката, такая чувствительность наиболее заметно проявляется в направлении, нормальном к плоскости проката (ST).

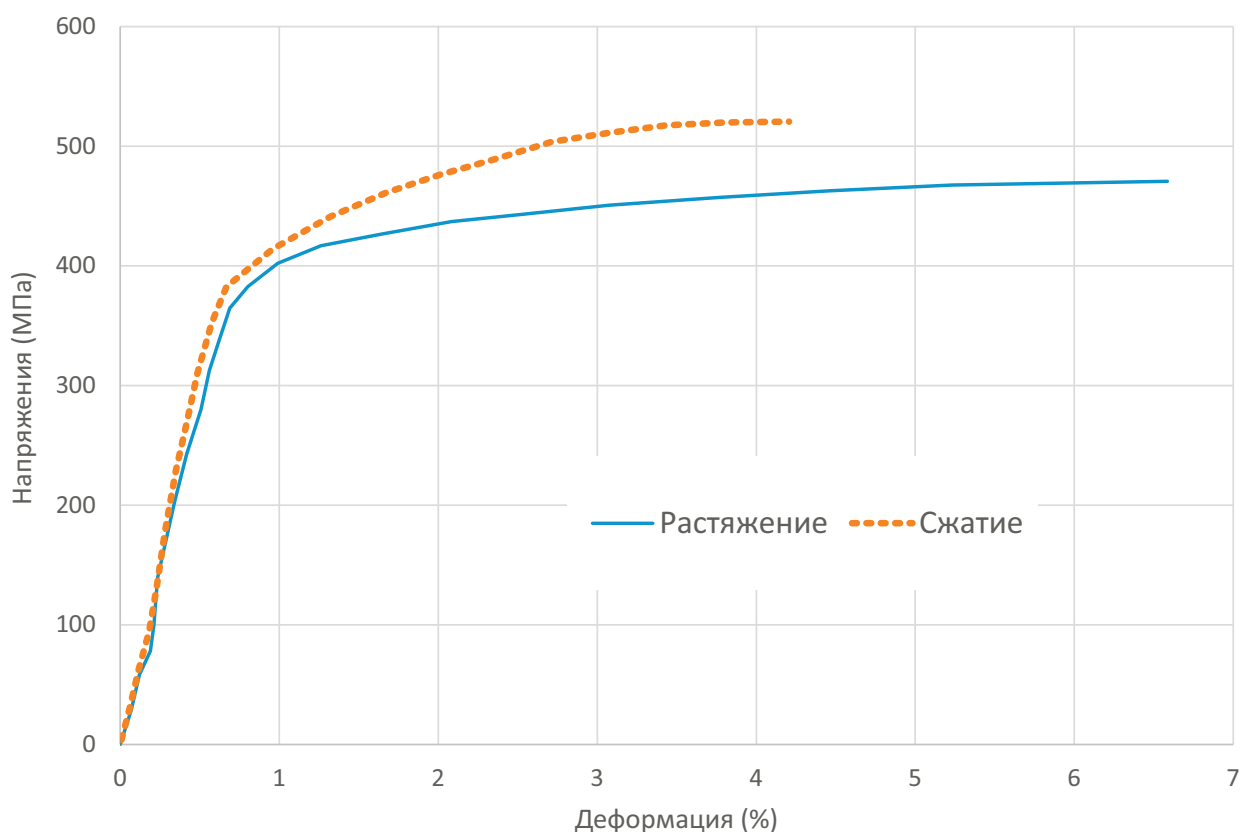


Рис. 2.61: Диаграммы растяжения и сжатия для образца из экструзионного прутка (сплав Д16Т).

В работе [212] объясняется физическая природа подобного явления на уровне структуры материала. Изменение прочностных характеристик в смысле анизотропии связываются с размером зерен и их ориентацией после обработки материала давлением. Исследование [146] демонстрирует различие в прочностных свойствах по толщине прокатных плит, таким образом при построении экспериментальных программ следует проявлять внимание к выбору мест для выреза образцов.

Таким образом, для работы с такими материалами необходимо учитывать анизотропию пластических свойств и чувствительность к виду НДС. В работах [232, 242] рассматривается упругий потенциал с требуемыми характеристиками. Его использование, но в виде пластического потенциа-

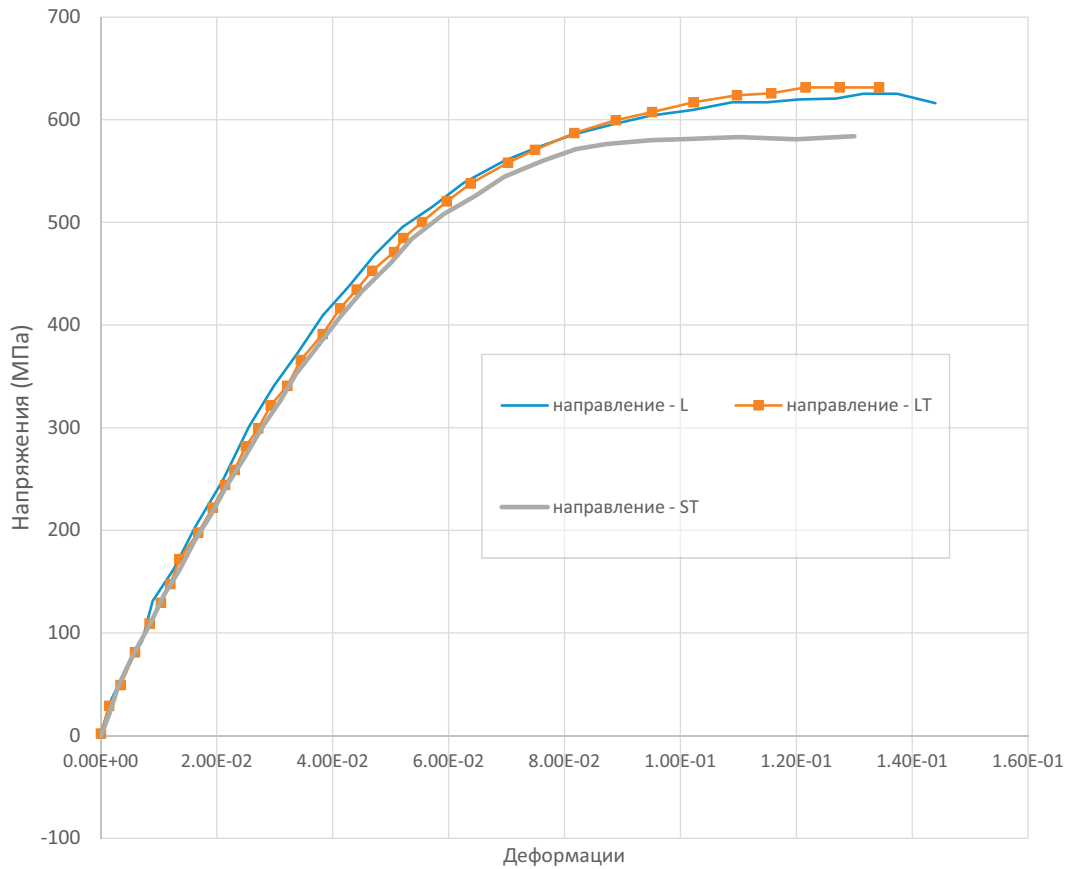


Рис. 2.62: Диаграммы растяжения в различных направлениях для плиты (сплав В95).

ла в случае ассоциированного закона пластичности, является логическим расширением критерия (2.1), но позволяет учесть анизотропию свойств материала. В общем случае, критерий пластичности для полностью анизотропного материала можно сформулировать в следующем виде:

$$A_{ijkl}(\xi)\sigma_{ij}\sigma_{kl} = k \quad (2.176)$$

Коэффициенты  $A_{ijkl}(\xi)$  являются компонентами тензора четвертого ранга и должны сохранять условие симметрии [232]:  $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{jilk} = A_{klij} = A_{lkij} = A_{klji}$ . Основная проблема работы с таким критерием пластичности — это большое количество неизвестных зависимостей  $A_{ijkl}(\xi)$ ,

которых в общем случае насчитывается 13. Для определения всех таких зависимостей понадобится практически невыполнимая экспериментальная программа. Чтобы придать предложенному набору коэффициентов более понятный физический смысл, можно обратиться к работе Хилла [178] и упростить общий вид критерия:

$$\begin{aligned}
 F(\xi)(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\xi)(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + H(\xi)(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \\
 + 2(L(\xi)\sigma_{23}^2 + M(\xi)\sigma_{13}^2 + N(\xi)\sigma_{12}^2) = k^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.177}$$

При этом зависимости  $F(\xi), G(\xi), H(\xi), L(\xi), M(\xi), N(\xi)$  можно выразить через коэффициенты  $R_{ij}$ , которые в свою очередь имеют простой физический смысл:

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{22}^2(\xi)} + \frac{1}{R_{33}^2(\xi)} - \frac{1}{R_{11}^2(\xi)} \right), \\
 G(\xi) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{11}^2(\xi)} + \frac{1}{R_{33}^2(\xi)} - \frac{1}{R_{22}^2(\xi)} \right), \\
 H(\xi) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{11}^2(\xi)} + \frac{1}{R_{22}^2(\xi)} - \frac{1}{R_{33}^2(\xi)} \right), \\
 L(\xi) &= \frac{3}{2} \left( \frac{1}{R_{23}^2(\xi)} \right), \\
 M(\xi) &= \frac{3}{2} \left( \frac{1}{R_{13}^2(\xi)} \right), \\
 N(\xi) &= \frac{3}{2} \left( \frac{1}{R_{12}^2(\xi)} \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.178}$$

Здесь коэффициенты  $R_{ij}$  можно рассматривать как отношения предела те-

кучести в определенном направлении к параметру  $k$ :

$$\begin{aligned}
 R_{11}(\xi) &= \sigma_{11}^T/k, \\
 R_{22}(\xi) &= \sigma_{22}^T/k, \\
 R_{33}(\xi) &= \sigma_{33}^T/k, \\
 R_{11}(\xi) &= \sigma_{12}^T\sqrt{3}/k, \\
 R_{11}(\xi) &= \sigma_{13}^T\sqrt{3}/k, \\
 R_{11}(\xi) &= \sigma_{23}^T\sqrt{3}/k,
 \end{aligned}
 \tag{2.179}$$

где  $\sigma_{ij}^T$  — предел текучести, полученный в эксперименте при нагружении только компонентой напряжений  $\sigma_{ij}$ .

На практике можно использовать разные выражения для коэффициентов  $R_{ij}(\xi)$ , например, кусочно-линейные функции. Ниже (рис. 2.63) приведен пример зависимости таких коэффициентов и соответствующая поверхность текучести.

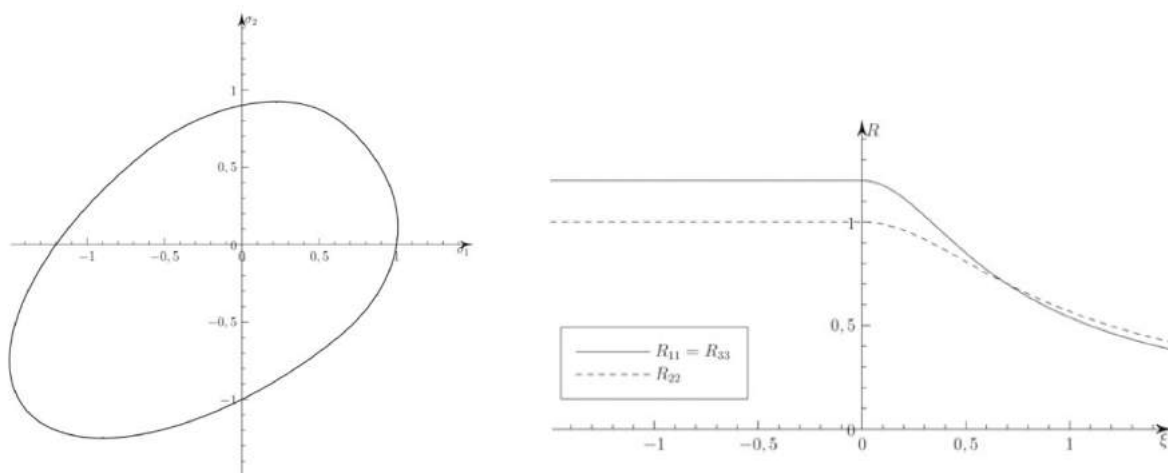


Рис. 2.63: Поверхность текучести в координатах  $\sigma_{11}/k$ ,  $\sigma_{22}/k$  (слева), с соответствующими коэффициентами  $R_{ij}(\xi)$  (справа).

Видно, что пределы текучести не только разные в зависимости от направления приложения нагрузки, но и отличаются в зависимости от типа

нагружения, то есть, например, растяжения или сжатия.

Рассмотрим общие, то есть без конкретных вариантов зависимостей от параметра  $\xi$ , соотношения в случае ассоциированного закона течения. Если перейти обратно к более общей записи критерия пластичности (2.177), то приведенное соотношение можно записать в следующем виде:

$$A_{ijkl}(\xi)S_{ij}S_{kl} = k, \quad (2.180)$$

с теми же условиями симметрии как и в (2.176) и дополнительными в виде:  $A_{iikl} = 0$  если индекс  $k \neq l$ , и  $A_{iikl} = 0$  если выполнено  $k \neq l$ ,  $i \neq k$  и  $j \neq l$ . Тогда выражение для приращений пластических деформаций примет следующую форму:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= d\lambda \frac{\partial A_{klmn}(\xi)S_{kl}S_{mn}}{\partial \sigma_{ij}} = \\ &= d\lambda \left[ \left( \frac{dA_{klmn}(\xi)}{d\xi} \frac{1/3\sigma_0^2\delta_{ij} - 3/2\sigma S_{ij}}{\sigma_0^3} \right) S_{kl}S_{mn} + \right. \\ &\quad \left. + 2A_{klmn} \left( \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right) S_{mn} \right], \end{aligned} \quad (2.181)$$

где  $d\lambda$  зависит от заданной функции упрочнения. Инкремент изменения для пластических объемных деформаций имеет следующее выражение:

$$d\varepsilon^p = \frac{1}{3}d\varepsilon_{ii}^p = d\lambda \left( \frac{dA_{ijkl}(\xi)}{d\xi} \right) \frac{S_{ij}S_{kl}}{3\sigma_0}, \quad (2.182)$$

Видно, что пластические объемные деформации равны нулю только в случае отсутствия зависимости коэффициентов от параметра  $\xi$  или  $A_{ijkl}(\xi) \equiv Const$ . Далее, приращение  $d\lambda$  может быть найдено из условия

$$d(A_{ijkl}(\xi)S_{ij}S_{kl} - k) = 0:$$

$$\frac{\partial A_{ijkl}(\xi)S_{ij}S_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial k}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p = 0.$$

Окончательно, для приращений  $\lambda$  можно получить:

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial A_{ijkl}(\xi)S_{ij}S_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\frac{\partial k}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial A_{ijkl}(\xi)S_{ij}S_{kl}}{\partial \sigma_{ij}}}. \quad (2.183)$$

Основная проблема работы с такими материалами, заключается в том, что при простых способах нагружения, которые можно получить при помощи обычных разрывных испытательных машин: растяжение, сжатие, сдвиг и изгиб, такой материал не проявляет своих сложных свойств. Может показаться, что анизотропией можно пренебречь, эксперименты на сжатие, как правило, дают незначительно большие значения при одноосных экспериментах. Может сложится впечатление, что обычной поверхности пластичности Мизеса будет достаточно для оценки прочности более сложных конструкционных элементов. Однако, именно, при натурных испытаниях дорогостоящих изделий проявляются неестественные для модели Мизеса поломки, причем хрупкого характера. Это связано с тем, что даже в не столь сложных конструкциях проявляются сложные виды нагружения материала. В качестве такого примера рассмотрим испытания трубчатых образцов из сплава АД33 двухосное комбинированное нагружение [217]. На следующем рис. 2.64 показаны значения эквивалентных по Мизесу напряжений в момент достижения пластических деформаций, при этом на горизонтальной оси отмечены соответствующие значения параметра трехосности  $\xi$ .

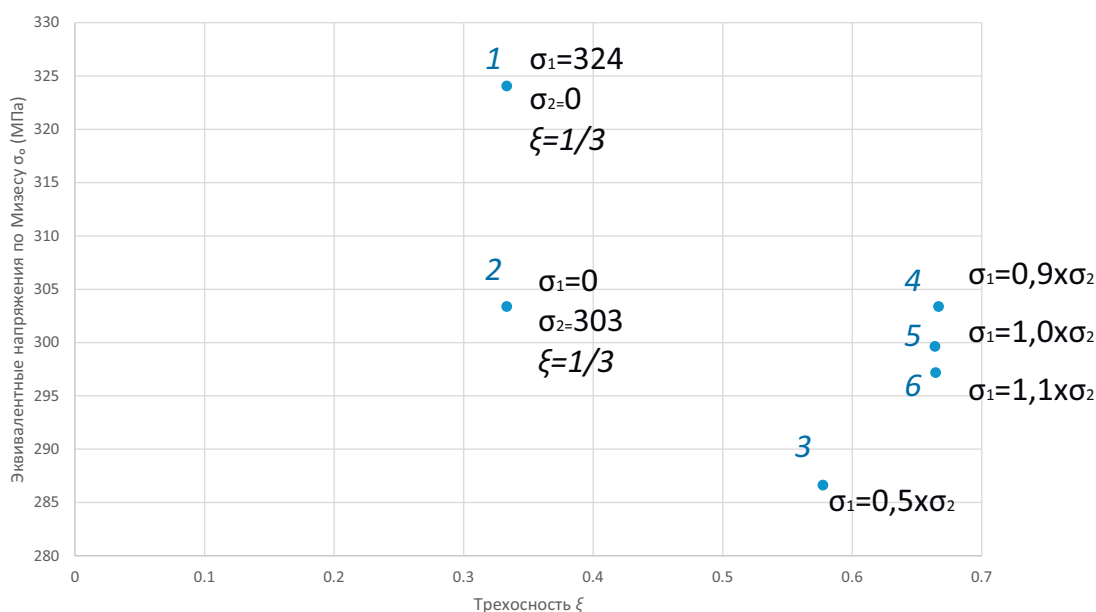


Рис. 2.64: Предельные значения эквивалентных напряжений Мизеса при двухосных испытаниях (сплав АД33).

Здесь  $\sigma_1$  - напряжения вдоль трубчатого образца, а  $\sigma_2$  соответствуют окружным напряжениям. Цифры 1 - 6 соответствуют разным соотношениям нагружающих напряжений. Проанализируем представленные результаты экспериментов. Видно, что разница в значениях одноосных экспериментов ( $\xi = 0.333$ ) характеризует анизотропию пластических свойств. Разница в значениях, соответствующих экспериментам 1, 2, с одной стороны, и 3,4,5,6 с другой, говорит о существенной чувствительности к виду нагружения материала. При этом, эксперимент, соответствующий цифре 3, показал наименьшие пластические деформации в момент разрушения [217]. Если же рассмотреть критерий пластичности в форме (2.177), то есть возможность учесть все описанные эффекты такого поведения материала. На следующем рис. 2.65 отображены диаграммы коэффициентов  $R_{ij}$  в зависимости от параметра трехосности. Такой выбор коэффициентов позволяет получить, практически, минимальные отклонения от поверхности текуче-



сти. На следующем рис. 2.66 показаны отклонения значений в процентах

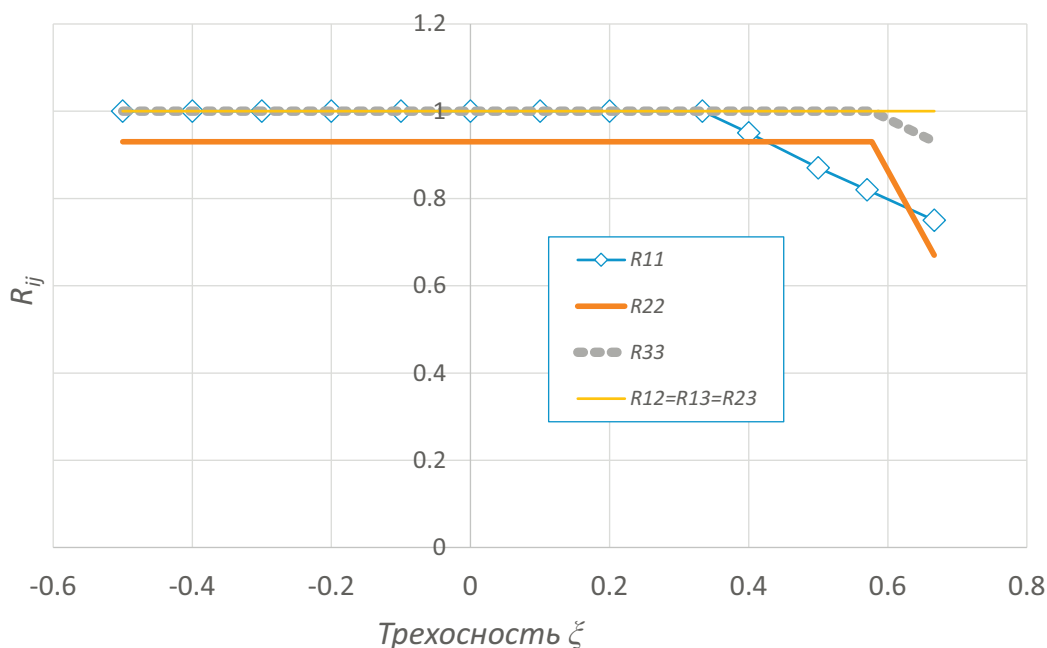


Рис. 2.65: Коэффициенты  $R_{ij}(\xi)$  приближающие поверхность пластичности (2.177) к экспериментам на двухосное растяжение (рис. 2.64).

от приложенной нагрузки от момента начала пластичности в экспериментах, соответствующих рис. 2.64, полученные при помощи критерия Мизеса  $\sigma_0 = k$ , где  $k = 324\text{МПа}$ , что соответствует пределу текучести при растяжении вдоль трубчатого образца, а также критерия (2.177), где коэффициенты  $R_{ij}$  представлены на рис. 2.65, а параметр  $k$  выбран аналогично критерию Мизеса —  $k = 324\text{МПа}$ . Видно, что отклонения полученные при использовании критерия пластичности (2.177) составляют величины меньше одного процента, что на практике можно считать идеальным результатом. Критерий Мизеса показал максимальное отклонение  $\sim 12\%$ , при этом эксперимент с максимальным отклонением продемонстрировал наименьшие пластические деформации. Стоит отметить, что в экспериментах не задействовалось направление ST, радиальное для трубчатого образца, которое могло дать более существенный вклад, как в анизотропию свойств,

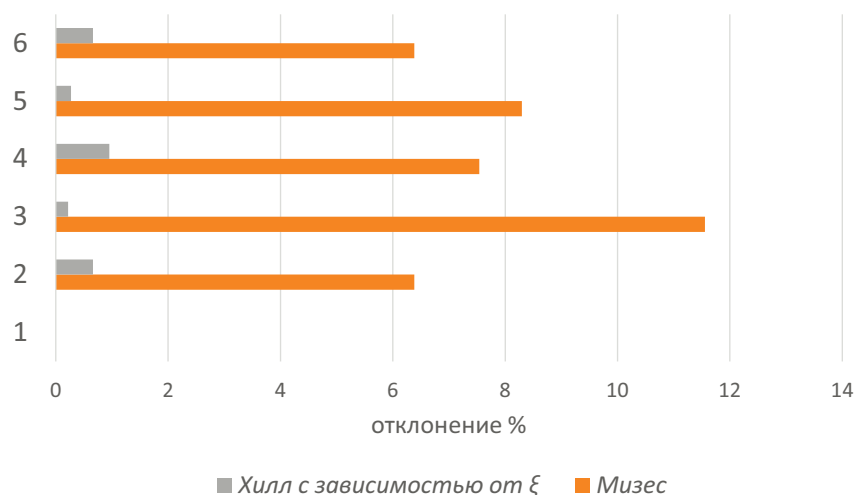


Рис. 2.66: Отклонения от предсказания начала пластичности в экспериментах на двухосное растяжение для критерия Мизеса и критерия в форме (2.177) с коэффициентами соответствующими диаграммам рис. 2.65. Цифры 1- 6 по вертикальной оси соответствуют номерам экспериментов.

так и в степень чувствительности материала к виду нагружения.

Таким образом, было продемонстрировано на примере алюминиевых сплавов, в изготовление которых входит процедура обработки давлением, что материал имеет выраженную анизотропию пластических свойств и проявляет чувствительность к виду нагружения. Было показано на примерах, что моделирование такого материала возможно, был предложен критерий пластичности на основе модификации критерия Хилла с учетом всех описанных эффектов. Была продемонстрирована не возможность использования классического подхода к моделированию пластичности таких сплавов на примере двухосных испытаний. Стоит также отметить, что, как было замечено ранее, пластические свойства материала проявляют также зависимость от толщины прокатных плит и конкретного выбора плит, так что конкретные числовые характеристики предложенного критерия, как правило, нельзя соотнести с конкретным сплавом или химическим составом. То есть для инженерного анализа необходимо анализировать историю изго-

товления моделируемого изделия.

## 2.4 Выводы к главе 2

В главе 2 был наглядно показан возможный путь работы с материалами со сложной внутренней структурой. Характерной особенностью рассмотренных материалов является чувствительность к виду нагружения пластических свойств. Предложен путь формализации типа нагрузки через параметр трехосности тензора напряжений. Продемонстрирован общий критерий пластичности для такого класса материалов. Показан математический аппарат, позволяющий проводить, как аналитические, так и численные решения задач предельного состояния. Основным выводом сравнения аналитических жестко-пластических решений и упругопластических, полученных численно, является возможность пренебрежения упрочнением в случаях когда концентрация напряжений не вносит существенных изменений в стадии развития пластических областей.

В последних разделах главы показаны возможные расширения предложенного критерия пластичности для учета скоростного упрочнения материала, а также возможной анизотропии пластических свойств, в случае обработки материала давлением. При рассмотрении задач со скоростным упрочнением были использованы свойства титанового сплава ВТ6. Были определены параметры для предложенной модели пластичности для большого диапазона скоростей деформирования. Модель была апробирована на двух задачах о высоко скоростном разрушении образцов с концентраторами. Предложенная модель пластичности показала высокую степень сходства с экспериментальными данными.

В разделе, посвященном модели пластичности, учитывающей как анизотропию пластических свойств, так и чувствительность к виду нагружения материала, были проанализированы различные алюминиевые сплавы. Была продемонстрирована возможность построения условия пластичности для экспериментов при двухосном растяжении с отклонением тестовых результатов менее одного процента. Также была показана несостоятельность классического подхода, основанного только на интенсивности напряжений, при работе с подобными сплавами.

Следует отметить, что в двух последних разделах рассматриваются конкретные сплавы титана и алюминия, и результаты анализа являются фактически готовыми методиками для построения инженерных подходов к прочностному анализу конкретных изделий.

В качестве общих замечаний можно добавить, что все предложенные подходы всегда сравнивались с классическими и устоявшимися критериями пластичности, что позволяет на каждом шаге проследить изменения и устанавливает связь с наиболее известными разработанными способами постановки и решения задач.

Данная глава является теоретическим базисом для дальнейшего изложения решений задач, связанных с прочностью сложных неоднородных материалов. Выводы и идеи из этой главы будут существенным образом цитироваться и использоваться при дальнейшем изложении работы в последующих разделах.

## **Глава 3**

# **Анализ прочности в технологических задачах композиционных материалов**

При анализе сложных неоднородных материалов, особое место занимают конструкционные композиты, которые все чаще используются в промышленности. При расчете прочностных характеристик изделий из таких материалов приходится учитывать практически всю историю создания детали, от способа укладки армирующих волокон, до полного анализа температурного режима отверждения. Процесс укладки армирующих элементов влияет, как на прочностные, так и на жесткостные характеристики будущего изделия. Режим охлаждения, как и характер укладки армирующих элементов, влияет на степень усадки материала, что в свою очередь, приводит к короблению изделия и появлению остаточных напряжений. Стоит отметить, что важным оказывается не только усадка, как следствие температурного изменением объема, но и усадка, связанная с происходящими химическими реакциями и структурными изменениями материала. Изменение фазового состояния ведет при этом к отверждению, то есть, к изменению жесткости материала, что, как следствие, влияет на величины остаточных напряжений в создаваемом изделии. Таким образом, задача анализа прочности композиционного материала становится связанной с анализом его изготовления, в который входит множество факторов.

Рассматривая композиты на основе полимерных матриц, можно выделить терморезистивные и термопластичные классы таких материалов. В первом случае процесс фазового превращения связан с полимеризацией, во втором — с кристаллизацией связующего. Научных работ по моделированию укладки армирующих элементов в виде препрегов, сухих преформ или наполнения прессформ связующим с рубленым волокном, для реактопластов существенно больше [54, 208, 244, 246, 321], чем для термопластичных аналогов [147, 179, 185, 247]. Тем не менее, общего подхода к

моделированию этого процесса, удовлетворяющего большинству вариантов армирования, не выработано. С точки зрения фазового перехода и моделирования кинетики полимеризации и кристаллизации полимеров, есть более или менее установившиеся модели [216, 291, 293, 314]. Существенная проблема заключается в следующем шаге — оценке прочности изготовленного композита, как в условиях последующей эксплуатации, так и на стадии предсказания брака или образования дефектов в процессе, например, технологического шага по охлаждению материала.

В данной главе рассмотрен подход к оценке прочности изделий, изготовленных из композиционных материалов, включающий в себя моделирование технологического процесса и отслеживание всех переходных параметров или необходимых технологических переделов. Предложенный подход позволяет оценивать прочность и жесткость окончательного изделия, а также, возможное зарождение дефектов в процессе изготовления. В качестве примера материала выбран слоистый композит на основе термопластичного связующего. Такой выбор связан с относительной новизной термопластичных материалов в промышленности и меньшей проработкой всех основных технологических стадий и их моделирования. В качестве же конкретного варианта связующего практически во всех разделах данной главы рассматривается полиэфирэфиркетон (ПЭЭК), это, в свою очередь, связано с актуальностью, наиболее высокими свойствами данного полимера, популярностью и возможностью найти информацию в литературных источниках и технических документах. Тем не менее, сам подход имеет довольно общий характер, и в той или иной степени корректируется практически для любого способа изготовления композита и вариантов связующего.

### **3.1 Композиты на основе термопластичного связующего, необходимые модели для оценки прочности**

Термопластичные композиты приобретают все большую популярность в качестве конструкционного материала в современной промышленности. Особенность таких материалов заключается в возможности фазового перехода в вязкое, близкое к жидкости, состояние связующего в случае высокого температурного воздействия. Все технологии изготовления композиционных изделий сложной формы из термопластичных материалов основаны на использовании необходимого нагрева связующего с последующим охлаждением. Проблема с точки зрения технологии изготовления, помимо проблем некачественного формования или впрыска термопластичного связующего с рубленым волокном, заключается в том, что во время фазового перехода в материале матрицы композита, возможно появление высоких остаточных напряжений, что в свою очередь является причиной коробления и дополнительного деформирования изделия, с возможным зарождением дефектов. Также возможны области с низкой степенью кристалличности, что приводит к локальной потере жесткости и прочности материала. Технологические эксперименты могут оказаться дорогостоящими и не гарантируют необходимого качества окончательного материала, так как невозможно проконтролировать свойства всех областей изготавливаемого изделия. Это заставляет искать возможности к моделированию технологии производства и влияния температурных циклов на термопластичный полимер. С точки зрения математического моделирования, основные аспекты заключаются в изменении степени кристалличности материала и связанные с этим измене-



ния его механических характеристик, а также дополнительная химическая усадка. Можно выделить основные требования к построению математических моделей материала для композитов в производство которых входит сложный процесс расположения армирующих элементов и связующие с изменяемым фазовым состоянием:

1. Возможность моделировать ориентацию и эффективные свойства армированного материала.
2. Учет изменения степени кристалличности.
3. Учет температурной и химической усадки.
4. Изменение характеристик жесткости.
5. Изменение свойств в зависимости от температуры.
6. Возможность моделирования остаточных напряжений.
7. Изменение прочностных характеристик материала.

Последовательность основных процессов, происходящих при изготовлении термопластичного композита, можно представить следующим образом:

1. Разогрев связующего — все кристаллы расплавлены, связующие находятся в аморфном состоянии.
2. Формование, укладка, намотка, сварка или впрыск вязкого связующего с добавлением размешанного армирующего элемента (например, рубленое волокно).
3. Охлаждение изделия — как следствие, наличие градиента температуры, например, по толщине отформованного слоистого композита.

4. Градиент температуры приводит к градиенту изменения степени кристалличности.
5. Градиент температуры приводит к различным температурным деформациям.
6. Градиент степени кристалличности приводит к дополнительному градиенту химической усадки.
7. Градиент изменения степени кристалличности приводит к градиенту изменения механических свойств.
8. Градиент механических свойств вызывает различный отклик материала на изменение температуры.
9. В аморфном состоянии материал практически не реагирует на деформирование, то есть, вызванные охлаждением напряжения малы.
10. На поверхности охлаждение происходит быстрее, что приводит к относительно раннему отверждению.
11. В результате охлаждения материал в центре композита начинает твердеть и охлаждаться, что, как следствие, приводит к уменьшению в объеме или усадке.
12. Внешние слои или поверхность изделия уже находятся в отвержденном состоянии и сопротивляются отрицательному изменению объема в центральной области композита.
13. Температура в объеме выравнивается.

14. В материале возникают остаточные деформации — внешние слои или поверхность сжаты — внутренний материал находится в состоянии растяжения.
15. В относительно небольших или тонких слоистых композитах с однонаправленной укладкой, распределение остаточных напряжений имеет вид параболы.
16. Остаточные напряжения могут привести к короблению или локальному растрескиванию изделия.
17. При последующей механической обработке, например разрезание или сверление, остаточные напряжения могут привести высвобождению деформаций, что может повлечь за собой дополнительное коробление или растрескивание композитного изделия.
18. Более того, окончательно, в изделии присутствует градиент степени кристалличности, и как следствие, возникает градиент механических свойств композиционного материала.

Первым шагом в анализе технологического процесса изготовления изделия из термопластичного композита является моделирование выкладки армирующих элементов. Эта стадия производства происходит при расплавленном или аморфном состоянии связующего при необходимой температуре. В таком состоянии можно считать распределение температуры равномерным, так как даже некоторые градиенты не влияют на общую картину деформирования. В качестве примера анализа такого процесса, в следующем разделе рассмотрено термоформование термопластичного препрега. Следующие шаги, моделирующие усадку и отверждение связующего, явля-

ются связанными, в основном, с историей изменения температуры, на основе которой, вычисляется степень кристалличности и все механические характеристики материала, что приводит к возможности оценки остаточных напряжений. В качестве последнего шага, на основе истории остаточных напряжений возможна оценка прочности, как в процессе отверждения, так и при последующей эксплуатации. На рис. 3.1 показана схема моделирования отверждения материала или шаги анализа после укладки армирующих элементов [79].

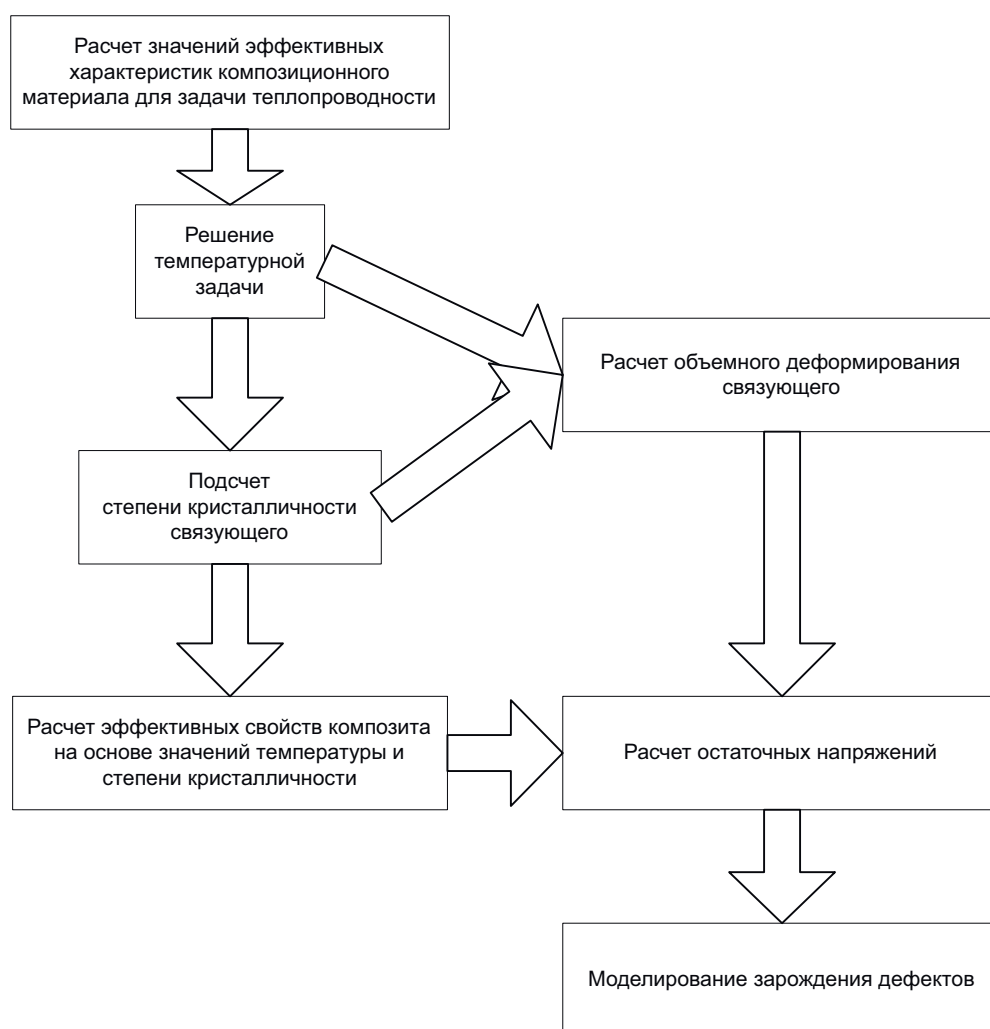


Рис. 3.1: Схема моделирования отверждения термопластичного препрега.

## 3.2 Моделирование формования термопластичного композита

Рассмотрим в качестве одного из возможных способов создания изделия из композита на основе термопластичного связующего, по видимому, самую распространенную технологию путем формования, предварительно разогретого препрега. На рис. 3.2 показана схема и последовательность такой технологии. На первом этапе, плоский заготовленный препрег с определенной укладкой разогревается инфракрасными лучами, после чего препрег помещается в пресс, далее следует закрытие створок пресса и некоторая выдержка, порядка нескольких секунд, после чего изделие охлаждается обычно при комнатной температуре.

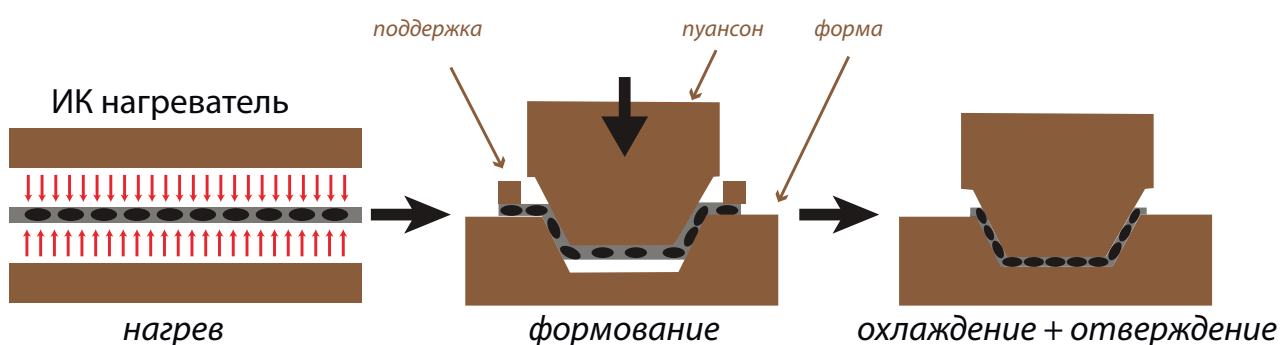


Рис. 3.2: Схема формования термопластичного препрега.

Основной вопрос, который возникает при таком формовании, это анализ качества укладки армирующих волокон, их ориентация и возможное появление складок, которые существенно снижают прочностные свойства будущего материала в таких областях. Здесь, появляется задача моделирования драпировки препрега, в котором связующие имеет аморфное состояние. Основная проблема возникает в подборе модели материала для препрега. Очевидно, что вдоль волокон, жесткость такого материала до-

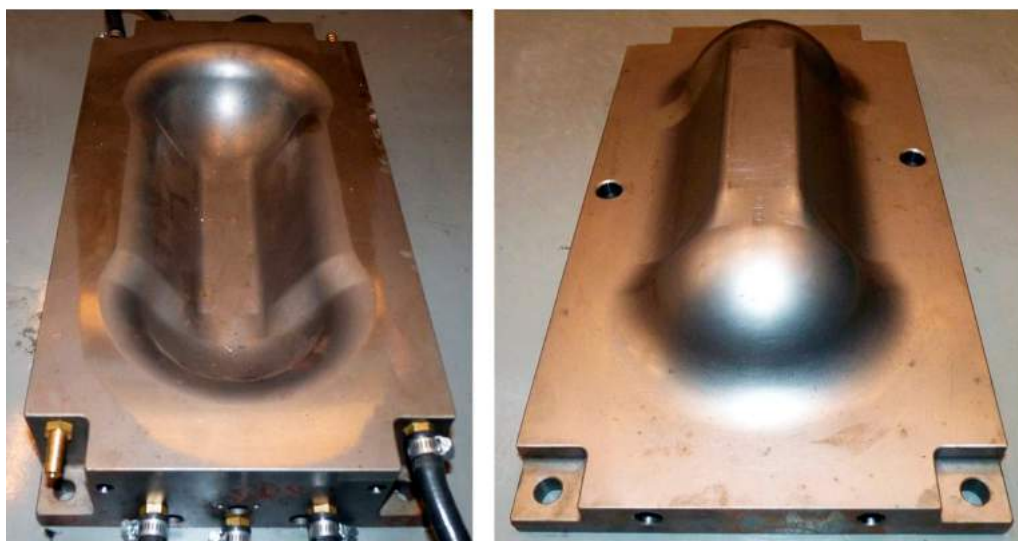


Рис. 3.3: Двухкупольная оснастка [185].

статочно велика и может быть приближена линейными соотношениями компонент напряжений и деформаций. При сдвиговом нагружении ситуация более сложная, так как будет оказывать влияние жесткость и вязкость связующего.

Рассмотрим экспериментальное исследование такого формования термопластичного препрега на основе стекловолокна и полипропиленового связующего [185]. В этой работе приводится подробное описание всего процесса формования и используемой заготовки в виде препрега. Эксперимент проводится на специально разработанной оснастке (рис. 3.3), которая представляет собой два купола, расположенных в концах канала. Геометрия такой поверхности была предложена для отработки различных моделей драпировки текстильных композитов и находится в открытом доступе [337].

Кроме того, в статье приводится методика для сравнения моделирования исследуемого процесса с результатом эксперимента. Основным параметром для сравнения является угол сдвига волокон, измеренный на готовой детали (рис. 3.4). С этой целью авторами наносились контрольные

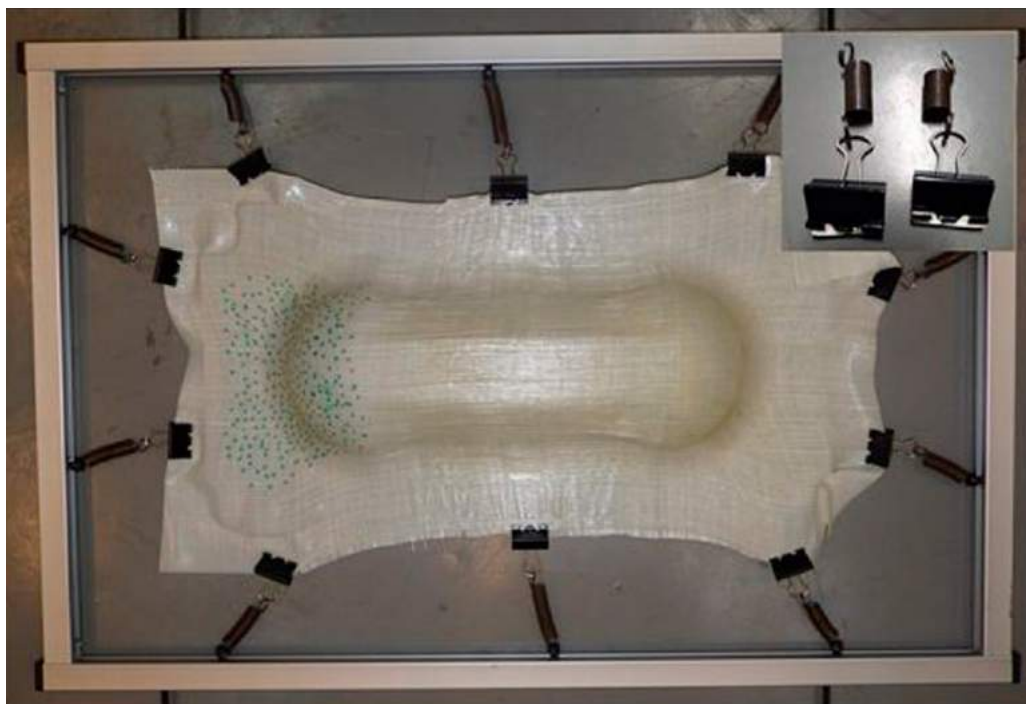


Рис. 3.4: Двухкупольная деталь после формования [185].

точки на заготовке (рис. 3.5), после чего на поверхность наносились координатные линии, по отклонению которых от  $90^\circ$  можно измерить угол сдвига волокон. В таблице 3.1 приведены сведения о материале препрега, диаграммы для сдвиговых свойств продемонстрированы на рис. 3.6 и рис. 3.7.

Ниже приводятся особенности моделирования, проведенного в системе Abaqus. Общая схема модели показана на рис. 3.8. Модель преформы представляет собой два слоя трехмерных оболочных элементов, взаимодействующих между собой посредством идеального контакта (рис. 3.9). В качестве упругих констант использовались  $E_1 = E_2 = 2200 \text{ кгс/мм}^2$ ,  $G = 1 \text{ кгс/мм}^2$ ,  $\nu = 0.1$ , для моделирования пластичности рассматривалась возможность появления пластических деформаций только в случае сдвигового нагружения ( $\sigma_{12}$ ) и в качестве предела текучести рассматривался  $\sigma_{12}^T = 0.003 \text{ кгс/мм}^2$ , после чего допускалась идеальная пластич-

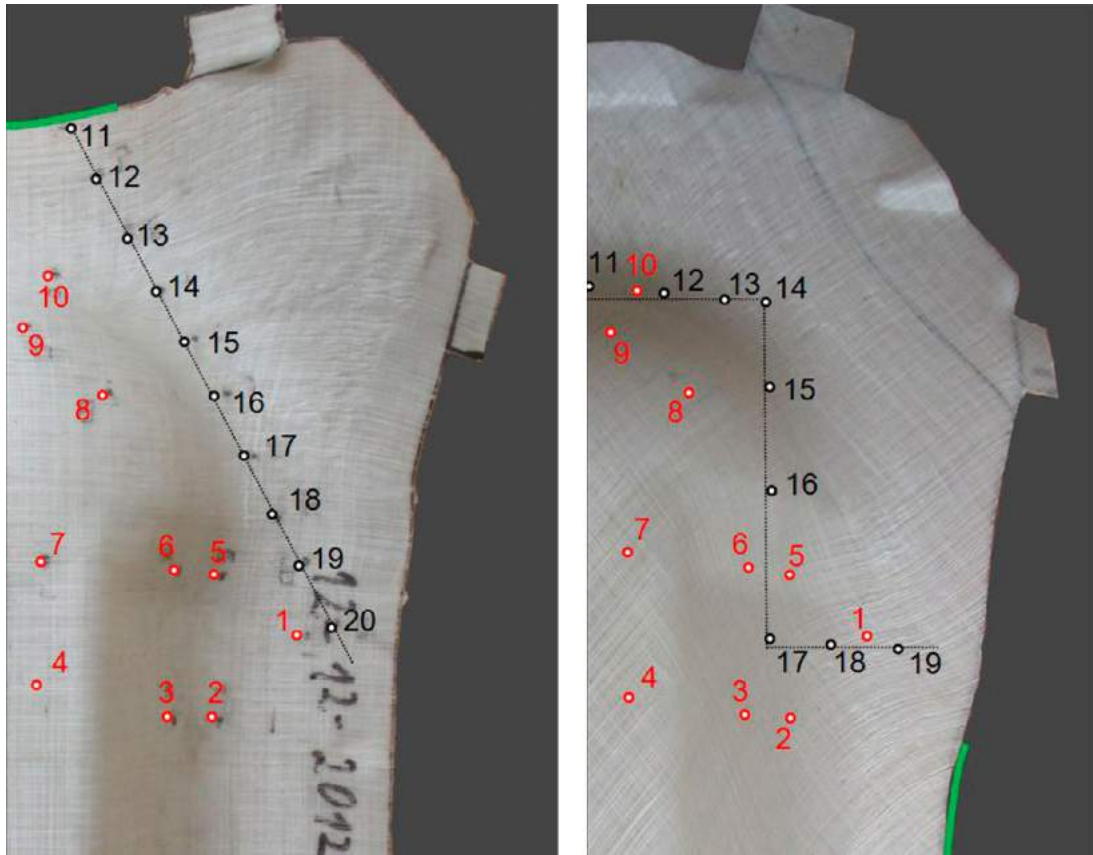


Рис. 3.5: Контрольные точки [185].

Таблица 3.1: Технические данные материала препрега

Коммерческое название материала	E-Glass 60%с PP Номорpolymer (однонаправленная стеклолента)
Продольный модуль упругости, кгс/мм <sup>2</sup>	2200
Укладка, (°)	0 / 90
Толщина монослоя, мм	0,35
Температура формования, °С	200



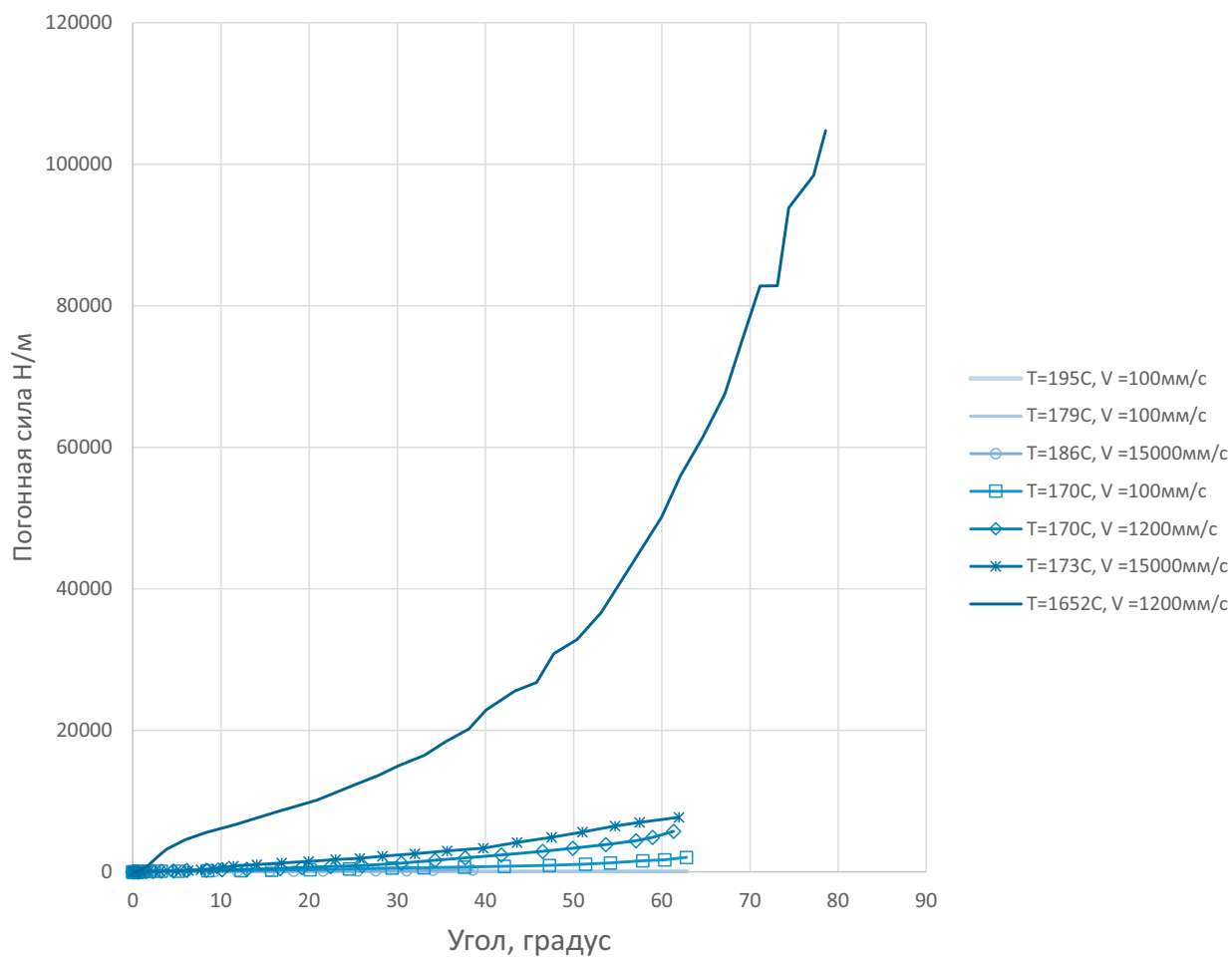


Рис. 3.6: Сдвиговые диаграммы термопластичного препрега, T—температура, V—скорость нагружения.

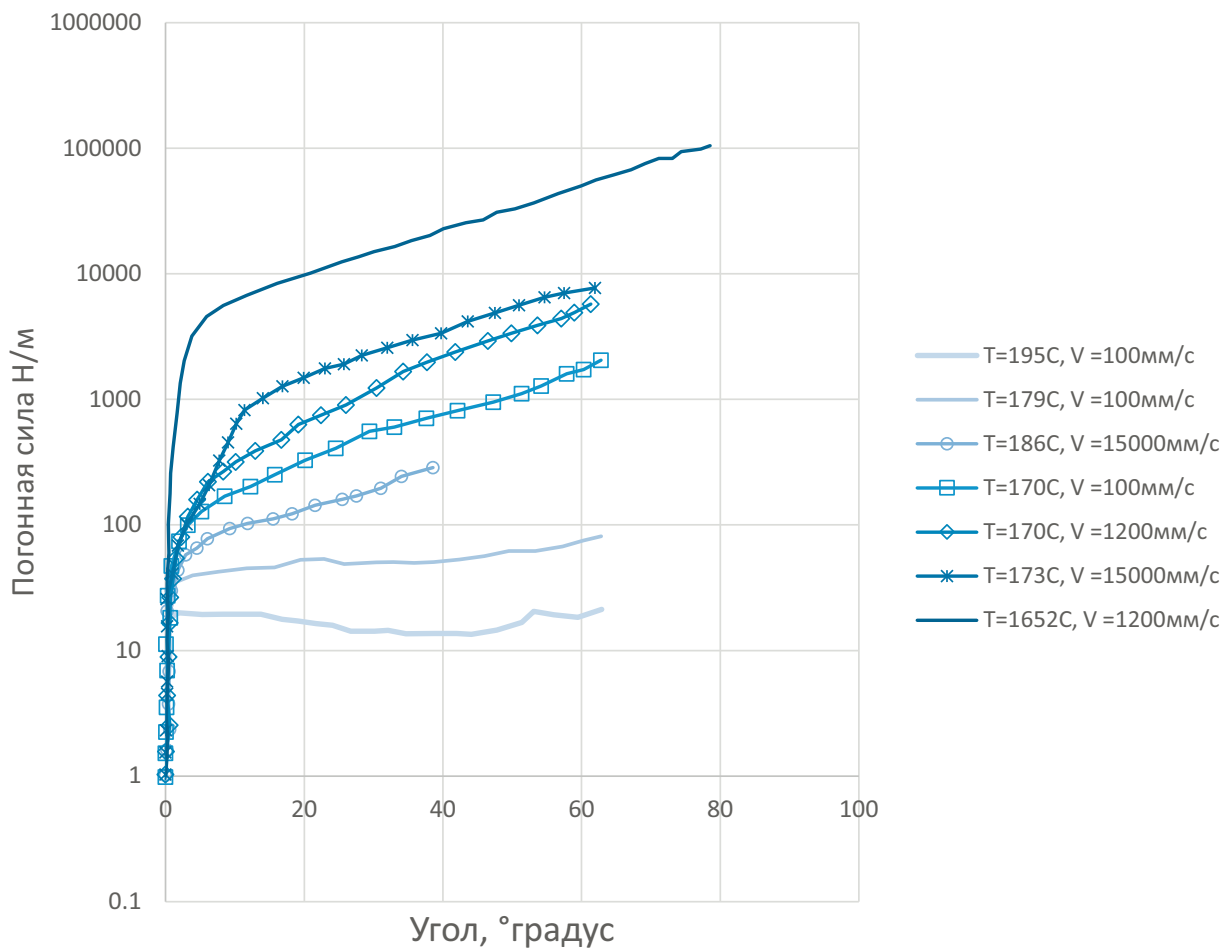


Рис. 3.7: Сдвиговые диаграммы термопластичного препрега в логарифмическом масштабе, T—температура, V—скорость нагружения.

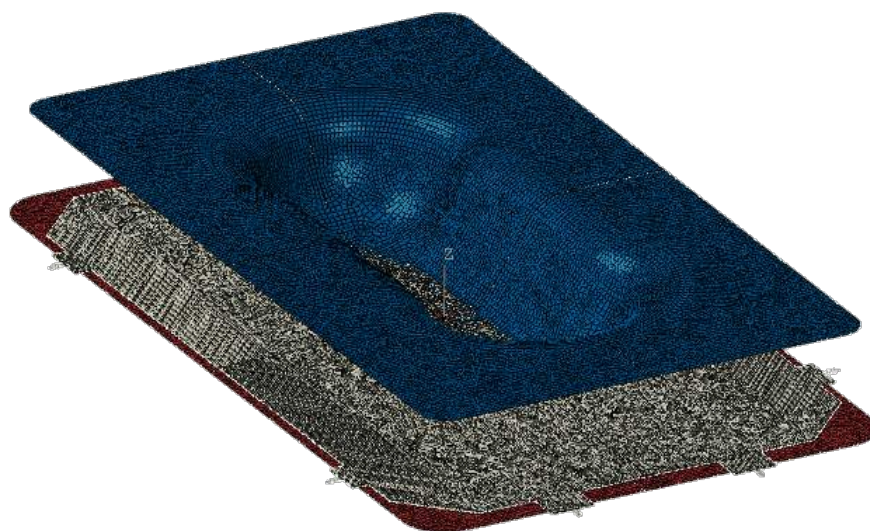


Рис. 3.8: Конечно-элементная модель формования термопластичного препрега.

ность без упрочнения (самая нижняя кривая на рис. 3.7). Выбор таких свойств связан с большой неопределенностью характеристик материала, причем важным является возможность понять насколько сложной необходимо делать модель, так чтобы для первого приближения такие свойства были вполне разумными. Более того, анализ свойств и результатов расчета показал, что существенными являются именно малость сдвиговой жесткости и низкий предел текучести.

Моделирование проводится в два шага. На первом шаге имитируется начальное натяжение преформы (рис. 3.10) с помощью пружинных элементов, на втором шаге осуществляется само формование (рис. 3.11). На рис. 3.12 показаны разные стадии формования, соответствующие разной величине закрытия пресса.

На рис. 3.13 показаны расположения контрольных точек, по которым можно сравнить сдвиговые деформации с экспериментальными данными. Значения изменения угла между волокнами показаны на рис. 3.14. Видно, что модель с довольно простыми предположениями имеет хорошее при-

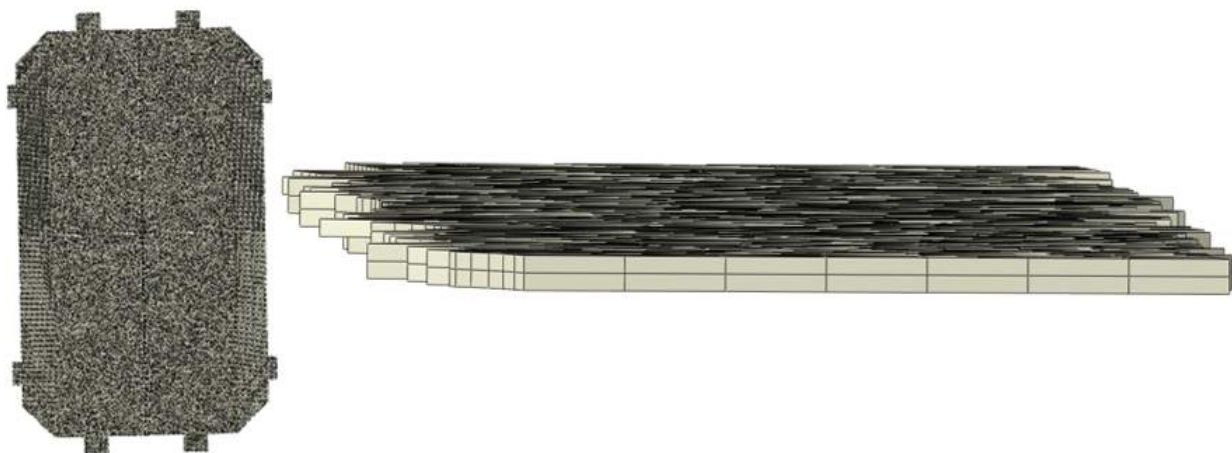


Рис. 3.9: Конечно-элементная модель термопластичного препрега.

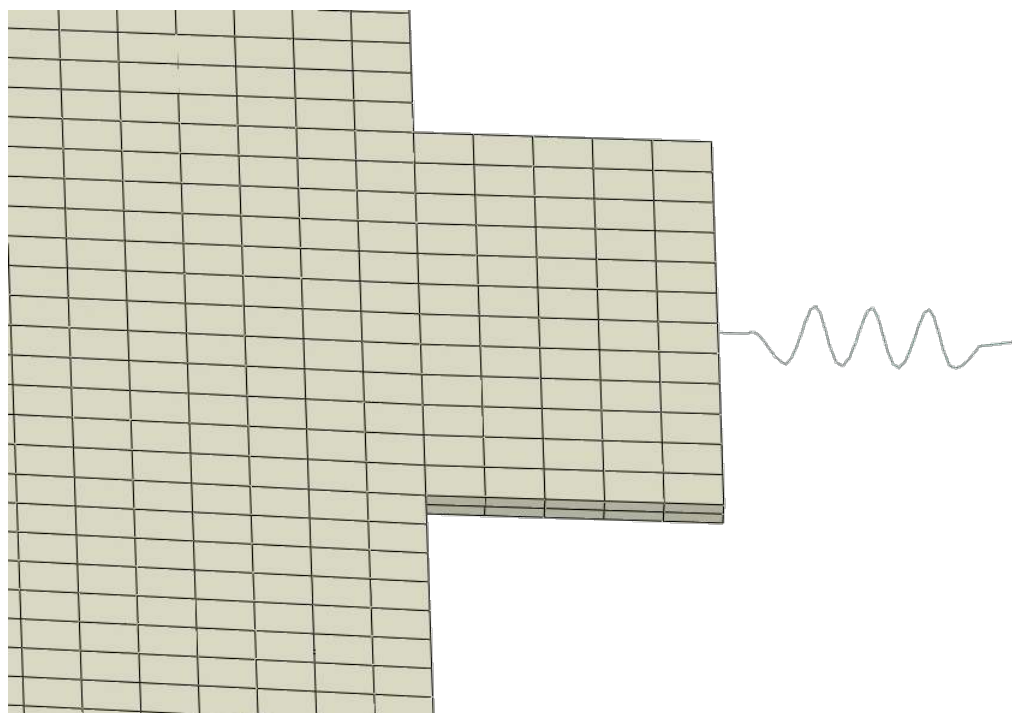


Рис. 3.10: Начальное натяжение преформы.

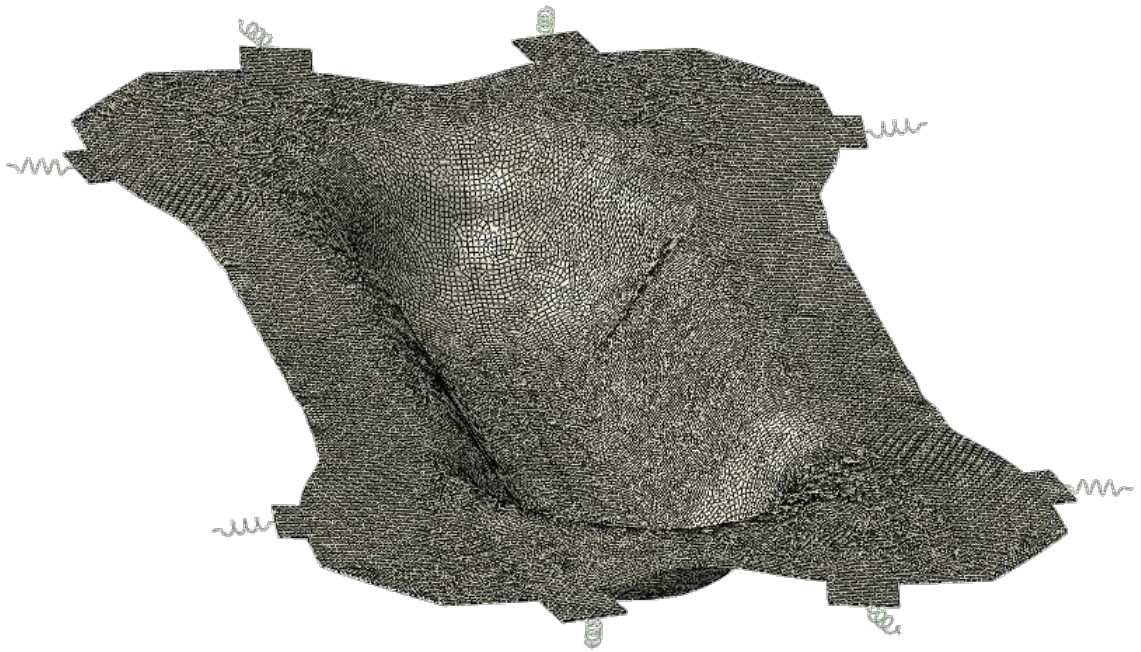


Рис. 3.11: Деталь после формования.

ближение к эксперименту. Наибольшее расхождение находится в точке максимума изменения угла. Рассмотрим распределение параметра трехосности  $\xi$  в деформированной преформе (рис. 3.15). Видно, что области с максимальным расхождением находятся в состоянии двухосного растяжения ( $\xi = +2/3$ ), что, по-видимому, снижает сопротивление сдвиговому деформированию материала.

Таким образом, вполне перспективным было бы использование для термопластичных препрегов, волокна которых окружены вязким расплавленным полимером, использовать модель пластичности, основанную только на компонентах сдвиговых напряжений и деформаций в комбинации с параметром трехосности. Окончательно, в инвариантной форме критерий пластичности можно сформулировать следующим образом:

$$|A_{ij}\sigma_{ij}|f(\xi) = k \left( \int |A_{mn}\dot{\epsilon}_{mn}^p| dt \right), \quad (3.1)$$

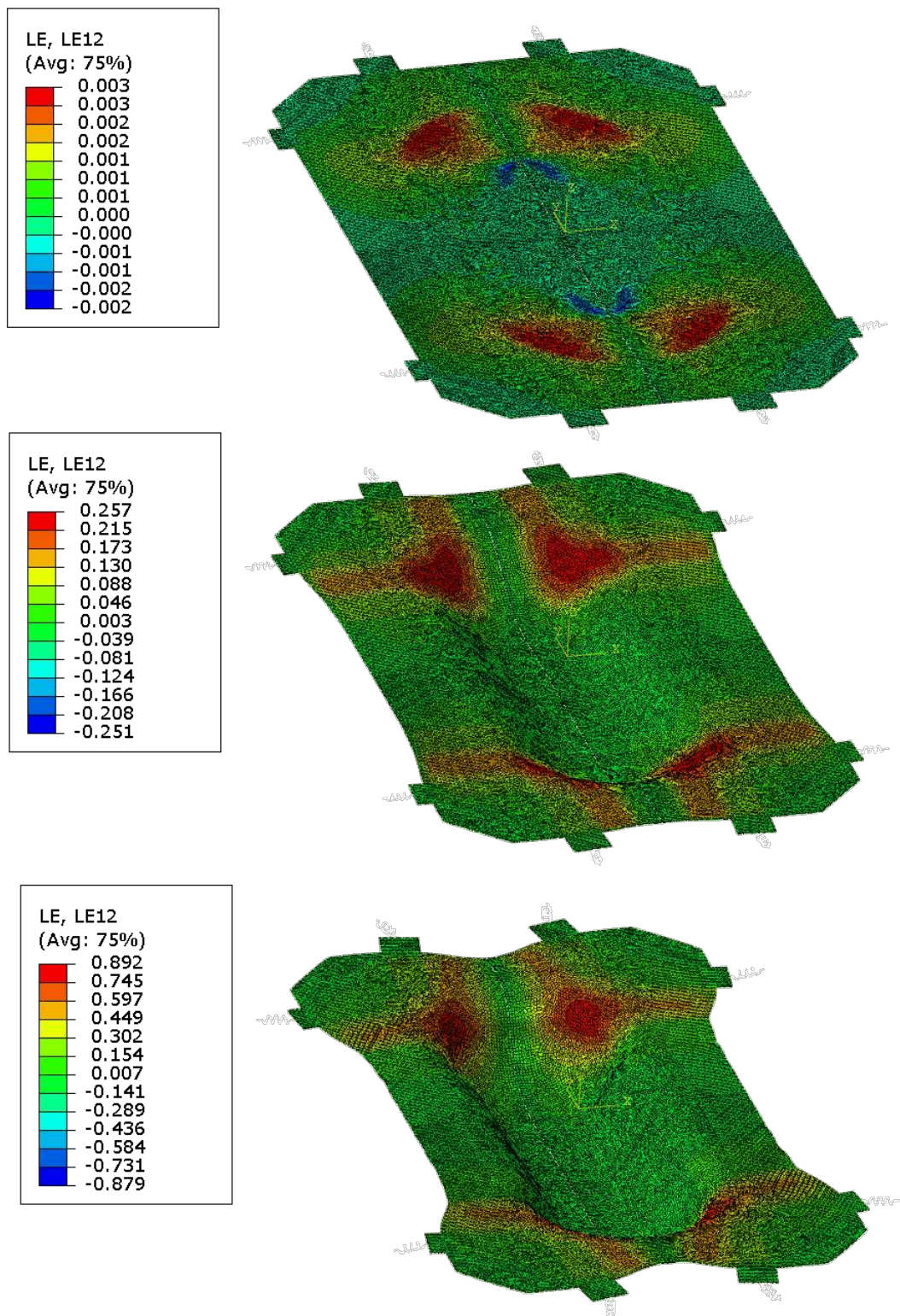


Рис. 3.12: Моделирование формования, 5% от нагрузки (верх), 50% от нагрузки (центр), 100% нагрузки (низ).

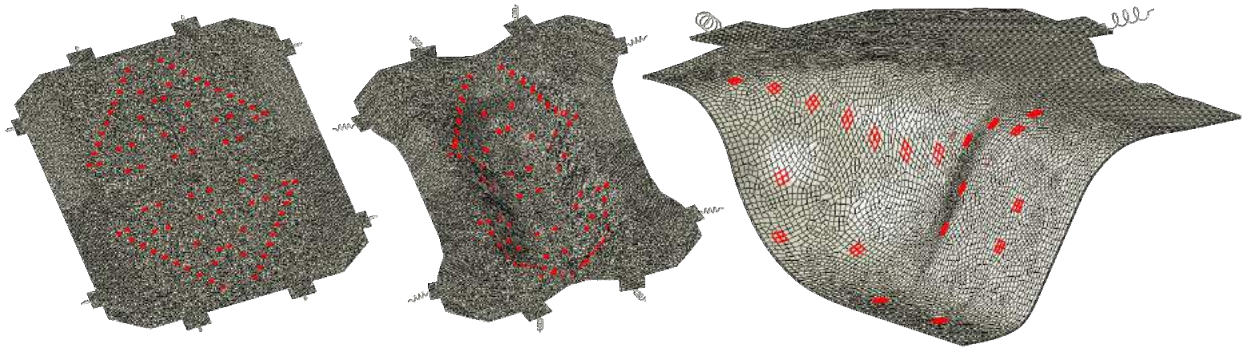


Рис. 3.13: Контрольные точки для анализа результатов.

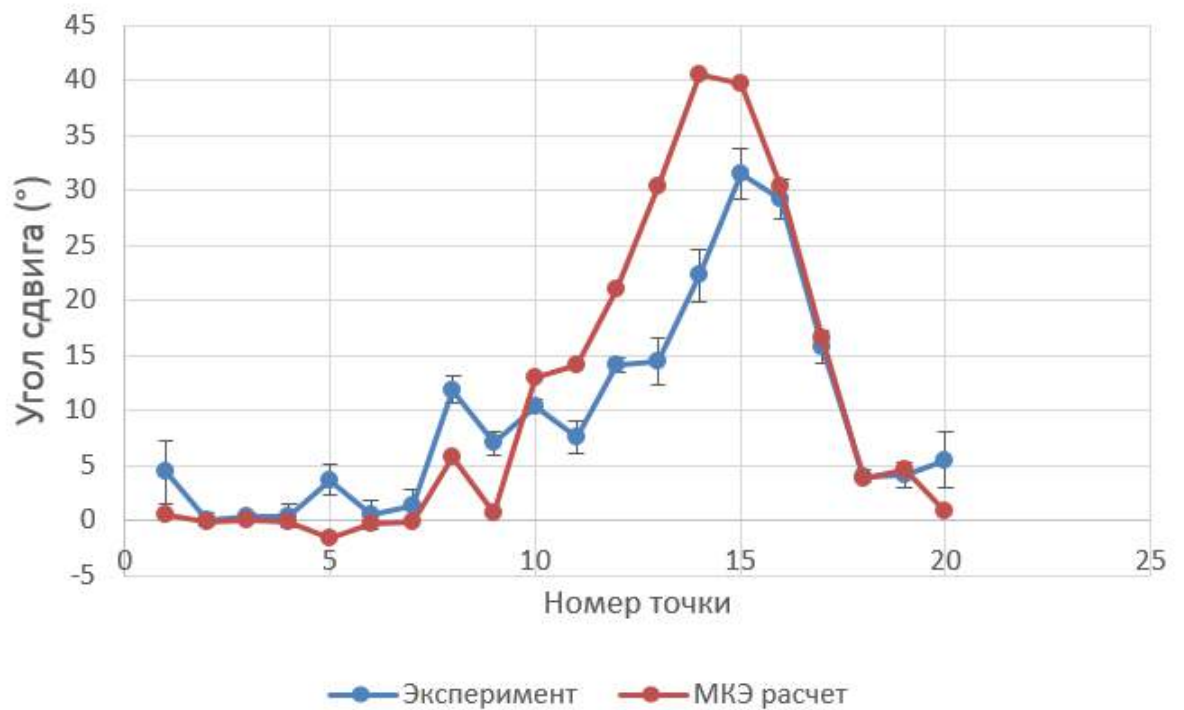


Рис. 3.14: Значения изменения углов между волокнами в слоях  $0^\circ$  и  $90^\circ$ .

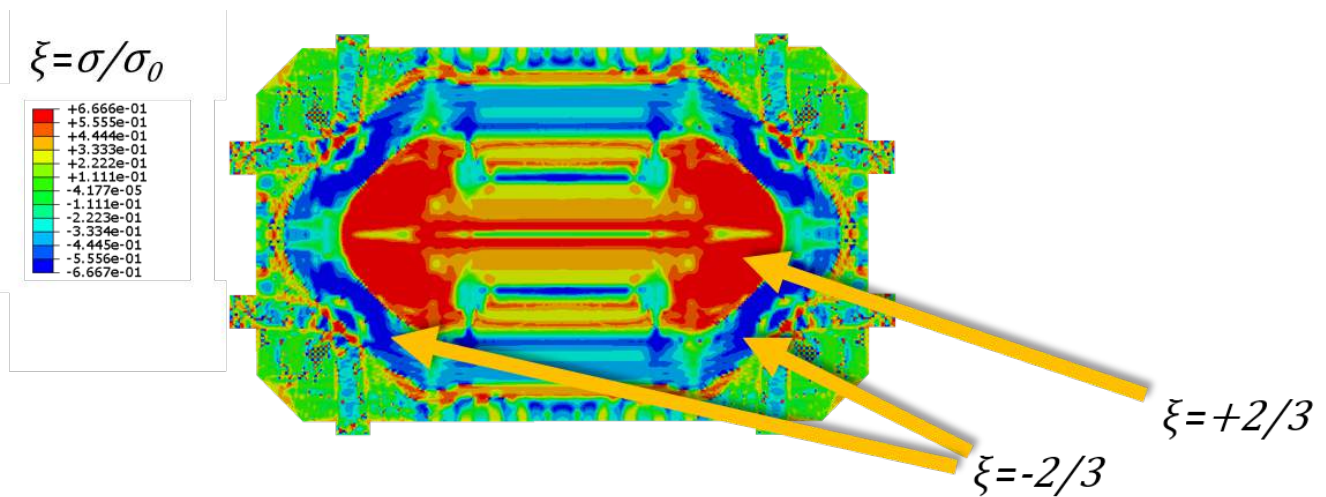


Рис. 3.15: Распределение параметра трехосности  $\xi$  в деформированной преформе.

где  $\dot{\epsilon}_{mn}^p$  — компоненты пластических деформаций,  $A_{ij}$  в системе координат, связанной с главными осями анизотропии, имеет для двухмерного случая следующее выражение:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A_{ij}$  можно рассматривать как компоненты тензора второго ранга и применять к ним те же правила преобразования компонент как к тензору напряжений или деформаций. Значения, приведенные в уравнении (3.1),  $A_{ij} = 0$ , кроме  $A_{12} = A_{21} = 1/2$  подобраны так, чтобы в системе координат, связанной с направлениями волокон, можно было получить  $A_{ij}\sigma_{ij} = \sigma_{12}$ . В критерий (3.1) входит функция параметра вида напряженного состояния  $f(\xi)$ , которую можно вводить таким образом, чтобы при разных типах нагружения препрега получать разные виды сопротивления сдвиговым нагрузкам. Дополнительно можно ввести характеристику вязкости в параметр упроч-



нения, но такие особенности модели требуют существенных экспериментальных программ. В условиях отсутствия информации о коэффициентах трения между формовочной матрицей и пуансоном такое уточнение модели нерационально и не приведет к существенным изменениям результатов.

Таким образом, предложенный метод является достаточно универсальным и может быть использован для любых термопластичных препрегов. Введение параметра вида напряженного состояния в критерий пластичности (3.1) позволяет учесть разный отклик материала для различных вариантов укладок и плетения волокна. Результаты моделирования такого формования позволяют на стадии изготовления изделия оценить изменение ориентации армирующих волокон и не допустить дефектов в виде смятых областей детали. В последующих разделах будет рассмотрено отверждение такого материала, будет анализироваться поведение элементарного объема термопластичного препрега и подходы к его моделированию.

### **3.3 Кристаллизация термопластичного материала**

Кристаллизация полимера — это процесс роста или зарождения кристаллов. Степень кристалличности — это относительное объемное отношение между областями, занятыми кристаллами, к общему объему полимера. От степени кристалличности зависят многие механические свойства полимера, поэтому возможность моделирования процесса кристаллизации термопластичного полимера является существенным условием общего анализа технологического процесса.

Кинетика роста степени кристалличности материала достаточно прора-

ботана и её теоретическое описание является, по всей видимости, устоявшимся [116, 225, 291, 311, 327, 328]. Свойства термопластичного материала зависят от степени его кристалличности. Кристаллизация полимера связана с его температурой, а также историей изменения температуры. Наиболее известный вариант формул, описывающих величину относительной кристалличности полимера, приведены в работах [225, 327, 328]. Приведем их полный вид:

$$X_{vc} = X_{vc}^{\infty}(w_1 F_{vc1} + w_2 F_{vc2}). \quad (3.2)$$

где  $X_{vc}$  – общая степень кристалличности,  $X_{vc}^{\infty}$  – равновесное значение степени кристалличности,  $w_1$  – весовой фактор для первого механизма роста степени кристалличности,  $w_2$  – весовой фактор для второго механизма роста степени кристалличности, причем  $w_1 + w_2 = 1$ ,  $F_{vc1}$  – значение степени кристалличности, полученной в результате зарождения кристаллов,

$$F_{vc1} = 1 - \exp \left[ -C_{11} \int_0^t T \exp \left\{ - \left[ \frac{C_{21}}{(T - T_g + 51.6)} + \frac{C_{31}}{T (T_{m1} - T)^2} \right] \right\} n_1 t^{n_1 - 1} dt \right],$$

$F_{vc2}$  – значение степени кристалличности, полученной в результате роста существующих кристаллов,

$$F_{vc2} = 1 - \exp \left[ -C_{12} \int_0^t T \exp \left\{ - \left[ \frac{C_{22}}{(T - T_g + 51.6)} + \frac{C_{32}}{T (T_{m2} - T)^2} \right] \right\} n_2 t^{n_2 - 1} dt \right],$$

где  $C_{11}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{31}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{32}$ , – константы, определяемые в экспериментах,  $T_g$  – температура стеклования,  $T_{m1}$ ,  $T_{m2}$  – температуры плавления кристаллов для соответствующих способов появления, то есть зарождения или роста,  $n_1$ ,  $n_2$  – постоянные Колмогорова – Авраами для первого и

Таблица 3.2: Свойства материала для решения тепловой задачи

Плотность связующего (кг/м <sup>3</sup> )	1260
Теплоемкость связующего (Дж/ К)	1300
Теплопроводность связующего (Вт/мК)	0,25

второго механизмов процесса кристаллизации.

Как видно, формула (3.2) состоит из двух частей с соответствующими весовыми факторами. Первая часть  $F_{vc1}$  связана с зарождением новых кристаллизованных областей, вторая  $F_{vc2}$  отвечает за рост существующих кристаллов. В таблицах 3.2 и 3.3 приведены значения необходимых для уравнений (3.2) констант с использованием термопластичного материала ПЭЭК [227].

Рассмотрим охлаждение образца из чистого полимера ПЭЭК и проведем расчет тепловой задачи в предположения того, что теплопроводность, теплоемкость и плотность являются постоянными. На рис. 3.16 показаны диаграммы способа охлаждения внешних поверхностей образца и изменение температуры в центре, полученные путем моделирования и из эксперимента. Видно, что использование гипотезы о независимости тепловых параметров связующего от фазового состояния материала справедливо, что непосредственно следует из близости графиков температуры в центре образца.

На рис. 3.17 показано сравнение с экспериментом результатов моделирования тепловой задачи и финального распределения степени кристалличности по толщине образца, полученного по формуле (3.2). Видно, что максимальное значение кристалличности предсказано точно, переходные значения несколько различаются, но находятся близко. Возможно, что некоторая неточность связана со сложностью экспериментального определения степени кристалличности. Экспериментальные данные, отображенные на

Таблица 3.3: Константы для подсчета доли кристалличности

Равновесная степень кристаллизации	$X_{vc}^{\infty}$		3.70E-01
Постоянная Аврама для первого механизма роста кристаллизации	$n_1$	Па	1.35E+10
Постоянная Аврама для второго механизма роста кристаллизации	$n_2$	Па	2.76E+10
Температура плавления кристаллов для первого механизма	$T_{m1}$	К	5.93E+02
Температура плавления кристаллов для второго механизма	$T_{m2}$	К	6.15E+02
Параметр модели для первого механизма кристаллизации	$C_{11}$	Сек. <sup>-n</sup> / К	2.08E+10
Параметр модели для второго механизма кристаллизации	$C_{12}$	Сек. <sup>-n</sup> / К	2.08E+10
Параметр модели для первого механизма кристаллизации	$C_{21}$	К	4.05E+03
Параметр модели для второго механизма кристаллизации	$C_{22}$	К	7.60E+03
Параметр модели для первого механизма кристаллизации	$C_{31}$	К	1.12E+04
Параметр модели для второго механизма кристаллизации	$C_{32}$	К	1.47E+04
Весовой фактор для первого механизма кристаллизации	$w_1$		7.20E-01*
Весовой фактор для второго механизма кристаллизации	$w_2$		1- $w_1$

\* -  $w_1 = 0.61$  для моделирования композита

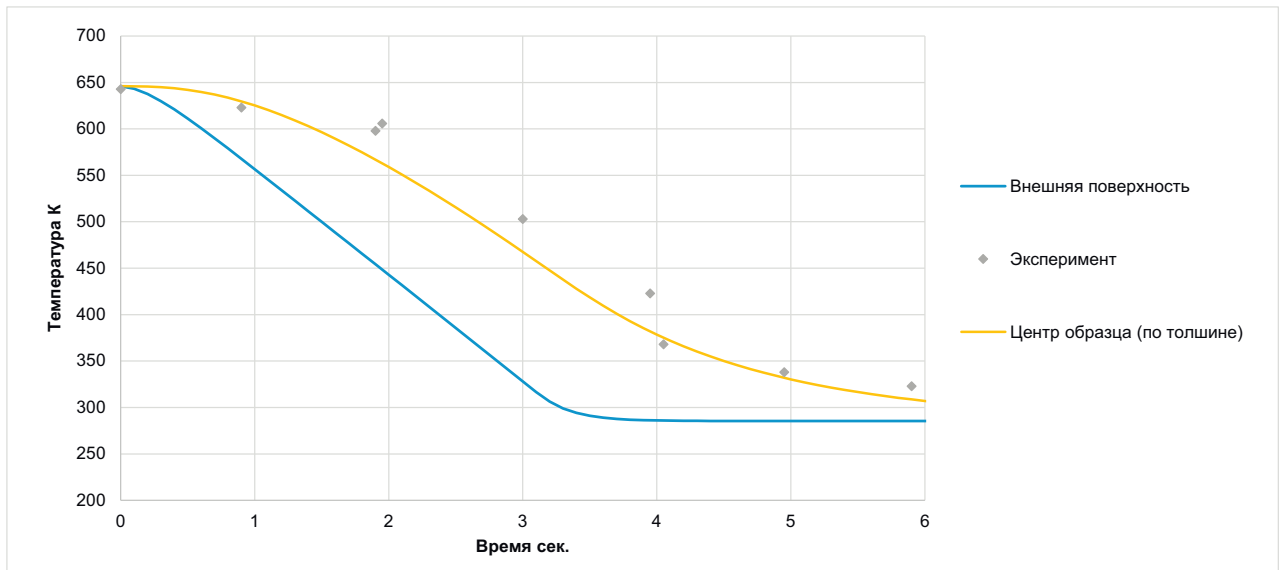


Рис. 3.16: Температура в зависимости от времени при охлаждении поверхностей образца со скоростью  $114^{\circ}/\text{сек}$ . Использован образец из материала ПЭЭК с толщиной 15.24мм.

рис. 3.16 и 3.17, заимствованы из работы [327].

Таким образом, была предложена модель для расчета степени кристалличности. Было показано, что тепловую задачу можно рассматривать как независимую от фазового состояния термопластичного полимера, а степень кристалличности подсчитывать по результатам распределения температуры и истории ее изменения.

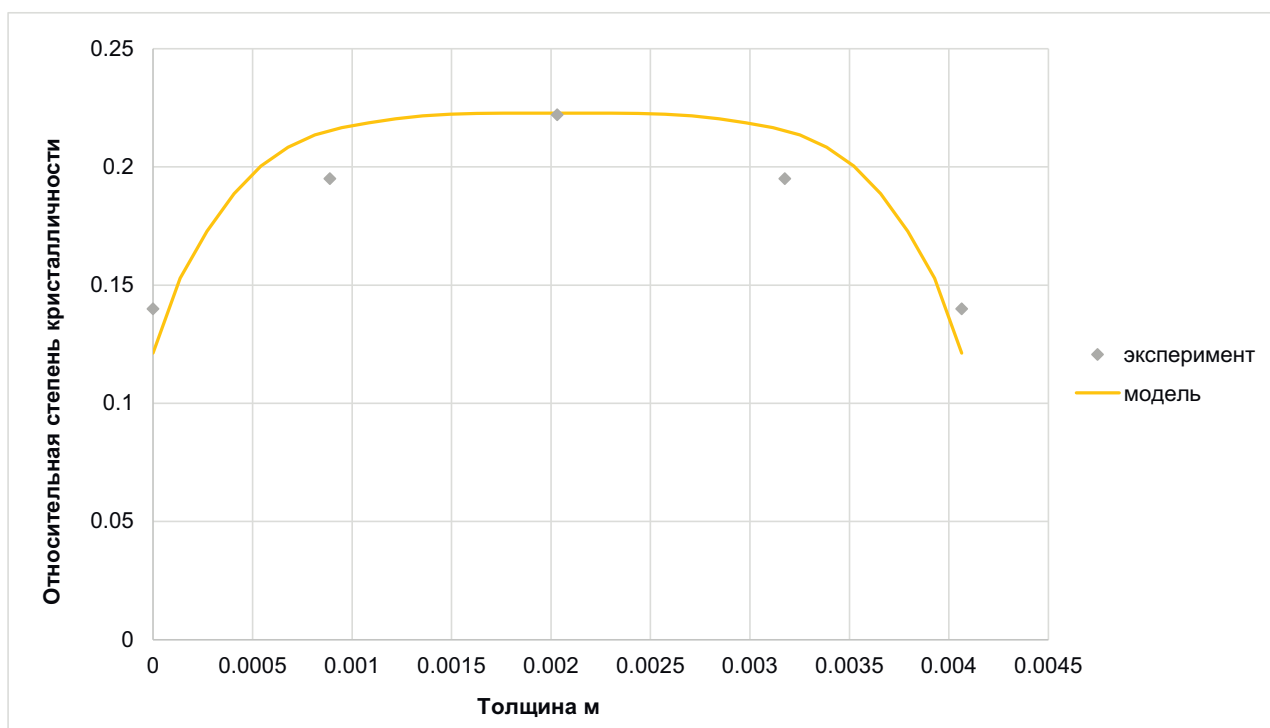


Рис. 3.17: Распределение объемной доли кристаллизации по толщине образца в результате охлаждения поверхностей со скоростью  $27,7^\circ/\text{сек}$ . Использован образец из материала ПЭЭК с толщиной  $4,064\text{мм}$ .

### 3.4 Жесткость термопластичного материала

В зависимости от степени кристалличности, термопластичный полимер демонстрирует различную упругую жесткость. Это связано с постепенным ростом кристаллических цепочек в полимере, которые с увеличением их числа начинают сопротивляться деформированию материала. В данной работе предлагается использовать подход, реализованный в исследовании [225]. В выбранной работе оценка жесткости базируется на осреднении вязкоупругой модели, записываемой в форме комплексных деформаций и соответствующих модулей [67]. В литературе такую модель обозначают как стандартное линейное тело. Вводятся понятия мгновенного модуля и

модуля запаздывания или аналогичные им податливости  $J'$  и  $J''$ .

$$J' = J'_{am} (1 - X_{vc}) + J'_{cr} (1 - X_{vc}), \quad (3.3)$$

$$J'' = J''_{am} (1 - X_{vc}) + J''_{cr} (1 - X_{vc}),$$

где индекс  $am$  – соответствует аморфному состоянию,  $cr$  – соответствует полностью кристаллизованному.

Далее вводятся зависимости

$$J'_{am} = J_{ua} + (J_{ra} - J_{ua})(\cos\psi)^\alpha \cos(\alpha\psi),$$

$$J''_{am} = (J_{ra} - J_{ua})(\cos\psi)^\alpha \sin(\alpha\psi).$$

Делается предположение, что

$$J'_{cr} = J_{uc},$$

$$J''_{cr} = 0,$$

$$\psi = \arctg(\omega\tau),$$

где  $J_{ua}$  – податливость до релаксации в аморфном состоянии,  $J_{ra}$  – податливость после релаксации в аморфном состоянии,  $J_{uc}$  – податливость до релаксации в кристаллизованном состоянии,  $\omega$  – частота,  $\alpha$  – распределение степени релаксации, которая изменяется от 0 до 1,  $\tau$  – время запаздывания.

Причем время запаздывания вычисляется при помощи двух различных алгоритмов в зависимости от температуры материала.

Таблица 3.4: Вязкоупругие свойства материала ПЭЭК [225]

Мгновенная податливость аморфного состояния	$J'_{am}$	1/Па	3.80E-10
Податливость релаксации аморфного состояния	$J''_{am}$	1/Па	1.50E-08
Мгновенная податливость кристаллизованного состояния	$J'_{cr}$	1/Па	1.20E-10
Частота	$\omega$	Гц	1
Относительное время запаздывания	$\tau_0$	Сек.	1.21029E+29
Энергия активации	$E_a$	Дж/моль	6.00E+05
Температура стеклования для кристаллизованного состояния	$T_{0c}$	К	453
Температура стеклования для аморфного состояния	$T_{0a}$	К	416
Константа для уравнения ВЛФ*	$C_1$		25
Константа для уравнения ВЛФ*	$C_2$		100
Параметр распределения для аморфного состояния	$\alpha_{am}$		1
Параметр распределения для кристаллизованного состояния	$\alpha_{cr}$		0.4

\*-уравнения Вильяма-Лэнделя-Ферри



для  $T < T_0$

$$\tau = \tau_0 \exp \left( \frac{E_\alpha}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right),$$

для  $T > T_0$

$$\tau = \tau_0 10^{\frac{-C_1(T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)}},$$

где  $R$  — газовая постоянная,  $E_\alpha$  — энергия активации,  $\tau_0$  — реперное время,  $T_{0\alpha}$  — температура стеклования для аморфного состояния,  $T_{0c}$  — температура стеклования для кристаллизованного состояния,  $T_0 = T_{0c}(X_{vc}/X_{vc\infty}) + T_{0\alpha}(1 - X_{vc}/X_{vc\infty})$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — константы, определяемые в эксперименте.

И окончательно, модуль для термопластичного связующего вычисляется по формуле

$$E_m = \frac{J'}{J'^2 + J''^2}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}. \quad (3.4)$$

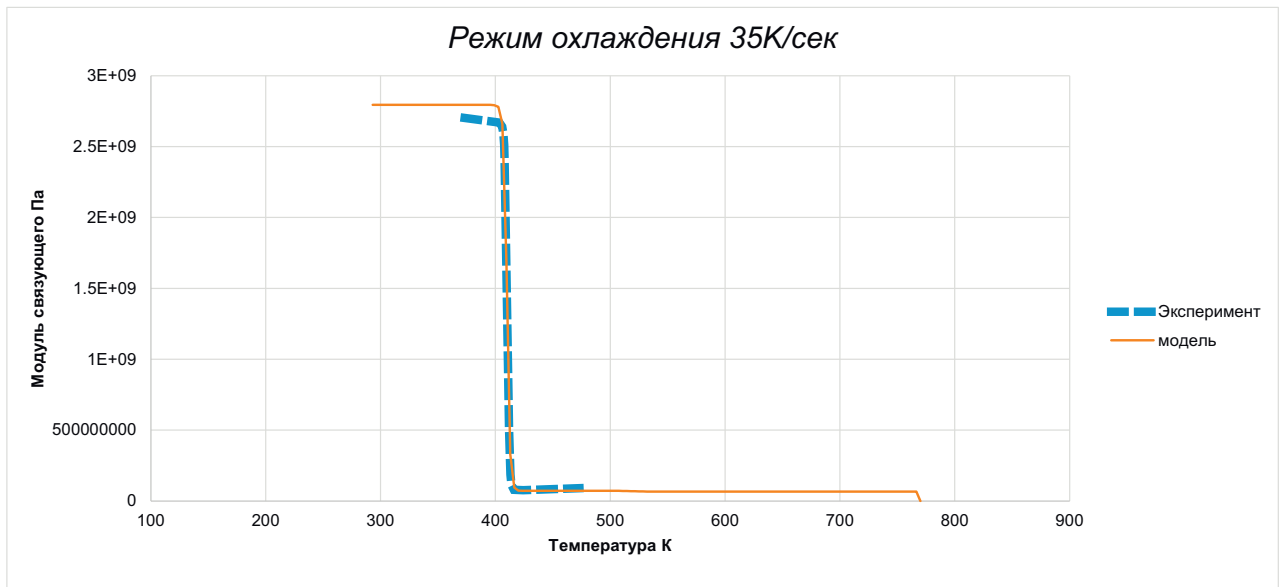


Рис. 3.18: Изменение жесткости термопластичного связующего (ПЭЭК) при охлаждении поверхностей со скоростью 35 °С/сек.

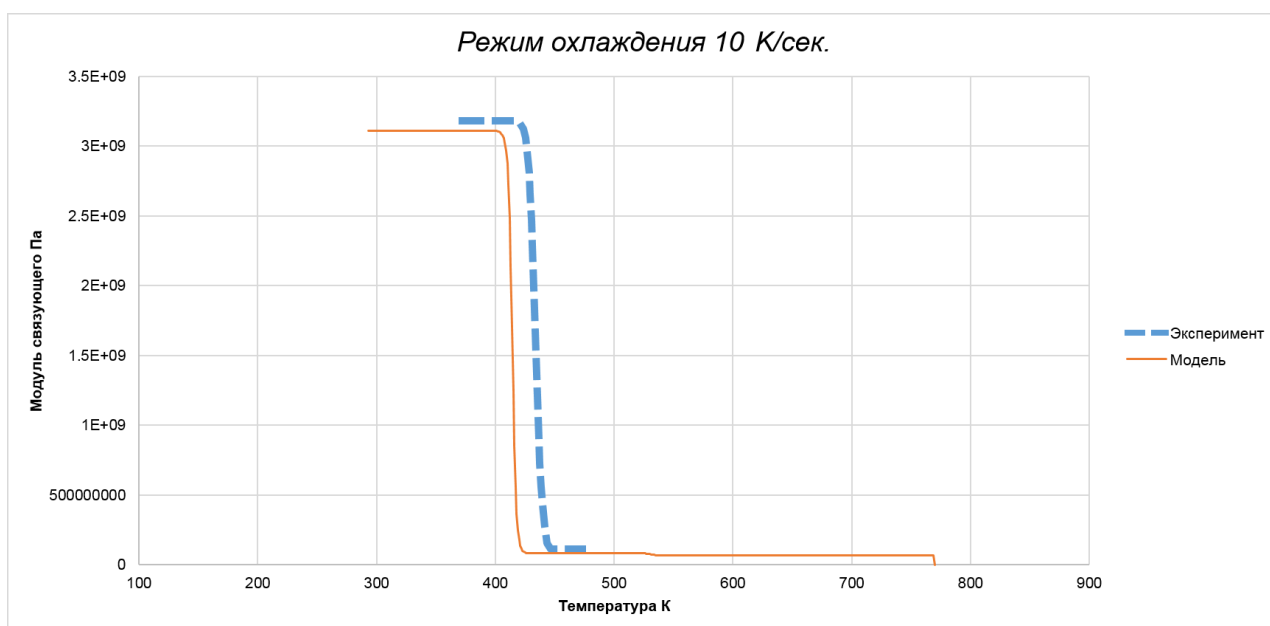


Рис. 3.19: Изменение жесткости термопластичного связующего (ПЭЭК) при охлаждении поверхностей со скоростью 10 °С/сек.

Фундаментальные основы для определения времени запаздывания изложены в работе [149]. В работе Лоуренса [225] приведено описание экспериментальных исследований жесткостных параметров термопластичного полимера ПЭЭК при разных режимах охлаждения. Таким образом, можно верифицировать изложенный подход, основываясь на экспериментах с чистым материалом связующего. Рисунки 3.18 и 3.19 демонстрируют изменение модуля жесткости, определенного на низких частотах в режиме охлаждения 35°С/сек. и 10°С/сек., соответственно. В таблице 3.4 показаны значения констант на основе данных для материала ПЭЭК [225, 227], которые были использованы в модели для получения проверочных результатов (рис. 3.18 и 3.19).

Видно, что предложенная модель имеет хорошую корреляцию с результатами экспериментов по определению жесткости материала связующего.

### 3.5 Усадка термопластичного материала

Причина возникновения остаточных напряжений в композитах при охлаждении связана с неравномерным изменением температуры по толщине слоев материала. Особенность термопластичного материала заключается в изменении коэффициента теплового расширения при фазовом переходе, а также связанной с этим переходом дополнительной усадке. Дополнительная химическая усадка прямо пропорциональна степени кристалличности термопластичного материала. Таким образом, можно сказать, что в композите на основе термопластичного полимерного связующего остаточные напряжения связаны, как с градиентом температуры, так и с разностью историй изменения температуры в различных слоях материала.

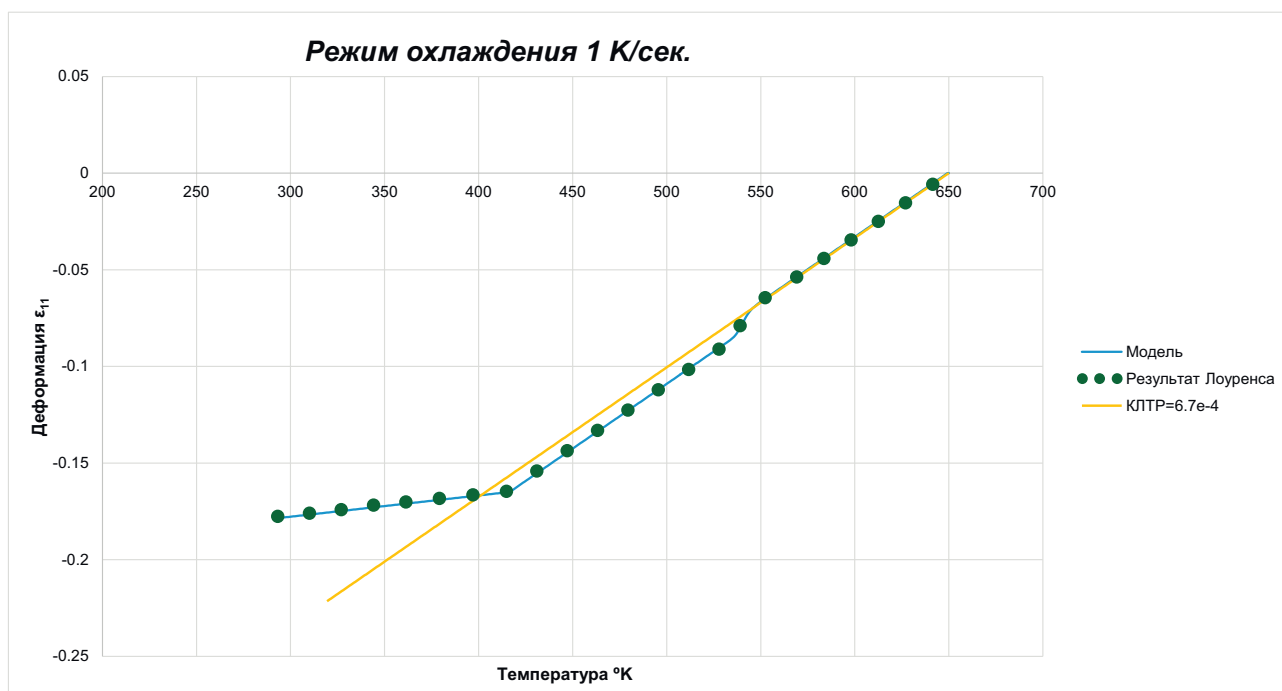


Рис. 3.20: Деформации термопластичного связующего (ПЭЭК) при охлаждении 1 °С/сек, полученные при моделировании.

Используя подход, предложенный в работах [225, 227], изменение объема материала, связанное с изменением степени кристалличности, можно

Таблица 3.5: Свойства для моделирования объемной усадки термопластичного материала ПЭЭК

Плотность кристаллизованного материала (кг/м <sup>3</sup> )	$\rho_{cr}$	1262.6
Плотность аморфного материала (кг/м <sup>3</sup> )	$\rho_{am}$	1400.6
Коэффициент теплового расширения (1/К)	$k$	1.1E-4 при $T < T_g$ 6.7E-4 при $T > T_g$
Температура стеклования (К)	$T_g$	416

приблизить следующим выражением:

$$\Delta \varepsilon_m^{cr} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{\Delta V^{cr4}}{3}}}{2}. \quad (3.5)$$

При этом изменение объема можно вычислить на основе изменения плотности. Зависимость плотности от степени кристалличности предполагается известной:

$$\Delta V^{cr} = \frac{\rho(X_{vc})_i - \rho(X_{vc})_{i-1}}{\rho(X_{vc})_i}.$$

Выражение для  $\rho(X_{vc})_i$  можно вычислить следующим образом:

$$\rho(X_{vc})_i = \rho_{am}(1 - X_{vci}) + \rho_{cr}X_{vci}.$$

где  $X_{vci}$  – степень кристалличности, соответствующая  $i$ -му шагу по времени,  $\rho_{am}$  – плотность материала, соответствующая аморфному состоянию материала,  $\rho_{cr}$  – плотность материала, соответствующая кристаллизованному состоянию материала.

Деформации, связанные с тепловым расширением:

$$\Delta \varepsilon_m^T = k \Delta T.$$

В работе [225] приведен результат моделирования усадки чистого связующего ПЭЭК в режиме охлаждения 1 °С/сек., что позволяет проверить предложенную модель. В таблице 3.5 приведены значения, необходимые для расчета объемной усадки материала [225, 227]. На рис. 3.20 отображено изменение деформации от температуры, в результате моделирования с использованием предложенного подхода и в работе [225], для удобства показан график деформации для коэффициента линейного теплового расширения (КЛТР) 6.7e-4, который является исходным для аморфного состояния материала.

### 3.6 Эффективные свойства композиционного материала

Для работы с произвольными укладками композита необходимо от свойств связующего и волокон перейти к макросвойствам материала. Для этого воспользуемся известными микромеханическими формулами [119, 128]:

$$E_{11} = E_{11f}V_f + E_m(1 - V_f) + \frac{4(\nu_m - \nu_{12f}^2)k_f k_m G_m(1 - V_f)V_f}{(k_f + G_m)k_m + (k_f - k_m)G_m V_f},$$

$$k_f = \frac{E_{11f}}{2(1 - \nu_{12f} - 2\nu_{12f}^2)},$$

$$k_m = \frac{E_m}{2(1 - \nu_m - 2\nu_m^2)},$$

$$E_{33} = E_{22} = \frac{1}{(4k_T)^{-1} + (4G_{23})^{-1} + \frac{\nu_{12}^2}{E_{11}}},$$

$$k_T = \frac{(k_f + G_m) k_m + (k_f - k_m) G_m V_f}{(k_f + G_m) - (k_f - k_m) V_f},$$

$$G_{12} = G_{13} = G_m \frac{(G_{12f} + G_m) + (G_{12f} - G_m) V_f}{(G_{12f} + G_m) - (G_{12f} - G_m) V_f},$$

$$G_{23} = G_m \frac{(G_{23f} + G_m) k_m + 2G_{23f} G_m + (G_{23f} - G_m) k_m V_f}{(G_{23f} + G_m) k_m + 2G_{23f} G_m - (k_m + 2G_m) (G_{23f} - G_m) V_f},$$

$$G_{23f} = \frac{E_{33f}}{2(1 + \nu_{23f})},$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{12f} V_f + \nu_m (1 - V_f) + \frac{(\nu_m - \nu_{12f}) (k_m - k_f) G_m (1 - V_f) V_f}{(k_f + G_m) k_m + (k_f - k_m) G_m V_f},$$

$$\nu_{23} = \frac{2E_{11} k_T - E_{11} E_{22} - 4\nu_{12}^2 k_T E_{22}}{2E_{11} k_T}.$$

где  $E_{11}, E_{22}, E_{33}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$  — модули упругости композиционного материала,  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$  — коэффициенты Пуассона композиционного материала,  $E_{11f}, E_{22f}, E_{33f}, G_{12f}, G_{13f}, G_{23f}$  — модули волокна,  $\nu_{12f}, \nu_{13f}, \nu_{23f}$  — коэффициенты Пуассона волокна,  $E_m, G_m$  — модули матрицы,  $\nu_m$  — коэффициент Пуассона матрицы,  $V_f$  — объемное содержание волокна.

Далее выпишем выражения констант для тепловой задачи.

*Теплоемкость:*

$$C_p = (V_f \rho_f C_{pf} + (1 - V_f) \rho_m C_{pm}) / \rho,$$

где  $\rho$  — плотность композиционного материала,  $\rho_f$  — плотность волокна,  $\rho_m$  — плотность матрицы,  $C_{pf}$  — теплоемкость волокна,  $C_{pm}$  — теплоемкость матрицы.

*Теплопроводность:*

Коэффициент теплопроводности в продольном направлении:

$$k_{11} = V_f k_{11f} + (1 - V_f) k_m.$$

Коэффициент теплопроводности в поперечном направлении:

$$k_{22} = k_{33} = (1 - \sqrt{V_f}) k_m + \frac{k_m \sqrt{V_f}}{1 - \sqrt{V_f} (1 - k_m / k_{f22})},$$

где  $k_{11f}$  — коэффициент теплопроводности волокна в продольном направлении,  $k_{22f}$  — коэффициент теплопроводности волокна в поперечном направлении,  $k_m$  — коэффициент теплопроводности связующего.

Коэффициент теплового расширения в направлении волокон:

$$k_1 = \frac{k_{1f} E_{11f} V_f + k_m E_m (1 - V_f)}{E_{11f} V_f + E_m (1 - V_f)}.$$

Коэффициент теплового расширения в поперечном направлении:

$$k_2 = k_3 = (k_{2f} + \nu_{12f} k_{1f}) V_f + (k_m + \nu_m k_m) (1 - V_f) - (\nu_{12f} V_f + \nu_m (1 - V_f)) k_1,$$

где  $k_{1f} k_{2f}$  — коэффициенты теплового расширения волокон в продольном

и поперечном направлении,  $k_m$  — коэффициент теплового расширения матрицы.

### 3.7 Усадка композиционного материала

Переход от усадки связующего к усадке композиционного слоя требует отдельного рассмотрения. Воспользуемся формулами, приведенными в работе [119]. Деформации, связанные только с температурным расширением, выглядят аналогично классической задаче о температурном воздействии на трансверсально изотропный материал.

Деформации, связанные с тепловым расширением:

$$\Delta\varepsilon_i^T = k_i \Delta T.$$

Деформации, вызванные химической усадкой связующего, оказывают следующие влияние на деформации композитного слоя:

$$\Delta\varepsilon_1^{cr} = \frac{\Delta\varepsilon_m^{cr} E_m (1 - V_f)}{E_{11f} V_f + E_m (1 - V_f)},$$

$$\Delta\varepsilon_2^{cr} = \Delta\varepsilon_3^{cr} = \Delta\varepsilon_m^{cr} (1 + \nu_m) (1 - V_f) - (\nu_{12f} V_f + \nu_m (1 - V_f)) \Delta\varepsilon_1^{cr},$$

где  $\Delta\varepsilon_m^{cr}$  определено в формуле (3.5).

Суммарные деформации равны суперпозиции обоих полей деформации:

$$\Delta\varepsilon_i^{total} = \Delta\varepsilon_i^T + \Delta\varepsilon_i^{cr}.$$



### 3.8 Анализ остаточных напряжений

Используя полученные результаты, можно рассчитать остаточные напряжения в композиционном слое. Из полученных выражений для анализа теплового воздействия, видно, что решение тепловой задачи и подсчет степени кристалличности не зависит от всего последующего анализа. Таким образом, возможно решение отдельно тепловой задачи с последующим моделированием деформирования материала. Такой подход существенно облегчает анализ обратного отклика изделия в случае, например, моделирования задач термоформования.

Далее, меняя входные параметры свойств матрицы и пересчитывая в процессе решения на каждом итерационном шаге эффективные свойства композиционного слоя, можно окончательно восстановить всю историю нагружения материала. Стоит отметить, что жесткостные параметры композиционного слоя, полученные на основании микромеханических формул, определяют только жесткость композита в соответствующий момент теплового цикла, поэтому полученные упругие константы надо рассматривать, как касательные модули и проводить соответствующее суммирование величин напряжений. Схематически, алгоритм получения напряжений можно сформулировать следующим образом:

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = \sigma_{ij}(t) + E_{ijkl}(X_{vc}Tt + \Delta t)(\varepsilon_{kl}(t + \Delta t) - \varepsilon_{kl}(t)),$$

где  $E_{ijkl}(X_{vc}, T, t + \Delta t)$  – жесткость композиционного слоя в конкретный момент температурного цикла.

Для верификации предложенного подхода рассмотрим эксперимент, описанный в работах [134, 227]. Образец из однонаправленного композита

на основе термопластичного связующего ПЭЭК со свободных поверхностей охлаждаются с температуры  $400^{\circ}\text{C}$  с начальной скоростью изменения температуры  $35^{\circ}\text{C}/\text{сек}$ . Подробный график изменения температуры на свободных поверхностях образца приведен на рис. 3.21). В таблице 3.6 приведены характеристики образца. В таблицах 3.7, 3.8 приведены необходимые механические и тепловые свойства образца. Важно отметить, что, следуя работам [225, 327, 327], весовой фактор для подсчета кристалличности  $w_1$  должен быть изменен для моделирования композита на значение 0,61.

Таблица 3.6: Характеристики образца APC2-PEEK

Наименование		APC2-PEEK
Количество слоев		40
Толщина	мм	5.08
Объемное содержание волокна $V_f$		0.6

Таблица 3.7: Механические свойства APC2-PEEK

Продольный модуль волокна	$E_{11f}$	Па	2.35E+11
Поперечный модуль волокна	$E_{22f}$	Па	1.35E+10
Сдвиговой модуль волокна	$G_{12f}$	Па	2.76E+10
Сдвиговой модуль волокна	$G_{13f}$	Па	2.76E+10
Сдвиговой модуль волокна	$G_{23f}$	Па	6.89E+09
Коэффициент Пуассона матрицы	$\nu_m$		3.00E-01
Коэффициент Пуассона волокна	$\nu_{12f}$		2.00E-01
Коэффициент Пуассона волокна	$\nu_{13f}$		2.00E-01
Коэффициент Пуассона волокна	$\nu_{23f}$		5.00E-01
Продольный коэффициент теплового расширения волокна	$k_{11f}$	1/°C	-9.00E-07
Поперечный коэффициент теплового расширения волокна	$k_{22f}$	1/°C	7.20E-06
Коэффициент теплового расширения при $T > T_g$	$k_{m+}$	1/°C	6.70E-04
Коэффициент теплового расширения при $T < T_g$	$k_{m-}$	1/°C	1.10E-04

Температура стеклования матрицы	$T_g$	°C	143
---------------------------------	-------	----	-----

Таблица 3.8: Тепловые характеристики APC2-PEEK

Плотность волокна	$\rho_f$	кг/м <sup>3</sup>	1743.82
Плотность матрицы для теплового расчета	$\rho_m$	кг/м <sup>3</sup>	1300.
Теплоемкость волокна при постоянном давлении	$C_{pf}$	Дж/кг °C	1027.27
Теплоемкость матрицы при постоянном давлении	$C_{pm}$	Дж/кг °C	1340
Продольная теплопроводность волокна	$k_{11f}$	Вт/м °C	8.654
Поперечная теплопроводность волокна	$k_{22f}$	Вт/м °C	0,4
Теплопроводность матрицы	$k_m$	Вт/м °C	0.25

Из (рис.3.21) видно, что экспериментальная и предсказанная моделью диаграммы изменения температуры в центре толщины образца близки. Рассмотрим теперь финальное распределение степени кристалличности по толщине образца PEEK-APC2 с тем же режимом изменения температур (рис. 3.21).

Видно, что максимальное значение степени кристалличности достигается в центре образца и равно 0,3. Большие числа кристалличности могут быть достигнуты только при более медленном охлаждении.

Рассмотрим теперь распределение остаточных напряжений (рис.3.23) и

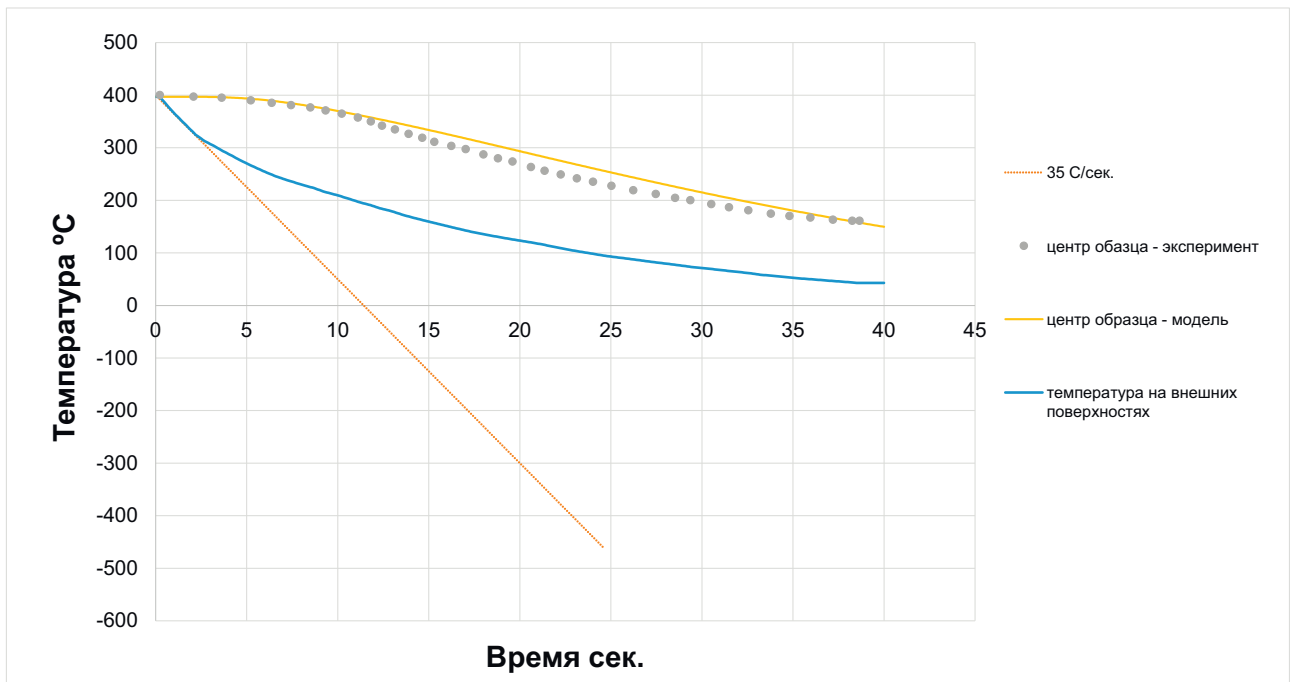


Рис. 3.21: Температурный режим образца РЕЕК-АРС2.

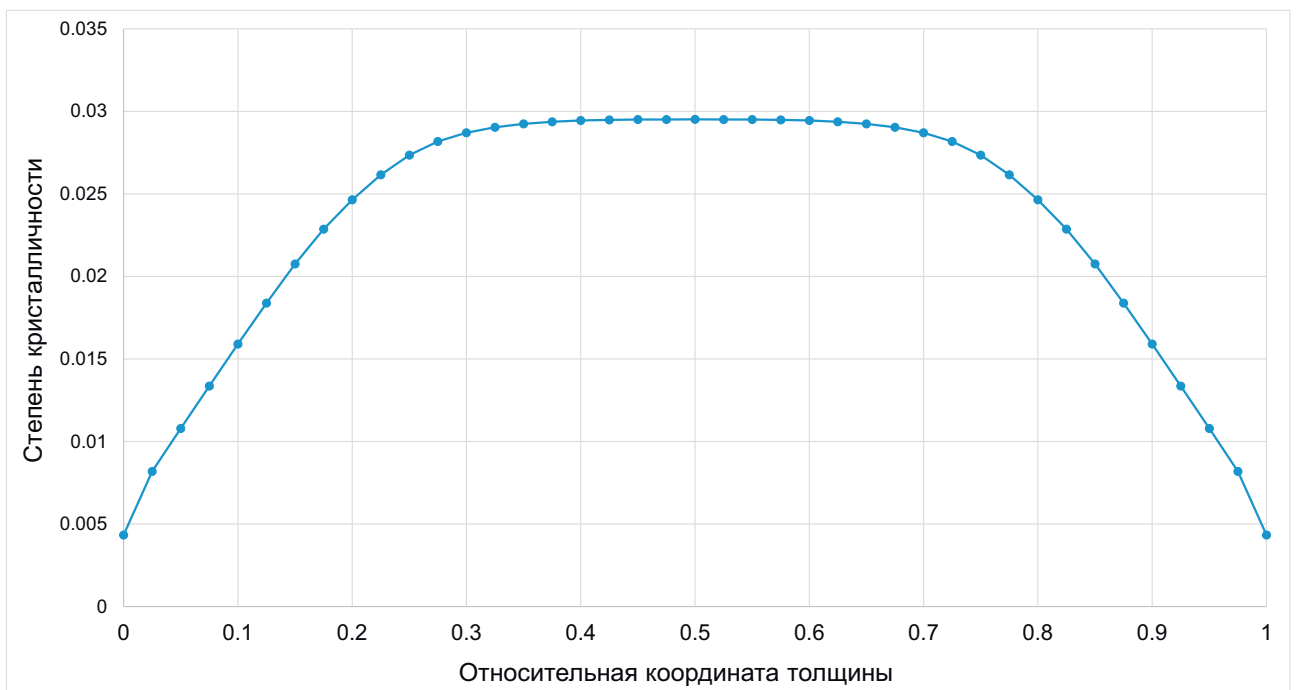


Рис. 3.22: Финальное распределение степени кристалличности по толщине образца РЕЕК-АРС2 соответствующие температурному режиму рис. 3.21.

сравним их с экспериментальными данными [134].

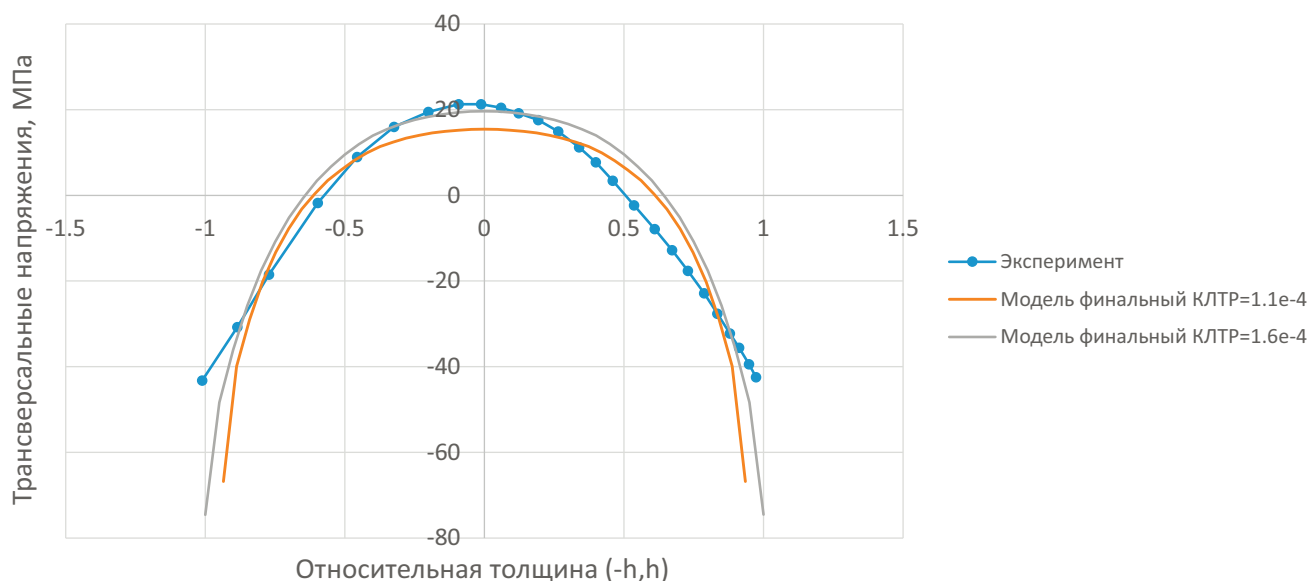


Рис. 3.23: Финальное распределение трансверсальных напряжений по толщине образца РЕЕК-АРС2 соответствующие температурному режиму рис.3.21.

Видно некоторое различие в максимальных растягивающих напряжениях в срединном слое образца, тем не менее, результат по максимальным напряжениям совпадает с результатами моделирования в работе [134], где использовался существенно упрощенный подход. Различия максимальных сжимающих напряжений скорее всего объясняется точностью эксперимента, отступ в модели вглубь образца на 0,5% толщины приводит к падению напряжений на 30%. Тем не менее, если рассмотреть в качестве КЛТР (для  $T < T_g$ ) термопластичной матрицы не среднее значение, полученное из литературных источников [225,227], а значение  $k = 1.6e-4$ , предложенное в работе Золлера [344], то можно получить идеально согласующееся распределение остаточных напряжений.

Таким образом, была проверена вся цепочка предложенных моделей для отверждения композита с термопластичной матрицей. Более того, были

проверены значения входящих в модели констант, которых насчитывается более 50 для материала ПЭЭК.

### 3.9 Оценка повреждений

Основываясь на полученных остаточных напряжениях, следующим необходимым шагом является оценка возможного повреждения связующего в исследуемом композиционном материале. Такую задачу можно решить, используя микромеханический подход, основанный на моделировании ячейки периодичности композитного материала [162]. Рассмотрим решение такой задачи в условиях трансверсального нагружения однонаправленного образца. Такой случай нагружения с высокой долей вероятности можно считать наиболее критичным и наиболее часто встречающимся вариантом в условиях действия остаточных напряжений в слоистом композите. Похожая задача рассмотрена в работе [340] для терморезактивного композита. На рис. 3.24 показана конечно элементная модель рассматриваемой ячейки периодичности. Используются периодические граничные условия таким образом, что нагружение производится непосредственно поперечными деформациями. Расположение волокон выполнено случайным образом с условием соблюдения периодичности и заданного объемного содержания волокон.

Самый сложный вопрос — это выбор модели материала для термопластичного связующего. Используя литературные источники, в случае максимальной степени кристалличности 0,37 и комнатной температуры, можно составить следующую таблицу прочностных параметров термопластичного материала ПЭЭК (таблица 3.9).

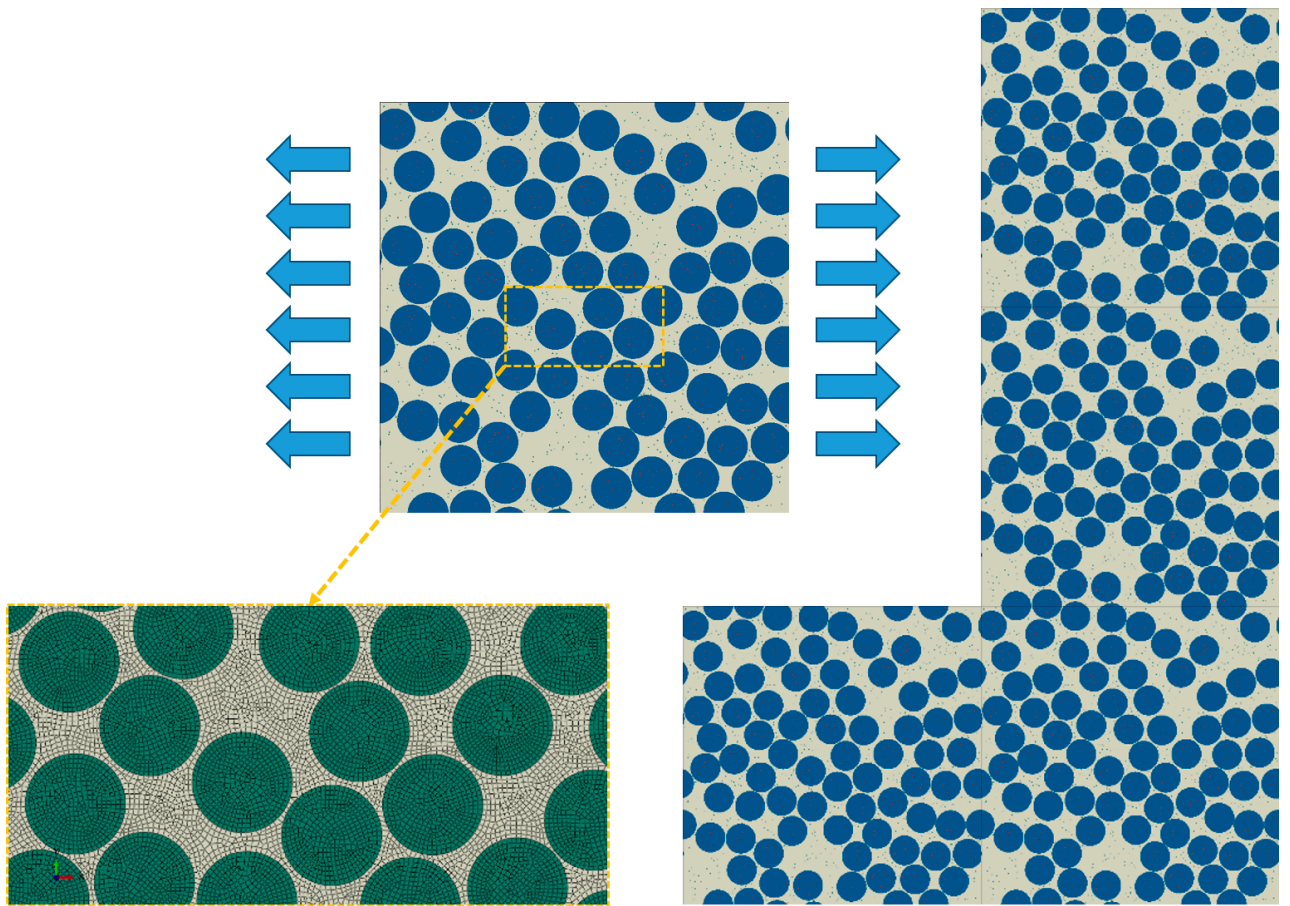


Рис. 3.24: Модель ячейки периодичности однонаправленного композитного слоя, со случайным расположением волокон. Диаметр волокна 5 мкм, относительное объемное содержание волокон 60%.



Таблица 3.9: Прочностные характеристики материала ПЭЭК

Источник:	Cytec [142]	Bearing Works [112]	Victrex TDS 450G [329]	van der Vegt and Govaert [326]
Модуль при растяжении (ГПа)	3.6	4.34	4	3.6
Прочность при растяжении (МПа)	100	110	98	90-100
Предельные деформации при растяжении (%)	70	40	45	50
Изгибный модуль (ГПа)	4.1	4.14	3.8	
Прочность на изгиб*(МПа)	170	172	156	
Прочность при сжатии (МПа)		138		
Модуль при сжатии (ГПа)		3.45		
Прочность на сдвиг (МПа)		55.2		

\*-Напряжения при которых достигнута деформация 5%

Из таблицы 3.9 видно, что материал является разнопрочным и разномодульным. Предположим, что разница модулей в зависимости от вида нагружения не играет существенной роли для моделирования выбранного нами предельного состояния ячейки, и положим модуль жесткости равным 3,6 ГПа. Чувствительность прочностных характеристик к виду напряженного

состояния исследуем с использованием модели пластичности с критерием, предложенным в главе 2 в обобщенном виде с зависимостью от параметра  $\xi$  (2.1). Запишем критерий в следующем виде:

$$f(\xi)/k = 1/\sigma_0. \quad (3.6)$$

Теперь предположим, что пластичность начинается примерно с 80% от разрушающей нагрузки (рис.3.25). Расположим (рис. 3.26) значения  $1/\sigma_0$

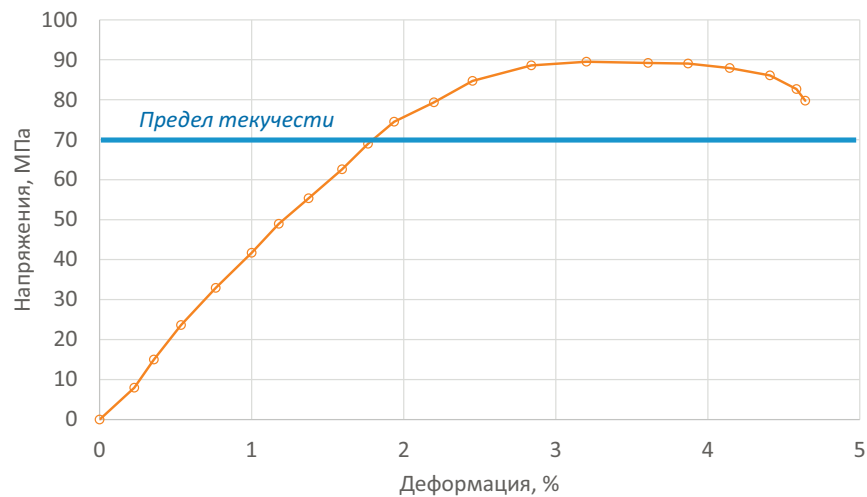


Рис. 3.25: Диаграмма одноосного растяжения образца материала ПЭЭК [171].

для экспериментов из таблицы 3.9 для растяжения, сжатия и сдвига, где компоненты напряжений умножены на 0.8 (примерный переход к пластичности), по вертикальной оси, и соответствующие значения параметра  $\xi$  по горизонтальной. Например, разрушающие напряжения при сдвиге  $\sigma_{12}^{Разр.} = 55\text{МПа}$ , тогда примерный предел пластичности оценим как  $\sigma_{12}^{Пласт.} = 55 \times 0.8\text{МПа} = 44\text{МПа}$ , далее соответствующее значение  $\sigma_0 = \sigma_{12}^{Пласт.} \times \sqrt{3} = 76.21\text{МПа}$ , после чего,  $1/\sigma_0 = 0.13\text{МПа}^{-1}$ , при этом, параметр вида напряженного состояния для такого типа нагрузки

$\xi = 0$ , и окончательно точка на диаграмме  $(1/\sigma_0, \xi) = (0.13, 0)$ . Таким об-

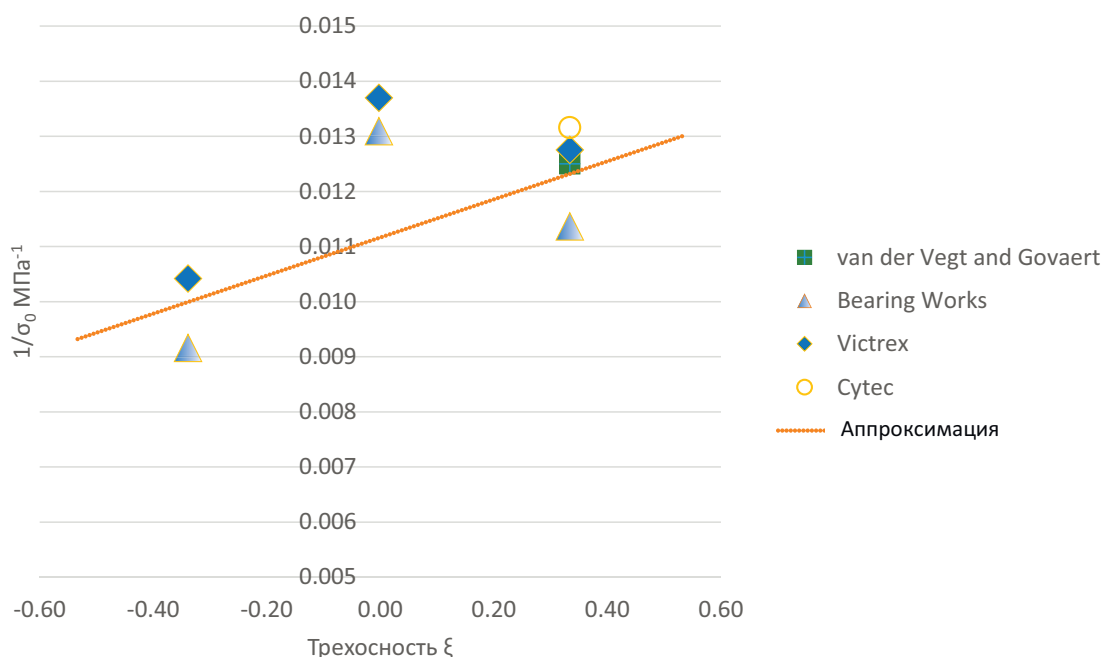


Рис. 3.26: Значения величин  $1/\sigma_0$  в зависимости от соответствующих значений  $\xi$ ; точки соответствуют данным таблицы 3.9, где компоненты напряжений снижены для аппроксимации пластичности.

разом, на диаграмме рис. 3.26 представлены данные о чувствительности пластических свойств к виду напряженного состояния для рассматриваемого материала, и характеризуют зависимость  $f(\xi)/k$  в уравнении (3.6). На полученной диаграмме (рис. 3.26) необходимо остановиться подробнее. Такая диаграмма наглядно демонстрирует с одной стороны чувствительность пластических свойств материала к параметру  $\xi$ , а с другой, представляет экспериментальные данные, которые имеются для исследуемого материала. Кроме того, такая диаграмма позволяет понять насколько сложная модель пластичности нам необходима, если не удастся приблизить экспериментальные данные при помощи монотонной функции  $f(\xi)$ , то, необходимо привлекать параметр Лоде, либо рассматривать определенную зависимость и точно понимать, в каком диапазоне видов нагружения полученный в ито-

ге критерий имеет приемлемую точность. В качестве первого шага резонно рассмотреть линейную аппроксимацию таких свойств, и воспользоваться вариантом  $f(\xi) = 1 + C\xi$  для критерия пластичности (2.1). Константы  $C$  и  $k$ , можно определить из экспериментов на сжатие и растяжение. В качестве параметра упрочнения рассмотрим вариант, реализованный на основе работы пластических деформаций ( $\varepsilon_{ij}^{pl}$ ) в следующей форме:

$$\varepsilon_{eq}^{pl} = \int \frac{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{pl}}{\sigma^T},$$

где  $\sigma^T$  – это диаграмма упрочнения, полученная, например, из эксперимента на растяжение, подобная той, что приведена на рис. 3.25. Окончательно, критерий пластичности можно записать в следующем виде:

$$\sigma_0 (1 + C\xi) = k (\varepsilon_{eq}^{pl}).$$

Далее, имея сформулированную модель пластичности, необходимо ввести критерий разрушения материала. Рассмотрим критерий разрушения, основанный на следующем параметре, в который входит интеграл от эквивалентных пластических деформаций [196]:

$$D^{pl} = \int \frac{d\varepsilon_{eq}^{pl}}{\varepsilon_D^{pl}(\xi)}, \quad (3.7)$$

здесь параметр  $\varepsilon_D^{pl}(\xi)$  зависит от параметра  $\xi$ , что позволяет смоделировать накопление большего количества повреждений в условиях действия растягивающих напряжений и меньше при сжимающих. В качестве критерия

полного разрушения материала используем следующее условие:

$$D^{pl}=1. \quad (3.8)$$

Введенный параметр поврежденности, в нашем случае, не будет оказывать влияния на жесткость материала при значениях меньше единицы, но при достижении единицы (т.е. выполнении условия (3.8)), жесткость обнуляется. Предложенный набор моделей материала по своей форме является стандартным для системы конечно-элементного моделирования Abaqus, что позволяет производить расчеты без написания дополнительных программ. В таблице 3.10 приведен набор выбранных параметров для расчета прочности исследуемого материала.

Таблица 3.10: Параметры материала ПЭЭК для моделирования в Abaqus

Константы материала		Упрочнение при растяжении		Деформации разрушения	
$E$ , ГПа	3.6	$\sigma^T$ , МПа	$\varepsilon_{eq}^{pl}$	$\xi$	$\varepsilon_D^{pl}$
$\nu$	0.3	77	0	-0.333	1.5
$k_0$ , МПа	89.8	81	0.1	0	1
$C$	0.5	100	0.5	0.333	0.7
Угол трения, $\psi$ , °	27	101	2	0.5	0.6

### 3.9.1 Анализ прочности на изгиб

Довольно часто производители материала предоставляют данные, полученные из эксперимента на изгиб (таблица 3.9), как правило, это модуль Юнга или предел прочности. Так как, такая информация зачастую доступна, по-видимому, это связано с простотой эксперимента, было бы ценно про-

анализировать и понять какую информацию для моделирования материала можно получить из такого типа нагружения тестового образца. На первый взгляд, казалось бы, что материал образца в условиях изгиба находится либо в условиях сжатия, либо в условиях растяжения, но тем не менее, учитывая, что исследуемый материал является как разномодульным, так и разнопрочным, построить аналитическое решение, как правило, не удастся. В связи с этим, проанализируем численно, с подробными сопоставлением с деталями эксперимента определение прочности при изгибе. Для этого рассмотрим стандарт на проведение эксперимента по определению прочности материала в условиях трех-точечного изгиба — ASTM D790 [97]. На рис. 3.27 показана схема нагружения образца и рекомендуемые размеры, которые были выбраны для моделирования. Образец устанавливается на

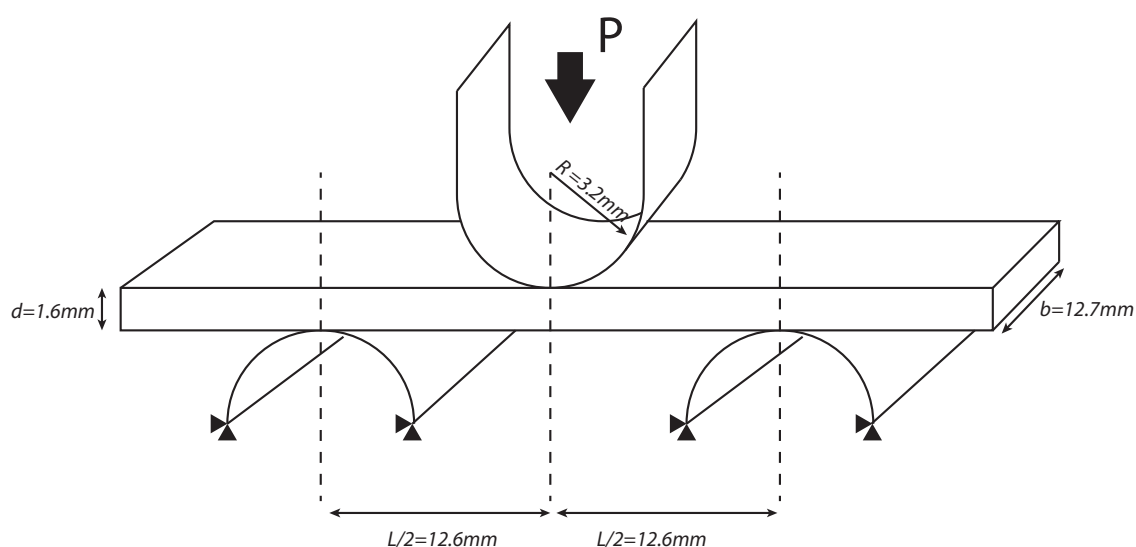


Рис. 3.27: Схема нагружения образца согласно ASTM D790 [97].

два цилиндра и нагружается третьим центральным цилиндром с противоположной стороны. В модели цилиндры реализованы жесткими телами, при этом рассматривалась контактная задача. Образец моделировался объемными твердыми элементами при помощи определяющих соотношений,

приведенных в предыдущем разделе, с константами и функциональными зависимостями из таблицы 3.10. На рис. 3.28 продемонстрирован результат моделирования. Интересным является тот факт, что все параметры имеют

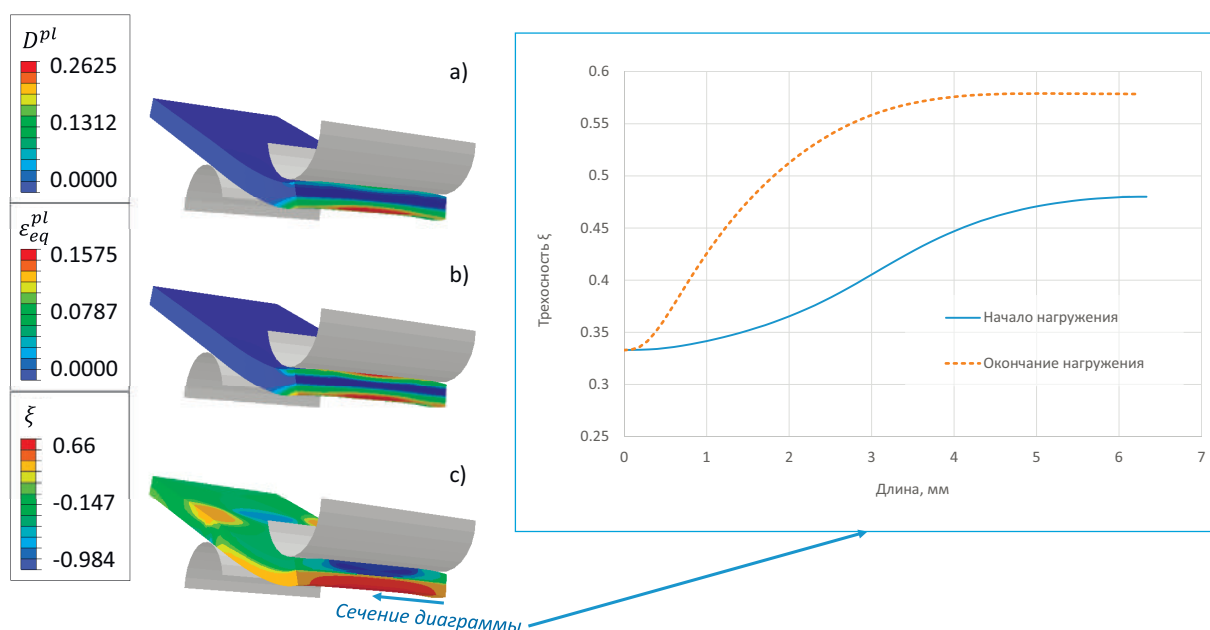


Рис. 3.28: Распределение прочностных параметров в центре растягиваемой области образца: а) параметр поврежденности –  $\varepsilon_D^{pl}$ , б) эквивалентные пластические деформации –  $D^{pl}$ , в) параметр трехосности –  $\xi$ .

характерное увеличение с максимумом в центре растягиваемой поверхности образца. Особенно следует отметить характер изменения параметра  $\xi$ , который в начале нагружения, в условиях упругости в максимуме достигает значения практически равного 0.5, а при развитых пластических деформациях увеличивается практически до 0.6, что весьма близко к условию равномерного двухосного напряженного состояния. Это можно объяснить с точки зрения коэффициента Пуассона, при сжатии образец стремится расширяться в трансверсальном направлении, а при растяжении наоборот сжаться, что приводит к появлению трансверсальных напряжений при изгибе. Таким образом, мы получаем возможность проводить эксперименты на двухосное нагружение материалов, при условии, что значения коэффи-

циента Пуассона не равны нулю, используя при этом элементарную форму образцов и стандартные испытательные машины. Проанализируем теперь значение предельной нагрузки, полученной в эксперименте и предсказанной в моделировании. Согласно стандарту ASTM D790 [97], напряжения и деформации рассчитываются следующим образом:

$$\sigma^* = \left( \frac{3PL}{2bd^2} \right) \left[ 1 + 6 \left( \frac{u}{L} \right)^2 - 4 \left( \frac{d}{L} \right) \left( \frac{u}{L} \right) \right], \quad (3.9)$$

$$\varepsilon^* = 6ud/L^2.$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $d$  и  $L$  — геометрические параметры и  $P$  — сила нагружения, определены на рис. 3.27, при этом  $u$  — максимальный прогиб измеряемый в центре образца. Стоит отметить, что данный стандарт рассчитан на классический материал, для которого жесткость и прочность при растяжении и сжатии совпадает, поэтому в стандарте предполагалось, что вид кривой  $\sigma^* \sim \varepsilon^*$  будет совпадать с диаграммой растяжения материала образца. С другой стороны, данный эксперимент полезен с точки зрения

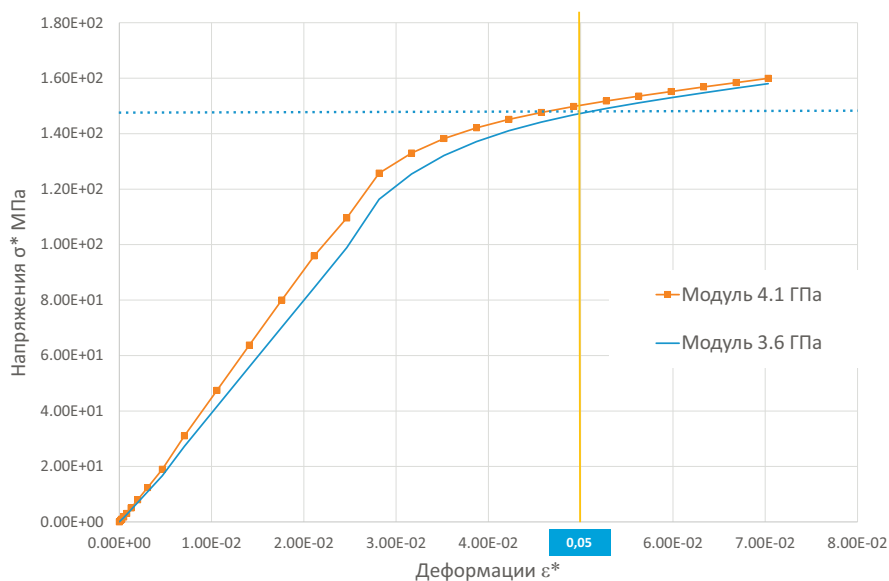


Рис. 3.29: Диаграмма  $\sigma^* \sim \varepsilon^*$  из эксперимента на изгиб.



оценки свойств материала, если в эксперименте получаются значения, совпадающие с аналогичными значениями в эксперименте на растяжение, то для изотропного материала, это означает наиболее вероятную возможность описания статического деформирования при помощи классических подходов линейно-упругой среды с условием пластичности Мизеса.

Рассмотрим диаграмму  $\sigma^* \sim \varepsilon^*$  полученную при помощи формулы (3.9) на основе значений силы  $P$  и прогиба  $u$ , измеренных в результате численного моделирования (рис. 3.29).

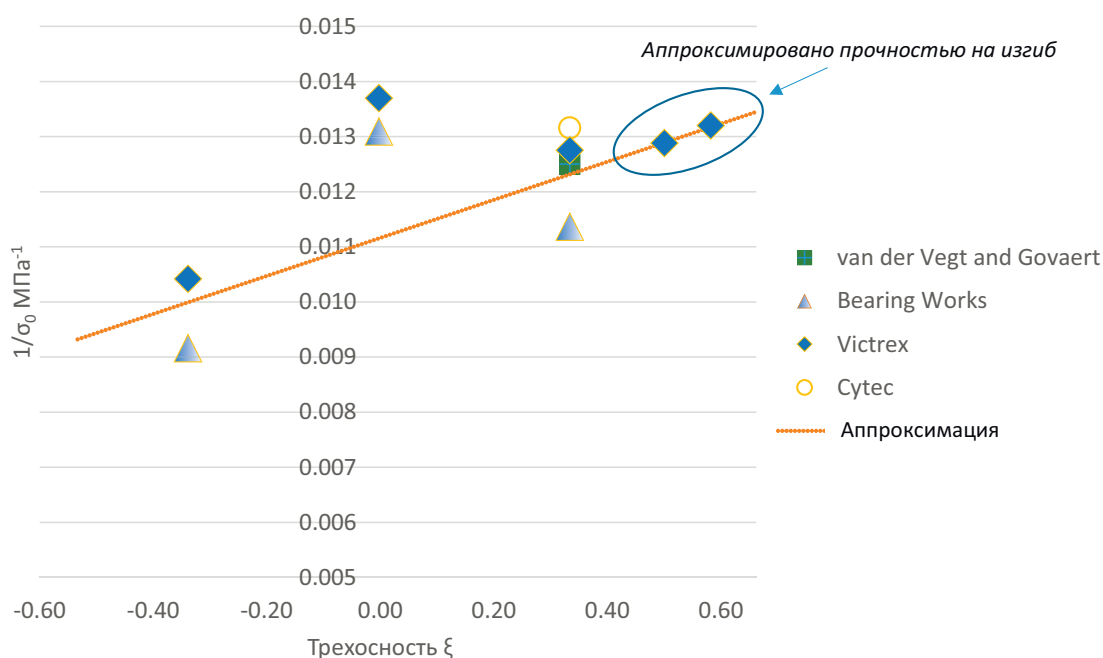


Рис. 3.30: Значения величин  $1/\sigma_0$  в зависимости от соответствующих значений  $\xi$ .

На диаграмме (рис. 3.29) отображено два результата с различными модулями: 4.1 ГПа — получен из эксперимента на изгиб, 3.6 ГПа — получен из эксперимента на растяжение (таблица 3.9). Видно, что различия значений предельных нагрузок несущественны. Материал ПЭЭК имеет большие деформации разрушения при растяжении  $\sim 50 - 70\%$ , что не предусматривается стандартом ASTM D790, и по правилам такого стандарта

разрушающим напряжением считается значение  $\sigma^*$  соответствующие 5% деформаций. Вертикальная линия на рис.3.29 соответствует порогу по деформациям в 5%, горизонтальная предсказанному предельному значению напряжений  $\sigma^* = 150\text{МПа}$ , что является близким к результату для материала компании Vicktrex [329] (таблица 3.9). Различия с другими производителями и источниками могут быть связаны с пренебрежением порога по деформациям в 5%, а также с другим способом измерения изгибной прочности, например, при помощи стандарта ISO178. Таким образом, так как нам известно, что разрушение образца при изгибе полностью определяется характеристиками материала при типе нагружения, соответствующего значениям параметра  $\xi = 0.5 \sim 0.6$ , то можно расширить диаграмму (рис. 3.26) до соответствующих значений (рис. 3.30).

### 3.9.2 Трансверсальное нагружение однонаправленного композита

Теперь, имея модель пластичности и разрушения с входными данными из таблицы 3.10, вернемся к модели ячейки периодичности, представленной на рис. 3.24. Характерный размер элементов составляет 0.25мк, модель реализована при помощи плоских элементов для условия плоской деформации. Упругие свойства для моделирования волокна представлены в таблице 3.11 и заимствованы из [225].

Таблица 3.11: Механические свойства волокна

$E_{11}$ (ГПа)	$E_{22} = E_{33}$ (ГПа)	$G_{12} = G_{13} = G_{23}$ (ГПа)	$\nu_{12} = \nu_{13}$	$\nu_{23}$
235	13.5	27.6	0.2	0.5

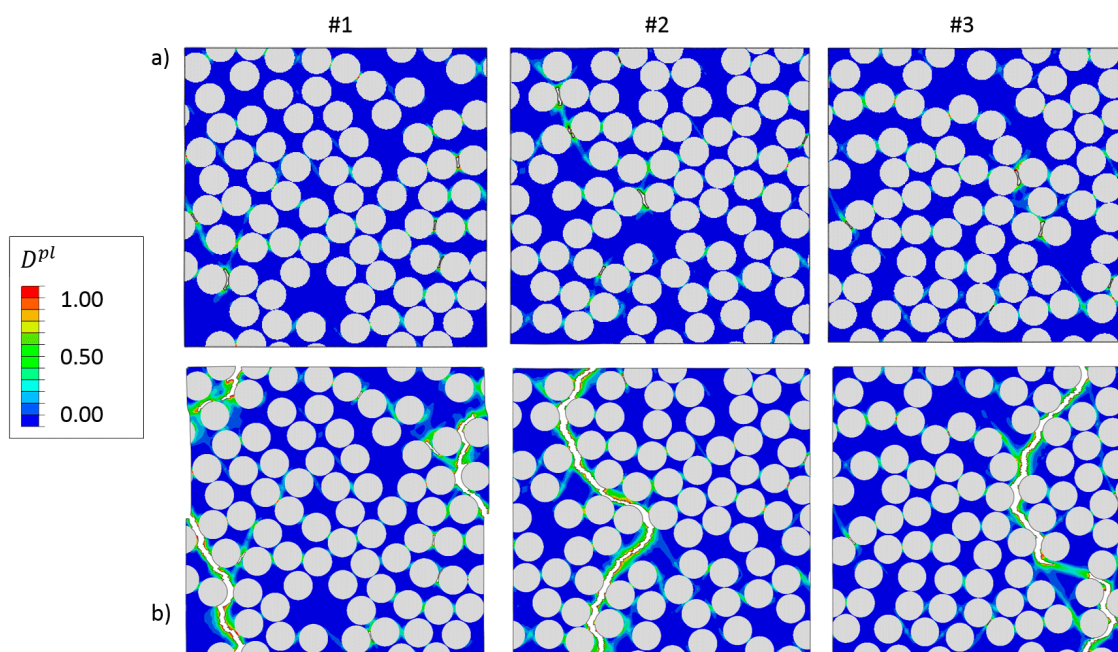


Рис. 3.31: Параметр повреждений  $D^{pl}$  для различных ячеек периодичности при трансверсальном нагружении. а) соответствует максимальным напряжениям, б) соответствует максимальным деформациям ( $\sim 2\%$ ).

На рис. 3.31 показаны результаты моделирования ячеек периодичности с тремя вариантами нерегулярной укладки волокон. В качестве палитры результатов используется параметр  $D^{pl}$ , определенный в (3.7). На рис. 3.31 показаны две стадии деформирования, первая отвечает максимальной нагрузке, вторая – максимальным деформациям полученным при моделировании.

Размер ячеек выбирался из соображений количества попавших в область волокон, которых насчитывается  $\sim 75$ , что существенно больше числа 50, которое статистически оценено в работах [260, 261, 340]. Тем не менее, в этих работах показано, что число 50 хорошо оценивает результат до появления трещин и разрушений в модели, поэтому для исследования влияния величины ячейки на результат смоделируем ячейку #1, симметрично размноженную до двойного размера таким образом, чтобы в модели

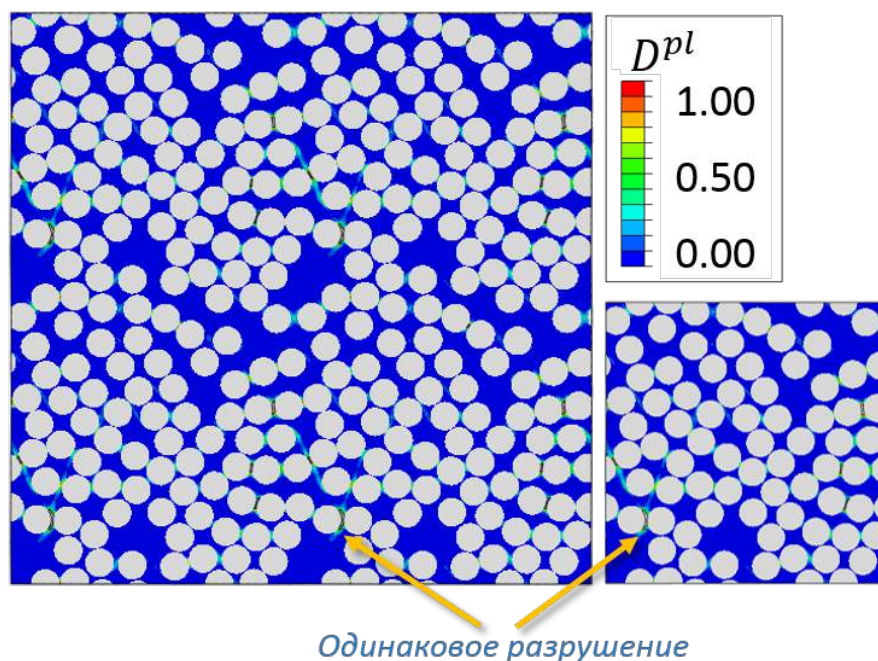


Рис. 3.32: Результат моделирования увеличенной ячейки #1 (слева), одинарной (справа), стадия максимальных напряжений.

было 4 одинаковые ячейки. На рис. 3.32 продемонстрирован результат моделирования увеличенной ячейки и одинарной на стадии максимальных напряжений. Видно, что картина повреждений на увеличенной ячейке материала полностью периодична и совпадает с распределением повреждений на одинарном представительном объеме материала. Рассмотрим диаграммы, полученные при рассмотрении трех различных вариантов ячеек и с дополнительной увеличенной ячейки #1 (рис. 3.33). Видно, что диаграммы  $\sigma_{22} \sim \varepsilon_{22}$  совпадают до достижения максимальных значений напряжений, после чего, в закритической зоне наблюдается некоторое расхождение. Совпадение диаграмм ячейки #1 и увеличенного варианта ( $4 \times \#1$ ), является еще одним подтверждением правильности выбора размера ячеек для моделирования. Тем не менее, важным является именно прочностная оценка композита в целом. Также, на рис. 3.33 отмечена вертикальная

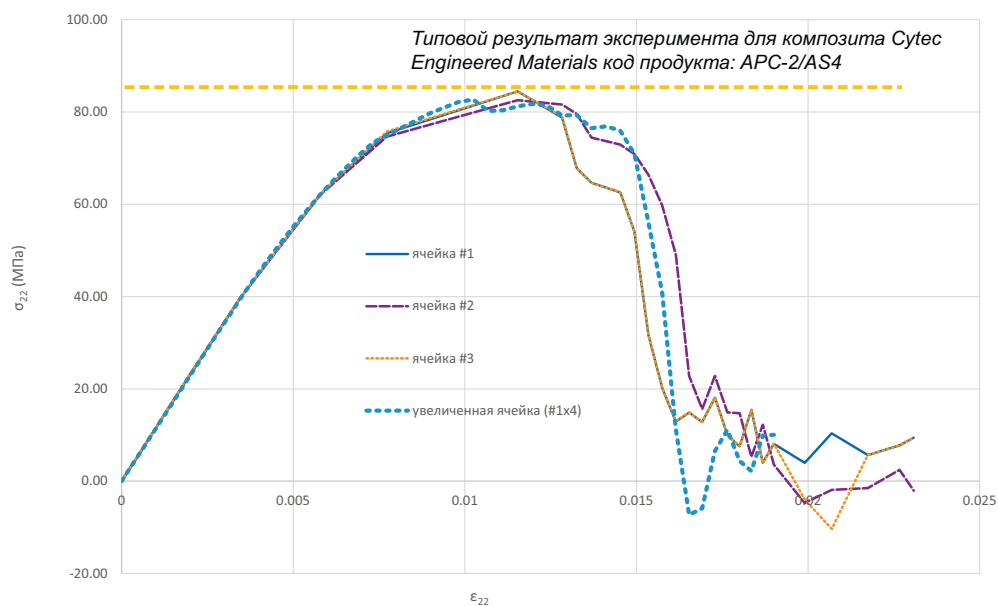


Рис. 3.33: Диаграммы растяжения  $\sigma_{22} \sim \varepsilon_{22}$ , полученные при моделировании ячеек периодичности.

прерывистая черта, соответствующая типовым значениям трансверсальной прочности композита фирмы Cytec [142], с аналогичным волокном и типом связующего. Видно, что диаграммы, полученные при помощи моделирования на основе выбранного набора определяющих соотношений, практически идеально предсказывают это прочностное значение.

Таким образом, был проверен предложенный микромеханический подход для оценки прочностных характеристик композиционного материала на основе критерия пластичности с линейной зависимостью от параметра вида напряженного состояния  $\xi$ .

### 3.9.3 Анализ прочности интерфейса

В предыдущем анализе, пренебрегалось прочностью интерфейса между волокном и связующем. Тем не менее, результат показал хорошую корреляцию с экспериментом. Анализ прочностных свойств интерфейса приводит к

некоторому, на первый взгляд, противоречию. Дело в том, что в работе Гао и Кима [171] проводится экспериментальное исследование прочности интерфейса в случае вырыва волокна из термопластичного связующего на основе исследуемого полимера ПЭЭК. По разным оценкам они получили предельные значения для прочности интерфейса на сдвиг 80МПа и 120МПа. Противоречие состоит в том, что по экспериментальным данным прочность материала на сдвиг составляет 55МПа (таблица 3.9), что говорит в пользу пренебрежения введением в микромеханическую модель прочности интерфейса, однако остается непонятным, каким образом были достигнуты столь высокие значения в эксперименте. Более того, авторы утверждают и демонстрируют изображения рентгена, что волокна вырывались чистой поверхностью, без кусков материала связующего на поверхности волокна, что означает именно прочность интерфейса, а не окружающего материала. Чтобы снять подобные противоречия, проведем численный анализ такого

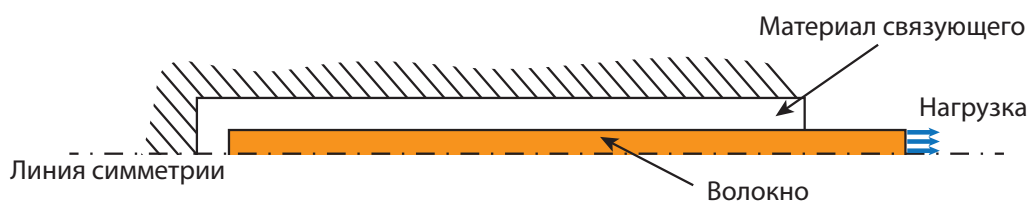


Рис. 3.34: Схема модели для анализа прочности интерфейса волокно-связующее.

эксперимента. На рис. 3.34 показана схема модели волокна и окружающего материала. Задача решается в осесимметричной постановке. Модель материала волокна и связующего аналогична предыдущему анализу с соответствующими входными параметрами, представленными в таблицах 3.10 и 3.11 соответственно. На рис. 3.35 показана используемая в расчете сетка

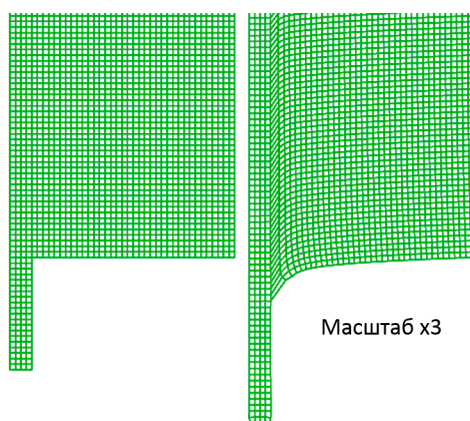


Рис. 3.35: Сетка используемая в расчете в изначальном состоянии (слева) и в деформированном (справа) с масштабом перемещений  $\times 3$ .

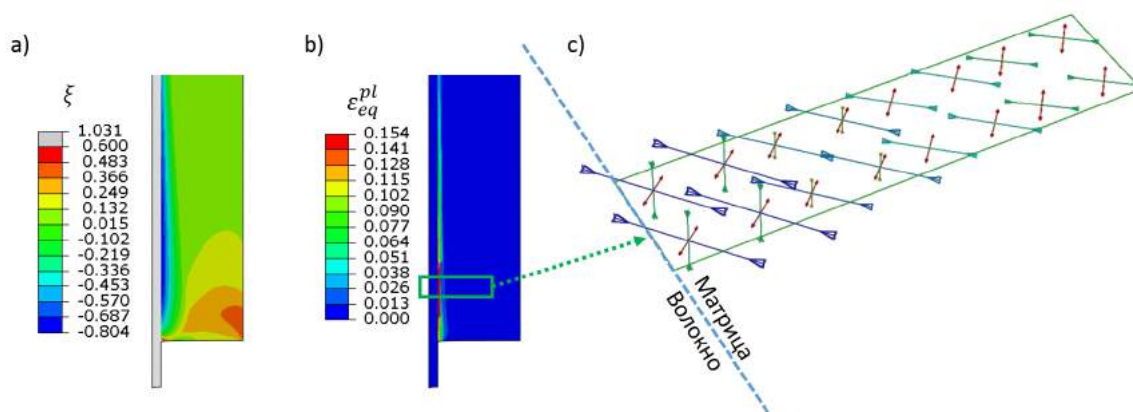


Рис. 3.36: Распределение параметров: а)  $\xi$ , б)  $\varepsilon_{eq}^{pl}$ ; в) в векторном виде представлены компоненты главных напряжений.

в начальном и деформируемом состоянии в увеличенном масштабе перемещений. Далее, на рис. 3.36 показаны результаты моделирования. Видно, что в области соединения материала волокна и связующего образуется интенсивная область пластичности. Более того, анализ распределения параметра трехосности  $\xi$  показывает, что в области интерфейса значения существенно ниже чем в целом в модели.

Построим диаграммы изменения эквивалентных пластических деформаций  $\varepsilon_{eq}^{pl}$  и параметра трехосности напряжений  $\xi$  в точке связующего близ-

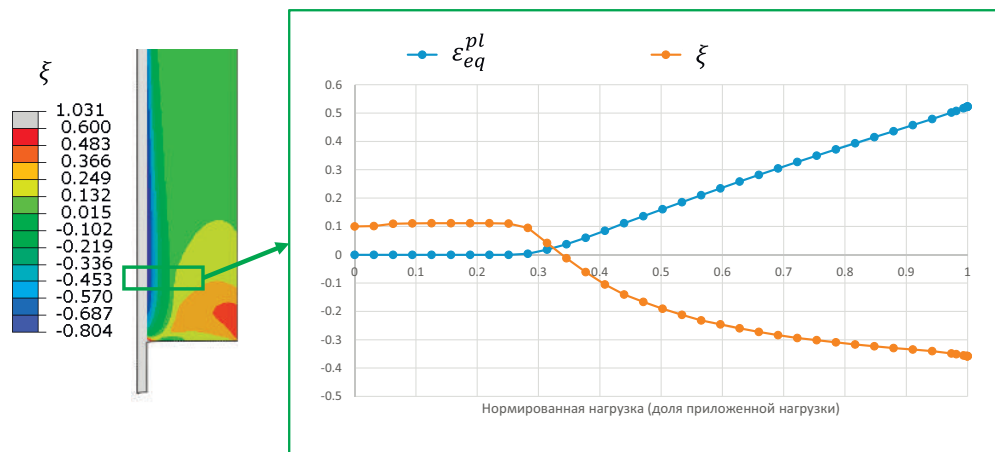


Рис. 3.37: Диаграмма изменения параметров  $\varepsilon_{eq}^{pl}$  и  $\xi$  в зависимости от величины нагрузки.

кой к волокну (рис. 3.37). Видно, что на начальном этапе пока параметр  $\varepsilon_{eq}^{pl} = 0$ , то есть до тех пор, пока материал упругий, значение параметра  $\xi = 0.1$  что близко к сдвиговому нагружению. При этом рост пластических деформаций снижает величину параметра  $\xi$  таким образом, что чем больше значение  $\varepsilon_{eq}^{pl}$ , тем меньше значение параметра  $\xi$ . Стоит отметить, что значения параметра  $\xi$  становятся ниже  $-1/3$ , что означает появление существенного сжатия материала связующего в области интерфейса.

Таким образом, при вытягивании волокна связующее теряет жесткость в области интерфейса, что приводит к обжатию волокна, или, другими словами, рост пластических деформаций меняет вид НДС связующего в сторону сжатия. Сжатие материала связующего в окрестности интерфейса приводит к дополнительному упрочнению материала, так как для низких значений параметра  $\xi$  используемый критерий демонстрирует большую прочность (рис. 3.37 ). Таким образом, вероятно, прочность интерфейса оказывается ниже прочности упрочняющегося материала в области интерфейса, и волокно при отрыве выходит без остатков материала связующего на поверхности.



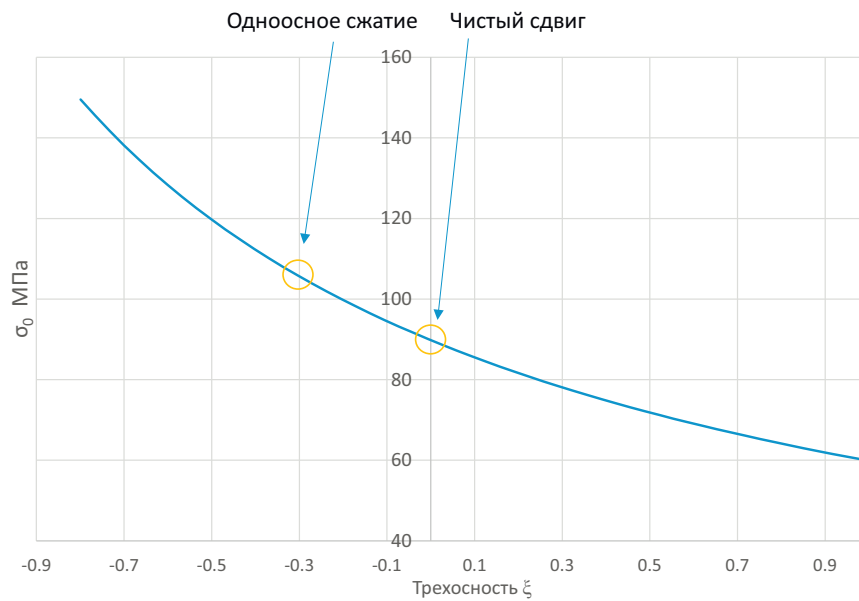


Рис. 3.38: Зависимость предельной интенсивности напряжений от параметра вида НДС для материала ПЭЭК.

### 3.9.4 Вид напряженного состояния в матрице и интерфейсе при трансверсальном нагружении однонаправленного композита

Поскольку микромеханическая модель на основе предложенных определяющих соотношений демонстрирует хорошую корреляцию с экспериментальными данными, интересно проанализировать какие типы нагружения испытывает материал связующего при трансверсальном нагружении композита. Рассмотрим упругую стадию нагружения материала и построим для трех рассматриваемых ячеек гистограммы, где по горизонтальной оси откладывается параметр вида напряженного состояния  $\xi$ , а по вертикали процент площади в сечении моделируемых ячеек материала связующего, испытывающего такой тип нагрузки (рис. 3.39 - 3.41). На рис. 3.42 все гистограммы показаны на одной координатной оси. Видно, что большая часть материала испытывает тип нагружения, соответствующего значению

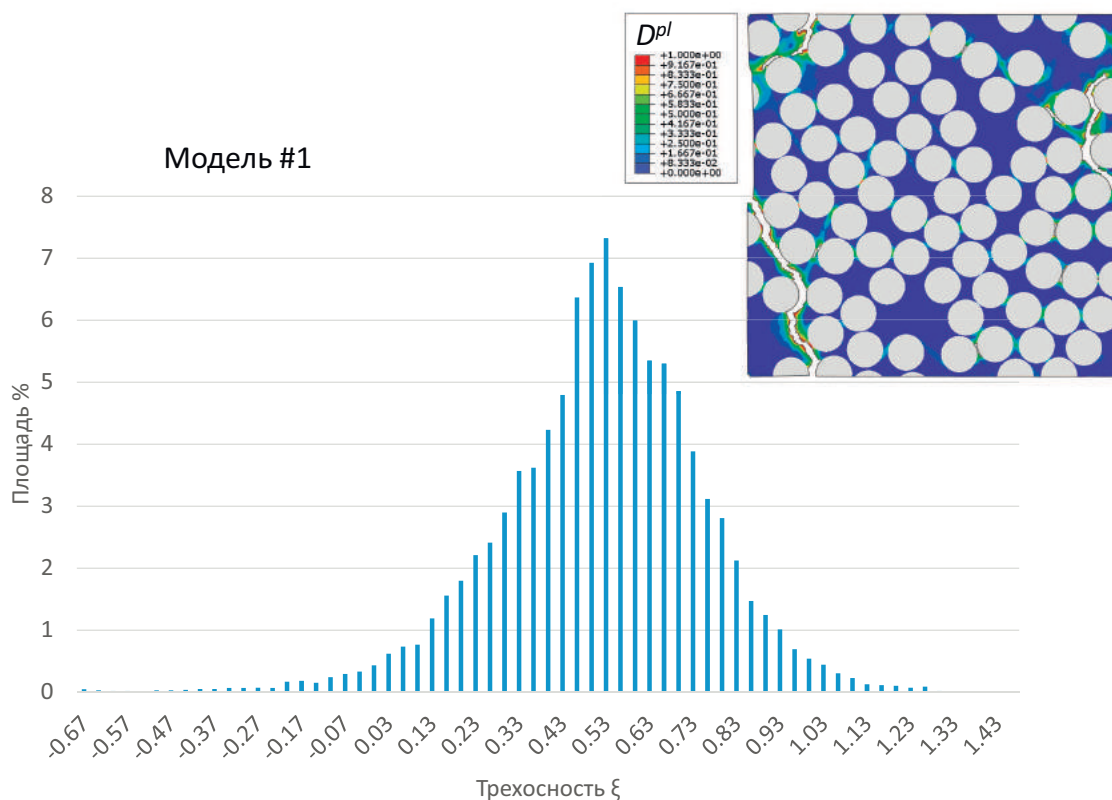


Рис. 3.39: Количество материала нагруженное в соответствии с параметром трехосности  $\xi$  для ячейки #1.

параметра  $\xi = 0.55$ , однако стоит отметить, что модель #2 имеет некоторое отклонение до значения  $\xi = 0.65$ . Тем не менее, важным является тот факт, что вид нагрузки связующего, в основном, во всех вариантах ячеек, близок к двухосному растяжению. Данный факт говорит о важности испытаний материала матрицы композита на сложное нагружение. Также следует отметить, что близкий вид нагружения был получен при анализе эксперимента на трех-точечный изгиб, рассмотренный в предыдущем разделе. Это позволяет строить инженерные прочностные методики, основанные на микромеханических моделях и существенно недорогих испытаниях.

Аналогично материалу связующего, возможно рассмотреть вид нагрузки на интерфейсе с волокном. Если в центре каждого волокна ввести цилиндрическую систему координат, то на прилегающих к волокну элементах

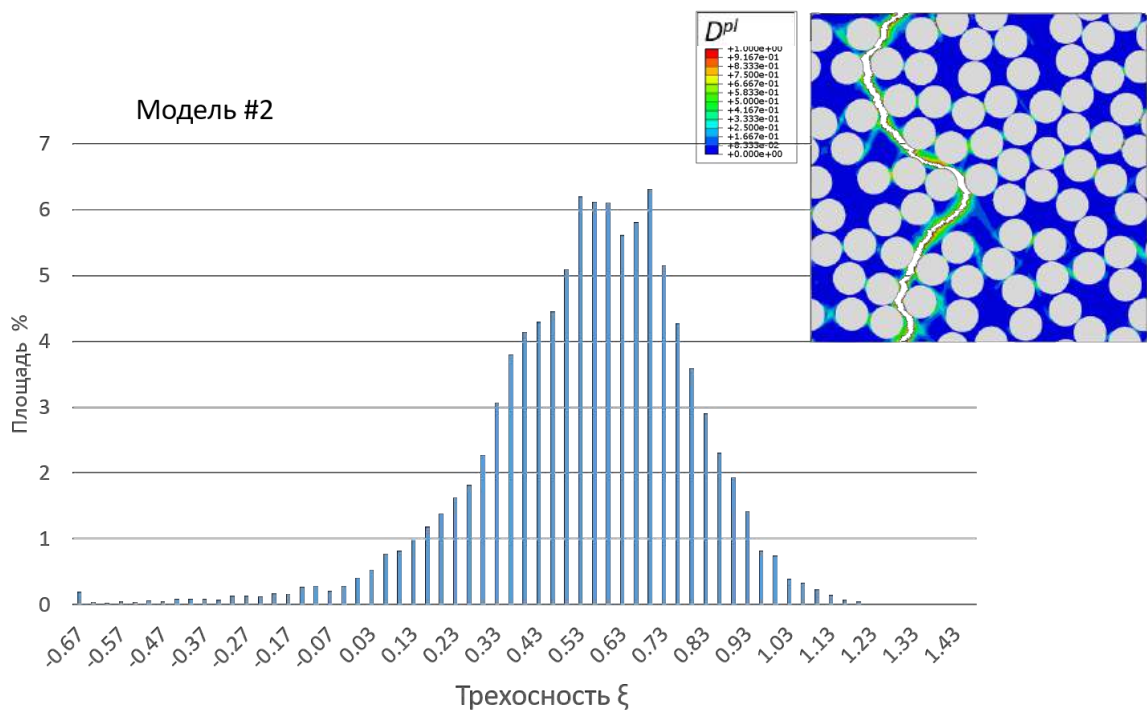


Рис. 3.40: Количество материала нагруженное в соответствии с параметром трехосности  $\xi$  для ячейки #2.

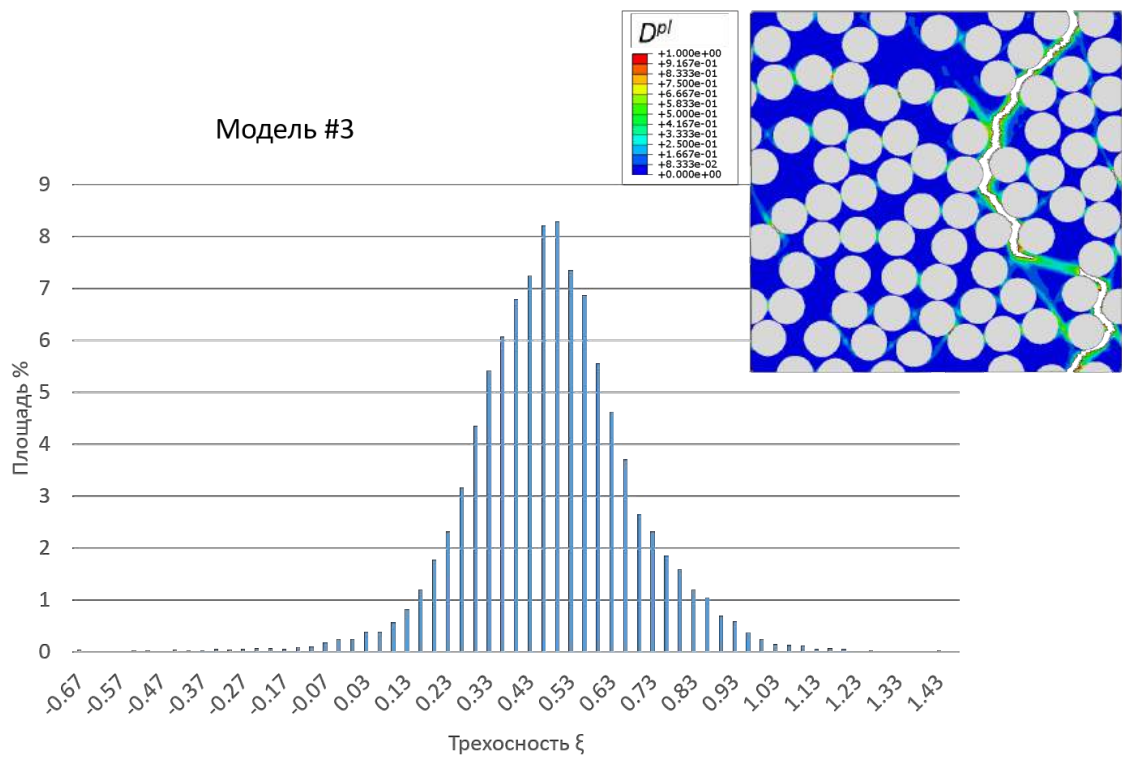


Рис. 3.41: Количество материала нагруженное в соответствии с параметром трехосности  $\xi$  для ячейки #3.

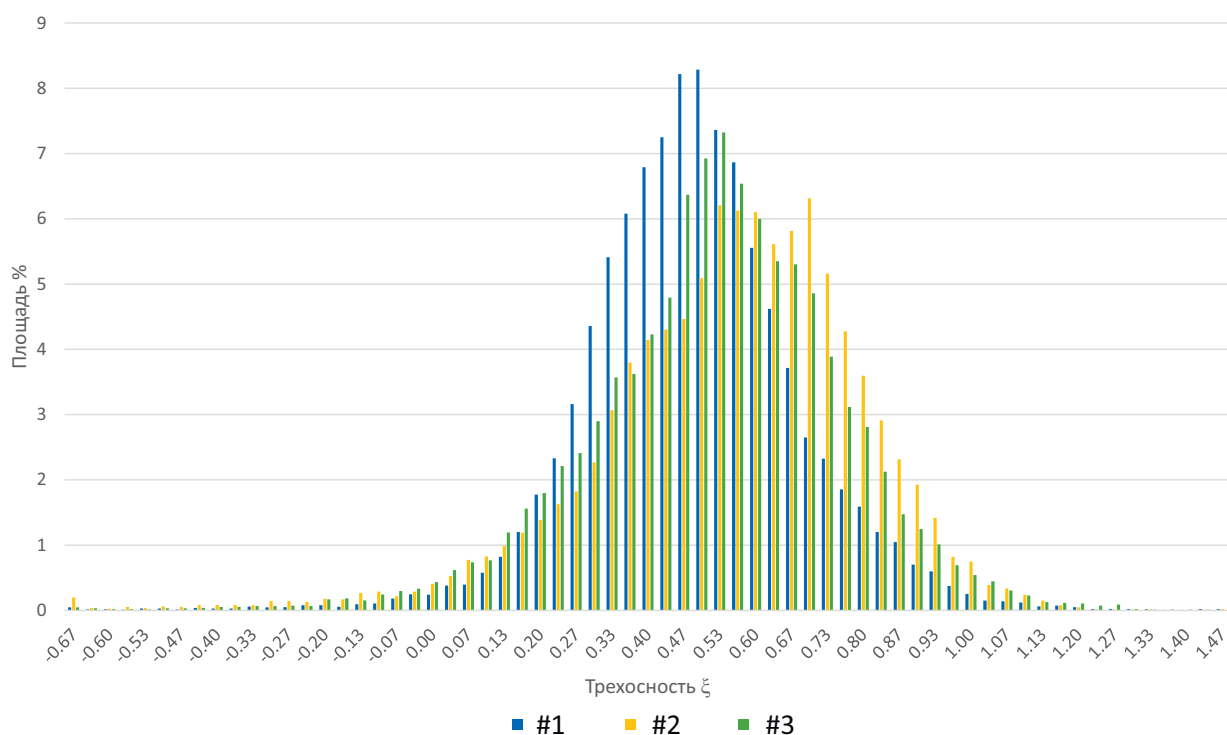


Рис. 3.42: Количество материала нагруженное в соответствии с параметром  $\xi$  для ячеек #1, #2 и #3.

матрицы можно вывести значения напряжений отрыва  $\sigma_n$  и сдвига  $\tau_n$ . На рис. 3.43 показаны точки, полученные таким образом. Если проанализировать полученные значения, видно, что наиболее опасными являются точки с большим чистым сдвигом, и сдвигом в комбинации с отрывом. Можно формализовать наиболее опасные и интересные сочетания отрывных и сдвиговых напряжений следующим образом:

$$0 < \sigma_n / \tau_n \leq 1. \quad (3.10)$$

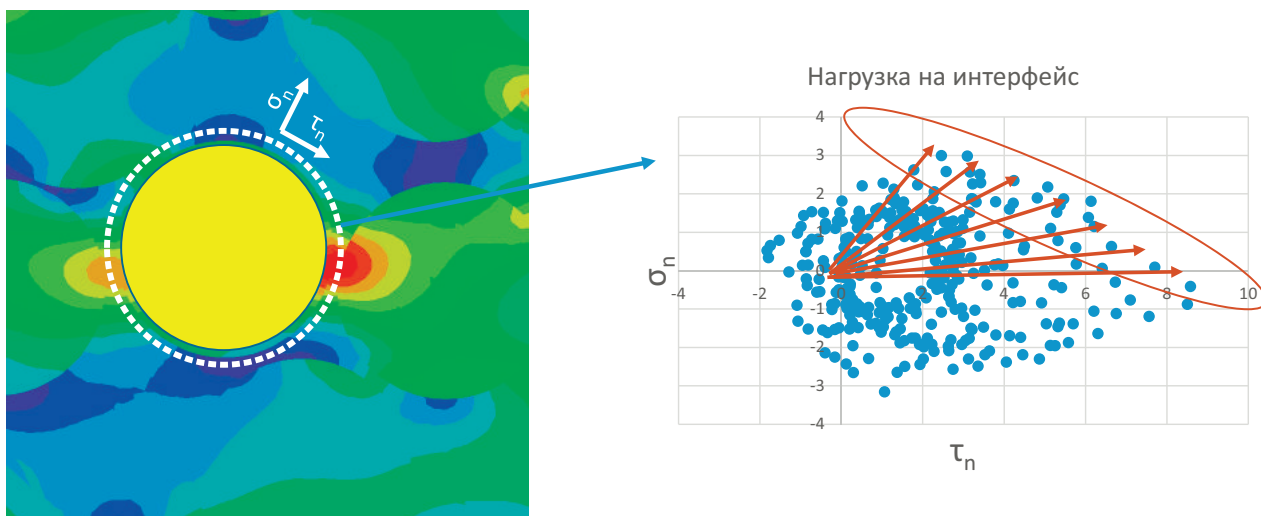


Рис. 3.43: Виды нагрузки на интерфейс при трансверсальном нагружении композита.

### 3.10 Механические характеристики в зависимости от температуры и степени кристалличности

В предыдущем разделе предложена модель пластичности для полимерного связующего ПЭЭК. Критерий пластичности для такой модели можно записать в следующем виде:

$$\sigma_0 (1 + C\xi) = k (\varepsilon_{eq}^{pl}) . \quad (3.11)$$

Соответствующий набор входных параметров приведен в таблице 3.27. Данный набор параметров был получен для комнатной температуры и максимальной степени кристалличности. Для оценки прочности в процессе технологического охлаждения композита на основе исследуемого связующего, необходимо предложить модификацию входных параметров или всей модели пластичности в целом в зависимости от температуры и степени

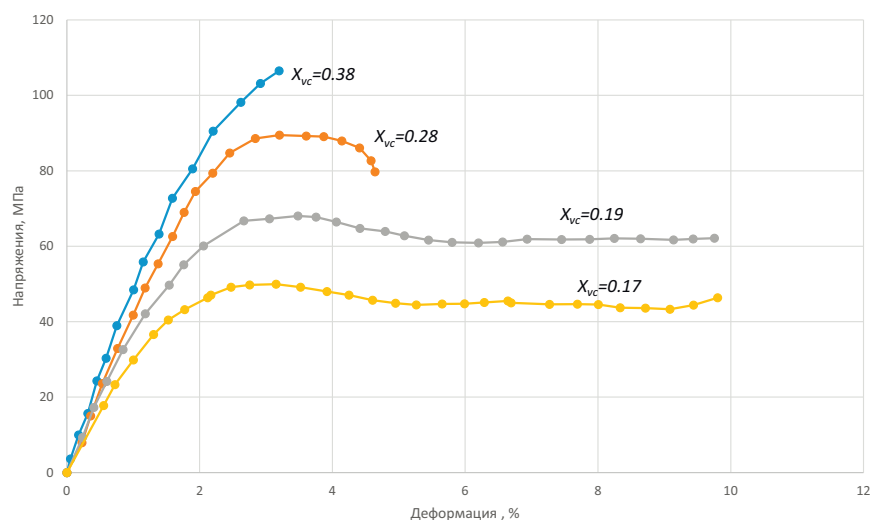


Рис. 3.44: Диаграммы растяжения материала ПЭЭК при разной степени кристалличности.

отверждения, подобно тому, как изменялся модуль Юнга связующего в процессе кристаллизации в предыдущих разделах.

Предположим, что для модификации пластических свойств, можно изменить только входные параметры в зависимости от температуры материала  $T$  и степени кристалличности  $X_{vc}$ .

В качестве первого шага рассмотрим влияние степени кристалличности  $X_{vc}$ . В работе [171] представлены результаты экспериментов на одноосное растяжение, для различных образцов, полученных в условиях различного технологического охлаждения, и, как следствие, с различными значениями степени кристалличности (рис. 3.44).

Проанализируем изменения пределов текучести в зависимости от параметра  $X_{vc}$  (рис. 3.45). Видно, что линейная интерполяция экспериментальных точек дает довольно хорошее приближение. Такое изменение пределов текучести возможно учесть, изменяя только параметр  $k$  в соотношении (3.11). Таким образом, используя линейную интерполяцию точек (рис. 3.45), для критерия (3.11) учет влияния степени кристалличности можно

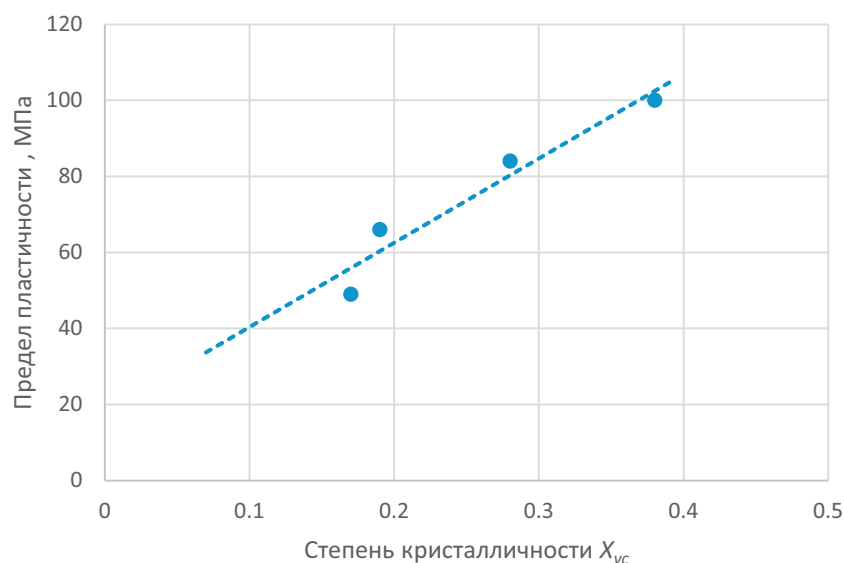


Рис. 3.45: Пределы пластичности в зависимости от степени кристалличности и линейная интерполяция.

записать следующим образом:

$$\sigma_0 (1 + C\xi) = k (\varepsilon_{eq}^{pl}) (1 + \alpha(X_{vc} - X_{vc}^{\infty})), \quad (3.12)$$

где для материала ПЭЭК  $\alpha = 2.38$  и  $X_{vc}^{\infty} = 0.38$ .

На следующем шаге, рассмотрим возможность учета влияния температуры для критерия (3.11). В технической документации компании Vicktrex для материала ПЭЭК (РЕЕК 450G) [329] приведены значения прочности при растяжении и нагружении в условиях изгиба в зависимости от температуры (рис. 3.46).

Постараемся показать, что аналогично влиянию степени кристалличности, зависимость от температуры также можно учесть изменением только параметра  $k$  в критерии (3.11). Построим отношение этих зависимостей от температуры (рис. 3.47). Видно, что при температурах ниже  $143^{\circ}\text{C}$ , отношение можно приблизить константой. Температура  $143^{\circ}\text{C}$  выбрана, так как

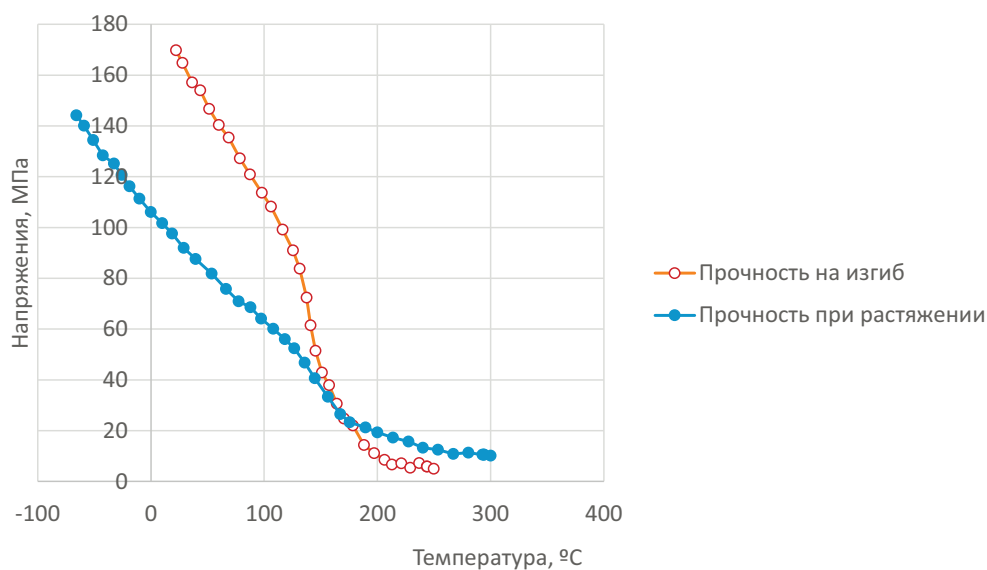


Рис. 3.46: Прочность при растяжении и при нагружении изгибом для материала ПЭЭК (Vicktrex РЕЕК 450G) в зависимости от температуры.

она является температурой стеклования, и, видимо, выше нее прочность имеет довольно условное значение, так как материал расплавлен и имеют низкую жесткость, в принципе. Предположим, что нагрузка в обоих экспериментах на изгиб и на растяжение пропорциональна некоторому параметру  $t$ , и моменты разрушения соответствуют значениям  $t_{изгиб}$  и  $t_{раст}$ . Тогда для отношения таких параметров при температурах  $0^\circ < T < 143^\circ$ , должно выполняться  $t_{изгиб}/t_{раст} = Const$ . Поэтому, для таких величин нагрузок можно записать следующие соотношения основанные на критерии (3.11):

$$(1 + C\xi^{изгиб}) \frac{\sigma_0^{изгиб}}{t_{изгиб}} t_{изгиб} = k,$$

$$(1 + C\xi^{раст}) \frac{\sigma_0^{раст}}{t_{раст}} t_{раст} = k.$$

При пропорциональном нагружении значение интенсивности напряже-



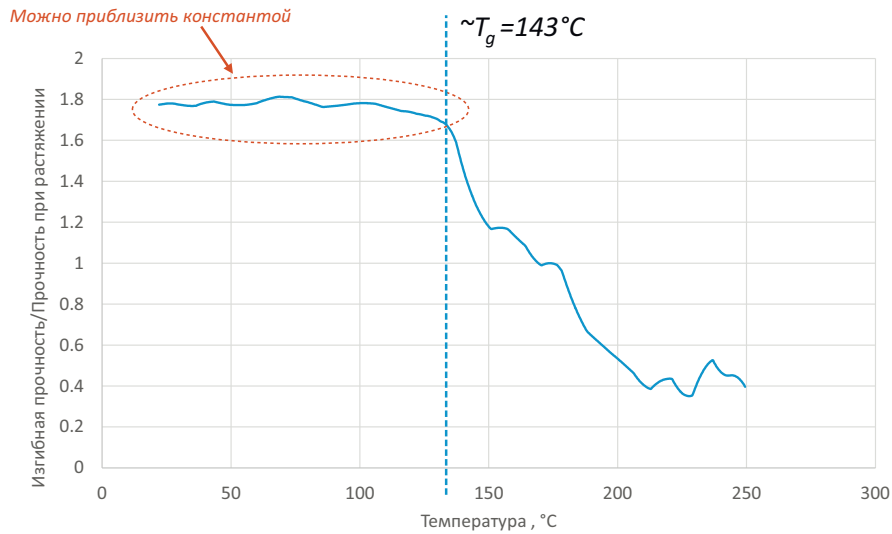


Рис. 3.47: Отношение изгибной прочности к прочности при растяжении.

ний, отнесенное к величине нагрузки или параметру пропорционального нагружения  $t$ , остается постоянным. Таким образом,  $\sigma_0^{изгиб} / t_{изгиб} = Const$  и  $\sigma_0^{раст} / t_{раст} = Const$ . Параметры трехосности  $\xi^{изгиб}$  и  $\xi^{раст}$  также можно считать постоянными в моменты времени, близкие к разрушению. Таким образом, если выразить отношение  $t_{изгиб}$  и  $t_{раст}$ , то становится понятно, что единственная возможность сохранить это отношение постоянным при изменении температуры — это включить температурную зависимость в параметр  $k$ :

$$\frac{t_{изгиб}}{t_{раст}} = \frac{\frac{k \times (1 + \beta(T_0 - T))}{(1 + C\xi^{изгиб}) \frac{\sigma_0^{изгиб}}{t_{изгиб}}}}{\frac{k \times (1 + \beta(T_0 - T))}{(1 + C\xi^{раст}) \frac{\sigma_0^{раст}}{t_{раст}}}}$$

Рассмотрим теперь зависимость предела текучести при растяжении от температуры в диапазоне  $0^\circ < T < 143^\circ$  (рис. 3.48). Видно, что линейная аппроксимация хорошо приближает экспериментальные данные. Таким образом, для материала ПЭЭК можно ввести следующую зависимость от

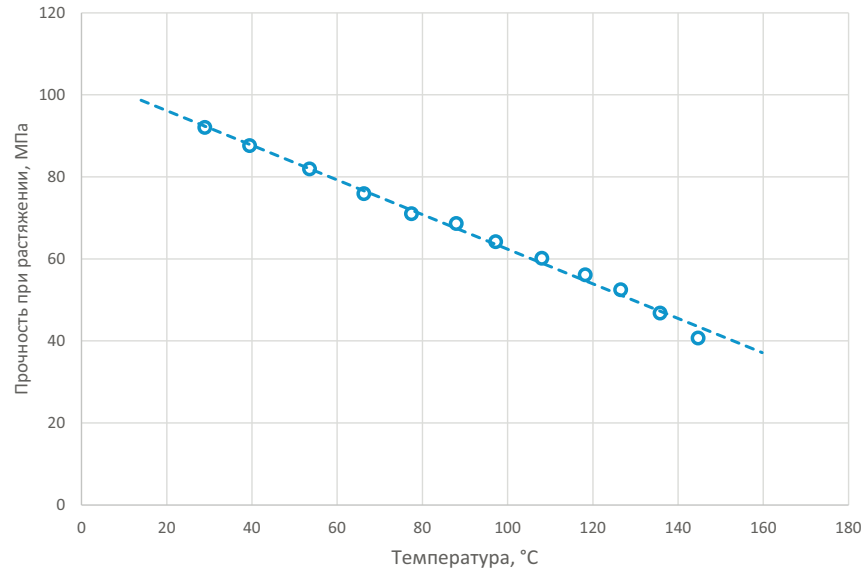


Рис. 3.48: Пределы текучести при растяжении в зависимости от значений температуры.

температуры в критерий пластичности:

$$\sigma_0 (1 + C\xi) = k (\varepsilon_{eq}^{pl}) (1 + \beta(T_0 - T)), \quad (3.13)$$

где  $\beta = 0.005^\circ C^{-1}$ ,  $T_0 = 24^\circ C$ .

На основе установленной закономерности изменения пластических свойств при комнатной температуре при разных значениях степени кристалличности и закономерность для максимальной кристалличности, но с переменной температурой, можно на основе композиции этих соотношений записать критерий пластичности в виде:

$$\sigma_0 (1 + C\xi) = k (\varepsilon_{eq}^{pl}) (1 + \alpha(X_{vc} - X_{vc}^\infty))(1 + \beta(T_0 - T)), \quad (3.14)$$

где для материала ПЭЭК входящие константы перечислены в таблице 3.12.

Предположение о включении в критерий пластичности изменения

Таблица 3.12: Расширенный набор констант для критерия пластичности материала ПЭЭК (3.14)

$C$		0.5
$k(0)$	МПа	89.8
$\alpha$		2.38
$X_{vc}^{\infty}$		0.38
$\beta$	$1/^{\circ}C$	0.005
$T_0$	$^{\circ}C$	24

свойств в виде (3.14), является вполне обоснованным. Такое заключение основано на том, что при фиксировании одного из параметров  $T$  или  $X_{vc}$ , пластические свойства должны вести себя монотонно относительно другого параметра, что говорит в пользу приближения, выбранного в (3.14).

### 3.11 Выводы к главе 3

В главе 3 проанализированы все стадии изготовления композиционного материала на основе термопластичного композита: формование, отверждение, оценка прочности.

Для задачи формования термопластичного препрега предложена модель пластичности, основанная только на сдвиговых пластических деформациях с чувствительностью свойств к виду нагрузки, что позволяет изменить и характер упрочнения, и предел текучести в зависимости от вида напряженного состояния в формуемом препреге. Такая модель является перспективной для работы с композитами созданными на основе сложных укладок и различных вариантов плетения волокна.

Для процесса охлаждения и отверждения термопластичного композита был предложен набор моделей для учета и описания истории изменения свойств и финального распределения остаточных напряжений. Для мате-

риала ПЭЭК был собран полный набор констант для проведения такого моделирования. Вся цепочка уравнений и используемых констант была верифицирована путем сравнения результатов моделирования и экспериментальных данных с весьма хорошим соответствием.

Основными новыми результатами главы являются разделы, посвященные анализу прочности материала термопластичного связующего и композита в целом. Продемонстрирован подход основанный на микромеханическом моделировании с периодическими граничными условиями. Моделирование производилось на ячейках периодичности, где для материала связующего использовался критерий пластичности, основанный на результатах главы 2. Продемонстрировано хорошее соответствие результатов расчетов и теоретических зависимостей с экспериментальными данными. На основе проведенного анализа определены значения констант и необходимые функциональные зависимости для моделирования пластических свойств ПЭЭК. Предложено расширение критерия пластичности на случай изменения температур и стадий отверждения. Исследованы виды напряженного состояния для материала связующего. Проведено моделирование задачи о вырыве волокна из матрицы, продемонстрировано, что в области интерфейса между волокном и матрицей пластические деформации меняют вид напряженного состояния, что приводит к существенному упрочнению материала связующего. При анализе эксперимента на трехточечный изгиб показано, что материал на поверхности образца испытывает напряженное состояние близкое к двухосному, и что изгибная прочность полностью определяется прочностью материала при двухосном растягивающем нагружении при ненулевых значениях коэффициента Пуассона.

Таким образом, используя результаты главы 3 для композита на осно-

ве термопластичного связующего, появляется возможность моделирования процесса отверждения с оценкой возможного повреждения материала. При этом можно определять распределение итоговых прочностных характеристик в изготавливаемом изделии. Следует отметить, что для всех предложенных моделей приведены конкретные значения параметров материалов и соответствующие зависимости, позволяющие проводить практические прочностные и технологические расчеты.

## **Глава 4**

# **Нелинейная упругость**

## **КОМПОЗИЦИОННЫХ**

## **материалов**

В предыдущей главе продемонстрирован подход, позволяющий оценить прочностные характеристики композиционного материала и учитывающий все стадии его изготовления. При переходе к анализу прочности в условиях эксплуатации необходимо проанализировать также упругую стадию нагружения материала. Проблема заключается в том, что многие композиционные материалы даже в условиях упругости проявляют чувствительность к виду нагружения, а также демонстрирует существенную нелинейность в условиях действия касательных напряжений, когда в процесс деформирования максимально включается связующие материала. Пренебрежение такими эффектами может привести к существенной неточности в оценке величин напряжений в конструкции и уже на ранней стадии деформирования изделия к предсказанию неверных силовых характеристик для предложенных критериев прочности. В качестве наглядной иллюстрации можно рассмотреть пример сдвиговых диаграмм, показанный на рис. 4.1. Видно, что диаграммы являются существенно нелинейными и дополнительное нагружение в трансверсальном направлении влияет на вид сдвиговых упругих характеристик. В настоящей главе приведено описание модели упругости для композиционного материала позволяющей учитывать анизотропию свойств материала, чувствительность к виду нагружения, а также нелинейность, связанную со сдвиговым нагружением вдоль армирующих элементов. Во всех примерах рассмотрены слоистые композиты, но определяющие соотношения записаны в инвариантной форме, что дает возможность их использования для произвольного трехмерного тела. Такая возможность важна для прочностного анализа композитов имеющих сложное трехмерное армирование.

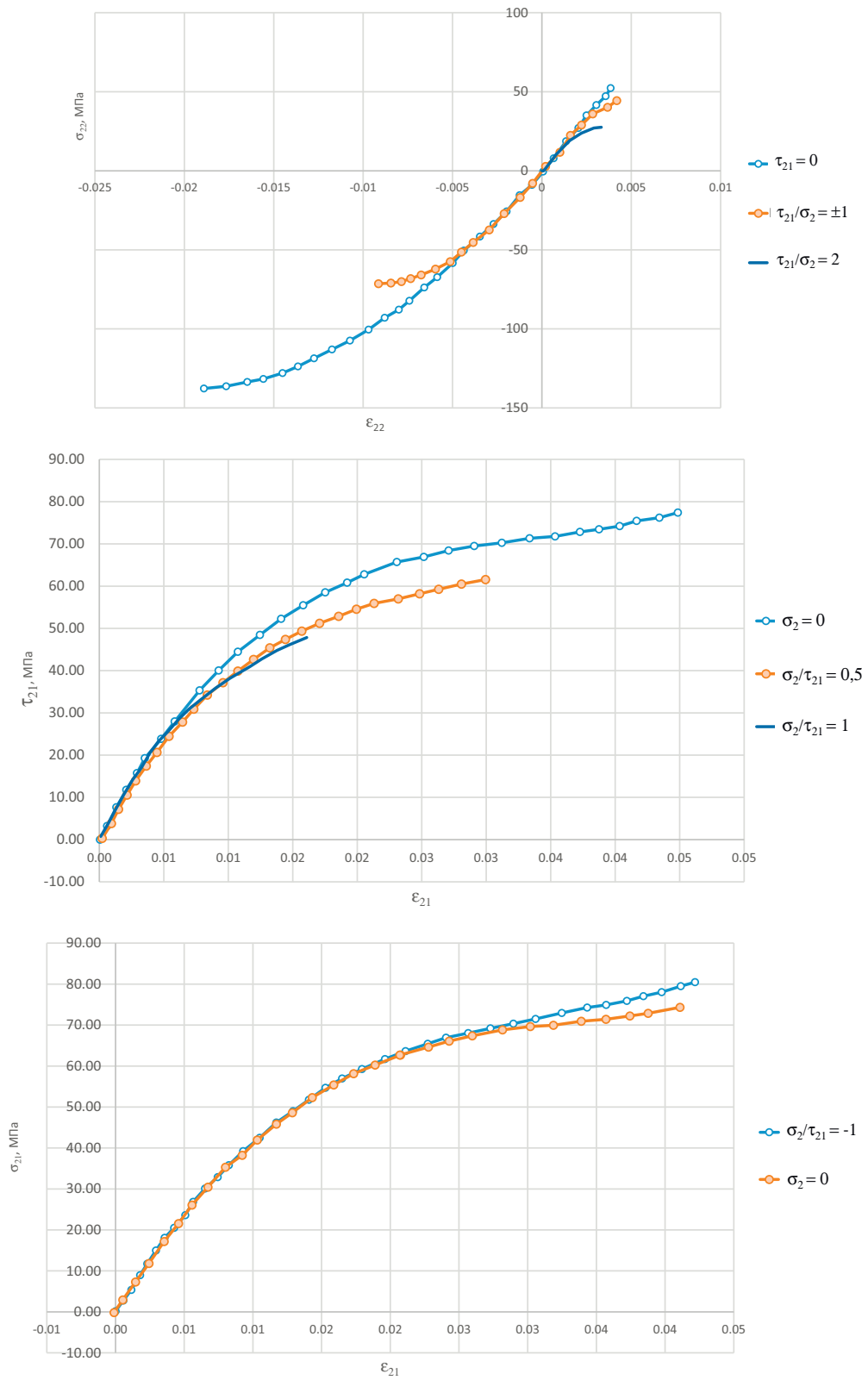


Рис. 4.1: Диаграммы нагружения однонаправленного образца [284].



## 4.1 Анизотропная упругость с учетом вида напряженного состояния

Композиционные материалы имеют существенную неоднородность в своей структуре. Этот факт является основной причиной проявления композиционным материалом сложных эффектов при механическом деформировании. Для оценки влияния данного эффекта на напряженно-деформированное состояние и возможности моделирования отклика такого материала на действие силовых факторов необходимы определяющие соотношения, использующие расширенный набор характеристик, как силовых, так и кинематических. Построение таких моделей не может быть произвольным или выражено произвольными функциями, так как это может нарушить фундаментальные принципы механики и физики. Например, требование того, что при замене системы координат, в которой записываются такие связи между компонентами напряжений и деформаций, не должны появляться дополнительные нагрузки или деформации, приводит к ограничению, записи всех уравнений в инвариантной форме. В условиях упругости данные связи должны обладать свойством потенциальности. Условие того, что потенциальная энергия материала не должна меняться при смене системы координат, автоматически означает, что потенциал для упругого материала должен представляться в виде функций инвариантов компонент напряжений или деформаций.

Для учета чувствительности жесткости композиционного материала к виду нагружения рассмотрим следующий потенциал [232, 243]:

$$\Phi = \frac{1}{2} a_{ijkl}(\xi) \sigma_{ij} \sigma_{kl}. \quad (4.1)$$

Видно, что потенциал близок к анизотропному линейно-упругому телу, но с зависимостью всех коэффициентов от параметра вида напряженного состояния  $\xi$ . Таким образом, для каждого вида нагружения материал имеет соответствующий набор податливостей. Это, в свою очередь, означает практически безграничные возможности по приближению экспериментальных данных для разных видов нагружения материала, и более того, чем больше экспериментальных данных используется, тем точнее становится модель.

Выпишем определяющие соотношения, основанные на (4.1) в случае плоского напряженного состояния ортотропного тела:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= a_{1111}(\xi)\sigma_{11} + a_{1122}(\xi)\sigma_{22} + \left[ \left( \frac{1}{3\xi} + \frac{3}{2}\xi \right) \sigma - \frac{3}{2}\xi\sigma_{11} \right] \Phi_1\sigma_0^{-2}, \\ \varepsilon_{22} &= a_{1122}(\xi)\sigma_{11} + a_{2222}(\xi)\sigma_{22} + \left[ \left( \frac{1}{3\xi} + \frac{3}{2}\xi \right) \sigma - \frac{3}{2}\xi\sigma_{22} \right] \Phi_1\sigma_0^{-2}, \\ \varepsilon_{12} &= \left[ a_{1212}(\xi) - \frac{3}{2}\xi\Phi_1\sigma_0^{-2} \right] \sigma_{12},\end{aligned}\quad (4.2)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \left[ a'_{1111}(\xi)\sigma_{11}^2 + a'_{2222}(\xi)\sigma_{22}^2 + 2a'_{1122}(\xi)\sigma_{11}\sigma_{22} + a'_{1212}(\xi)\sigma_{12}^2 \right],$$

здесь штрих означает производную по параметру  $\xi$ .

Как видно, при использовании такого потенциала деформации имеют две составляющих, одна из которых соответствует деформации анизотропного тела, свойства которого зависят от вида напряженного состояния, а другая соответствует деформации некоторого изотропного тела, которая также зависит от вида напряженного состояния.

Проанализируем полученные соотношения. В случае одноосных экс-

периментов на растяжение и сжатие, определяющие соотношения упрощаются, поскольку  $\xi = \pm 1/3$  сложное выражение в квадратных скобках оказывается равным нулю.

Случай одноосного растяжения:

$$\varepsilon_{11} = a_{1111} (0.33) \sigma_{11} + a_{1122} (0.33) \sigma_{22},$$

$$\varepsilon_{22} = a_{1122} (0.33) \sigma_{11} + a_{2222} (0.33) \sigma_{22};$$

Случай одноосного сжатия:

$$\varepsilon_{11} = a_{1111} (-0.33) \sigma_{11} + a_{1122} (-0.33) \sigma_{22},$$

$$\varepsilon_{22} = a_{1122} (-0.33) \sigma_{11} + a_{2222} (-0.33) \sigma_{22}.$$

Отличие от классического подхода заключается в возможности учитывать изменение жесткости материала в зависимости от значения параметра  $\xi$  в том числе и различие значений модулей при сжатии и растяжении. Для определения значений всех коэффициентов анизотропии необходимо также использовать формулы преобразования компонентов тензора четвертого ранга при преобразовании системы координат и результаты соответствующих экспериментов при нагружении под углом к направлению осей ортотропии.

В случае чистого сдвига  $\xi = 0$ , нелинейная часть в третьем уравнении (4.2) также становится равной нулю и тривиальным способом позволяет получить требуемую жесткость, отвечающую данным условия эксперимента.

$$\varepsilon_{12} = a_{1212} (0) \sigma_{12}.$$

В случае двухосных нагружений, при пропорциональном увеличении нагрузок, отклик материала также будет линейным:

$$\varepsilon_{11}=(a_{1111}(\xi)+a_{1122}(\xi)Const_1+Const_2)t,$$

$$\varepsilon_{22}=(a_{1122}(\xi)+a_{2222}(\xi)Const_3+Const_4)t,$$

здесь  $Const_i$  определяются из соотношений между приложенными нагрузками.

Таким образом, для всех пропорциональных нагружений, предложенная модель автоматически удовлетворяет любым экспериментальным данным. Следует отметить, что в условиях пропорционального нагружения данный материал ведет себя линейно относительно параметра нагружения. На практике же, в общем случае, композиционный материал ведет себя нелинейно начиная с самых ранних стадий нагружения, и связано это, как правило, со сдвиговым нагружением вдоль волокон, где максимально нагружаются связующие материала.

## **4.2 Анизотропная упругость с учетом нелинейности при сдвиговых нагрузках**

Теперь проанализируем сдвиговое нагружение композита, где наиболее очевидным образом нагружается матрица материала. Рассмотрим эксперимент на чистый сдвиг в плоскости слоя композиционного материала (рис. 4.2).

Рассмотрим случай плоского напряженного состояния. Очевидно, что жёсткость с увеличением сдвиговых нагрузок и деформаций падает. По-

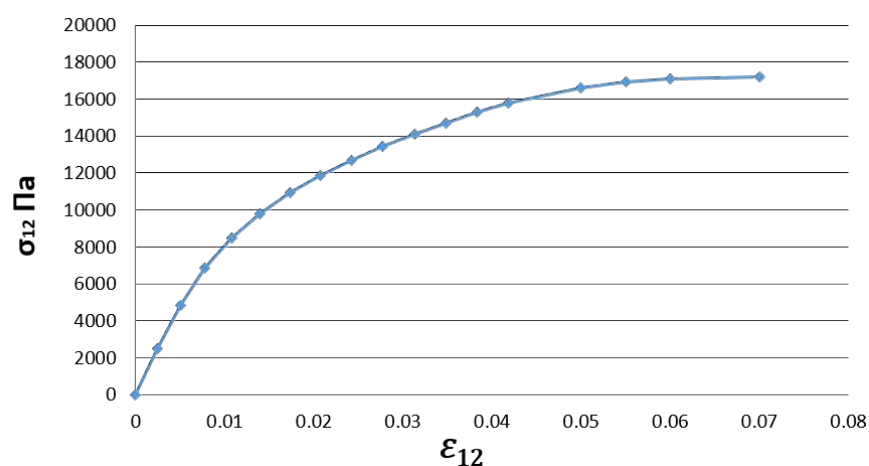


Рис. 4.2: Диаграмма сдвиговых напряжений и деформаций композита Т300/976 [130].

ступим аналогично предыдущей главе и рассмотрим параметр, который характеризует степень величины сдвиговых напряжений или деформаций в плоскости слоистого композита:

$$q = D_{ij}\varepsilon_{ij},$$

где коэффициенты матрицы  $D_{ij}$  имеют следующее выражение в системе координат, совпадающей с ориентацией материала:

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В системе координат, связанной с главными осями анизотропии, параметр

$$q = \varepsilon_{12}.$$

Далее, используем потенциал специального вида:

$$U = \frac{1}{2} E_{ijkl}(q) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad (4.3)$$

Для выбранного потенциала (4.3) определяющие соотношения выглядят следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial E_{mnkl}(q) \varepsilon_{mn} \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial E_{mnkl}(q)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{kl} + E_{ijkl}(q) \varepsilon_{kl}. \quad (4.4)$$

Рассматривая плоское напряженное состояние и, оставляя зависимость от параметра  $q$  только в сдвиговом модуле  $G$ , нелинейную часть уравнений (4.4) возможно представить в виде:

$$\frac{\partial E_{mnkl}(q)}{\partial \varepsilon_{12}} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{kl} = \frac{dG(q)}{dq} \frac{dq}{d\varepsilon_{12}} \varepsilon_{12} \varepsilon_{12} = G' \varepsilon_{12}^2,$$

где штрихом обозначена производная по параметру  $q$ .

Таким образом, соотношения для сдвиговых компонент можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{12} = (G' \varepsilon_{12} + G) \varepsilon_{12}. \quad (4.5)$$

Теперь, представим функцию  $G(q)$  в виде произвольного полинома:

$$G(q) = \sum_n C_n q^n.$$

Тогда уравнение (4.5) можно записать в виде:

$$\sigma_{12} = \left[ \left( \sum_n C_n n q^{n-1} \right) q + \sum_n C_n q^n \right] \varepsilon_{12} = \left[ \sum_n (C_n n + 1) q^n \right] \varepsilon_{12}.$$

Делая подстановку  $B_n = C_n n + 1$ , можно получить следующее выражение:

$$\sigma_{12} = \left[ \sum_n B_n q^n \right] \varepsilon_{12}. \quad (4.6)$$

При этом  $B_n$  и  $n$  являются произвольными константами. Таким образом можно получить практически любую нелинейную зависимость между сдвиговыми компонентами, единственное ограничение — это возможность приближения ее полиномиальной функцией.

Таким образом, в ортогональной системе координат, совпадающей с ориентацией волокон, определяющие уравнения для материала с нелинейными сдвиговыми свойствами, возможно представить следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu/E_1 & 0 \\ -\nu/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tilde{G}(\varepsilon_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.7)$$

где  $\tilde{G}(\varepsilon_{12})$  — это произвольная зависимость, характеризующая нелинейность сдвиговых свойств материалов.

Такой вид уравнений по своей сути очень схож с классическим подходом, что позволяет легко внедрять его в любой тип методик прочностных расчетов, основанных на известной ламинатной теории слоистых компози-

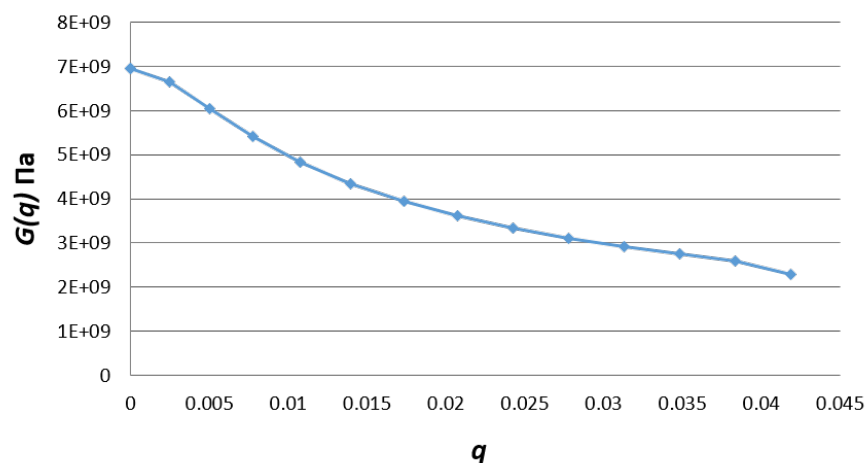


Рис. 4.3: Зависимость для функции  $G(q)$ .

#### 4.2.1 Решение задачи о сжатии анизотропной полосы, ослабленной круговым вырезом, с учетом сдвиговой нелинейности

Рассмотрим модель учитывающую нелинейность связи между сдвиговыми компонентами напряжений и деформаций [48]. В работе [130] приводится описание эксперимента о сжатии пластины с отверстием, выполненной из композиционного материала с укладкой слоев  $[(\pm 45^\circ) \times 6]_S$ . Свойства материала приведены в таблице 4.1, при этом в качестве сдвигового модуля приведено его начальное значение. Диаграмма сдвигового нагружения

Таблица 4.1: Свойства композита Т300/976

Модуль Юнга вдоль волокон	$E_1$ , МПа	156512
Модуль Юнга поперек волокон	$E_2$ , МПа	12962
Коэффициент Пуассона	$\nu$	0.23
Сдвиговой модуль (начальный)	$G$ , МПа	6964

такого материала приведена ранее на рис. 4.2, Используемая зависимость  $G(q)$  приведена на рис. 4.3 и получена на основе рис. 4.2. Полная толщи-



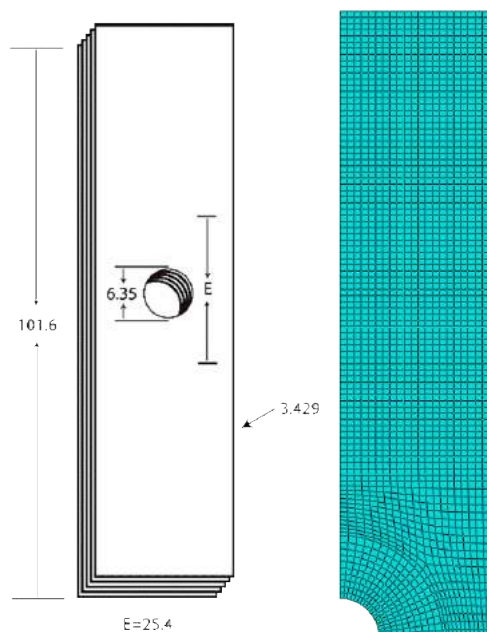


Рис. 4.4: Геометрия образца (мм) (слева), сетка, используемая в расчетах (справа).

на образца 3.429мм, геометрия отображена на рис.4.4. Также на рис.4.4 показана сетка, используемая в расчетах, элементы полностью интегрируемые, отвечающие плоскому напряженному состоянию. Используя условия симметрии, моделируется только четверть образца.

На рис. 4.5 показаны результаты моделирования. На рис. 4.6 продемонстрирована диаграмма нагружения образца. Видно, что диаграммы, полученные при помощи моделирования и эксперимента, совпадают на начальном этапе нагружения. Различия начинают существенно увеличиваться примерно с нагрузки, соответствующей 8кН. Этот факт связан с началом образования дефектов и разрушения образца, можно показать, что при упомянутых значениях нагрузки напряжения в области концентратора напряжений превышают разрушающие. Тем не менее, начальный участок диаграммы нагружения, то есть при отсутствии разрушения, был приближен используемой упругой моделью достаточно точно.

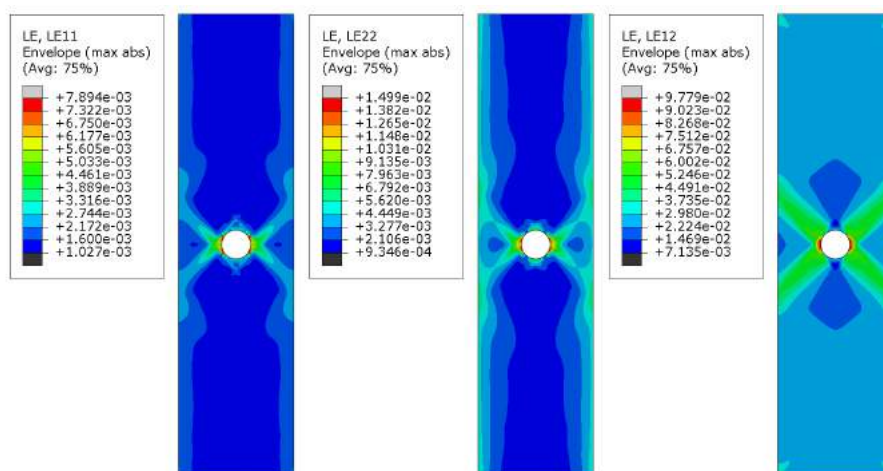


Рис. 4.5: Максимальные по толщине абсолютные значения компонент деформаций.

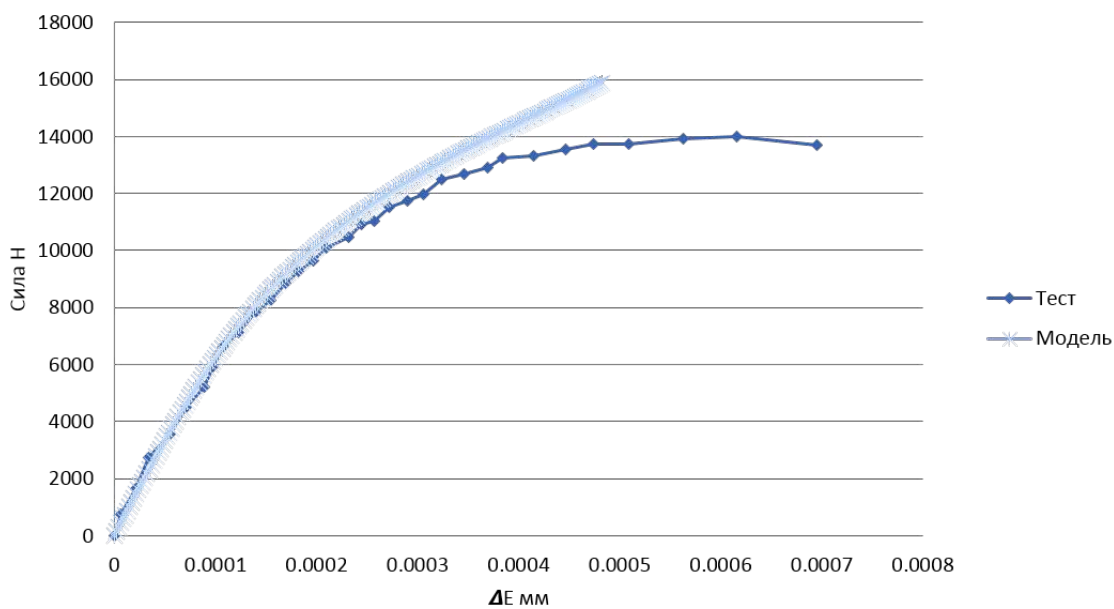


Рис. 4.6: Диаграмма нагружающей силы и перемещений экстензометра.

### 4.3 Анизотропная упругость с учетом нелинейности при сдвиговых нагрузках и зависимости свойств от вида нагружения

Теперь рассмотрим комбинированный подход. Вместо параметра  $q$  введем аналогичный ему параметр, основанный на касательных напряжениях  $Q$ .

$$Q = D_{ij} \sigma_{ij},$$

соответствующая матрица выглядит аналогично рассмотренной выше

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметр  $Q$  совпадает, как и ранее, с напряжением  $\sigma_{12}$ , в системе координат совпадающей с главными осями анизотропии.

Рассмотрим потенциал с зависимостью от двух параметров  $\xi$  и  $Q$ :

$$\Phi = A_{ijkl}(\xi, Q) \sigma_{ij} \sigma_{kl}. \quad (4.8)$$

Используя аналогичные предыдущим главам подходы, получим опреде-

ляющие соотношения для плоского напряженного состояния:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= A_{1111}(\xi) \sigma_{11} + A_{1122}(\xi) \sigma_{22} + \left[ \left( \frac{1}{3\xi} + \frac{3}{2}\xi \right) \sigma - \frac{3}{2}\xi \sigma_{11} \right] \Phi_1 \sigma_0^{-2}, \\ \varepsilon_{22} &= A_{1122}(\xi) \sigma_{11} + A_{2222}(\xi) \sigma_{22} + \left[ \left( \frac{1}{3\xi} + \frac{3}{2}\xi \right) \sigma - \frac{3}{2}\xi \sigma_{22} \right] \Phi_1 \sigma_0^{-2}, \\ \varepsilon_{12} &= \left[ \left( A_{1212}(\xi, k) + \frac{1}{2} \frac{\partial A_{1212}(\xi, Q)}{\partial Q} \right) - \frac{3}{2}\xi \Phi_1 \sigma_0^{-2} \right] \sigma_{12},\end{aligned}\quad (4.9)$$

здесь  $\Phi_1$  имеет тот же смысл, как и в (4.2):

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} [A'_{1111}(\xi) \sigma_{11}^2 + A'_{2222}(\xi) \sigma_{22}^2 + 2A'_{1122}(\xi) \sigma_{11} \sigma_{22} + A'_{1212}(\xi, Q) \sigma_{12}^2],$$

штрих означает производную по параметру  $\xi$ .

Используя метод, подобный рассмотренному в предыдущем разделе, представим сдвиговую податливость в следующем виде:

$$A_{1212}(\xi, Q) = \sum_n C_n(\xi) Q^n.$$

Уравнение для компоненты  $\varepsilon_{12}$  с коэффициентом  $A_{1212}$  можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\left( A_{1212}(\xi, Q) + \frac{1}{2} \frac{\partial A_{1212}(\xi, Q)}{\partial Q} \right) &= \sum_n C_n(\xi) Q^n + \frac{1}{2} \left( \sum_n C_n(\xi) n Q^{n-1} \right) Q \\ &= \sum_n \left( 1 + \frac{n C_n(\xi)}{2} \right) Q^n.\end{aligned}$$

Используя подстановку

$$B_n(\xi) = \left( 1 + \frac{n C_n(\xi)}{2} \right),$$

можно получить

$$\left( A_{1212}(\xi, Q) + \frac{1}{2} \frac{\partial A_{1212}(\xi, Q)}{\partial Q} \right) = \sum_n B_n(\xi) Q^n.$$

И таким образом уравнение для сдвиговых компонент сводится к следующему:

$$\varepsilon_{12} = \left[ B(\xi, Q) - \frac{3}{2} \xi \Phi_1 \sigma_0^{-2} \right] \sigma_{12},$$

где  $B(\xi, Q)$  произвольная функция. Для случая только сдвигового нагружения  $\xi = 0$ , уравнение для  $\varepsilon_{12}$  сводится к

$$\varepsilon_{12} = B(0, \sigma_{12}) \sigma_{12}.$$

Окончательно, произвольность функции  $B(0, \sigma_{12})$ , означает возможность приближения практически любой зависимости, полученной при сдвиговом нагружении образца в плоскости.

Таким образом, предложенные соотношения (4.9) сохраняют все возможности предыдущих вариантов определяющих соотношений, предложенных в данной главе. Более того, так как функция  $B(\xi, Q)$  является произвольной, то функция характеризующая сдвиговую податливость  $B(\xi, Q) - \frac{3}{2} \xi \Phi_1 \sigma_0^{-2}$ , также является произвольной при пропорциональном нагружении. Это означает, что таким образом можно вводить различные виды сдвиговых жесткостей анизотропного материала в зависимости от типа нагрузки.

Рассмотрим возможности предложенной модели для описания реального поведения материалов на примере экспериментов с композитом на основе стеклоткани [308]. На рис. 4.8 - 4.10 показан набор экспериментов с различными типами нагружения. Приведены результаты экспериментов на

растяжение, сдвиг и сжатие, которые соответствуют значениям параметра вида напряженного состояния  $\xi = +1/3$ ,  $\xi = 0$  и  $\xi = -1/3$ . Более того, эксперименты представлены для разных направлений нагружения с ориентацией образцов:  $0^\circ$ ,  $22,5^\circ$  и  $45^\circ$ , что позволяет одновременно проверить возможности влияния типа нагружения и анизотропии.

Рассмотрим коэффициенты в линейной форме от параметра трехосности:

$$A_{1111}(\xi) = a_{11}^0 + c_{11}\xi,$$

$$A_{2222}(\xi) = a_{22}^0 + c_{22}\xi,$$

$$A_{1122}(\xi) = a_{12}^0 + c_{12}\xi,$$

$$B(\xi, Q) = \Gamma(Q).$$

При этом, для простоты, предположим, что сдвиговая жесткость не зависит от вида нагружения и, как следствие, от параметра  $\xi$ .

Функция  $\Gamma(Q)$  может быть определена из экспериментов на сдвиг, следующим образом:  $\Gamma(\sigma_{12}) = \varepsilon_{12}/\sigma_{12}$ . Остальные коэффициенты могут быть определены из экспериментов на растяжение и сжатие в направлениях нитей волокон. Если, из условия того что мы рассматриваем ткань, предположить равенство  $a_{11}^0 = a_{22}^0$  и  $c_{11} = c_{22}$ , что соответствует результатам экспериментов, то подлежащими определению остаются 4 коэффициента и функция для сдвиговой зависимости.

Зависимость  $\Gamma(\sigma_{12}) = \varepsilon_{12}/\sigma_{12}$  определена по эксперименту на сдвиг под углом  $45^\circ$ . На рис. 4.7 показана требуемая зависимость  $\Gamma(Q)$ . Коэффициенты  $a_{11}^0$ ,  $a_{12}^0$  и  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  определяются из одноосных экспериментов на растяжение и сжатие. В таблице 4.2 показаны значения коэффициентов, которые были выбраны.

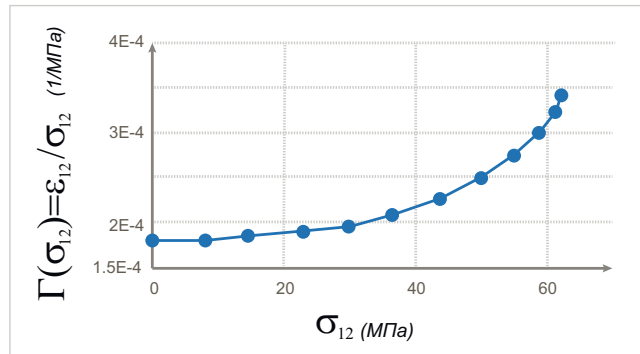


Рис. 4.7: Параметр сдвиговой деформации  $\Gamma(\sigma_{12}) = \varepsilon_{12}/\sigma_{12}$  (1/МПа).

Таблица 4.2: Выбранные значения параметров на основе экспериментов (1/МПа)

$a_{11}^0$	$c_{11}$	$a_{22}^0$	$c_{22}$	$a_{12}^0$	$c_{12}$
6E-5	2E-5	6E-5	2E-5	-1.6E-5	-2E-5

На рис. 4.8 - 4.10 показаны экспериментальные диаграммы деформирования и результаты, предсказанные моделью.

Видно, что при условии упрощенной зависимости от вида напряженного состояния и нечувствительности сдвиговой нелинейности к типу нагружения, результаты получаются близкими к экспериментам.

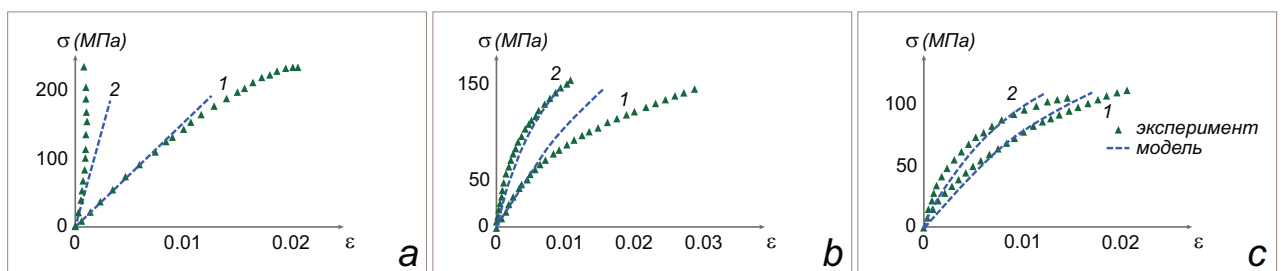


Рис. 4.8: Диаграммы напряжений и деформаций для композита на основе ткани в случае одноосного растяжения для углов  $0^\circ$  - (а),  $22.5^\circ$  - (b) и  $45^\circ$  - (с) 1 – продольные деформации, 2 – трансверсальные деформации.

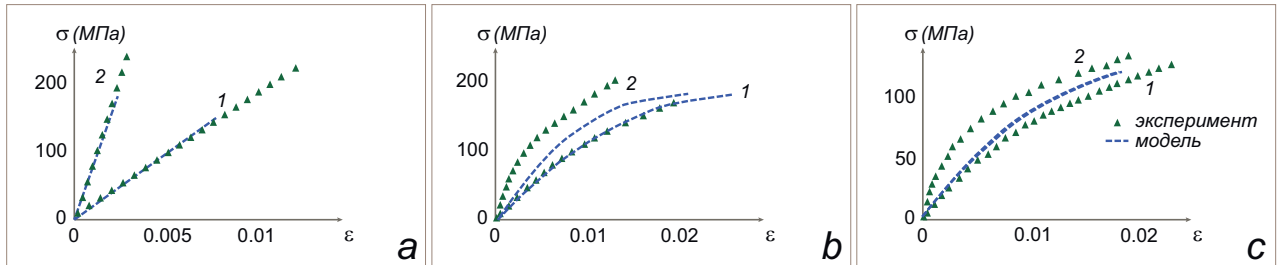


Рис. 4.9: Диаграммы напряжений и деформаций для композита на основе ткани в случае одноосного сжатия для углов  $0^\circ$  - (a),  $22.5^\circ$  - (b) и  $45^\circ$  - (c) 1 – продольные деформации, 2 – трансверсальные деформации.

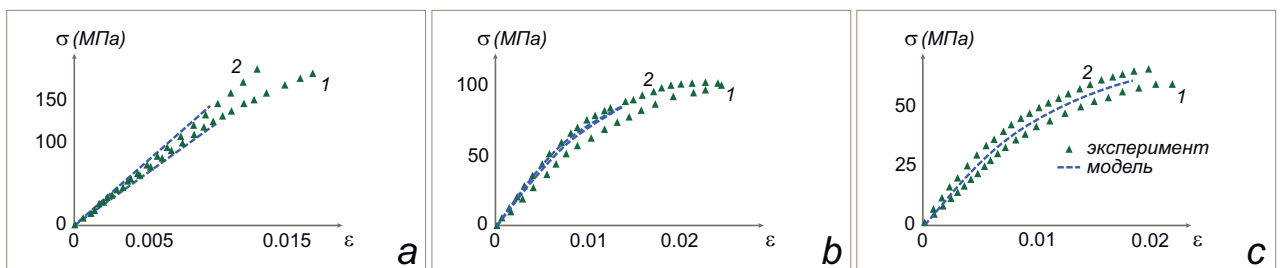


Рис. 4.10: Диаграммы напряжений и деформаций для композита на основе ткани в случае сдвиговой нагрузки для углов  $0^\circ$  - (a),  $22.5^\circ$  - (b) и  $45^\circ$  - (c) 1 – продольные деформации, 2 – трансверсальные деформации.



## 4.4 Выводы к главе 4

В главе рассмотрен возможный подход к моделированию деформирования композиционного материала в условиях упругости. Основной новой идеей является возможность учета сдвиговой нелинейности свойств, когда максимальным образом нагружены связующие материала.

В главе доказано, что произвольная нелинейность в сдвиговой жесткости анизотропного материала сохраняет его упругие свойства. На основе определяющих соотношений, учитывающих анизотропию свойств и сдвиговую нелинейность материала, рассмотрена задача о сжатии пластины с круговым вырезом из слоистого композита и продемонстрировано хорошее совпадение теоретической зависимости приложенной нагрузки от рассчитанных перемещения с экспериментальной диаграммой на стадии упругого деформирования.

Сформулированы определяющие соотношения, которые дают возможность учесть одновременно анизотропию материала, сдвиговую нелинейность и чувствительность к виду напряженного состояния. В качестве примера рассмотрен композиционный материал на основе стеклоткани. Показано, что при простейших предположениях о влиянии вида нагрузки и сдвиговой нелинейности, возможно получить результаты моделирования, близкие к экспериментальным данным. Расхождения, по-видимому, связаны с предполагаемым отсутствием изменения вида сдвиговой нелинейности в зависимости от типа нагрузки. Тем не менее предложенная модель, дает возможность учета такого влияния на механизм сдвиговой жесткости, но требует более сложной процедуры обработки экспериментальных данных и программной реализации определяющих соотношений.

Исследования с использованием рассмотренных моделей нелинейной

упругости имеют большое значение для моделирования прочности композита. В дальнейших разделах будет показано, что пренебрежение рассмотренными эффектами может приводить к существенно иной картине разрушения материала.

## **Глава 5**

# **Моделирование разрушения КОМПОЗИЦИОННЫХ материалов на основе параметров поврежденности**

Вопрос, касающийся моделирования разрушения композиционных материалов, сложен и имеет довольно большой набор различных подходов. Тем не менее, какого-либо универсального, общего подхода, подходящего для всех типов композитов и видов эксплуатационных воздействий или нагрузок, которые они испытывают при использовании в промышленности, на данный момент не выработано. Более того, очень сложно начать построение такой теории, так как нет единого понимания и основы для какого-либо сравнения возможных подходов. Например, оценка точности того или иного критерия начала разрушения, который для металлов является аналогом условия начала пластичности, сразу приводит к нескольким противоречиям: как экспериментально оценить именно начало разрушения, по экспериментальной диаграмме нагружения или по показаниям акустической эмиссии? Если критерий показал хорошее соответствие на одном виде композита, можно ли его применять к другим? Критерий может не сработать повторно на том же материале при его использовании в реальной конструкции, так как он может не учитывать стадии изготовления, или критерий показывает отличные результаты на однонаправленных образцах, но не работает при произвольных укладках волокон и т.д. Перспективным является путь, учитывающий весь процесс эксплуатации композита от изготовления до утилизации. Но, такой путь затруднителен, так как является междисциплинарным, с одной стороны, а с другой все равно приведет к вопросу прочности, только с большим количеством факторов, которые можно учесть при анализе.

В данной главе композиционный материал рассматривается на макроуровне при помощи определяющих соотношений феноменологического характера. В разделе предложен путь анализа прочности на основе парамет-

ров повреждаемости. Сформулированы предположения, на основе которых можно строить теории разрушения той или иной сложности в зависимости от рассматриваемой задачи. В главе аккуратно проведен тщательный анализ от самых простых предположений до возможных усложнений, требующих существенной экспериментальной программы. Проанализирована точность и достоверность предсказания на примере двухосных экспериментов на различных укладках композиционного материала. Основная задача данной главы заключается в том, чтобы показать возможность работы с материалом на основе простых определяющих соотношений, требующих в качестве входных параметров, только стандартные экспериментальные данные, а также, показать путь возможного усложнения теории, учитывающей большее число характеристик композита. Предложенный подход имеет форму блоков, что позволяет выстроить необходимую методику прочностного анализа для решения конкретных задач, меняя только необходимые части определяющих соотношений, в зависимости от требований задачи и возможностей экспериментальных исследований.

## **5.1 Набор предположений для построения определяющих соотношений**

В данном разделе приводится набор предположений для построения теории разрушения композита. Большинство предположений представляют собой некоторый блок, влияющий на конечный вид определяющих соотношений и допускающий некоторую свободу выбора. Выбор необходимо делать исходя из решения конкретных задач и наличия экспериментальных данных.

**1 – Выбор модели упругости.** Классический подход, основанный на линейной анизотропной упругости, может быть недостаточен для описания деформирования композиционного материала в условиях упругости, и привести к существенным неточностям при определении силовых характеристик материала в конструкции для анализа прочности. В главе 4 описывались различные варианты упругих определяющих соотношений, учитывающие такие эффекты как нелинейность при сдвиговом нагружении и различия в значениях жесткости в зависимости от типа нагрузки на материал. Как упоминалось ранее, выбор необходимо сделать в зависимости от требуемой точности при решении поставленной задачи, а также в зависимости от располагаемых экспериментальных данных.

**2 – Выбор критерия начала разрушения.** На следующем шаге необходимо выбрать критерий инициации разрушения композита. Возможных вариантов такого рода критериев довольно много [189, 284, 287, 290, 317]. Причем какую-либо предварительную оценку качества того или иного критерия провести весьма затруднительно, так что выбор должен осуществляться только из соображений сравнения с экспериментальными данными и простоты использования.

**3 – Выбор модели упругости в условиях поврежденности материала.** Следующий шаг – это выбор определяющих соотношений для поврежденного материала. В данном случае, речь идет о поведении материала после нагружения его за пределы начала разрушения. Многие исследования показывают, что композиционный материал разрушается не мгновенно, а демонстрирует монотонно падающую жесткость. Здесь важными являются следующие предположения: материал должен при любом уровне повреждений разгружаться без остаточных деформаций в начальную точ-

ку деформирования; все пластические деформации в процессе разрушения предполагаются незначительными и считаются равными нулю; при отсутствии повреждений модель материала должна совпадать с определяющими соотношениями, выбранными в пункте 1.

**4 – Выбор параметров повреждаемости материала.** На этом шаге должны быть определены параметры поврежденности материала. Существует множество вариантов введения таких параметров, и, по-видимому, первыми работами на эту тему были исследования Работнова Ю.Н. [285] и Качанова Л.М. [213]. Непосредственно для композитов можно привести в качестве примера работы [106, 160, 248, 256, 342]. Фундаментальные основы введения таких параметров можно найти в работах [273, 283].

**5 – Согласованность параметров повреждаемости материала.** Необходимо согласовать параметры поврежденности и выбранной упругой модели для поврежденного материала. В качестве общих правил, можно ввести требования, чтобы для нулевых значений параметров поврежденности модель материала совпадала с начальной упругой моделью, выбранной для неповрежденного материала, для больших значений -- жесткость материала снижается и падает до нуля при росте повреждений.

**6 – Выбор значений параметров повреждаемости.** Значения параметров повреждаемости должны удовлетворять условию, при котором вектор напряжений находится на поверхности критерия начала разрушения композита. Это утверждение наиболее важное во всем списке предположений. Оно замыкает систему определяющих соотношений и дает конкретный путь для выражения параметров повреждения, то есть, если на вход в систему определяющих соотношений поступают деформации и полученный при помощи упругой модели вектор напряжений выходит за пределы

критерия начала разрушения, то параметры повреждения должны быть выбраны таким образом, чтобы вектор напряжений остался на поверхности, определяющей условия разрушения.

**7 – Выбор алгоритма определения значений параметров повреждаемости.** Согласно предыдущему пункту, значения параметров повреждаемости могут быть определены неоднозначно, особенно в случае использования большого количества таких параметров. Чтобы устранить подобного рода неопределенность, необходимо установить конкретные правила определения значений параметров, связанные с типом нагружения материала. Например, естественно предположить независимость параметров поврежденности, связанных разрушением волокна и матрицы.

**8 – Зависимость критерия начала разрушения от значений параметров повреждаемости.** На следующем шаге необходимо задать зависимость изменения критерия начального разрушения композита от параметров повреждаемости. Введение такой зависимости позволяет смоделировать плавное падение прочности материала при нагружении, при котором контролируются перемещения, или, другими словами, падение кривой нагружения после достижения максимальных напряжений.

**9 – Зависимость критерия начала разрушения от значений скорости изменения параметров повреждаемости.** Введение зависимости критерия начального разрушения от скорости изменения параметров поврежденности позволяет учесть скоростное упрочнение материала при высоких скоростях деформирования.

**10 – Сглаживание значений параметров повреждаемости.** Композиционный материал проявляет свойства нелокальности разрушения. По-видимому, наиболее простой вариант, позволяющий понять необходимость



введения сглаживания параметров поврежденности – это анализ нагружения образцов с концентраторами [174, 266, 279]. Теории, основанные на локальных параметрах деформирования, реализуют необоснованно высокие значения напряжений в областях начала разрушения. Результат напоминает ситуацию в окрестности вершины трещины, которая приводит к сингулярному полю напряжений вблизи концентратора.

## 5.2 Пример построения определяющих соотношений

Рассмотрим пример построения определяющих соотношений для моделирования разрушения композиционного материала на основе предположений сформулированных в предыдущем разделе. Для простоты, пример построен на основе стандартных экспериментальных данных, которые, как правило, доступны в технической документации материала.

В качестве первого шага, в соответствии с сформулированными предположениями, выберем для стадии деформирования неповрежденного материала модель ортотропного линейно упругого тела:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & -\nu_{31}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{32}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_{11} & -\nu_{23}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

В качестве параметров повреждений рассмотрим относительно простой вариант состоящий из двух параметров  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , где первый параметр отвечает за разрушение в направлении волокон, второй — за разрушение матрицы:

$$\begin{cases} \psi_1 = 0 \text{ разрушение волокон, } \psi_1 = 1 \text{ начальное значение} \\ \psi_2 = 0 \text{ разрушение матрицы, } \psi_2 = 1 \text{ начальное значение} \end{cases}$$

Определяющие соотношения для поврежденного материала введем путем модификации упругих констант:

$$\begin{aligned} E_{11}^c &= \psi_1 E_{11}, \\ E_{22}^c &= \psi_2 E_{22}, \\ E_{33}^c &= \psi_2 E_{33}, \\ G_{12}^c &= \psi_2 G_{12}, \\ G_{13}^c &= \psi_2 G_{13}, \\ G_{23}^c &= \psi_2 G_{23}, \\ \nu_{12}^c &= \psi_1 \psi_2 \nu_{12}, \\ \nu_{13}^c &= \psi_1 \psi_2 \nu_{13}, \\ \nu_{23}^c &= \psi_1 \psi_2 \nu_{23}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где индекс  $c$  означает текущее значение характеристик материала.

Видно, что параметры поврежденности введены как множители упругих констант, которые в процессе уменьшения, что соответствует росту повреждения, будут снижать жесткость материала. Параметр  $\psi_1$  влияет только на жесткость в продольном направлении материала, которое соответствует направлению армирования. Коэффициенты Пуассона помножены на оба параметра из соображения сохранения положительно определенной квад-

ратичной формы потенциала, чтобы не допустить в процессе разрушения ситуации, в которой возможно появление отрицательной работы. С другой стороны, вполне логично предположить, что композит с поврежденной матрицей при деформировании в одном направлении имеет меньшее влияние на свойства в трансверсальном направлении. Это же верно и в отношении разрушения волокна.

Окончательно, определяющие соотношения для поврежденного материала имеют следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\psi_1 E_{11}} & -\frac{\psi_2 \nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\psi_2 \nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\psi_2 \nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{\psi_2 E_{22}} & -\frac{\psi_2 \nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\psi_2 \nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\psi_2 \nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{\psi_2 E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\psi_2 G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\psi_2 G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\psi_2 G_{23}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Таким образом, предположения 1, 3, 4 и 5 выполнены. В качестве изначальной упругой модели приняты определяющие соотношения (5.1). Модель упругости для поврежденного материала выбрана в виде (5.3). Параметры поврежденности предложены и согласованность поврежденной модели материала и изначальной упругой, вытекает из тождественности уравнений (5.1) и (5.3) при подстановке параметров  $\{\psi_1, \psi_2\} = \{1, 1\}$ .

Выбор только двух параметров поврежденности имеет свою логику. Во-

первых, работать с двумя параметрами проще чем с набором параметров под разные варианты нагружения материала. С другой стороны, анализ прочности композита показывает, что при разрушении в случае одного вида НДС трещины в матрице растут в разных направлениях и, как следствие, снижают жесткость материала и для других видов нагрузки. Схожий результат был получен в главе 4 при анализе ячеек периодичности, где на рис. 3.31 наглядно виден рост трещин, причем направление роста существенно изменяется. С другой стороны, сложно представить себе, что после разрушения материала, например, на сдвиг он будет иметь какую-либо заметную прочность на растяжение. Более формально, если введены разные параметры поврежденности связанные с разрушением матрицы, то в начале деформирования они все равны единице, при этом в конце разрушения при любом варианте нагрузки должны быть равны нулю. То есть, для разрушения матрицы, в конце и в начале процесса разрушения значения параметров должны совпадать, при любом варианте выбора таких параметров. Этот факт говорит в пользу введения одного параметра поврежденности, связанного с разрушением связующего, при этом возможно введение сложного влияния на жесткость материала значений такого параметра. Например, рост одного выбранного параметра, связанного с разрушением матрицы композита, может по-разному влиять на жесткость материала при различных видах нагружения.

Следующий шаг связан с необходимостью выбора критерия начала разрушения. Вероятно, наиболее простым критерием для демонстрации предложенного подхода будет критерий на основе условий максимальных напряжений:

$$X_c \leq \sigma_{11} \leq X_t, Y_c \leq \sigma_{22}, Y_c \leq \sigma_{33} \leq Y_t, |\sigma_{12}| \leq S, |\sigma_{13}| \leq S, |\sigma_{23}| \leq S, \quad (5.4)$$

где

$X_c$  — напряжения разрушения при сжатии вдоль волокон

$X_t$  — напряжения разрушения при растяжении вдоль волокон

$Y_c$  — напряжения разрушения при сжатии в трансверсальном направлении

$Y_t$  — напряжения разрушения при растяжении в трансверсальном направлении

$S$  — сдвиговая прочность

Здесь для простоты предполагается, что нормальная прочность совпадает с трансверсальной.

Теперь, выполнив пункты предположений 1-5, необходимо указать путь получения конкретных значений параметров поврежденности. Допустим, что только параметр  $\psi_2$  изменяется в процессе нагружения и удерживает вектор напряжений на поверхности разрушения (5.4). При этом, если это невозможно, и компонента напряжений  $\sigma_{11}$  превысила критические значения  $X_c$  или  $X_t$ , то параметр  $\psi_1$  приравнивается к нулю и материал считается разрушенным. На рис. 5.1 схематически показано изменение вектора напряжений в связи с изменением параметра  $\psi_2$ .

Теперь, сформулировав правило для получения значений параметров поврежденности, мы можем выписать формальные уравнения для нахождения конкретных значений:

$$\begin{cases} \psi_1 = 1, \text{ если верно: } X_c \leq \sigma_{11}^{el} \leq X_t, \text{ если неверно, то } \psi_1 = 0, \\ \psi_2 = \min(\psi_2^{22}, \psi_2^{33}, \psi_2^{12}, \psi_2^{13}, \psi_2^{23}), \end{cases} \quad (5.5)$$

где

$\psi_2^{22}$  — решение уравнения  $\sigma_{22}(\psi_2^{22} \varepsilon_{ij}) = Y_t$ , если  $\sigma_{22}^{el} > Y_t$ ,

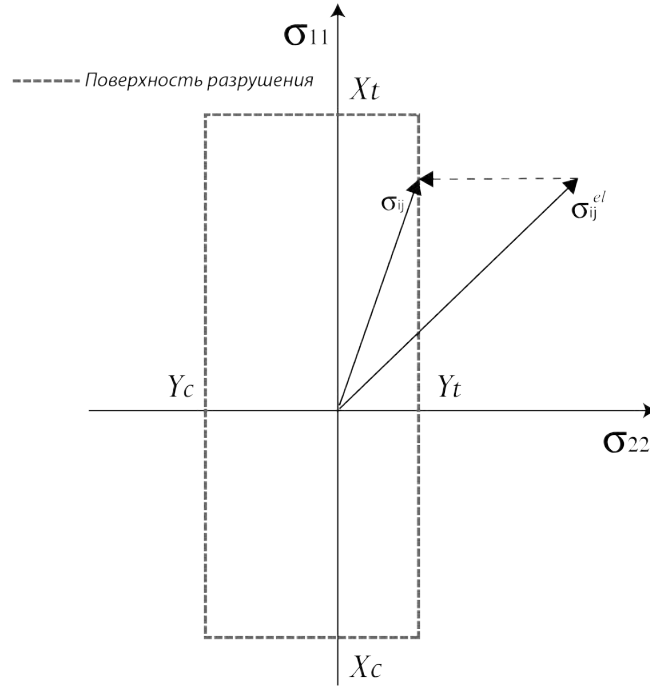


Рис. 5.1: Изменение вектора напряжений в случае  $\sigma_{22} > Y_t$ .

$\psi_2^{22}$  – решение уравнения  $\sigma_{22}(\psi_2^{22}\varepsilon_{ij}) = Y_c$ , если  $\sigma_{22}^{el} < Y_c$ ,

если выполнено  $Y_c \leq \sigma_{22}^{el} \leq Y_t$ , то  $\psi_2^{22} = 1$

$\psi_2^{33}$  – решение уравнения  $\sigma_{33}(\psi_2^{33}\varepsilon_{ij}) = Y_t$ , если  $\sigma_{33}^{el} > Y_t$ ,

$\psi_2^{33}$  – решение уравнения  $\sigma_{33}(\psi_2^{33}\varepsilon_{ij}) = Y_c$ , если  $\sigma_{33}^{el} < Y_c$ ,

если выполнено  $Y_c \leq \sigma_{33}^{el} \leq Y_t$ , то  $\psi_2^{33} = 1$

$\psi_2^{12} = S/|\sigma_{12}^{el}|$ , если выполнено  $|\sigma_{12}^{el}| > S$ , либо  $\psi_2^{12} = 1$ ,

$\psi_2^{13} = S/|\sigma_{13}^{el}|$ , если выполнено  $|\sigma_{13}^{el}| > S$ , либо  $\psi_2^{13} = 1$ ,

$\psi_2^{23} = S/|\sigma_{23}^{el}|$ , если выполнено  $|\sigma_{23}^{el}| > S$ , либо  $\psi_2^{23} = 1$ ,

где  $\sigma_{ij}^{el}$  – компоненты тензора напряжений, полученные из уравнения

(5.3) до обновления значений параметров  $\psi_i$ .

Интересно проанализировать уравнения для получения значений  $\psi_2$  в случае нормальных или поперечных нагружений, например, при

$\sigma_{22}(\psi_2^{22}\varepsilon_{ij}) = Y_c$ . Ниже приведена полная запись такого условия:

$$\begin{aligned}
 & [E_{22}\nu_{13}E_{33}\psi_1^2((- \nu_{13}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\nu_{12})E_{22} + \nu_{23}(2Y_c\nu_{12}\psi_1 + E_{11}\varepsilon_{11}))](\psi_2^{22})^3 + \\
 & + [\psi_1(\nu_{12}(Y_c\nu_{12}\psi_1 + E_{11}\varepsilon_{11})E_{22}^2 + E_{33}(Y_c\nu_{13}^2\psi_1 + E_{11}\varepsilon_{33}\nu_{23})E_{22} + \\
 & + E_{11}E_{33}Y_c\nu_{23}^2\psi_1)](\psi_2^{22})^2 + \\
 & + [E_{11}E_{22}^2\varepsilon_{22}](\psi_2^{22}) - E_{11}E_{22}Y_c = 0.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Видно, что несмотря на сложность выражений для коэффициентов, уравнение является кубическим относительно параметра  $\psi_2^{22}$ , то есть его всегда можно разрешить.

В общем случае необходимо также ввести зависимость прочностных характеристик от параметра повреждения  $Y_c(\psi_2)$ ,  $Y_t(\psi_2)$  и  $S(\psi_2)$ , чтобы смоделировать плавное падение прочности материала при разрушении, но в данном примере, для демонстрации возможностей предложенного подхода мы рассмотрим вариант отсутствия такой зависимости, то есть положим прочностные характеристики постоянными. На рис. 5.2 показаны схемы типовых диаграмм нагружения предлагаемого подхода. Следует отметить, что идея игнорирования деталей поведения композиционного материала после достижения максимальных напряжений близка к подходу предложенному Зиновьевым П. А. [342]. Кроме того, для простоты анализа не будут использованы последние два предположения, так как они требуют особого и детального рассмотрения.

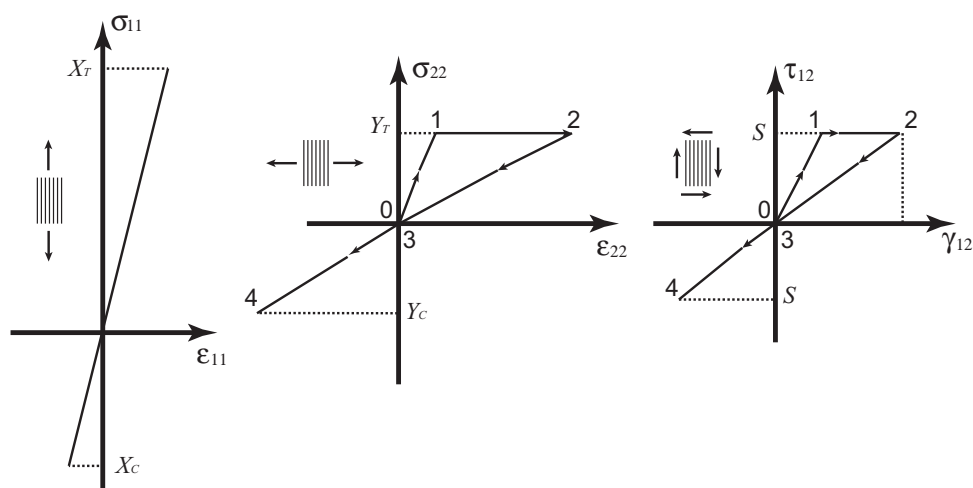


Рис. 5.2: Схемы типовых диаграмм нагружения.

### 5.2.1 Верификация

Соотношения (5.1 - 5.5) при помощи специальных процедур были реализованы в системе конечно-элементного моделирования Abaqus. В качестве экспериментов, рассмотрим два набора тестовых испытаний для сложных укладок и пропорционального нагружения [309]. В экспериментах реализовывалось двухосное нагружение, в качестве образцов использовались полые трубки, на рис. 5.3 показана сетка, используемая в расчетах. В модели использованы полностью интегрируемые трехмерные элементы, каждый слой композита моделировался отдельным слоем элементов.

В рассмотренных экспериментах использовались два типа укладок и материалов: стеклопластик с волокном Gevetex 21 x K43 и матрицей LY556/HT907/DY063 с укладкой  $[90^\circ/\pm 30^\circ_{\times 2}/90^\circ]$  и ламинат  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_S$  с волокном AS4 и эпоксидной матрицей 3501-6.

Чтобы получить полный набор необходимых механических констант, можно предположить  $E_{22} = E_{33}$ ,  $\nu_{12} = \nu_{13}$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23}$ .



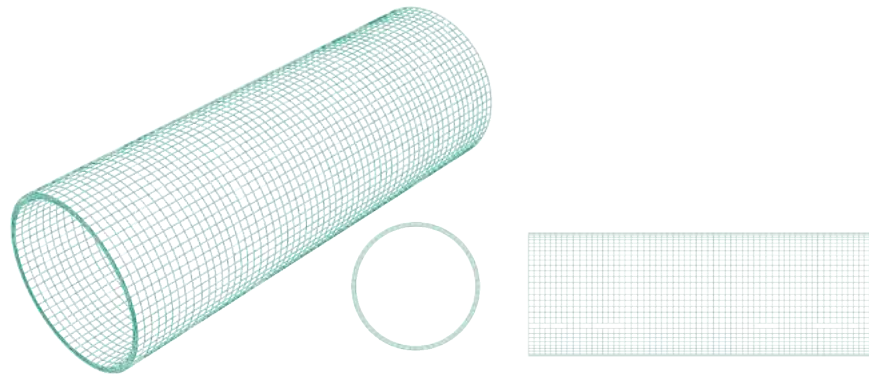


Рис. 5.3: Сетка, используемый в расчетах.

Таблица 5.1: Механические характеристики материала

Материал	$E_{11}$ ГПа	$E_{22}$ ГПа	$G_{12}$ ГПа	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$X_t$ МПа	$X_c$ МПа	$Y_t$ МПа	$Y_c$ МПа	$S$ МПа
AS4 + 3501-6 эроху	126	11	6.6	0.28	0.4	1950	1480	48	200	79
Gevetex E-glass 21 x K43 + LY556/HT907/DY063 эроху	53.5	17.7	5.83	0.28	0.4	1140	570	35	114	72

Образцы с укладкой  $[90^\circ / \pm 30^\circ_{x2} / 90^\circ]$  испытывались в условиях пропорционального нагружения под действием растягивающей нагрузки и кручения. Образцы с симметричной укладкой  $[0^\circ / \pm 45^\circ / 90^\circ]_S$  испытывались в условиях продольного растяжения и сжатия при одновременном действии внешнего или внутреннего давления. Продольные напряжения  $\sigma_x$ , окружные напряжения  $\sigma_y$  и сдвиговые  $\tau_{xy}$  в цилиндрической системе координат, соответствующей геометрии образца, вычисляются по следующим формулам:

$$\sigma_x = \frac{F}{A}, \quad \sigma_y = \frac{PR_m}{h}, \quad \tau_{xy} = \frac{M}{Ah},$$

где  $P$  – приложенное давление,  $F$  – осевая нагрузка,  $M$  – приложенный момент,  $A$  – площадь сечения образца,  $R_m$  – средний радиус, и  $h$  – толщина стенки образца.

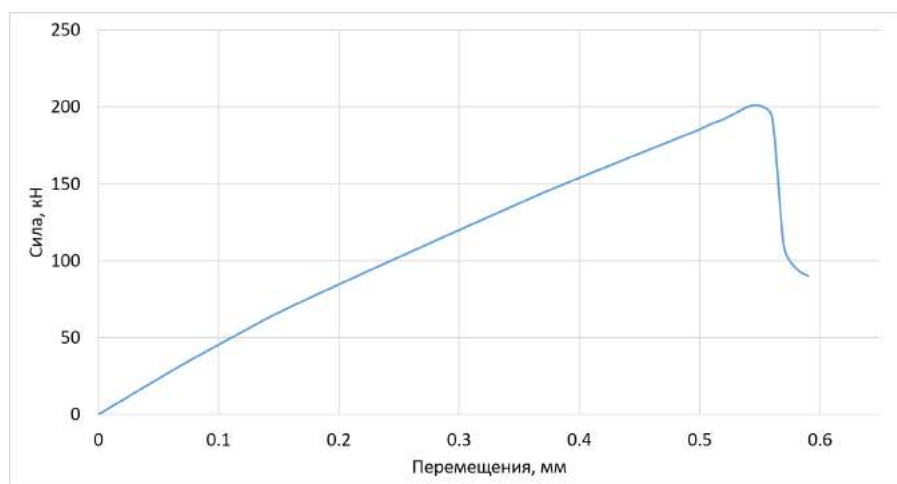


Рис. 5.4: Типовая кривая растяжения при моделировании нагружении образца.

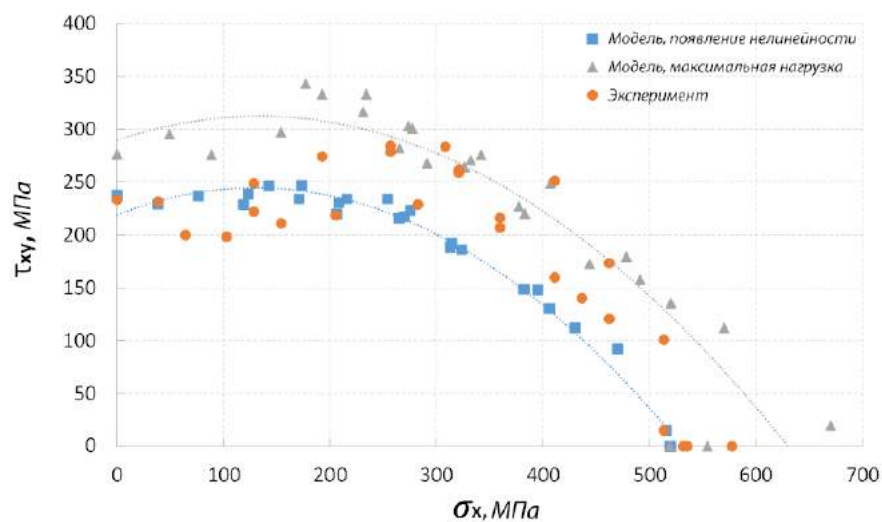


Рис. 5.5: Набор точек разрушения при растяжении и кручении образцов  $[90^\circ / \pm 30^\circ_{\times 2} / 90^\circ]$  E-glass/LY556.

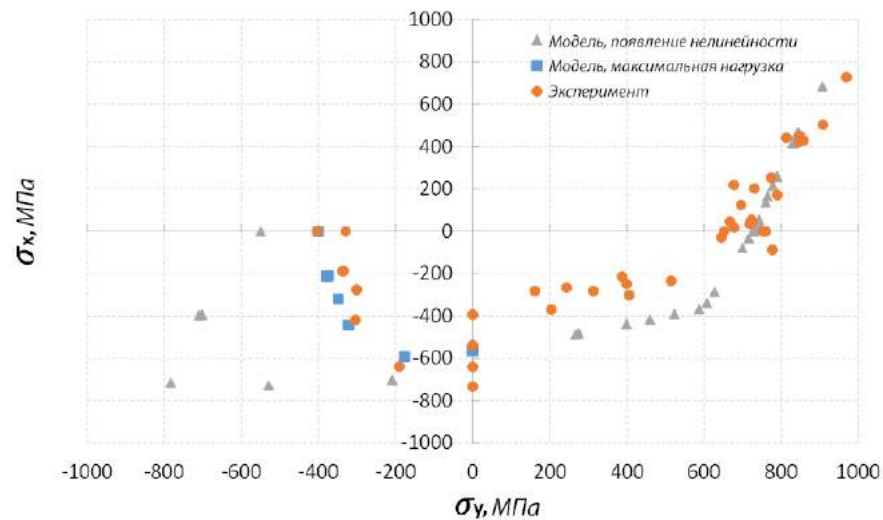


Рис. 5.6: Набор точек разрушения при действии одноосного нагружения совместно с давлением на стенки образцов  $[0^\circ / \pm 45^\circ / 90^\circ]_S$  AS4/3501–6.

чек соответствует различию значений параметра пропорционального нагружения, соответствующих началу проявления нелинейности и максимальной нагрузке. К сожалению, авторы экспериментов не описывают методику проведения экспериментов и получения конкретных значений параметров, соответствующих разрушению. Также, стоит отметить, что для сохранения пропорциональности приложения нагрузок, образцы приходится нагружать именно нагрузками, что осложняет определение точки разрушения, так как начиная с определенного момента происходит лавинообразное разрушение, при котором возможно проявление вязких эффектов как в исследуемом материале, так и в захватах образца и нагружающей машине.

На рис. 5.6 показаны результаты экспериментов и моделирования для образцов с укладкой  $[0^\circ / \pm 45^\circ / 90^\circ]_S$  из материала AS4/3501–6. Результаты моделирования в области  $\sigma_x \leq 0$  и  $\sigma_y \leq 0$ , дают плохое приближение экспериментальных данных, однако хорошо совпадают с результатами многих теорий и подходов моделирования разрушения композитов [310]. Это связано с тем, что анализировались именно напряжения в материале, либо

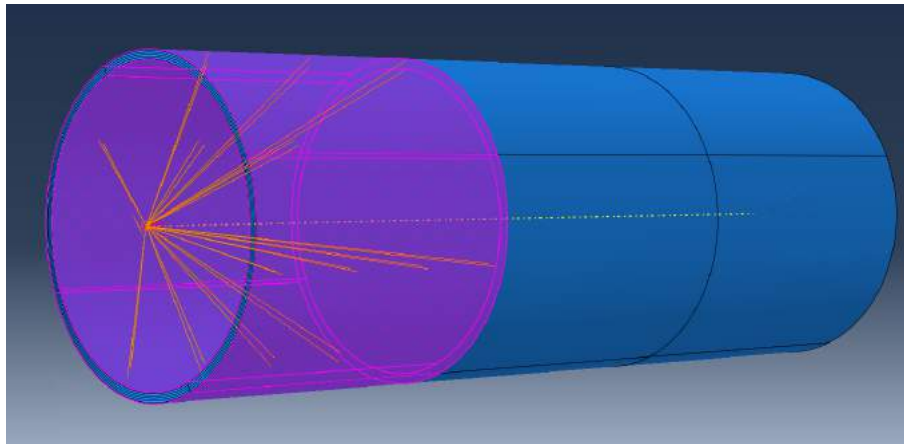


Рис. 5.7: Задание связей между точками приложения нагрузки и геометрией в модели.

образец без учета условий закрепления, и при этом пренебрегали возможной потерей устойчивости трубчатого образца. Анализ результатов моделирования нагружения образца с учетом заделки был проведен на основе предложенного подхода и соответствующие предельные точки отмечены на графике (рис. 5.6). Видно, что в этом случае результаты моделирования близки к экспериментальным напряжениям разрушения. Расхождение результатов в области  $\sigma_x \geq 0$  и  $\sigma_y \leq 0$ , по-видимому, связано с тем же эффектом.

Рассмотрим подробнее анализ разрушения образца, выполненного из материала E-glass/LY556/HT907/DY063 с укладкой, и вариантом нагружения  $F = 358001$ кгс и  $M = 12230.8$ кгс×мм. На рис. 5.7 показан способ закрепления одного из концов трубчатого образца, в выделенной области вводятся связи с центральной точкой, которые плавно ослабевают к центру образца, чтобы обеспечить разрушение именно в регулярной области цилиндра. На рис. 5.8 показано распределение параметра повреждения матрицы  $\psi_2$  при нагрузке, соответствующей началу разрушения.

На рис. 5.9 и 5.10 показаны последовательные стадии начала разруше-

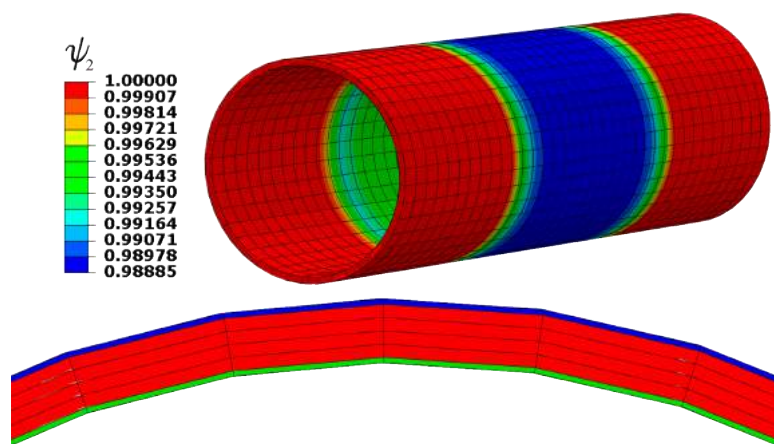


Рис. 5.8: Начало разрушения во внешних слоях с ориентацией  $90^\circ$ , распределение параметра  $\psi_2$ .

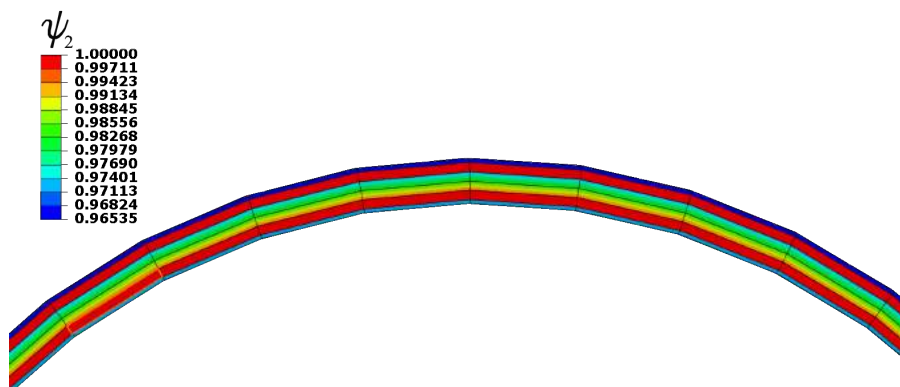


Рис. 5.9: Инициация повреждения во внутренних слоях  $-30^\circ$ .

ния слоев в образце. На рис. 5.11 отображено распределение параметра повреждения матрицы  $\psi_2$  в момент достижения максимальной нагрузки.

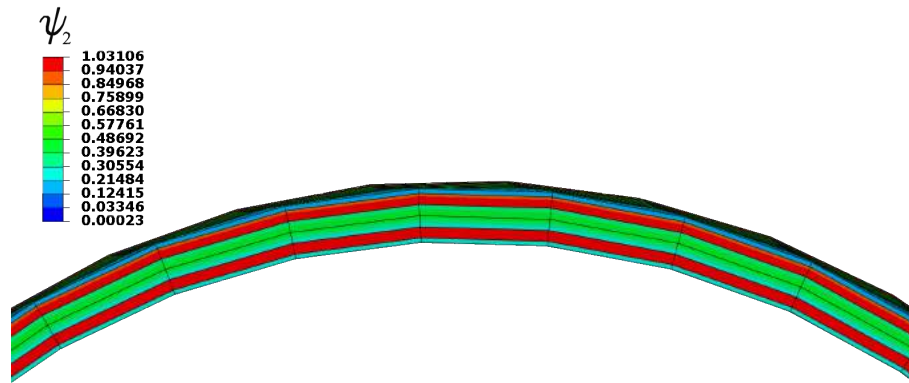


Рис. 5.10: Инициация повреждения во внутренних слоях  $+30^\circ$ .

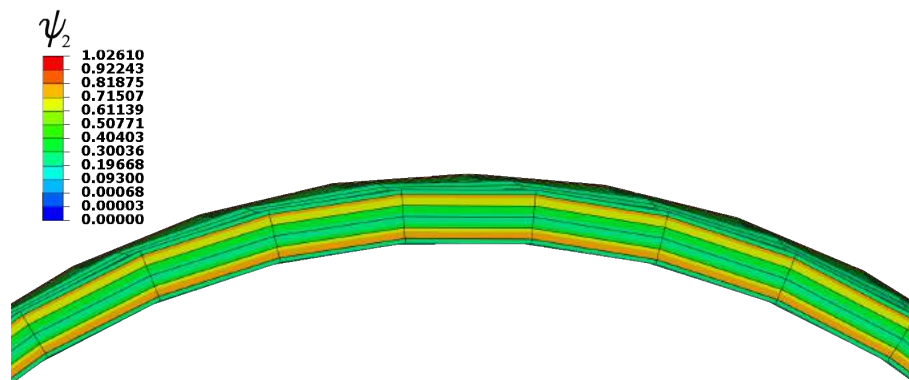


Рис. 5.11: Распределение параметра  $\psi_2$  в момент достижения нагрузки разрушения.

На рис. 5.12 - 5.17 показаны диаграммы изменения параметра поврежденности  $\psi_2$  в различных слоях. Видно, что на диаграммах имеются характерные ступенчатые спады значений. Этот эффект, по-видимому, связан с постепенным началом разрушения в различных слоях. Максимальное число ступеней равно шести, что в точности соответствует количеству слоев. При начале разрушения слоя с определенной ориентацией, начинается падение его жесткости, в связи с чем включается следующий слой, что приводит к началу его разрушения и, как следствие, реализуется еще одно перераспределение жесткостей и т.д.

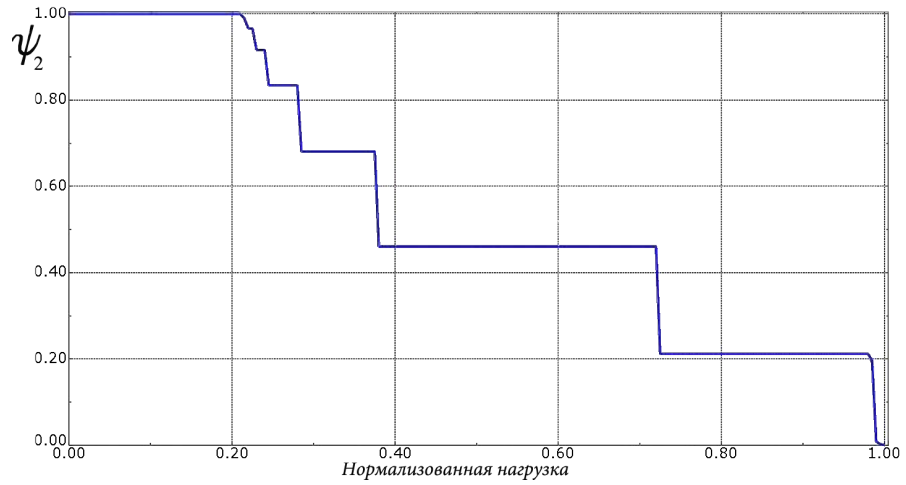


Рис. 5.12: Значение  $\psi_2$  в точках интегрирования элемента внешнего слоя с ориентацией  $90^\circ$ .

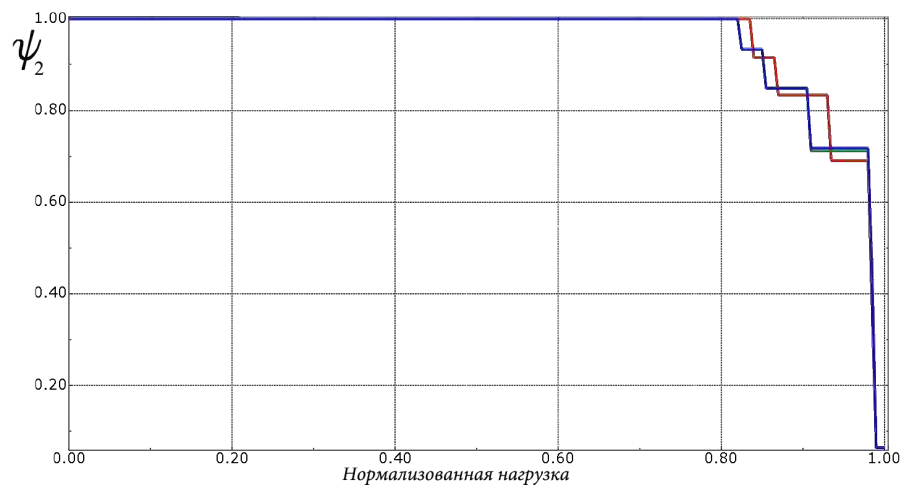


Рис. 5.13: Значение  $\psi_2$  в точках интегрирования элемента внешнего слоя с ориентацией  $30^\circ$ .



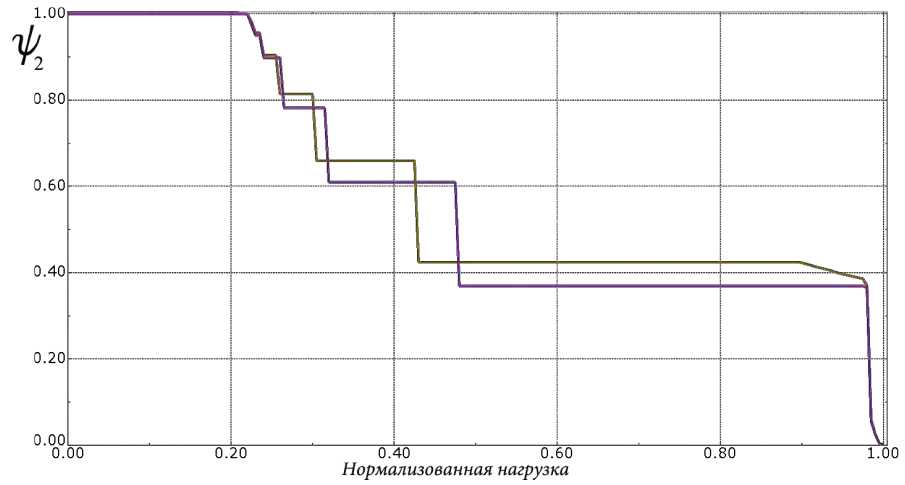


Рис. 5.14: Значение  $\psi_2$  в точках интегрирования элемента внешнего слоя с ориентацией  $-30^\circ$ .

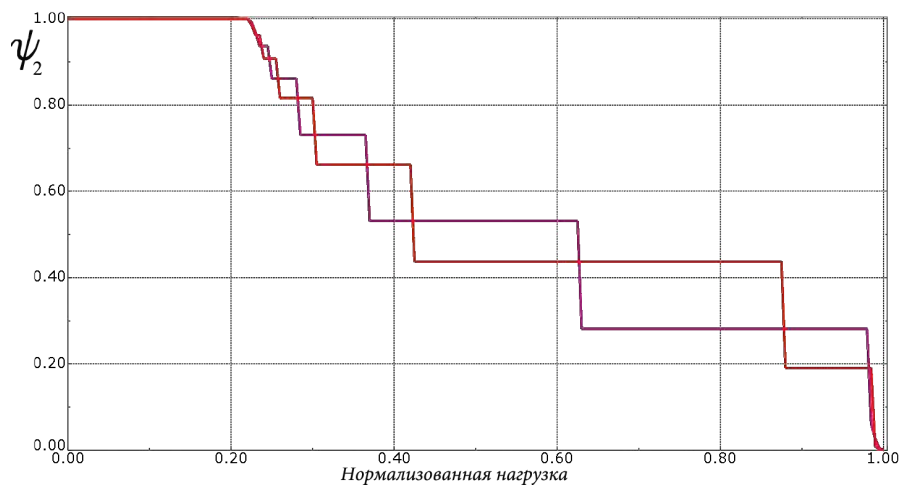


Рис. 5.15: Значение  $\psi_2$  в точках интегрирования элемента внутреннего слоя с ориентацией  $-30^\circ$ .

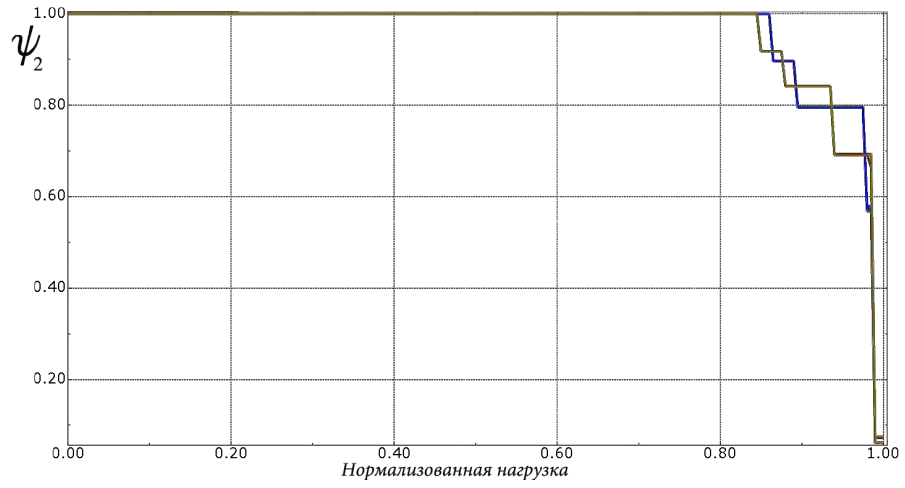


Рис. 5.16: Значение  $\psi_2$  в точках интегрирования элемента внутреннего слоя с ориентацией  $+30^\circ$ .

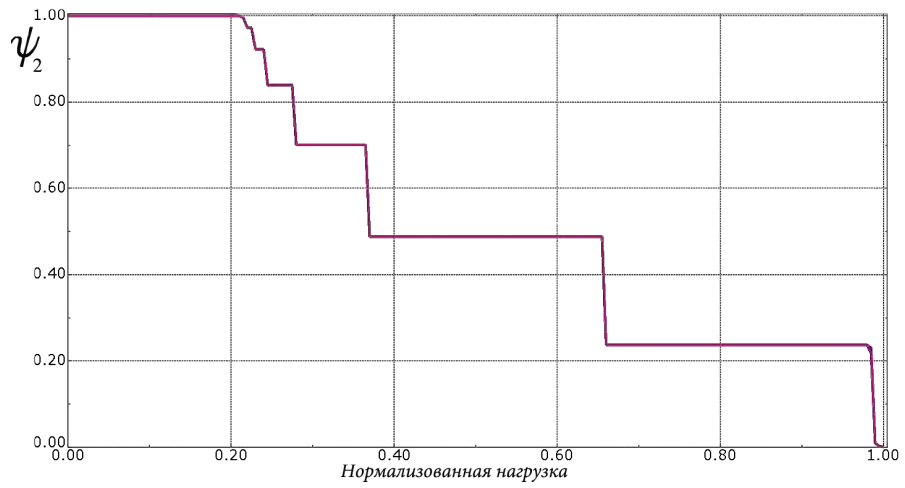


Рис. 5.17: Значение  $\psi_2$  в точках интегрирования элемента внутреннего слоя с ориентацией  $90^\circ$ .

### 5.3 Решение задачи о сжатии анизотропной полосы, ослабленной круговым вырезом, с учетом сдвиговой нелинейности совместно с ростом поврежденности

В главе 5 была рассмотрена задача о сжатии полосы с отверстием, в качестве примера, для демонстрации возможностей определяющих соотношений, учитывающих нелинейную связь между сдвиговыми компонентами напряжений и деформаций. Рассмотрим теперь эту задачу с учетом роста повреждений в материале [163]. Причем, рассмотрим решения, полученные на основе линейной теории упругости и с учетом нелинейности сдвиговых компонент. Интересно проанализировать различия, как с точки зрения общей жесткости образца и предсказываемой предельной нагрузки, так и со стороны картины повреждений, реализуемых при разных подходах.

В качестве упругой модели рассмотрим определяющие соотношения (4.7) и введем параметры повреждения наиболее простым образом — путем умножения жесткостных характеристик или нелинейных зависимостей на значения данных параметров:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\psi_1 E_{11} & -\nu_{12}/\psi_1 E_{11} & 0 \\ -\nu_{12}/\psi_1 E_{11} & 1/\psi_2 E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\psi_2 G_{12}(\varepsilon_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (5.7)$$

Таким образом, рассмотрим задачу о сжатии полосы с отверстием (рис. 4.4) для случаев, когда  $G(\varepsilon_{12})$  определено зависимостью, приведенной на рис. 4.3 и  $G(\varepsilon_{12}) \equiv Const$ . Необходимые упругие константы приведены в табли-

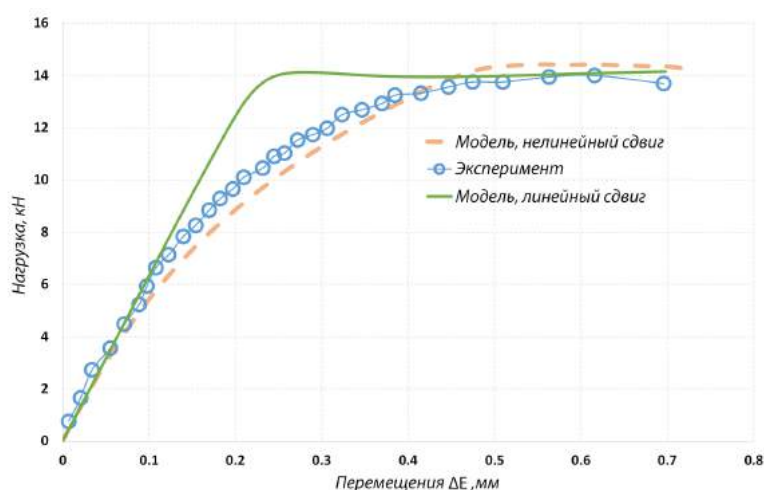


Рис. 5.18: Диаграммы нагружения композитной полосы с отверстием.

це 4.1, дополнительные прочностные характеристики приведены в таблице 5.2. На рис.5.18 показаны диаграммы, полученные на основе эксперимен-

Таблица 5.2: Прочностные характеристики композита Т300/976 [130]

$X_t$ (МПа)	$X_c$ (МПа)	$Y_t$ (МПа)	$Y_c$ (МПа)	$S_{12}$ (МПа)
2200	2707	102.4	253	106.9

тальных данных и в результате моделирования. Видно, что результаты расчетов на основе исходной модели линейной теории упругости и модели с нелинейной зависимостью сдвиговых компонент одинаково хорошо предсказывают значение предельной нагрузки. При этом, стоит отметить, что нелинейная упругая модель близка к экспериментальной диаграмме в течение всего процесса нагружения.

Рассмотрим распределения параметров поврежденности  $\psi_2$  для постоянного модуля сдвига и с учетом нелинейности (рис. 5.19). Видно, что линейная модель упругости приводит к большей площади повреждений чем нелинейный аналог, что не наблюдается в эксперименте [130]. Таким образом, ситуация напоминает результаты сравнения решений, продемон-

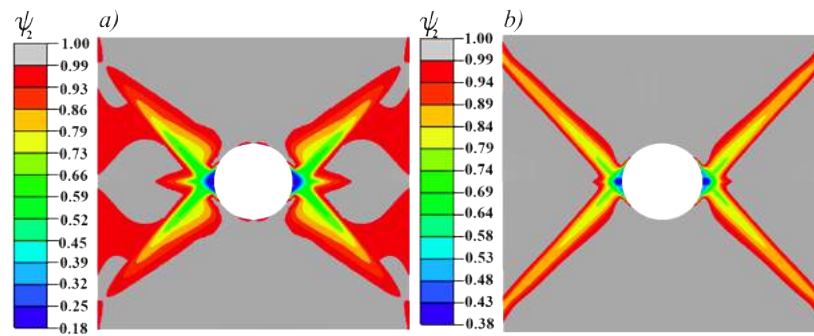


Рис. 5.19: Распределение параметра поврежденности матрицы  $\psi_2$  (минимальное значение по толщине), а) постоянный модуль сдвиговой жесткости, б) нелинейная сдвиговая жесткость.

стрированных в главе 2. Когда в решениях задач предельные нагрузки, полученные с учетом упругих деформаций, а также упрочнения материала и в задачах, основанных на идеальной пластичности, совпадали, при этом области пластичности в материале существенно различались.

## 5.4 Усложнение критерия начала разрушения

Был предложен один из возможных подходов к построению теории разрушения композита, основанный только на стандартных характеристиках материала. Было показано, что даже при таких простых предположениях, подход обеспечивает высокую точность приближения к реальному процессу разрушения материала. Тем не менее, при появлении большего количества экспериментальных данных, появляется желание ввести соответствующие изменения и использовать более сложные определяющие соотношения. По-видимому, в силу большого разнообразия критериев начала разрушения материала, наиболее востребованным изменением будет использование более сложного условия начала разрушения для однонаправленного слоя материала. Так как, критерий будет изменен с наиболее простого, где

условия представляли собой константы, что приводило к простым условиям для определения параметров поврежденности  $\psi_i$  (5.6), то поиск значений параметров приведет к решению нелинейных уравнений.

Поскольку решение строится, как правило, при помощи итерационной схемы, то процедуру поиска параметров можно существенно упростить. В общем случае, условие начала разрушения можно сформулировать в следующем виде:

$$F(\sigma_{ij}, \psi_1, \psi_2) - 1 = 0, \quad (5.8)$$

где  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{mn}, \psi_1, \psi_2)$ .

Если шаг по компонентам напряжений или деформаций относительно мал, то условие (5.8) можно линеаризовать относительно параметра  $\psi_2$  около значения  $\psi_2 = 1$ , что приведет к следующему соотношению:

$$\left. \frac{dF(\sigma_{ij}, \psi_1, \psi_2)}{d\psi_2} \right|_{\psi_2=1} (1 - \psi_2) + F(\sigma_{ij}, \psi_1, 1) - 1 = 0,$$

Последнее уравнение дает следующее выражение для параметра поврежденности:

$$\psi_2 = \frac{F(\sigma_{ij}, \psi_1, 1) - 1}{\left. \frac{\partial F(\sigma_{ij}, \psi_1, 1)}{\partial \sigma_{ij}} \frac{d\sigma_{ij}}{d\psi_2} \right|_{\psi_2=1} + \frac{\partial F(\sigma_{ij}, \psi_1, 1)}{\partial \psi_2}} + 1.$$

В случае использования в качестве критерия начала разрушения нескольких условий, как это реализовано в критерии Хашина [189], то необходимо рассмотреть представленное уравнение с каждым из условий, и в качестве окончательно параметра выбрать минимальный.

После этого, можно ввести текущие значения набора упругих констант

и последовательно их обновлять:

$$E_{ijkl}^{t_N} = \psi_2^{t_N} \dots \psi_2^{t_2} \psi_2^{t_1} \psi_2^{t_0} E_{ijkl}^{t_0},$$

где  $E_{ijkl}^{t_0}$  — модуль неповрежденного материала.

При этом, непосредственно для параметра поврежденности получим следующее выражение  $\psi_2 = \psi_2^{t_N} \dots \psi_2^{t_2} \psi_2^{t_1} \psi_2^{t_0}$ .

## **5.5 Зависимость критерия разрушения от параметра поврежденности и скорости изменения параметра поврежденности**

Экспериментальные исследования разрушения композиционных материалов демонстрируют не мгновенное падение жесткости материала до нуля после достижения предельной нагрузки, а плавное снижение жесткости, что очевидным образом видно при нагружении композита с контролем перемещений. Этот эффект может быть рассмотрен с точки зрения введения зависимости от параметров  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в критерий начала разрушения.

Рассматривая критерий начала разрушения материала в виде максимальных напряжений (5.4), можно в набор прочностных значений  $X_t, X_c, Y_t, Y_c$  и  $S$  ввести зависимость от параметров  $\psi_i$ .

Рассмотрим нелинейность зависимостей для описания процесса разрушения материала с точки зрения зависимости критерия разрушения от параметра поврежденности, а также, для демонстрации универсальности предложенного подхода, введем в условие начала разрушения зависимость от скорости изменения параметра поврежденности.

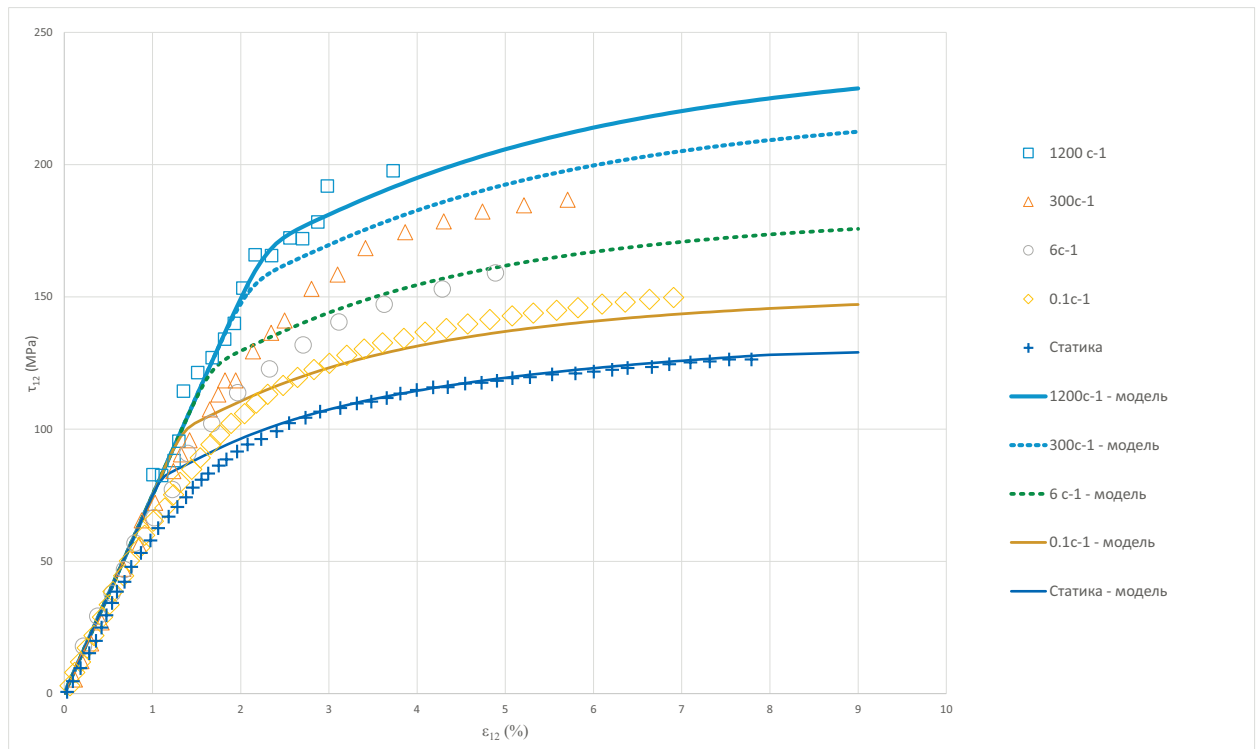


Рис. 5.20: Диаграммы сдвигового нагружения композиционного материала при разных скоростях деформирования.

На рис. 5.20 показаны диаграммы скоростного деформирования композиционного материала в случае сдвигового нагружения при разных скоростях деформирования [199]. Диаграммы получены при деформировании однонаправленных образцов с ориентацией выреза  $45^\circ$  из материала IM6G/3501-6. Рассмотрим только сдвиговую прочность материала  $S$ , и введем зависимость от значения параметра поврежденности и скорости изменения его значения, т.е  $S = S(\psi, \dot{\psi})$  (здесь и далее для удобства параметр поврежденности обозначен как  $\psi$ , вместо  $\psi_2$ ). В процессе активного роста повреждений вектор напряжений лежит на поверхности критерия начала разрушения, что приводит к соотношению:

$$S(\psi, \dot{\psi}) = \tau_{12}.$$



Компонента напряжений  $\tau_{12}$ , в случае использования модели линейной теории упругости, может быть выражена следующим образом:  $\tau_{12} = G^c \varepsilon_{12}$ , где  $G^c$  имеет тоже значение, что и в соотношениях (5.2), то есть  $G^c = \psi G$ . Компонента деформаций  $\varepsilon_{12}$  может быть выражена следующим образом:  $\varepsilon_{12} = vt$ , где  $v$  — скорость деформирования (1/с.),  $t$  — время (с.). Окончательно, активный процесс сдвигового разрушения приводит к следующему уравнению для параметра поврежденности:

$$S(\psi, \dot{\psi}) = \psi G_{12} vt. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.9) является обычным дифференциальным уравнением, которое в общем случае можно решить численно. Используя опыт моделей пластичности, учитывающих скоростное упрочнение, таких как модель Джонсона-Кука [211], введем условие прочности в раздельном виде для статики и динамики, то есть

$$S(\psi, \dot{\psi}) = S_{стат}(\psi) S_{дин}(\dot{\psi}),$$

где  $S_{стат}(\psi)$  — статическая прочность материала, а  $S_{дин}(\dot{\psi})$  — динамический множитель, который влияет на общую прочность в зависимости от скорости разрушения. Динамический множитель должен стремиться к единице при близких к статическим скоростях нагружения, то есть  $S_{дин}(\dot{\psi}) \rightarrow 1$ , при  $\dot{\psi} \rightarrow 0$ . При этом, функция статической прочности материала может быть формализована, аналогично модели Джонсона-Кука, в виде  $S_{стат}(\psi) = A + B(1 - \psi)^n$ , где константы:  $A, B$  и  $n$ , необходимо получить из диаграммы статического нагружения. Динамический множитель введем в виде, близком к форме Миллера [264],  $S_{дин}(\dot{\psi}) =$

$1 + \left( \sinh \left[ C \ln \left( -\dot{\psi} / \dot{\psi}_0 \right) \right] \right)^N$ , где  $C$ ,  $N$  и  $\dot{\psi}_0$  — константы материала, при этом в случае  $\dot{\psi} < \dot{\psi}_0$  динамический множитель необходимо положить  $S_{дин}(\dot{\psi}) \equiv 1$ . Выбор такого вида динамического множителя связан с трудностями приближения экспериментальных данных, приведенных на рис. 5.20, при помощи аналога, реализованного в модели Джонсона-Кука.

Окончательно задача приближения экспериментальных данных сводится к решению следующего обыкновенного дифференциального уравнения, где на вход подаются константы материала:  $A$ ,  $B$ ,  $n$ ,  $C$ ,  $N$  и  $\dot{\psi}_0$ :

$$(A + B(1 - \psi)^n) \left( 1 + \sinh \left[ C \ln \left( -\dot{\psi} / \dot{\psi}_0 \right) \right]^N \right) = \psi G_{12} v t, \quad (5.10)$$

для различных скоростей деформирования  $v$ , согласно (рис. 5.20).

На рис. 5.20 показаны результаты моделирования, полученные на основе констант, приведенных в таблице 5.3.

Таблица 5.3: Константы материала для сдвиговой прочности материала IM6G/3501-6  $S(\psi, \dot{\psi})$

$A$ (МПа)	$B$ (МПа)	$n$	$C$	$\dot{\psi}_0$ (1/с)	$N$	$G_{12}$ (МПа)
75	76	1.5	0.06	0.00002	1.5	7500

Видно, что результаты моделирования близки к экспериментальным кривым, расхождение в большей степени связано с отсутствием учета упругой нелинейности и какой-либо вязкости на начальном этапе деформирования.

В качестве примера рассмотрим решение уравнения (5.10), для скорости деформирования  $v = 1200$  1/с. (рис. 5.21). Видно, что скорость параметра поврежденности  $\psi$  имеет первоначальный максимум, после чего скорость падает в несколько раз. При этом, если рассмотреть соответству-

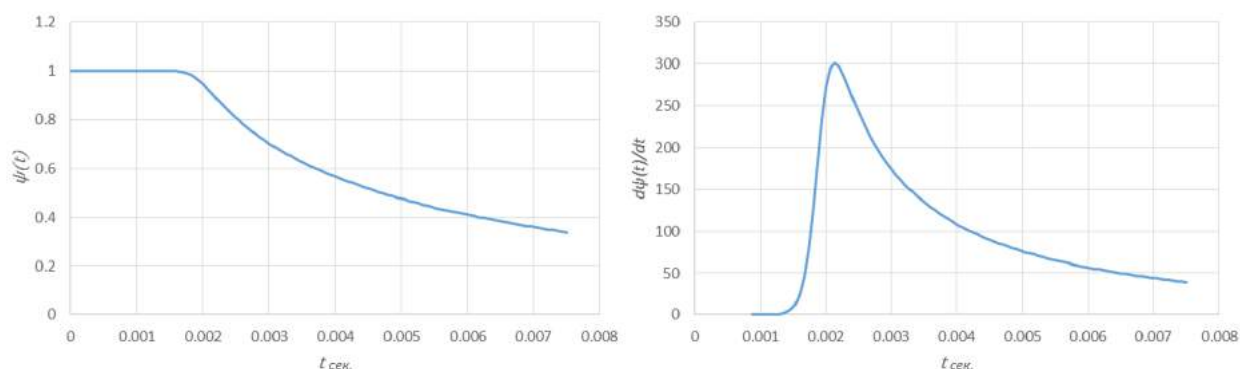


Рис. 5.21: История изменения параметра повреждения и его скорости при скорости деформирования 1200 1/с..

ющую диаграмму деформирования (рис. 5.20), видно, что диаграмма не падает мгновенно после падения значений параметра скорости разрушения, а по инерции продолжает плавный рост, то есть, кратковременный всплеск скорости роста параметра поврежденности оказывает влияние на всю диаграмму деформирования.

## 5.6 Выводы к главе 5

В главе рассматривается и исследуется процесс разрушения композита. Для моделирования разрушения вводятся параметры поврежденности, которые снижают жесткость материала. В главе приводится набор предположений, позволяющий строить теории разрушения композитов необходимой сложности. На примере анализа экспериментов на двухосное пропорциональное нагружение были продемонстрированы возможности предложенного подхода с использованием только стандартных экспериментальных данных. При этом наблюдается достаточно хорошая точность результатов расчетов с учетом разброса экспериментальных данных

Были проанализированы возможные усложнения предложенного подхо-

да. Решена задача о сжатии полосы, выполненной из композитного материала, ослабленной круговым отверстием. В определяющих соотношениях учитывалось нелинейное поведение при сдвиговом нагружении. Показано, что диаграммы нагружения и распределение повреждений имеют полное сходство с экспериментом. При этом результат, основанный на постоянном модуле сдвиговой жесткости, продемонстрировал существенное отличие в росте и финальном распределении параметра поврежденности. Тем не менее, подход основанный на линейно-упругой модели с постоянным модулем жесткости, предсказал аналогичное значение предельной нагрузки, как и с учетом нелинейности сдвиговых свойств материала. В этом смысле ситуация напоминает ту, которая наблюдалась при сравнении решений, полученных на основе моделей жесткопластического и упругопластического тел, в главе 2, где предельные значения нагрузок совпадали, но финальные области пластического деформирования существенно различались. Предложена итерационная схема построения решения на основе использования параметров разрушения в случае сложного условия начального разрушения композита. В качестве последнего возможного усложнения предложенного подхода рассматривается введение зависимости характеристик прочности от параметров поврежденности. Причем рассматривается также введение скорости изменения параметра поврежденности, что позволяет моделировать скоростное упрочнение композиционного материала. В качестве примера, рассматривается корреляция модели с экспериментами на сдвиговое нагружение композита до скоростей деформирования 1200 1/с, с практически весьма хорошим соответствием.

# Выводы

В работе показана необходимость учета зависимости свойств конструкционных материалов от вида внешних воздействий с использованием параметров, формализующих вид напряженного состояния, и наглядно продемонстрировано, что с ними можно работать как в условиях пластичности, так и в условиях упругого деформирования. Введение в качестве такого параметра отношение гидростатической компоненты напряжений к интенсивности напряжений, названного параметром трехосности тензора напряжений, дает методическую основу для анализа прочности материалов со сложной структурой, и позволяет выработать общий подход для моделирования процесса деформирования таких сред.

При рассмотрении задач предельного состояния показано, что использование условия пластичности, в котором зависимость от параметра вида напряженного состояния сформулирована в обобщенной форме, дает возможность обобщить многие известные подходы, и на их основе создавать новые, учитывающие большее количество особенностей свойств конкретных материалов. Рассмотрены методы решения задач и на основе решения ряда задач продемонстрирована возможность эффективного использования такого критерия на примерах жесткопластических схем построения решения, а также в случае численных реализаций использования упругопластических моделей.

Предложены некоторые усложнения формулировки условия пластичности, позволяющие учесть анизотропию материала и скоростное упрочнение, эффективность которых продемонстрирована для конкретных металлических сплавов.

При анализе задач предельного состояния было показано, что учет упругих деформаций влияет на конечное распределение пластических областей, но при этом величины предельных нагрузок в решениях на основе жесткопластических и упругопластических моделей практически совпадают.

Решение технологических задач производства конструкций из композиционных материалов также существенным образом облегчается при использовании такого подхода, что показано, как на уровне моделирования драпировки препрегов, так и при решении задач прочности и анализе поведения материалов на основе микромеханических подходов. Это свидетельствует о том, что рассмотренный подход носит достаточно общий характер. В работе предложена законченная методика моделирования полного технологического цикла изготовления изделий на основе термопластичного композита. Рассмотренный подход позволяет на основе знания истории изменения температуры в материале, предсказать возможность зарождения дефектов в будущем изделии, а также спрогнозировать итоговую прочность конструкции для конкретных эксплуатационных воздействий.

При анализе упругой стадии деформирования композитов была предложена модель с использованием как параметра вида напряженного состояния, так и степени сдвигового деформирования монослоя композита. На примере реальной задачи о сжатии композитной пластины с отверстием было продемонстрировано влияние величины сдвиговых деформаций на

поверхностях вдоль армирующих элементов на общую картину деформирования и итоговые области разрушения. При этом показано, что области разрушения в решении, не учитывающем эффект снижения сдвиговой жесткости материала с ростом деформаций, отличаются от наблюдаемых в эксперименте. При этом, следует отметить совпадение величин предельных нагрузок, при использовании разных определяющих соотношений для материала в условиях упругости. В этом смысле, результат согласуется с выводами анализа задач предельного равновесия, где при учете упругих деформаций области пластического деформирования отличаются от соответствующих областей в жесткопластических решениях, но величины предельных нагрузок при этом практически совпадают.

Сформулирован набор предположений, позволяющий построить теорию разрушения композитов. В конечном итоге набор предположений имеет вид блоков, и допускает определенную свободу при выборе тех или иных условий, в зависимости от необходимой точности при решении поставленной задачи и имеющихся экспериментальных данных. В качестве примера построена модель, которая использует только стандартные входные данные, как правило, доступные в инженерной практике. Такой пример можно считать отправной точкой для построения более сложных теорий и является удобным и наглядным шагом, позволяющим понять необходимость уточнения теории и получаемой при этом точности в моделировании композиционного материала. Простота используемого критерия для начала разрушения однонаправленного слоя позволяет наглядным образом установить суть предлагаемых определяющих соотношений, не отягощенных сложными математическими выкладками. Например, условия определения значений параметров деградации, вводимых в модели, сводятся в самом

сложном случае к решению кубических уравнений. На основе используемого подхода проведен анализ возможностей моделирования различных форм нелинейности в поведении композиционных материалов и их влияния на условия разрушения, а также предложен подход для учета влияния высоких скоростей нагружения на характеристики прочности. В работе на основе анализа экспериментальных данных предложено специальное аналитическое выражение для учета скоростного упрочнения материала. Отличительной чертой представленной модели является введение скорости параметра повреждений в условие прочности, что существенным образом упрощает анализ и не требует введения в определяющие соотношения дополнительных прочностных параметров.

Можно заключить, что в данной работе удалось рассмотреть широкий круг задач прочности при статическом и высокоскоростном деформировании, основываясь на введении параметров вида напряженного состояния, степени сдвигового деформирования, а также параметров поврежденности. Особо ценным в работе, помимо предложенных новых моделей материала, является поэтапное введение таких параметров в определяющие соотношения, что позволяет отследить их влияние на моделируемые свойства материалов, в том числе путем сопоставления теоретических результатов и экспериментальных данных. Это, в свою очередь, способствует пониманию того, какие именно возможности моделирования необходимы для учета различных эффектов, демонстрируемых материалом со сложной внутренней структурой в процессе деформирования на всех этапах от упругого поведения до разрушения.



# Литература

- [1] *Агахи К. А., Кузнецов В. Н.*, К теории пластичности материалов, учитывающих влияние гидростатического давления, В кн.: Упругость и неупругость, вып. 5. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 46-53.
- [2] *Айнбиндер С. Б., Алексне К. И., Тюнина Э. Л., Лака М. Г.*, Свойства полимеров при высоких давлениях, М.: Химия, 1973, 190 с.
- [3] *Айнбиндер С. Б., Лака М. Г., Майорс И. Ю.*, Влияние гидростатического давления на механические свойства полимерных материалов, Механика полимеров, 1965, № 1, с. 65-75.
- [4] *Айнбиндер С. Б., Тюнина Э. Л., Цируле К. И.*, Свойства полимеров в различных напряженных состояниях, М.: Химия, 1981, 232 с.
- [5] *Амбарцумян С. А.*, Разномодульная теория упругости. – 1982.
- [6] *Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А.*, Основные уравнения теории упругости для материалов разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1966. № 2. С. 8.
- [7] *Арутюнян Р. А., Марков К.*, Разрыхление и разрушение пластических тел, Вестник Ленингр. ун-та, 1977, № 7, с. 111-116.

- [8] *Арутюнян Р. А.*, Об учете эффекта Баушенгера и объемной пластической деформации в теории пластичности, В кн.: Исследования по упругости и пластичности, вып. 7 Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1968 с. 87-94.
- [9] *Березин А. В., Ломакин Е. В., Строков В. И., Барабанов В. Н.*, Сопротивление деформированию и разрушение изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния, Проблемы прочности, 1979, № 2, с. 60-65.
- [10] *Березин А. В., Строков В. И., Барабанов В. Н.*, Деформируемость и разрушение изотропных графитовых материалов, В кн.: Конструкционные материалы на основе углерода, вып. 2, М.: Металлургия, 1976, № 2, с. 184-188.
- [11] *Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф.*, Однородный сдвиг сыпучего материала. Дилатансия., Физ.-техн. проблемы разр. полезных ископаемых, 1982, № 5, с. 23-29.
- [12] *Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. Е.*, Однородный сдвиг сыпучего материала. Локализация деформаций., Физ.-техн. проблемы разр. полезных ископаемых, 1983, № 5, с. 17-21.
- [13] *Боткин А. И.*, О прочности сыпучих и хрупких материалов, Изв. ВНИИ Гидротехники, 1940, т.26, с. 205-236.
- [14] *Быков Д. Л.*, Об некоторых методах решения задач теории пластичности, В кн.: Упругость и неупругость, вып 4. М.: Изд-во МГУ, 1975, с. 290-298.

- [15] *Вакуленко А. А., Литов Ю. Н., Чебанов В. М.* , О разрыхлении структуры и прочности полимерных материалов, Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 3, с. 539-541.
- [16] *Верещагин Л. Ф., Шапочкин В. А.*, Влияние гидростатического давления на сопротивление сдвигу в твердых телах, Физика металлов и металловедение, 1960, т. 9, вып. 2, с. 258-264.
- [17] *Вялов С. С.*, Прочность и ползучесть материалов, неодинаково сопротивляющихся сжатию и растяжению, В кн.: Реологические вопросы механики горных пород. Алма-Ата: Изд-во АН Каз.ССР, 1964, № 4, с. 20-46.
- [18] *Вялов С. С.*, Реологические основы механики грунтов, М.: Высшая школа, 1978, 447 с.
- [19] *Гаврилов Д. А.*, Определяющие уравнения для нелинейных тел, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, Докл. АН Укр.ССР. Сер. А. Физ-матем. и техн. науки, 1980, № 3, с. 37-41.
- [20] *Генки Г.*, К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений, В кн.: Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит. 1948, с. 114-135.
- [21] *Гольденблат И. И., Копнов, В. А.*, Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов, М.: изд. Машиностроение, 1968, 192 с.
- [22] *Горовой В. А., Асатурян А. Ш.*, Теория пластичности пористых сред с конечными деформациями, Докл. АН Укр.ССР. Сер. А. Физ-матем. и техн. науки, 1981, № 5, с. 39-42.

- [23] *Грин Р.Дж.*, Теория пластичности пористых тел, *Механика*. Сб. перевод. М.: Мир, 1973, № 4, с. 109-120.
- [24] *Дощинский Г. А., Мидуков В. З., Головенко В. С., Корниенко П. А.*, О построении диаграмм истинных напряжений при испытании пористых спеченных материалов., *Проблемы прочности*, 1974, № 12, с. 36-39.
- [25] *Дудукаленко В. В., Смыслов А. Ю.*, К теории деформирования грунта с пористой структурой, *Журн. прикл. механики и техн. физики*, 1980, № 6, с. 122-127.
- [26] *Жуков А. М.*, Механические свойства сплава МА2 при двухосновм растяжении, *Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук*, 1957, № 9, с. 56-65.
- [27] *Жуков А. М.*, Свойства сплава Д16Т при растяжении с кручением, *Инженерный сборник*, 1960, т. 29, с. 55-62.
- [28] *Жуков А. М.*, Упругие, прочностные и деформационные свойства некоторых полимеров, *Механика композитных материалов*, 1984, № 1, с. 8-15.
- [29] *Зенкевич О.*, *Метод конечных элементов в технике*, М.: Мир, 1975, 541 с.
- [30] *Зенкевич О., Чанг И.*, *Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред*, Нью-Йорк, 1967. Пер. с англ. М.: Недра, 1974. 240 с.
- [31] *Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.*, *Теория упрочняющегося пластического тела*, М.-Л.: Наука, 1971, 231 с.

- [32] *Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н.*, К теории сжимаемых идеально пластических сред, Прикладная математика и механика, 1963, т. 27, вып. 3, с. 589-592.
- [33] *Ивлев Д. Д.*, Теория идеальной пластичности, М.: Наука, 1966, 231 с.
- [34] *Ильюшин А. А.*, Пластичность, М.: Гос. изд-во технико-теоритич. лит., 1948, 376 с.
- [35] *Качанов Л. М.*, Основы теории пластичности, М.: Наука 1969г.
- [36] *Ковальчук Б. И.*, О деформировании полухрупких тел, Проблемы прочности, 1982, № 9, с. 51-57.
- [37] *Ковардакова А.Ю, Ломакин Е.В.*, Пластический изгиб полос из материала свойства которого зависят от вида напряженного состояния, Механика твердого тела. 1995. No 5.
- [38] *Ковардакова А.Ю, Ломакин Е.В.*, Пластическое течение при изгибе полос из материала чувствительного к виду напряженного состояния, Механика твердого тела. 1994. No 5.
- [39] *Кременский И. Г.*, Пластическое деформирование пористого листа, Изв. вузов. Машиностроение, 1977, № 4, с. 158-163.
- [40] *Кузнецов В. Н., Агахи К. А.*, Построение материальных функций и численный метод решения краевых задач с учетом влияния гидростатического давления, Изв. АН Аз.ССР. Сер. Физ-техн. и матем. наук, 1976, № 5, с. 97-103.

- [41] *Лантев А. М.*, Уплотнение пористых изотропных материалов в условиях плоской деформации, Изв. вузов. Машиностроение, 1978, № 2, с. 158-162.
- [42] *Леонов М. Я., Паняев В. А., Русинко К. Н.*, Зависимость между деформациями и напряжениями для полухрупких тел, Инженерный журн. Механика твердого тела, 1967, № 6, с. 26-32.
- [43] *Ломакин Е.В.*, Деформирование и разрушение сред, характеристики которых зависят от вида напряженного состояния, Дис. на соиск. уч. ст. док. ф.м.н., М.: МГУ, 1988.
- [44] *Ломакин Е.В.*, Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряженного состояния, Механика композитных материалов, 1988, № 1, с. 3-9.
- [45] *Ломакин Е.В.*, Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния, Изв. АН СССР., МТТ., 1980, № 4, с. 92-99.
- [46] *Ломакин Е.В.*, Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред, Изв. РАН. МТТ., 1991, № 6, с. 66-75.
- [47] *Ломакин Е.В.*, Пластическое течение дилатирующей среды в условиях плоской деформации, Механика твердого тела, 2000, № 6.
- [48] *Ломакин Е.В., Федулов Б.Н.*, Сжатие пластины с круговым вырезом из слоистого композита с учетом упругих нелинейных сдвиговых свойств. Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел - научное наследие Ю.Н.Работнова (к 100-летию со дня рождения). стр. 94-99.

- [49] *Ломакин Е. В., Федулов Б. Н.*, Предельное состояние полосы с угловыми надрезами из материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами, В кн.: Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, М.: КомКнига/URSS, 2006. с. 188-194.
- [50] *Ломакин Е. В., Федулов Б. Н.*, Растяжение полосы с угловыми надрезами из материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами, Конф. Ломоносовские чтения. Тезисы, М.: МГУ, 2006. с. 110.
- [51] *Ломакин Е. В., Федулов Б. Н.*, Теория пластичности и предельного равновесия тел, чувствительных к виду напряженного состояния, Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-4. С. 1585-1587.
- [52] *Ломакин Е. В., Федулов Б. Н.*, Растяжение полосы, ослабленной вырезами с круговым основанием, в условиях плоской деформации из материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами, Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2013. № 4. С. 80-87.
- [53] *Ломакин Е. В., Федулов Б. Н.*, Пластическое деформирование полос из материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами, Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 4 (54). С. 263-279.

- [54] *Ломов С.В.*, Прогнозирование строения и механических свойств тканей технического назначения методами математического моделирования, диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук / Санкт-Петербург, 1995
- [55] *Макаров Э. С., Толоконников Л. А.*, Вариант построения теории пластичности дилатирующей среды, Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1979, № 1, с. 88-93.
- [56] *Макаров Э. С., Толоконников Л. А.*, Плоские задачи теории пластичности ортотропной дилатирующей среда, Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1979, № 5, с. 139-143.
- [57] *Малинин Н. Н., Батанова О. А.*, Теория пластичности материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, Изв. вузов. Машиностроение, 1979, № 12, с. 9-14.
- [58] *Манукян Н. В., Петросян Г. Л., Погосян М. Э.*, Диаграмма деформирования пористого материала, Изв. вузов. Машиностроение, 1978, № 3, с. 16-20.
- [59] *Миролубов И. Н.*, К вопросу об обобщении теории прочности октаэдрических касательных напряжений на хрупкие материалы, В кн.: Тр. Ленингр. технол. ин-та, 1953, вып. 25, с. 42-52.
- [60] *Надаи А.*, Пластичность и разрушение твердых тел, М: Изд-во иностр. лит., 1954, 648 с.
- [61] *Новожилов В. В.*, О физическом смысле инвариантов, используемых в теории пластичности, Прикладная математика и механика, 1952, т. 16, вып. 5, с. 615-619.



- [62] *Петросян Г. Л.*, О теории пластичности пористых тел, Изв. вузов. Машиностроение, 1977, № 5, с. 10-13.
- [63] *Писаренко Г. С., Лебедев А. А., Ковальчук Б. И.*, Экспериментальные основы теории пластического деформирования металлов при низких температурах, В кн.: Нелинейные модели и задачи механики твердого тела. М.: Наука, 1984, с. 24-41.
- [64] *Победря Б. Е.*, Моделирование эволюционной деструкции композиционных материалов //Computational Civil and Structural Engineering. – 2009. – С. 133.
- [65] *Победря Б. Е.*, О критериях разрушения структурно-неоднородных материалов // в кн. Пластичность и разрушение твердых тел. - 1988. - изд. Наука. Москва. под ред. Гольдштейн Р.В.
- [66] *Работнов Ю. Н.*, Механика деформируемого твердого тела, М.: Наука, 1979, 744 с.
- [67] *Работнов Ю. Н.*, Ползучесть элементов конструкций, М.: Наука, 1966, 752 с.
- [68] *Ренне И. П., Мясищев А. А.*, Влияние гидростатического давления на сопротивление сдвигу при плоском пластическом течении, Изв. вузов. Машиностроение, 1977, № 3, с. 140-143.
- [69] *Рычков Б. А., Паняев В. А., Гончарова И. В.*, Упругость и неупругость серого чугуна //Вестник КРСУ. – 2012. – Т. 12. – №. 10. – С. 70.
- [70] *Рябцев Н. Г.*, Материалы квантовой электроники. – 1972.

- [71] *Салганик Р. Л.*, Механика тел с большим числом трещин, Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1973, № 4, с. 149-158.
- [72] *Серенсен С. В.*, Об условиях прочности при переменных нагрузках для плоского и объемного напряженного состояния, Инж. сборник, 1941, т. 1, № 1, с. 3-12.
- [73] *Сергеичев И.В., Сафонов А.А., Ушаков А.Е., Федоренко А.Н., Федулов Б.Н.*, Моделирование динамических ударных испытаний контейнера-цистерны с сосудом из полимерных композиционных материалов для мультимодальных перевозок химически агрессивных жидкостей и продуктов нефтехимии //XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – 2015. – С. 3430-3433.
- [74] *Смыслов А. Ю.*, К теории пластичности пористых тел, Изв. вузов. Машиностроение, 1980, № 4, с. 107-110.
- [75] *Соколовский В. В.*, Статика сыпучей среды, Гос. изд-во техн.-теор. литературы, М.: 1954, 276 с.
- [76] *Соколовский В. В.*, Теория пластичности, 3-е изд. М.: Высшая школа, 1969, 608 с.
- [77] *Толоконников Л. А.*, О форме предельной поверхности изотропного тела, Прикладная механика, 1969, т. 5, вып. 10, с. 123-125.
- [78] *Федулов Б. Н.*, Предельное состояние и пластическое течение дилатирующих сред, Конф. IX всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Изд-во Нижегород. Универ. им. Н.И. Лобачевского, 2006.

- [79] *Федулов Б.Н., Сафонов А.А., Кантор М.М., Ломов С.В.*, Моделирование отверждения термопластических композитов и оценка величин остаточных напряжений, *Композиты и наноструктуры*, 2017, Т -9, № -2, с. 102-122.
- [80] *Федулов Б. Н.*, Предельное состояние и пластическое течение дилатирующих сред, Конф. IX всероссийский съезд по теоритической и прикладной механике, Изд-во Нижегород. Универ. им. Н.И. Лобачевского, 2006.
- [81] *Федулов Б. Н.*, Растяжение полос с надрезами из материала пластические свойства которого зависят от вида напряженного состояния, Деп. в ВИНТИ 06.10.2006, № 1209-B2006.
- [82] *Федулов Б. Н.*, Задачи пластического течения дилатирующих сред при плоской деформации, Дис. на соиск. уч. ст. канд. ф.м.н. / Москва, 2006
- [83] *Федулов Б. Н.*, Растяжение полос из дилатирующего материала //Вестник Самарского государственного университета. – 2006. – №. 6-1.
- [84] *Федулов Б. Н. и др.*, Разработка и реализация математической модели драпировки термопластичного материала для описания процесса формования //Системы управления жизненным циклом изделий авиационной техники: актуальные проблемы, исследования, опыт внедрения и перспективы развития. – 2014. – С. 339-339.
- [85] *Фрейденталь А., Гейрингер Х.*, Математические теории неупругой сплошной среды, М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962, 432 с.

- [86] *Шкарбелис К. К.*, К вопросу прочности бетона в условиях сложного напряженного состояния, Исследования по бетону и железобетону, 1958, № 3, с. 61-90.
- [87] Штиллер В. Уравнение Аррениуса и неравновесная кинетика. – М. : Мир, 2000.
- [88] ABAQUS theory manual, Rhod Islad, USA.
- [89] *Advani S. G., Tucker III C. L.*, The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites //Journal of rheology. – 1987. – Т. 31. – №. 8. – С. 751-784.
- [90] *Altenbach, H., and A. Zolochovsky.*, A generalized failure criterion for three-dimensional behaviour of isotropic materials, Engineering fracture mechanics 54.1 (1996): 75-90.
- [91] *Andanaes E., Grestle. K. and Ko, H.* (1977). Response of mortar and concrete to biaxial compression. J. Engng. Mech. Div. ASCE 103. 515–516
- [92] *Aravas N., Aifantis E. C.*, On the Geometry of Slip and Spin in Finite Plastic Deformation, International Journal of Plasticity, vol. 7, pp. 141–160, 1991.
- [93] *Aravas N.*, On the Numerical Integration of a Class of Pressure-Dependent Plasticity Models, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, pp. 1395–1416, 1987.

- [94] *Argyris J. H.*, Continua and Discontinua, Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965.
- [95] *Argyris J. H.*, Matrix analysis of three-dimensional elastic media-small and large displacements, *J. A.I.A.A.*, 3, pp. 45-51, Jan. 1965.
- [96] *Argyris J. H.*, Triangular elements with linearly varying strain for the matrix displacement method, *J. Roy. aero Soc. Tech. note*, 69, Oct. 1965.
- [97] *ASTM D790*. Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials.
- [98] *Aimene Y. et al.*, A hyperelastic approach for composite reinforcement large deformation analysis //Journal of Composite materials. – 2010. – T. 44. – №. 1. – C. 5-26.
- [99] *Aubertin M., Li L.*, A porosity-dependent inelastic criterion for engineering materials //International Journal of Plasticity. – 2004. – T. 20. – №. 12. – C. 2179-2208.
- [100] *Avella M., Martuscelli E., Mazzola M.*, Kinetic study of the cure reaction of unsaturated polyester resins //Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. – 1985. – T. 30. – №. 6. – C. 1359-1366.
- [101] *Badel P. et al.*, Rate constitutive equations for computational analyses of textile composite reinforcement mechanical behaviour during forming //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2009. – T. 40. – №. 8. – C. 997-1007.

- [102] *Banabic D.*, Plastic behaviour of sheet metal //Sheet Metal Forming Processes. – Springer Berlin Heidelberg, 2010. – C. 27-140.
- [103] *Bai Y., Wierzbicki T.*, Application of extended Mohr–Coulomb criterion to ductile fracture //International Journal of Fracture. – 2010. – T. 161. – №. 1. – C. 1-20.
- [104] *Cintra Jr J. S., Tucker III C. L.*, Orthotropic closure approximations for flow-induced fiber orientation //Journal of Rheology. – 1995. – T. 39. – №. 6. – C. 1095-1122.
- [105] *Coffin L. F.*, The flow and fracture of a brittle material //Journal of Applied Mechanics-Transactions Of The Asme. – 1950. – T. 17. – №. 3. – C. 233-248.
- [106] *Barbero E. J., Cosso F. A.*, Determination of material parameters for discrete damage mechanics analysis of carbon-epoxy laminates //Composites Part B: Engineering. – 2014. – T. 56. – C. 638-646.
- [107] *Barlat F., Lian K.*, Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions //International Journal of Plasticity. – 1989. – T. 5. – №. 1. – C. 51-66.
- [108] *Barlat F., Yoon J. W., Cazacu O.* On linear transformations of stress tensors for the description of plastic anisotropy //International Journal of Plasticity. – 2007. – T. 23. – №. 5. – C. 876-896.
- [109] *Barlow J.*, Optimal Stress Locations in Finite Element Models, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 10, pp. 243–251, 1976.

- [110] *Bai Y., Wierzbicki T.*, Application of extended Mohr–Coulomb criterion to ductile fracture //International Journal of Fracture. – 2010. – T. 161. – №. 1. – C. 1-20.
- [111] *Banabic D.*, Plastic behaviour of sheet metal //Sheet Metal Forming Processes. – Springer Berlin Heidelberg, 2010. – C. 27-140.
- [112] *Bearing Works, Inc.*, PEEK data sheet [www.bearingworks.com](http://www.bearingworks.com)
- [113] *Bergan P. B., Horrigmoe G., Krakeland B., Soreide T. H.*, Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 12, pp. 1677–1696, 1978.
- [114] *Bert C. W.*, Models for fibrous composites with different properties in tension and compression //Journal of Engineering Materials and Technology. – 1977. – T. 99. – №. 4. – C. 344-349.
- [115] *Bert C. W., Reddy J. N.*, Mechanics of bimodular composite structures, In: Mechanics of composite materials. Recent Adv. Proc. IUTAM Symp. Blacksburg. Va, 16-19 Aug., 1982. New York e.a., 1983, pp. 323-337.
- [116] *Bessard E., De Almeida, Gerard Bernhart O.*, Unified isothermal and non-isothermal modelling of neat PEEK crystallization, J Therm Anal Calorim (2014) 115:1669–1678 DOI 10.1007/s10973-013-3308-8
- [117] *Besson J.*, Continuum models of ductile fracture: a review //International Journal of Damage Mechanics. – 2010. – T. 19. – №. 1. – C. 3-52.

- [118] *Bigoni D., Piccolroaz A.*, Yield criteria for quasibrittle and frictional materials //International journal of solids and structures. – 2004. – T. 41. – №. 11. – C. 2855-2878.
- [119] *Bogetti T. A., Gillespie Jr J. W.* Process-induced stress and deformation in thick-section thermoset composite laminates //Journal of composite materials. – 1992. – T. 26. – №. 5. – C. 626-660.
- [120] *Bogetti T. A. et al.*, Predicting the nonlinear response and progressive failure of composite laminates //Composites science and technology. – 2004. – T. 64. – №. 3. – C. 329-342.
- [121] *Boisse P. et al.* Composites forming //Advances in Material Forming. – Springer Paris, 2007. – C. 61-79.
- [122] *Boisse P., Gasser A., Hivet G.*, Analyses of fabric tensile behaviour: determination of the biaxial tension–strain surfaces and their use in forming simulations //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2001. – T. 32. – №. 10. – C. 1395-1414.
- [123] *A. Bragov, A. Konstantinov, A. Lomunov, I. Sergeichev, B. Fedulov.* Experimental and numerical analysis of high strain rate response of Ti-6Al-4V titanium alloy //Journal de Physique IV. – 2009. – T. 137. – C. 1465.
- [124] *A. Bragov, A. Konstantinov, A. Lomunov, I. Sergeichev and B. Fedulov*, DYMAT 2009 - 9th International Conference on the Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic Loading, Volume 2, 2009, 1465 - 1470 <https://doi.org/10.1051/dymat/2009207>



- [125] *Bragov A. M., Lomunov A. K.* Methodological aspects of studying dynamic material properties using the Kolsky method //International journal of impact engineering. – 1995. – T. 16. – №. 2. – C. 321-330.
- [126] *Cao J. et al.*, Characterization of mechanical behavior of woven fabrics: experimental methods and benchmark results //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2008. – T. 39. – №. 6. – C. 1037-1053.
- [127] *Cedolin L., Crutzen Jr Y. R., Dei P. S.*, Triaxial stress-strain relationship for concrete //Journal of Engineering Mechanics. – 1977. – T. 103. – №. 3.
- [128] *Chamis C. C.* Mechanics of composite materials: past, present, and future //Journal of Composites, Technology and Research. – 1989. – T. 11. – №. 1. – C. 3-14.
- [129] *Chang S. H., Hwang J. R., Doong J. L.*, Optimization of the injection molding process of short glass fiber reinforced polycarbonate composites using grey relational analysis //Journal of Materials Processing Technology. – 2000. – T. 97. – №. 1. – C. 186-193.
- [130] *F. K. Chang, Lessard L. B.* Damage tolerance of laminated composites containing an open hole and subjected to compressive loadings: Part I—Analysis //Journal of Composite Materials. – 1991. – T. 25. – №. 1. – C. 2-43.
- [131] *Chaboche J. L.*, A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories //International Journal of Plasticity. – 2008. – T. 24. – №. 10. – C. 1642-1693.

- [132] *Chamis C. C., Sinclar J. H.*, Ten-Deg Off-Axis Shear Properties in Fiber Composites. *Experimental Mechanics*. 1977: 339-346.
- [133] *Charmetant A. et al.*, Hyperelastic model for large deformation analyses of 3D interlock composite preforms // *Composites Science and Technology*. – 2012. – T. 72. – №. 12. – C. 1352-1360.
- [134] *Chapman T. J. et al.* Prediction of process-induced residual stresses in thermoplastic composites // *Journal of Composite Materials*. – 1990. – T. 24. – №. 6. – C. 616-643.
- [135] *Chen W. F., Han D. J.*, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [136] *Chu, C. C., Needleman A.*, Void Nucleation Effects in Biaxially Stretched Sheets, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 102, pp. 249–256, 1980.
- [137] *Cocks A. C. F., Leckie F. A.*, Creep constitutive equations for damaged materials // *Advances in applied mechanics*. – 1987. – T. 25. – C. 239-294.
- [138] *Cowper, G. R.*, Gaussian Quadrature for Triangles, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, pp. 405–408, 1973.
- [139] *Cowper, G.R., and Symonds, P.S.* 1957. Strain hardening and strain rate effects in the impact loading of cantilever beams. Report No. 28. Brown University Division of Applied Mathematics Providence, R.I.
- [140] *Cui W. C., Wisnom M. R.*, Contact finite element analysis of three-and four-point short-beam bending of unidirectional composites

- //Composites science and technology. – 1992. – T. 45. – №. 4. – C. 323-334.
- [141] *Cuntze R. G., Freund A.* The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates //Composites Science and Technology. – 2004. – T. 64. – №. 3. – C. 343-377.
- [142] *Cytec*, Technical data sheet apc-2-peek thermoplastic polymer [https://www.cytec.com/sites/default/files/datasheets/APC-2\\_PEEK\\_031912-01.pdf](https://www.cytec.com/sites/default/files/datasheets/APC-2_PEEK_031912-01.pdf)
- [143] *Danas K., Castaneda P. P.*, Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials, International Journal of Solids and Structures. – 2012. – T. 49. – №. 11. – C. 1325-1342.
- [144] *Darcy H.*, Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application.. – Victor Dalmont, 1856.
- [145] *de Coulomb C. A.*, Essai sur une application des regles de maximis & minimis a quelques problemes de statique, relatifs a l'architecture. – 1776.
- [146] *De Jong H. F.* Thickness direction inhomogeneity of mechanical properties and fracture toughness as observed in aluminium 7075-T651 plate material //Engineering Fracture Mechanics. – 1980. – T. 13. – 1. – C. 175-192.
- [147] *De Luca P., Lefebure P., Pickett A. K.* Numerical and experimental investigation of some press forming parameters of two fibre reinforced

- thermoplastics: APC2-AS4 and PEI-CETEX //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 1998. – T. 29. – №. 1-2. – C. 101-110.
- [148] *Dimaggio, F. L., and Sandler, I. S.*, "Material Model for Granular Soils,"Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 97, No. EM3, 1971, pp. 935-950.
- [149] *Donth E.* General derivation of the WLF equation from a fluctuation approach to the glass transition //Acta Polymerica. – 1979. – T. 30. – №. 8. – C. 481-485.
- [150] *Drucker D. C., Gibson R. E., Henkel D. J.*, Soil Mechanics and Work-Hardening Theories of Plasticity //Proceedings of the American Society of Civil Engineers. – ASCE. – T. 81. – №. 9. – C. 1-14.
- [151] *Drucker, D. C., Prager W.*, Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, Quarterly of Applied Mathematics, vol. 10, pp. 157–165,
- [152] *Dubinskii S.V., Sevast'janov F.S., Saŕonov A.A., Abaimov S.G., Rozin N.V., Fedulov B.N.*, Evaluation of mechanical properties in vacuum infused structures with micro and macro voids, Composites and nanostructures. 2016. 8-3. p. 151-159.
- [153] *Echaabi J., Trochu F., Gauvin R.*, Review of failure criteria of fibrous composite materials //Polymer Composites. – 1996. – T. 17. – №. 6. – C. 786-798.
- [154] *Eckold G. C.*, Failure criteria for use in the design environment //Composites science and technology. – 1998. – T. 58. – №. 7. – C. 1095-1105.

- [155] *Edge E. C.*, Stress-Based Grant–Sanders Method for Predicting Failure of Composite Laminates //Composites Science and Technology. – 1998. – T. 58. – №. 7. – C. 1033-1041.
- [156] *Evans A. G., Wilshaw T. R.*, Quasi-static solid particle damage in brittle solids—I. Observations analysis and implications //Acta Metallurgica. – 1976. – T. 24. – №. 10. – C. 939-956.
- [157] *Faria R., Oliver J., Cervera M. A.*, strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures //International Journal of Solids and Structures. – 1998. – T. 35. – №. 14. – C. 1533-1558.
- [158] *Fedulov, B.N., Safonov, A.A., Ushakov, A.E.*, The analysis of stress state types of composite constituents in the case of transversal loading of unidirectional laminate, ECCM 2016 - Proceeding of the 17th European Conference on Composite Materials
- [159] *Fedulov B. N.*, The limit plastic state of a holed strip made of a dilatant material //Moscow University Mechanics Bulletin. – 2007. – T. 62. – №. 6. – C. 160-164.
- [160] *Fedulov B. N. et al.*, Influence of fibre misalignment and voids on composite laminate strength //Journal of Composite Materials. – 2015. – T. 49. – №. 23. – C. 2887-2896.
- [161] *Fedulov B. N. et al.*, Strength Analysis and Process Simulation of Subway Contact Rail Support Bracket of Composite Materials //Applied Composite Materials. – 2016. – T. 23. – №. 5. – C. 999-1013.

- [162] *Fedulov B. N. et al.*, Modelling of thermoplastic polymer failure in fiber reinforced composites //Composite Structures. – 2017. – Т. 163. – С. 293-301.
- [163] *Fedulov B. et al.*, Nonlinear shear behavior and failure of composite materials under plane stress conditions //Acta Mechanica. – 2017. – Т. 6. – №. 228. – С. 2033-2040.
- [164] *Fedulov B. N. et al.*, Method for computational modelling of residual stresses and stress-induced manufacturing defects in vacuum-infused automated placement laminates //Композиты и наноструктуры. – 2016. – Т. 8. – №. 1. – С. 29-46.
- [165] *Fedulov B.N. et al.*, The analysis of stress state types of composite constituents in the case of transversal loading of unidirectional laminate, ECCM17 - 17th European Conference on Composite Materials Munich, Germany, 26-30th June 2016
- [166] *Fedulov B.N. et al.*, Modeling Of Forming Process Of Composite Materials Based On Thermoplastic Matrix, Simulia Community Conference, May 18–21, 2015 | Berlin, Germany.
- [167] *Fedulov B. N., Sergeichev I. V., Saifonov A. A.*, Modeling of draping a two-dimensional textile preforms on the basis of the model of nonlinear shift // International conference "Deformation and fracture of composite materials and structures. (DFCMS-2014), Moscow, 10-13 November 2014
- [168] *Fedulov B.N., Ushakov A.E., Saifonov A.A., Klenin Y.G., Izotov A.V., Sergeichev I.V.*, Structural design and strength analysis of a new

composite roof for a typical hopper car. Proceedings of Symposium: Design with Composites, CompositesWeek@Leuven, Leuven, Belgium, September 18, 2013.

- [169] *Fernlund G. et al.* Experimental and numerical study of the effect of cure cycle, tool surface, geometry, and lay-up on the dimensional fidelity of autoclave-processed composite parts //Composites part A: applied science and manufacturing. – 2002. – T. 33. – №. 3. – C. 341-351.
- [170] *Freudenthal A. M.*, The inelastic behavior and failure of concrete, In: Proc. First U.S.Nat Congr. Appl. Mech., Publ. Amer. Eng., New York, 1952, pp. 641-646.
- [171] *Gao S. L., Kim J. K.* Cooling rate influences in carbon fibre/PEEK composites. Part 1. Crystallinity and interface adhesion //Composites Part A: Applied science and manufacturing. – 2000. – T. 31. – №. 6. – C. 517-530.
- [172] *Garnich M. R., Akula V. M. K.*, Review of degradation models for progressive failure analysis of fiber reinforced polymer composites //Applied Mechanics Reviews. – 2009. – T. 62. – №. 1. – C. 010801.
- [173] *Gereke T. et al.*, Experimental and computational composite textile reinforcement forming: a review //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2013. – T. 46. – C. 1-10.
- [174] *Gdoutos, Emmanuel E.*, Size Effect on Structural Failure. Strain 45.2 (2009): 105-107.

- [175] *Gotsis P. K., Chamis C. C., Minnetyan L.* Prediction of composite laminate fracture: micromechanics and progressive fracture //Composites Science and Technology. – 1998. – T. 58. – №. 7. – C. 1137-1149.
- [176] *Grassl P., Jirasek M.* Damage-plastic, model for concrete failure //International journal of solids and structures. – 2006. – T. 43. – №. 22. – C. 7166-7196.
- [177] *Gurson, A. L.*, Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Materials, Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 99, pp. 2–15, 1977.
- [178] *Hill R.* A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals //Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society, 1948. – T. 193. – №. 1033. – C. 281-297.
- [179] *Haanappel S. P. et al.* Formability analyses of uni-directional and textile reinforced thermoplastics //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2014. – T. 56. – C. 80-92.
- [180] *Hammond V. H., Loos A. C.* The effects of fluid type and viscosity on the steady-state and advancing front permeability behavior of textile preforms //Journal of reinforced plastics and composites. – 1997. – T. 16. – №. 1. – C. 50-72.
- [181] *Han L. H. et al.*, A modified Drucker-Prager Cap model for die compaction simulation of pharmaceutical powders //International



- Journal of Solids and Structures. – 2008. – T. 45. – №. 10. – C. 3088-3106.
- [182] *Hahn H. T., Pagano N. J.*, Curing stresses in composite laminates //Journal of Composite Materials. – 1975. – T. 9. – №. 1. – C. 91-106.
- [183] *Hahn H. T., Tsai S. W.*, Nonlinear elastic behavior of unidirectional composite laminae //Journal of Composite Materials. – 1973. – T. 7. – №. 1. – C. 102-118.
- [184] *Hao L., Ke P., June W.*, An anisotropic damage criterion for deformation instability and its application to forming limit analysis of metal plates //Engineering Fracture Mechanics. – 1985. – T. 21. – №. 5. – C. 1031-1054.
- [185] *Harrison P., Gomes R., Curado-Correia N.* Press forming a 0/90 cross-ply advanced thermoplastic composite using the double-dome benchmark geometry //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2013. – T. 54. – C. 56-69.
- [186] *Hart-Smith L. J.*, Predictions of the original and truncated maximum-strain failure models for certain fibrous composite laminates //Composites Science and Technology. – 1998. – T. 58. – №. 7. – C. 1151-1178.
- [187] *Hart-Smith L. J.*, Predictions of a generalized maximum-shear-stress failure criterion for certain fibrous composite laminates //Composites Science and Technology. – 1998. – T. 58. – №. 7. – C. 1179-1208.

- [188] *Hart-Smith L. J.*, Expanding the capabilities of the Ten-Percent Rule for predicting the strength of fibre–polymer composites //Composites Science and Technology. – 2002. – T. 62. – №. 12. – C. 1515-1544.
- [189] *Hashin Z.* Failure criteria for unidirectional fiber composites //Journal of applied mechanics. – 1980. – T. 47. – №. 2. – C. 329-334.
- [190] *Hashin, Z.*, Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites, Journal of Applied Mechanics. – 1980. - T. 47, -C. 329–334.
- [191] *He Y., Makeev A.*, Nonlinear shear behavior and interlaminar shear strength of unidirectional polymer matrix composites: A numerical study //International Journal of Solids and Structures. – 2014. – T. 51. – №. 6. – C. 1263-1273.
- [192] *Hershey A. V.*, The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face-centered cubic crystals //Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme. – 1954. – T. 21. – №. 3. – C. 241-249.
- [193] *Hinton M. J., Kaddour A. S., Soden P. D. (ed.)*, Failure criteria in fibre reinforced polymer composites: the world-wide failure exercise. – Elsevier, 2004.
- [194] *Hjelm, H. E.*, Elastoplasticity of Grey Cast Iron, FE-Algorithms and Biaxial Experiments, Ph.D. Thesis, Chalmers University of Technology, Division of Solid Mechanics, Sweden, 1992.
- [195] *Hjelm, H. E.*, Yield Surface for Grey Cast Iron under Biaxial Stress, Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 116, pp. 148–154,1994.

- [196] *Hooputra H., Gese H., Dell H., Werner H.*, A Comprehensive Failure Model for Crashworthiness Simulation of Aluminium Extrusions, *International Journal of Crashworthiness* 2004; 9(5): 449–464.
- [197] *Hosford W. F.*, A generalized isotropic yield criterion // *Journal of Applied Mechanics*. – 1972. – T. 39. – №. 2. – C. 607-609.
- [198] *Hsiao S. W., Kikuchi N.*, Numerical analysis and optimal design of composite thermoforming process // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. – 1999. – T. 177. – №. 1-2. – C. 1-34.
- [199] *Hsiao H. M., Daniel I. M., Cordes R. D.*, Strain rate effects on the transverse compressive and shear behavior of unidirectional composites // *Journal of Composite Materials*. – 1999. – T. 33. – №. 17. – C. 1620-1642.
- [200] *Huang Z. M.*, A bridging model prediction of the ultimate strength of composite laminates subjected to biaxial loads // *Composites Science and Technology*. – 2004. – T. 64. – №. 3. – C. 395-448.
- [201] *Hult J.*, Continuum damage mechanics-capabilities, limitations and promises // *Mechanisms of deformation and fracture*. – 1979. – C. 233-347.
- [202] *Hutchinson J. W., Tvergaard V.*, Comment on “Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials” by K. Danas and P. Ponte Castaneda, *International Journal of Solids and Structures*. – 2012. – T. 49. – №. 23. – C. 3484-3485

- [203] *Pardoen T., Hutchinson J. W.*, An extended model for void growth and coalescence //Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2000. – T. 48. – №. 12. – C. 2467-2512.
- [204] *Hutchinson J. W.*, Linking scales in fracture mechanics //Advances in fracture research. – 1997. – T. 1. – C. 1-14.
- [205] *Icardi U., Locatto S., Longo A.*, Assessment of recent theories for predicting failure of composite laminates //Applied Mechanics Reviews. – 2007. – T. 60. – №. 2. – C. 76-86.
- [206] *Irons B. M., Ahmad S.*, Techniques of Finite Elements, Ellis Horwood Limited, Halsted Press, John Wiley and Sons, Chichester, England, 1980.
- [207] *Irons B. M.*, Numerical integration applied to finite element methods, Conf. on Use of digital computers in Structural Engineering. Univ. of Newcastle, July 1966.
- [208] *Ivanov D. S. et al.* InSitu Measurements of Fabric Thickness Evolution During Draping //AIP Conference Proceedings. – AIP, 2011. – T. 1353. – №. 1. – C. 924-929.
- [209] *Jones R. M.* Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression //AIAA Journal. – 1977. – T. 15. – №. 1. – C. 16-23.
- [210] *Jones R. M., Morgan H. S.*, Bending and extension of cross-ply laminates with different moduli in tension and compression //Computers & Structures. – 1980. – T. 11. – №. 3. – C. 181-190.

- [211] *Johnson, G. R., W. H. Cook*, Fracture Characteristics of Three Metals Subjected to Various Strains, Strain rates, Temperatures and Pressures, *Engineering Fracture Mechanics*, 1985; 21(1): 31–48.
- [212] *Jordon J. B. et al.* Damage characterization and modeling of a 7075-T651 aluminum plate // *Materials Science and Engineering: A*. – 2009. – T. 527. – №. 1. – C. 169-178.
- [213] *Kachanov L.*, Introduction to continuum damage mechanics, 1986, Brookline, MA 02146, USA, *Mechanics of Elastic Stability Vol. 10* 1986, ISBN: 978-90-481-8296-1
- [214] *Kang M. K., Lee J.*, A real-time cloth draping simulation algorithm using conjugate harmonic functions // *Computers & Graphics*. – 2007. – T. 31. – №. 2. – C. 271-279.
- [215] *Kantor M.M., Ushakov A.E., Saĵonov A.A., Fedulov B.N.*, Computational simulation of compression forming of the thermoplastic prepreg. Proceedings of 20th International Conference on Composite Materials, Copenhagen, Denmark, July 19-24, 2015.
- [216] *Karkanis P. I., Partridge I. K.* Cure modeling and monitoring of epoxy/amine resin systems. I. Cure kinetics modeling // *Journal of applied polymer science*. – 2000. – T. 77. – №. 7. – C. 1419-1431.
- [217] *Korkolis Y. P. et al.* Constitutive modeling and rupture predictions of Al-6061-T6 tubes under biaxial loading paths // *Journal of Applied Mechanics*. – 2010. – T. 77. – №. 6. – C. 064501.
- [218] *Khoun L., Hubert P.*, Investigation of the dimensional stability of carbon epoxy cylinders manufactured by resin transfer moulding

- //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2010. – T. 41. – №. 1. – C. 116-124.
- [219] *Klunker F. et al.*, Permeability and compaction models for non crimped fabrics to perform 3D filling simulations of vacuum assisted resin infusion //The 9th International Conference on Flow Processes In Composite Materials, Montreal (Quibec), Canada. – 2008.
- [220] *Kosar V., Gomzi Z.*, Thermal effects of cure reaction for an unsaturated polyester in cylindrical moulds //Chemical and biochemical engineering quarterly. – 2001. – T. 15. – №. 3. – C. 101-108.
- [221] *Krajcinovic D.*, Damage mechanics. – Elsevier, 1996. – T. 41.
- [222] *Kuraishi A., Tsai S. W., Liu K. K. S.* A progressive quadratic failure criterion, part B //Composites Science and Technology. – 2002. – T. 62. – №. 12. – C. 1683-1695.
- [223] *Ladeveze P., LeDantec E.*, Damage modelling of the elementary ply for laminated composites //Composites science and technology. – 1992. – T. 43. – №. 3. – C. 257-267.
- [224] *Lagattu F., Lafarie-Frenot M. C.*, Variation of PEEK matrix crystallinity in APC-2 composite subjected to large shearing deformations //Composites science and technology. – 2000. – T. 60. – №. 4. – C. 605-612.
- [225] *Lawrence w. e., Seferis j. c., Gillespie J. W. JR.*, Material Response of a Semicrystalline Thermoplastic Polymer and Composite in Relation to Process Cooling History, Polymer composites, april 1992, Vol. 13, No. 2.

- [226] *Lemaitre J.*, A course on damage mechanics. – Springer Science & Business Media, 2012.
- [227] *Li M. C. et al.* A plane-strain finite element model for process-induced residual stresses in a graphite/PEEK composite //Journal of Composite Materials. – 1997. – T. 31. – №. 3. – C. 212-243.
- [228] *Liu K. S., Tsai S. W.*, A progressive quadratic failure criterion for a laminate //Composites Science and Technology. – 1998. – T. 58. – №. 7. – C. 1023-1032.
- [229] *Liu P. F., Zheng J. Y.*, Recent developments on damage modeling and finite element analysis for composite laminates: a review //Materials & Design. – 2010. – T. 31. – №. 8. – C. 3825-3834.
- [230] *Lubliner, J., Oliver J., Oller S., Onate E.*, A Plastic-Damage Model for Concrete, International Journal of Solids and Structures, vol. 25, no.3, pp. 229–326, 1989.
- [231] *Logan R. W., Hosford W. F.*, Upper-bound anisotropic yield locus calculations assuming  $\langle 111 \rangle$ -pencil glide //International Journal of Mechanical Sciences. – 1980. – T. 22. – №. 7. – C. 419-430.
- [232] Lomakin E. V. Constitutive models of mechanical behavior of media with stress state dependent material properties //Mechanics of Generalized Continua. – 2011. – C. 339-350.
- [233] *Lomakin E.V., Fedulov B.N.*, Constitutive model for anisotropic non-linear elastic solids of stress state dependent properties, 9th European Solid Mechanics Conference (ESMC 2015) July 6 - 10, 2015, Leganes-Madrid, Spain

- [234] *Lomakin E. V., Fedulov B. N., Fedorenko A.N.*, Nonlinear deformation and fracture of laminated composites, Proc. of ICAF2017 The International Committee on Aeronautical Fatigue and Structural Integrity, Nagoya, Japan, 2017
- [235] *Lomakin E. V., Fedulov B. N., Fedorenko A.N.*, Damage modelling and anisotropic nonlinear behavior of composite materials, ICF14 — 14th International Conference on Fracture, Rhodes, Greece, June 18-23, 2017
- [236] *Lomakin E. V., Fedulov B. N., Fedorenko A.N.*, Strength analysis of composite materials based on damage parameters, ISDMM 2017, Lyon, 26-29 June, 2017
- [237] *Lomakin E. V., Fedulov B. N., Melnikov A. M.* Analysis of limit state of notched solids susceptible to the stress state type. 20th European Conference on Fracture - Fracture at all scales July 2014 Trondheim, Norway
- [238] *Lomakin E.V., Fedulov B.N., Antonov F. K. , Safonov A.A. and Ushakov A.E.*, Non-linear elastic models for composite materials. SIMULIA COMMUNITY CONFERENCE May, 2014, Providence, RI USA
- [239] *Lomakin E. V., Fedulov B. N. and Melnikov A. M.*, Anisotropic plasticity of aluminum alloys // Conf. XVIII Winter school of continuum mechanics, Federal State Organization "Institute of continuum mechanics of Ural branch of RAS Perm, 2013, p. 224



- [240] *Lomakin E. V., Fedulov B. N. and Melnikov A. M.*, Theoretical, computational and experimental studies of the behavior of structural materials under multiaxial loading conditions (Keynote Lecture). 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI) 5th European Conference on Computational Mechanics (ECCM V) 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI), 2014, Barcelona, Spain
- [241] *Lomakin E. V., Fedulov B. N.*, Deformation and limit state of solids with stress state dependent plastic properties, Conf. Advanced problems in mechanics, IPME, RAS, St.Petersburg. 2006.
- [242] *Lomakin E. V., Fedulov B. N., Melnikov A. M.* Constitutive models for anisotropic materials susceptible to loading conditions //Mechanics and Model-Based Control of Advanced Engineering Systems. – Springer Vienna, 2014. – C. 209-216.
- [243] *Lomakin E. V., Fedulov B. N.*, Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites //Meccanica. – 2015. – T. 50. – №. 6. – C. 1527-1535.
- [244] *Lomov S. V. et al.* Meso-FE modelling of textile composites: Road map, data flow and algorithms //Composites Science and Technology. – 2007. – T. 67. – №. 9. – C. 1870-1891.
- [245] *Lomov S. V. (ed.)*. Non-crimp fabric composites: manufacturing, properties and applications. – Elsevier, 2011.

- [246] *Lomov S. V. et al.* Textile composites: modelling strategies //Composites Part A: applied science and manufacturing. – 2001. – T. 32. – №. 10. – C. 1379-1394.
- [247] *Lomov S. V. et al.* Full-field strain measurements in textile deformability studies //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2008. – T. 39. – №. 8. – C. 1232-1244.
- [248] *Lapczyk I., Hurtado J. A.* Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2007. – T. 38. – №. 11. – C. 2333-2341.
- [249] *Leckie F. A., Murrell S. A. F.*, The constitutive equations of continuum creep damage mechanics //Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1978. – T. 288. – №. 1350. – C. 27-47.
- [250] *Lee J., Fenves G. L.*, Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures //Journal of engineering mechanics. – 1998. – T. 124. – №. 8. – C. 892-900.
- [251] *Lubliner J. et al.* A plastic-damage model for concrete //International Journal of solids and structures. – 1989. – T. 25. – №. 3. – C. 299-326.
- [252] *De Luca P., Lefebure P., Pickett A. K.*, Numerical and experimental investigation of some press forming parameters of two fibre reinforced thermoplastics: APC2-AS4 and PEI-CETEX //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 1998. – T. 29. – №. 1-2. – C. 101-110.

- [253] *Makeev A. et al.* A test method for assessment of shear properties of thick composites //Journal of composite materials. – 2009. – T. 43. – №. 25. – C. 3091-3105.
- [254] *Martin J. L., Cadenato A., Salla J. M.*, Comparative studies on the non-isothermal DSC curing kinetics of an unsaturated polyester resin using free radicals and empirical models //Thermochimica Acta. – 1997. – T. 306. – №. 1. – C. 115-126.
- [255] *Matthies, H., Strang G.*, The Solution of Nonlinear Finite Element Equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 14, pp. 1613–1626, 1979.
- [256] *Matzenmiller A., Lubliner J., Taylor R. L.*, A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites //Mechanics of materials. – 1995. – T. 20. – №. 2. – C. 125-152.
- [257] *Mayes J. S., Hansen A. C.*, Composite laminate failure analysis using multicontinuum theory //Composites Science and Technology. – 2004. – T. 64. – №. 3. – C. 379-394.
- [258] *McCartney L. N.*, Predicting transverse crack formation in cross-ply laminates //Composites Science and Technology. – 1998. – T. 58. – №. 7. – C. 1069-1081.
- [259] *McGuinness G. B., OBradaigh C. M.*, Development of rheological models for forming flows and picture-frame shear testing of fabric reinforced thermoplastic sheets //Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 1997. – T. 73. – №. 1. – C. 1-28.

- [260] *Melro A. R. et al.* Micromechanical analysis of polymer composites reinforced by unidirectional fibres: Part I—Constitutive modelling //International Journal of Solids and Structures. – 2013. – T. 50. – №. 11. – C. 1897-1905.
- [261] *Melro A. R. et al.* Micromechanical analysis of polymer composites reinforced by unidirectional fibres: Part II—micromechanical analyses //International Journal of Solids and Structures. – 2013. – T. 50. – №. 11. – C. 1906-1915.
- [262] *Mene'trey, Ph., Willam K. J.*, Triaxial Failure Criterion for Concrete and its Generalization, ACI Structural Journal, vol. 92, pp. 311–318, May/June 1995.
- [263] MIL-HDBK-5J (2003)
- [264] *Miller A.* An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic, and creep deformation: Part I—Equations development and analytical procedures //Journal of Engineering Materials and Technology. – 1976. – T. 98. – №. 2. – C. 97-105.
- [265] *O. Mohr*, Abhandlugen aus dem Gebiete der technische Mechanik (2nd edn.), Ernst und Sohn, Berlin (1914)
- [266] *Moure M. M. et al.* Damage evolution in open-hole laminated composite plates subjected to in-plane loads, Composite Structures, 2015; (133): 1048-1057.
- [267] *Murakami S.*, Mechanical modeling of material damage //ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics. – 1988. – T. 55. – C. 280-286.

- [268] *Murakami S., Kamiya K.*, Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics //International Journal of Mechanical Sciences. – 1997. – T. 39. – №. 4. – C. 473-486.
- [269] *Murakami S., Ohno N.*, A continuum theory of creep and creep damage //Creep in structures. – 1981. – C. 422-444.
- [270] *Nagtegaal, J. C., Parks D. M., Rice J. R.*, On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 4, pp. 153–177, 1977.
- [271] *Nahshon K., Hutchinson J. W.*, Modification of the Gurson model for shear failure, European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2008. – T. 27. – №. 1. – C. 1-17.
- [272] *Najar J.*, Continuous damage of brittle solids //Continuum Damage Mechanics Theory and Application. – Springer Vienna, 1987. – C. 233-294.
- [273] *Naimark O. B.* Structural-scale transitions in solids with defects and symmetry aspects of field theory //Physical Mesomechanics. – 2010. – T. 13. – №. 5-6. – C. 306-317.
- [274] *Nayak, G. C., Zienkiewicz O. C.*, A Convenient Form of Invariants and its Application to Plasticity, Proceedings of the ASCE, Engineering Mechanics Division, vol. 98, no.St4, pp. 949–954, 1972.
- [275] *Notta-Cuvier D., Lauro F., Bennani B.*, Modelling of progressive fibre/matrix debonding in short-fibre reinforced composites up to failure

- //International Journal of Solids and Structures. – 2015. – T. 66. – C. 140-150.
- [276] *Orifici A. C., Herszberg I., Thomson R. S.*, Review of methodologies for composite material modelling incorporating failure //Composite structures. – 2008. – T. 86. – №. 1. – C. 194-210.
- [277] *Ouagne P., Breard J.*, Continuous transverse permeability of fibrous media //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2010. – T. 41. – №. 1. – C. 22-28.
- [278] *Papazoglou V. J., Tsouvalis N. G.*, Mechanical behaviour of bimodulus laminated plates //Composite Structures. – 1991. – T. 17. – №. 1. – C. 1-22.
- [279] *Patel, B. P., and A. K. Gupta* An investigation on nonlocal continuum damage models for composite laminated panels. Composites Part B: Engineering 60 (2014): 485-494..
- [280] *Patel B. P., Khan K., Nath Y.*, A new constitutive model for bimodular laminated structures: Application to free vibrations of conical/cylindrical panels //Composite Structures. – 2014. – T. 110. – C. 183-191.
- [281] *Paul B.*, A modification of the Coulomb-Mohr theory of fracture. – Division of Engineering, Brown University, 1960.
- [282] *Petit P. H., Waddoups M. E.*, A method of predicting the nonlinear behavior of laminated composites //Journal of Composite Materials. – 1969. – T. 3. – №. 1. – C. 2-19.

- [283] *Plekhov O. A., Panteleev I. A., Naimark O. B.*, Energy accumulation and dissipation in metals as a result of structural-scaling transitions in a mesodefekt ensemble //Physical Mesomechanics. – 2007. – T. 10. – №. 5-6. – C. 294-301.
- [284] *Puck A., Schermann H.*, Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models //Composites Science and Technology. – 1998. – T. 58. – №. 7. – C. 1045-1067.
- [285] *Rabotnov, Y. N.*, Creep rupture, Applied Mechanics: Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics, Stanford University, August 26, 1968. DOI: 10.1007/978-3-642-85640-2\_26
- [286] *Rauch G. C., Leslie W. C.*, The extent and nature of the strength-differential effect in steels //Metallurgical and Materials Transactions B. – 1972. – T. 3. – №. 2. – C. 377-389.
- [287] *Reddy J. N., Pandey A. K.* A first-ply failure analysis of composite laminates //Computers & Structures. – 1987. – T. 25. – №. 3. – C. 371-393.
- [288] *Reinolds O.*, On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, Philos. Mag., Ser. 5, 1885, Vol. 20, N 127, pp. 469-481.
- [289] *Rotem A.*, Prediction of laminate failure with the Rotem failure criterion //Composites Science and Technology. – 1998. – T. 58. – №. 7. – C. 1083-1094.
- [290] *Rotem A.* The Rotem failure criterion: theory and practice //Composites science and technology. – 2002. – T. 62. – №. 12. – C. 1663-1671.

- [291] *Sonmez F. O., Hahn H. T.* Modeling of heat transfer and crystallization in thermoplastic composite tape placement process //Journal of Thermoplastic Composite Materials. – 1997. – T. 10. – №. 3. – C. 198-240.
- [292] *Resende L., Martin J. B.*, Formulation of Drucker-Prager cap model //Journal of Engineering Mechanics. – 1985. – T. 111. – №. 7. – C. 855-881.
- [293] *Ryan M. E., Dutta A.* Kinetics of epoxy cure: a rapid technique for kinetic parameter estimation //Polymer. – 1979. – T. 20. – №. 2. – C. 203-206.
- [294] *SadAbadi H., Ghasemi M.*, Effects of some injection molding process parameters on fiber orientation tensor of short glass fiber polystyrene composites (SGF/PS) //Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2007. – T. 26. – №. 17. – C. 1729-1741.
- [295] *Safonov, A.A., Sergeichev, I.V., Fedulov, B.N., Ushakov, A.E., Klenin, Y.G., Makarenko, I.V.*, Process simulation and strength analysis of subway contact rail support bracket of composite materials, (2015) CAMX 2015 - Composites and Advanced Materials Expo, pp. 1002-1016.
- [296] *Sandler I. S., Dimaggio F. L., Baladi G. Y.*, Generalized cap model for geological materials //Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. – 1976. – T. 102. – №. ASCE# 12243 Proceeding.
- [297] *Schapery R. A., Sun C. T.*, Time dependent and nonlinear effects in polymers and composites. – ASTM, 2000.



- [298] *Sendeckyj G. P.*, A brief survey of empirical multiaxial strength criteria for composites //Composite Materials: Testing and Design (Second Conference). – ASTM International, 1972.
- [299] *I. Sergeichev, B. Fedulov, A. Safonov, A. Ushakov, N. Rozin.*, Structural Design and Optimization of Vacuum Infusion Manufacturing Process for the Fiberglass Hopper Car Body. Proceedings of 16th European Conference on Composite Materials ECCM16, Seville, Spain, June 22-26, 2014.
- [300] *Sergeichev, I.V., Ushakov, A.E., Safonov, A.A., Fedulov, B.N., Timofeev, M.A., Klenin, Y.G.*, Design of the composite tank-container for multimodal transportations of chemically aggressive fluids and petrochemicals, CAMX 2015 - Composites and Advanced Materials Expo
- [301] *Sergeichev, I.V., Fedulov, B.N., Safonov, A.A., Ushakov, A.E., Rozin, N.V., Kornienko, E.I., Izotov, A.V., Klenin, Yu.G.*, Design and manufacturing of the vacuum infused fiberglass hopper car body (2015) International SAMPE Technical Conference, 2015-January.
- [302] *Sergeichev, I.V., Fedulov, B.N., Safonov, A.A., Ushakov, A.E., Rozin, N.V., Kornienko, E.I., Izotov, A.V., Klenin, Yu.G.*, Structural design and optimization of vacuum infusion manufacturing process for the fiberglass hopper car body (2014) 16th European Conference on Composite Materials, ECCM 2014
- [303] *Sergeichev, I.V., Fedulov, B.N., Safonov, A.A., Ushakov, A.E., Klenin, Yu.G., Izotov, A.V.*, Structural design, strength analysis and numerical

modeling of vacuum infusion manufacturing process of composite roof for hopper car (2013) International SAMPE Technical Conference

- [304] *Sergeichev I.V., Ushakov A.E., Safonov A.A., Fedulov B.N., Fedorenko A.N., Brouwer W.D., Timofeev M.A., Klenin Yu.G.*, Design of the composite tank-container for multimodal transportations of chemically aggressive fluids and petrochemicals //conf. «The Composites and Advanced Materials Expo», Dallas, 27-29th October 2015
- [305] *Sergeichev I.V., Ushakov A.E., Safonov A.A., Fedulov B.N., Fedorenko A.N., Brouwer W.D., Timofeev M.A. and Klenin Yu.G.*, Structural design and strength analysis of the new tank-container with composite vessel for multimodal transportations of chemically aggressive fluids and petrochemical products// Proceedings of 20th International Conference on Composite Materials, Copenhagen, 19-24th July 2015
- [306] *Sims D. F.*, In-plane shear stress-strain response of unidirectional composite materials //Journal of Composite Materials. – 1973. – T. 7. – №. 1. – C. 124-128.
- [307] *Shojaei A., Ghaffarian S. R., Karimian S. M. H.*, Modeling and simulation approaches in the resin transfer molding process: a review //Polymer Composites. – 2003. – T. 24. – №. 4. – C. 525-544.
- [308] *Smith E. W., Pascoe K. J.* The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fibre-reinforced composite //Composites. – 1977. – T. 8. – №. 4. – C. 237-243.
- [309] *Soden P. D., Hinton M. J., Kaddour A. S.* Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon

- fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data //Composites Science and Technology. – 2002. – T. 62. – №. 12. – C. 1489-1514.
- [310] *Soden P. D., Kaddour A. S., Hinton M. J.*, Recommendations for designers and researchers resulting from the world-wide failure exercise //Composites Science and Technology. – 2004. – T. 64. – №. 3. – C. 589-604.
- [311] *Sonmez F. O., Eyol E.* Optimal post-manufacturing cooling paths for thermoplastic composites //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2002. – T. 33. – №. 3. – C. 301-314.
- [312] *Sun C. T., Tao J.*, Prediction of failure envelopes and stress/strain behaviour of composite laminates //Composites Science and technology. – 1998. – T. 58. – №. 7. – C. 1125-1136.
- [313] *Talreja R., Singh C. V.*, Damage and failure of composite materials. – Cambridge University Press, 2012.
- [314] *Thomas R. et al.* Cure kinetics, morphology and miscibility of modified DGEBA-based epoxy resin–Effects of a liquid rubber inclusion //Polymer. – 2007. – T. 48. – №. 6. – C. 1695-1710.
- [315] *Swanson S. R., Messick M., Toombes G. R.*, Comparison of torsion tube and Iosipescu in-plane shear test results for a carbon fibre-reinforced epoxy composite //Composites. – 1985. – T. 16. – №. 3. – C. 220-224.
- [316] *Thom H.*, A review of the biaxial strength of fibre-reinforced plastics //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 1998. – T. 29. – №. 8. – C. 869-886.

- [317] Tsai S. W., Wu E. M. A general theory of strength for anisotropic materials //Journal of composite materials. – 1971. – T. 5. – №. 1. – C. 58-80.
- [318] *Tvergaard, V.*, Influence of Voids on Shear Band Instabilities under Plane Strain Condition, International Journal of Fracture Mechanics, vol. 17, pp. 389–407, 1981.
- [319] *Ushakov A. E. et al.* Design and optimization of a vacuum infusion technological process for hopper car fabrication using polymeric composite materials //Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2015. – T. 44. – №. 3. – C. 276-282.
- [320] *Vijayakumar K., Rao K. P.*, Stress-strain relations for composites with different stiffnesses in tension and compression //Computational mechanics. – 1987. – T. 2. – №. 3. – C. 167-175.
- [321] *Van clooster K., Lomov S. V., Verpoest I.* Experimental validation of forming simulations of fabric reinforced polymers using an unsymmetrical mould configuration //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2009. – T. 40. – №. 4. – C. 530-539.
- [322] *Van clooster K., Lomov S. V., Verpoest I.* On the formability of multi-layered fabric composites //ICCM—17th International Conference on Composite Materials, Edinburgh, UK. – 2009.
- [323] *Van Houtte P., Yerra S. K., Van Bael A.*, The Facet method: a hierarchical multilevel modelling scheme for anisotropic convex plastic potentials //International Journal of Plasticity. – 2009. – T. 25. – №. 2. – C. 332-360.

- [324] *Van Houtte P., Yerra S. K., Van Bael A.* The Facet method: a hierarchical multilevel modelling scheme for anisotropic convex plastic potentials //International Journal of Plasticity. – 2009. – T. 25. – №. 2. – C. 332-360.
- [325] *Van West B. P., Pipes R. B., Keefe M.,* A simulation of the draping of bidirectional fabrics over arbitrary surfaces //Journal of the textile Institute. – 1990. – T. 81. – №. 4. – C. 448-460.
- [326] *van der Vegt A.K. & Govaert L.E.,* Polymeren, van keten tot kunstof, ISBN 90-407-2388-5
- [327] *Velisaris C. N., Seferis J. C.* Crystallization kinetics of polyetheretherketone (PEEK) matrices //Polymer Engineering and Science. – 1986. – T. 26. – №. 22. – C. 1574-1581.
- [328] *Velisaris C. N., Seferis J. C.* Heat transfer effects on the processing structure relationships of polyetheretherketone (PEEK) based composites //Polymer Engineering and Science. – 1988. – T. 28. – №. 9. – C. 583-591.
- [329] *Victrex,* Victrex TDS 450G data sheet, <http://Victrex.com>
- [330] *Walsh J. B.,* The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks, J. Geophys. Res., 1965, Vol. 70, N 2, pp. 399-441.
- [331] *Walsh J. B.,* The effect of cracks in rocks on Poissons ratio, J. Geophys. Res., 1965, Vol. 70, N 2, pp. 5249-5257.
- [332] *Walsh J. B.,* The effect of cracks on the compressibility of rocks, J. Geophys. Res., 1965, Vol. 70, N 2, pp. 381-389.

- [333] *Bao Y., Wierzbicki T.*, On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space //International Journal of Mechanical Sciences. – 2004. – T. 46. – №. 1. – C. 81-98.
- [334] *Bai Y., Wierzbicki T.*, A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence //International journal of plasticity. – 2008. – T. 24. – №. 6. – C. 1071-1096.
- [335] *Bai Y., Wierzbicki T.*, Application of extended Mohr–Coulomb criterion to ductile fracture //International Journal of Fracture. – 2010. – T. 161. – №. 1. – C. 1-20.
- [336] *Willems A. et al.* Forming simulation of a thermoplastic commingled woven textile on a double dome //International Journal of Material Forming. – 2008. – T. 1. – C. 965-968.
- [337] Woven Composites Benchmark Forum; 2008.  
<http://www.wovencomposites.org/index.php>
- [338] *Wolfe W. E., Butalia T. S.*, A strain-energy based failure criterion for non-linear analysis of composite laminates subjected to biaxial loading //Composites Science and Technology. – 1998. – T. 58. – №. 7. – C. 1107-1124.
- [339] *Wu J. Y., Li J., Faria R.*, An energy release rate-based plastic-damage model for concrete //International Journal of Solids and Structures. – 2006. – T. 43. – №. 3. – C. 583-612.
- [340] *Yang L. et al.* Effects of inter-fiber spacing and thermal residual stress on transverse failure of fiber-reinforced polymer–matrix composites //Computational materials science. – 2013. – T. 68. – C. 255-262.

- [341] *Yu W. R. et al.*, Non-orthogonal constitutive equation for woven fabric reinforced thermoplastic composites //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2002. – T. 33. – №. 8. – C. 1095-1105.
- [342] *Zinoviev P. A. et al.* The strength of multilayered composites under a plane-stress state //Composites science and technology. – 1998. – T. 58. – №. 7. – C. 1209-1223.
- [343] *Zhu K., Schmauder S.*, Prediction of the failure properties of short fiber reinforced composites with metal and polymer matrix //Computational Materials Science. – 2003. – T. 28. – №. 3. – C. 743-748.
- [344] *Nairn J. A., Zoller P.* Matrix solidification and the resulting residual thermal stresses in composites //Journal of Materials Science. – 1985. – T. 20. – №. 1. – C. 355-367.