

Институт проблем машиноведения Российской Академии Наук  
(ИПМаш РАН)

На правах рукописи

Горлатов Дмитрий Владимирович

**АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТИПОВЫМИ РЕЖИМАМИ РАБОТЫ  
МЕХАТРОННЫХ МНОГОРОТОРНЫХ ВИБРАЦИОННЫХ  
УСТАНОВОК**

Специальность

05.11.16 – Информационно-измерительные и управляющие системы  
(в машиностроении)

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
кандидат технических наук, доцент  
Томчина Ольга Петровна

Санкт-Петербург – 2016г.

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОРОТОРНЫМИ ВИБРОУСТАНОВКАМИ (МВУ).....	10
1.1. Анализ существующих подходов к управлению МВУ .....	10
1.2. Описание вибростендов для экспериментальных исследований.....	13
1.3. Постановка задачи диссертационной работы .....	19
ГЛАВА 2. СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МВУ КАК ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ.....	25
2.1. Методика получения математических моделей МВУ.....	25
2.2. Математические модели механической части МВУ с роторами, расположенными на горизонтальной оси.....	28
2.3. Модель динамики системы электроприводов.....	39
2.4. Модель динамики упругости карданных валов между двигателем и ротором.....	41
2.5. Математические модели механической части МВУ с роторами, расположенными на горизонтальной оси и упруго присоединенным грузом	46
2.6. Методика реализации математических моделей МВУ как объектов управления в среде MATLAB.....	48
ГЛАВА 3. СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ОСНОВНЫМИ РЕЖИМАМИ РАБОТЫ МВУ .....	56
3.1. Синтез алгоритмов управления кратной синхронизацией вращения роторов .....	56
3.1.1. Синтез управления кратной взаимной синхронизацией движений неуравновешенных роторов для трехроторного вибрационного стенда .....	57
3.1.2. Синтез алгоритма кратной синхронизации с одним ведущим ротором для трехроторной ВУ.....	63
3.1.3. Синтез алгоритмов кратной синхронизации для двухроторной ВУ .....	66

3.2. Синтез алгоритмов управления пуском и прохождением резонансной зоны.....	68
3.3. Нестационарный наблюдатель для восстановления скорости колебаний по вертикальной оси .....	69
ГЛАВА 4. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНТЕЗИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ МВУ И АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ИХ РАБОЧИМИ РЕЖИМАМИ.....	76
4.1. Исследование алгоритмов синхронизации для двухроторных ВУ.....	78
4.1.1. Исследование алгоритма кратной синхронизации, позволяющего регулировать сдвиги фаз роторов.....	78
4.1.2. Компьютерное исследование алгоритма кратной синхронизации при управлении ВУ с учетом динамики электроприводов .....	84
4.1.3. Компьютерное исследование алгоритмов кратной синхронизации при управлении моделью с (не)идентичными роторами и стационарным грузом	86
4.2. Исследование алгоритмов синхронизации для трехроторных ВУ .....	90
4.2.1. Исследование алгоритмов взаимной синхронизации и синхронизации с одним ведущим ротором .....	90
4.2.2. Исследование алгоритма синхронизации с одним ведущим ротором при управлении трехроторной ВУ с учетом упругих связей между двигателем и ротором.....	95
4.2.3. Синхронизация роторов трехроторной ВУ с учетом нестационарного груза .....	102
4.3. Исследование эффективности нестационарного наблюдателя.....	107
4.4. Исследование алгоритма прохождения через резонанс для двухроторной ВУ с учетом динамики электроприводов .....	113
ГЛАВА 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ МВУ НА СТЕНДЕ СВ-2М.....	118
5.1. Управление пуском и прохождением резонансной зоны СВ-2М.....	118

5.2. Экспериментальное исследование алгоритмов кратной синхронизации роторов МВУ .....	124
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	127
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ.....	129
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	130
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	138
Приложение 1 .....	139
Приложение 2 .....	154
Приложение 3 .....	155
Приложение 4 .....	158
Приложение 5 .....	160
Приложение 6 .....	180
Приложение 7 .....	182
Приложение 8 .....	202
Приложение 9 .....	204

## ВВЕДЕНИЕ

Вибрационные установки (ВУ) могут применяться для перемещения и обработки (измельчения, сортировки, перемешивания, уплотнения) различных материалов в горнодобывающей, химической, пищевой промышленности, строительстве и т.д. ВУ часто исполняются многороторными (МВУ), что снижает вибрационную нагрузку на подшипники и повышает их надежность и срок службы в сравнении с однороторными ВУ. Изменение параметров роторов (масса и эксцентриситет) и применение различных алгоритмов управления позволяет получить неоднородные поля траекторий колебаний [1] для более эффективной виброобработки и вибротранспортирования материалов. Внецентренное расположение неуравновешенных роторов, когда точки их крепления находятся вне осей, проходящих через центр масс (центр инерции) вибрирующего рабочего органа (платформы), также вносит неоднородность в создаваемое ВУ вибрационное поле [2]. Расположение роторов целесообразно выбирать на этапе проектирования; при модернизации ВУ, уже введенных в эксплуатацию, изменение в конструкции является сложным и дорогостоящим процессом. Разработка специальных алгоритмов управления, реализуемых с помощью компьютера, позволяет решить эту проблему более простым и экономичным способом.

Для тестирования новых алгоритмов управления создаются исследовательские комплексы, включающие персональный компьютер (ПК) и ВУ. В настоящее время под руководством И.И. Блехмана и при участии ЗАО «Механобр инжиниринг», РАН и ряда ВУЗов были созданы комплексы с одно- и двухроторными ВУ [3, 4, 5]. Кроме того, известен трехроторный вибростенд, созданный И.И. Блехманом с участием Н.П. Ярошевича [6].

**Цель данной диссертационной работы** состоит в разработке комплекса алгоритмов управления и программ моделирования МВУ; синтезе нестационарного наблюдателя скорости вертикальных колебаний

платформы; а также исследовании работоспособности систем управления основными режимами МВУ в вычислительных и натуральных экспериментах.

Был синтезирован широкий спектр моделей ВУ, отражающих, помимо прочего, влияние динамики груза (сыпучего материала), упругости карданных валов между роторами и двигателями, динамики электроприводов, в том числе при учете ограничений. Основной спектр моделей относится к двухроторным ВУ, поскольку именно двухроторный вибростенд входит в учебно-исследовательский комплекс, на котором эффективность полученных алгоритмов можно проверить экспериментально. Для изучения прохождения зоны резонансных частот и синтеза нестационарного наблюдателя скорости колебаний платформы созданы две однороторных модели. Для исследования кратных синхронных режимов получено несколько трехроторных моделей.

Для реализации алгоритмов управления кратной синхронизацией была произведена математическая постановка задачи управляемой приближенной кратной частотно-координатной синхронизации роторов МВУ и представлена структура энергоскоростной электромеханической системы управления роторами МВУ, обеспечивающей приближенную кратную частотно-координатную синхронизацию.

В вибромашинах часто возникает ситуация, когда из-за сложности технологических условий, установка датчиков становится трудоемкой, дорогостоящей или невозможной. В частности, в вибростенде, используемом для экспериментов, отсутствует датчик скорости колебаний платформы. Чтобы получить наиболее полную информацию о состоянии объекта управления (ВУ), которая необходима для максимально эффективной работы алгоритмов, в данной работе получен нестационарный наблюдатель для восстановления скорости вертикальных колебаний платформы ВУ.

Были синтезированы алгоритмы экономичного пуска и прохождения резонанса, позволяющие снизить пусковые моменты электроприводов

неуравновешенных вибровозбудителей и преодолеть «захват» частот вращения роторов в резонансной зоне вследствие эффекта Зоммерфельда [7]. В частности, были получены алгоритмы пуска и прохождения резонанса для однороторных ВУ с применением нестационарного наблюдателя.

Для моделей МВУ с тремя и более роторами были созданы алгоритмы управления кратной синхронизацией, когда:

- один из роторов является ведущим, а остальные ведомыми;
- все роторы равнозначны и взаимно синхронизируются;
- для синхронизации применяется пропорционально-интегральное управление.

**Научная новизна.** В работе получены следующие новые научные положения, выносимые на защиту:

- Формулировка определения приближенной кратной частотно-координатной синхронизации роторов МВУ.
- Нестационарный наблюдатель скорости вертикального перемещения рабочего органа и условия работоспособности системы оценивания.
- Два типа интегро-дифференцирующих алгоритмов управления синхронизацией, в том числе кратной синхронизацией  $n$  роторов ( $n \geq 3$ ): алгоритм взаимной синхронизации и алгоритм с одним ведущим ротором.

**Практическая значимость полученных результатов.** Программные модели МВУ, разработанные в диссертации, значительно упрощают изучение поведения реальных вибромашин, для которых они были созданы, особенно, при варьировании параметров и условий работы, а также позволяют испытывать на них различные алгоритмы управления, в том числе полученные в работе.

Алгоритмы управления, синтезированные в данной работе, обеспечивают повышение производительности МВУ в основных эксплуатационных режимах; их эффективность проверялась с помощью

компьютерного моделирования и экспериментов на лабораторном вибростенде.

Нестационарный наблюдатель для восстановления скорости вертикальных колебаний платформы МВУ, полученный в данной работе, обеспечивает возможность практической реализации алгоритмов управления, требующих полноты измерения вектора состояния объекта управления.

**Реализация результатов.** Результаты работы были использованы в ИПМаш РАН при проведении научных исследований, поддержанных грантом Российского научного фонда 14-29-00142.

**Апробация работы.** Апробация работы производилась на конференциях: Международные научно-практические конференции «Неделя науки СПбГПУ» (2011-2016); 2-я Междун. научно-практич. конф. «Современное машиностроение. Наука и образование» (2012); 5-я Российская мультikonференция по проблемам управления «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012); 5th IFAC International Workshop on Periodic Control Systems, PSYCO 2013; Automation & Control: International Conference of Young Scientists СПбГПУ, 2013; 70-я, 71-я, 72-я научные конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов СПбГАСУ (2014-2016); 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems, (MICNON-2015), Saint Petersburg, Russia, 24-26 June 2015; 6th IFAC International Workshop on Periodic Control Systems (PSYCO-2016).

**Публикации.** По теме диссертационной работы опубликовано 18 научных трудов: 5 из них – в научных журналах [8, 9, 10, 11, 12]; 13 – в материалах конференций [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25].

3 работы из приведенных выше опубликованы в изданиях из списка Scopus [17, 22, 25] и 3 – в журналах из перечня ВАК [10, 11, 12].



Две программы, созданные по математическим моделям ВУ, имеют свидетельства о государственной регистрации в «Центре информационных технологий и систем органов исполнительной власти (ЦИТиС)» [26, 27].

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованной литературы из 61 наименования и 9 приложений. Основная часть работы изложена на 137 машинописных страницах и содержит 78 рисунков. В приложения вынесены тексты программ и копии документов о регистрации программ в ЦИТиС.

## **ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОРОТОРНЫМИ ВИБРОУСТАНОВКАМИ (МВУ)**

В вибромашинах, используемых для грохочения и вибротранспортирования, происходят нелинейные колебательные процессы, изучение которых важно для повышения качества их работы. Это может достигаться совершенствованием конструкции и (или) разработкой продвинутых алгоритмов управления.

### **1.1. Анализ существующих подходов к управлению МВУ**

#### *Управление режимами пуска, резонанса и прохождения резонанса*

Режим пуска ВУ традиционным способом (без программного управления) требует использования электроприводов повышенной мощности для вывода неуравновешенных роторов в вертикальное положение. В последнее время были разработаны алгоритмы экономичного пуска, основанные на одно- и двухсторонней раскачке роторов [4], что позволило существенно снизить мощность электроприводов и повысить таким образом энергоэффективность ВУ. Однако это усложнило прохождение резонансной зоны. Когда частоты вращения роторов приближаются к резонансной частоте несущего тела (платформы), возникают интенсивные колебания корпуса установки, сопровождающиеся диссипацией (рассеянием) энергии в виброизоляторах. Поскольку источниками энергии в ВУ являются электроприводы роторов, нагрузка на них сильно возрастает и их вращающий момент оказывается недостаточным для выхода установки в нормальный установившийся режим работы, в результате происходит «застревание» роторов на резонансных скоростях, которое принято называть эффектом Зоммерфельда [7, 28], по имени ученого, впервые его описавшего.

Данная проблема решалась либо оптимизацией конструкции ВУ при проектировании и модернизации, либо с помощью управления, например, так называемым методом «двойного пуска», разработанным В.В. Гортинским

[29]. Данный метод программного управления состоит в отключении и повторном включении привода в рассчитанные заранее моменты времени; он прост в технической реализации, поскольку для его работы требуется только реле времени, но отличается сложностью в расчетах моментов включения/отключения.

Метод «двойного пуска» представляет собой алгоритм управления без обратной связи и чувствителен к начальным условиям и погрешностям в параметрах расчетной модели. Алгоритмы управления с обратной связью по измерениям, рассмотренные в работах [30, 31, 32, 33], открыли перспективное решение задачи прохождения резонансной зоны, однако они были сложны в расчетах и недостаточно робастны в условиях неопределенности. Требовалась разработка относительно простых в реализации и одновременно достаточно робастных алгоритмов. В [34] был, возможно, впервые предложен подобный простой алгоритм, основанный на методе скоростного градиента, который использовался ранее для управления нелинейными колебательными системами [35]. Также несколько алгоритмов прохождения резонансной зоны на основе метода скоростного градиента в системах с двумя степенями свободы были предложены в [36]. Нарботки, полученные в [34, 36], были использованы для управления двухроторной ВУ в [37].

Поскольку в резонансном режиме рабочий орган (платформа) ВУ совершает колебания с максимальной амплитудой, данный режим может быть полезен в некоторых технологических процессах, обеспечивая повышенную производительность при использовании электроприводов с невысокой потребляемой мощностью. Однако существует проблема поддержания стабильного резонансного режима работы ВУ, обусловленная эффектом Зоммерфельда и нестационарностью массы обрабатываемого материала, которая может колебаться в довольно широких пределах. Данная проблема решалась в работах Г.Я. Пановко с коллегами [38, 39] для ВУ с

вибровозбудителями на асинхронных двигателях, которые наиболее распространены в современных ВУ.

Поведение колебательных систем в околорезонансной и резонансной зонах сложно и нелинейно, поэтому публикации по данной тематике многочисленны и охватывают широкий временной период. Помимо работ приведенных выше, можно отметить также [40, 41, 42].

В данной диссертационной работе развивается подход управляемого пуска и прохождения резонансной зоны с помощью простых робастных скоростно-градиентных алгоритмов.

#### *Управление синхронными и кратными синхронными режимами*

Теория синхронизации и, в частности, синхронизации неуравновешенных роторов в ВУ, была разработана И.И. Блехманом [28, 43]. Явление синхронизации обеспечивает устойчивость работы ВУ и позволяет обеспечить максимальную производительность в выполняемых технологических процессах: грохочении, вибродроблении, просеивании, вибротранспортировании и т.д. Известно, что режим простой (однократной) синхронизации может возникать в ВУ естественным образом, данное явление называется самосинхронизацией, оно открыто и изучено И.И. Блехманом [28]. Однако в ряде случаев эффект самосинхронизации проявляется недостаточно устойчиво, например, при необходимости обеспечения заданных сдвигов фаз роторов или для кратной синхронизации. В условиях нестационарной нагрузки (при изменяющейся массе обрабатываемого материала) синхронный режим работы можно обеспечить только с помощью специально разработанных алгоритмов управления.

В работах И.И. Блехмана и Н.П. Ярошевича [44, 45] рассматривается реализация кратных синхронных режимов, позволяющих за счет разных скоростей вращения роторов получать сложные формы и неоднородные поля траекторий точек вибрирующего органа [1], что может улучшать обработку сложных для ВУ грузов и материалов: липких, влажных, комкующихся,

пылевидных и т.д. Асимметрия, вносимая в колебания ВУ кратными скоростями роторов, также позволяет создавать и усиливать перемещение объектов под действием вибраций, что применяется при вибротранспортировании и позволяет повысить его производительность.

Вопросы, касающиеся управляемой синхронизации, рассматривались также в работах Б.Р. Андриевского, А.Л. Фрадкова, О.П. Томчиной и др [4, 35, 46]. В данной диссертационной работе синтезируются алгоритмы кратной синхронизации для двух- и трехроторных ВУ.

## **1.2. Описание вибростендов для экспериментальных исследований**

Для экспериментального воспроизведения сложных динамических явлений, характерных для нелинейных колебательных систем, испытания приемов управления вращательными и колебательными движениями, а также исследования вибрационных процессов в механике и испытания разработанных алгоритмов был создан ряд вибрационных стендов [3, 4, 5, 6]. Работы по созданию нового поколения лабораторных вибростендов – мехатронных в ИПМаш РАН и ЗАО «Механобр инжиниринг» были начаты в 1997 году коллективом под руководством проф. И.И. Блехмана и продолжаются до сих пор. Управление стендами осуществляется с помощью компьютера, что дает возможность отрабатывать сложные алгоритмы управления колебаниями.

Ряд стендов, разработанных для изучения вибраций, включает одно-, двух- и трехроторные модели. На рис. 1.1 изображен однороторный стенд, на рис. 1.2 – двухроторный (СВ-1). Сокращение СВ означает стенд вибрационный.



Рис. 1.1. Общий вид однороторного вибростенда, управляемого от компьютера [4]

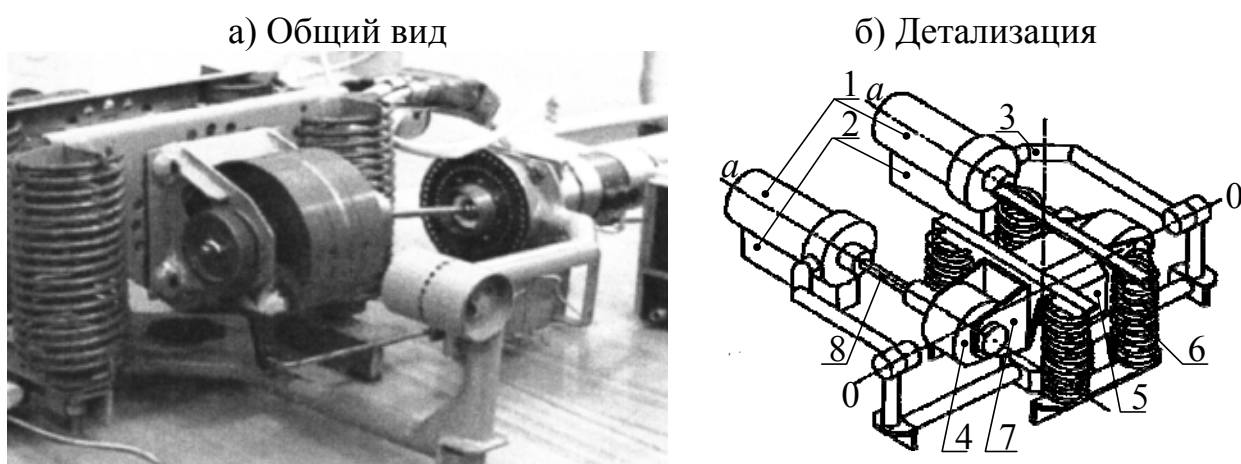


Рис. 1.2. Вибрационный стенд СВ-1 [4]

Механическая часть стенда (рис. 1.2), состоит из: 1 – электродвигателей; 2 – блоков управления двигателями; 3 – несущей рамы; 4 – неуравновешенных роторов; 5 – рабочего органа (платформы); 6 – пружин-виброизоляторов; 7 – вилок крепления роторов; 8 – карданных валов.

Структурно-функциональная схема системы управления стендом представлена на рис. 1.3.

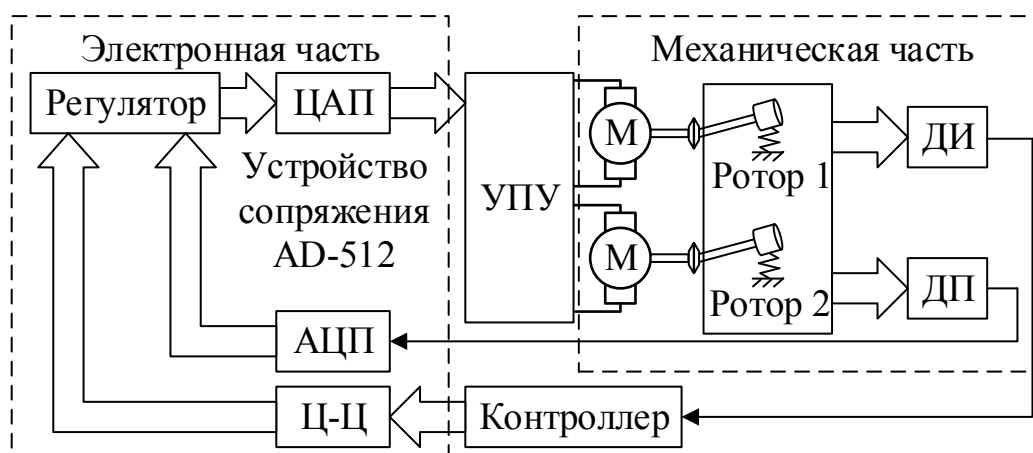


Рис. 1.3. Структурно-функциональная схема системы управления стендом [4]

Обозначения на рис. 1.3: ПК – персональный компьютер; ЦАП – цифроаналоговый преобразователь; АЦП – аналого-цифровой преобразователь; Ц-Ц – канал цифра-цифра; УПУ – усилительно-преобразовательное устройство; М – электродвигатели; ДИ, ДП – датчики импульсов и положения.

СВ-1 был впоследствии доработан присоединением к его платформе груза с помощью двух одинаковых пружин, таким образом был получен стенд СВ-2 (рис. 1.4).

#### *СВ-2М*

На базе СВ-2 [50] впоследствии был создан СВ-2М [5] (рис. 1.4), М в названии означает модернизированный. Электроприводы постоянного тока в модернизированной версии заменены на трехфазные асинхронные двигатели 5А50М мощностью 0,09 кВА. Обмотки двигателей соединены звездой, номинальное значение напряжения питания – 380 В, частота питающей сети – 50 Гц. Номинальная частота вращения ротора двигателей 2760 об/мин (46 об/с), что позволяет возбуждать колебания в диапазоне от 0 до 46 Гц. Двигатели управляются с помощью частотных преобразователей Schneider Electric ATV12H018M2. Частотные преобразователи, в свою очередь, управляются с ПК через универсальную PCI-карту с 2-мя портами RS-

422/485. Для снятия показаний с датчиков используется плата ввода данных PISO-ENCODER600U.

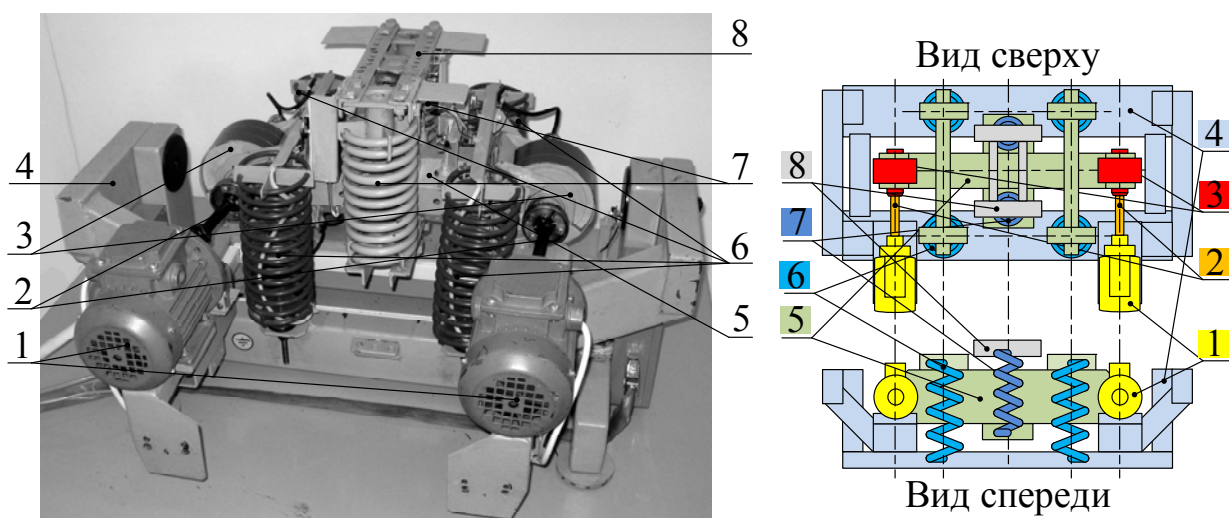


Рис. 1.4. Механическая часть вибростенда СВ-2/СВ-2М:

1 – электродвигатели, вращающие неуравновешенные роторы; 2 – карданные валы, соединяющие двигатели и роторы; 3 – неуравновешенные роторы; 4 – несущая рама; 5 – платформа (вибрирующий рабочий орган) вибростенда; 6 – нижние пружины, виброизолирующие платформу от несущей рамы стенда; 7 – верхние пружины для крепления груза; 8 – основание для крепления груза

Механическая часть СВ-2М (рис. 1.4) представляет собой двухроторную конструкцию, в которой используются два вибровозбудителя с независимым управлением, состоящие из электродвигателей (1), приводящих во вращение неуравновешенные роторы (3). Двигатели и роторы соединены с помощью муфты (вала) (2).

Вращение вибровозбудителей создает вибрации рабочего органа (платформы) (5), частота колебаний которого регулируется с помощью управляющих сигналов, задающих скорости вращения роторов электродвигателей. Амплитуда колебаний может задаваться величиной эксцентриситетов роторов, также увеличенная амплитуда колебаний



создается за счет работы в резонансных режимах. Для виброизоляции платформы (5) от несущей рамы (4) используются четыре пружины (6). На платформе (5) также присутствует основание для крепления груза (8), упруго-присоединенное к ней с помощью двух пружин (7).

На рис. 1.5 показана функциональная электрическая схема автоматизированной системы управления СВ-2М. Стенд содержит два объекта управления: Платформу и Груз, установленных на пружинах, причем Груз установлен на Платформе. На Платформе установлены два ротора, приводимые во вращение электродвигателями М. В результате объекты Платформа и Груз совершают колебательные движения.

Система управления СВ-2М (рис. 1.5) построена на базе персонального компьютера (ПК) и ЭВМ реального времени (ЭВМ РВ), реализованной виртуально на ПК с помощью программного пакета MATLAB Simulink. ПК обеспечивает интерфейс взаимодействия оператора-исследователя с управляемой системой. ЭВМ РВ предназначена для организации процессов сбора информации и управления стендом в режиме реального времени.

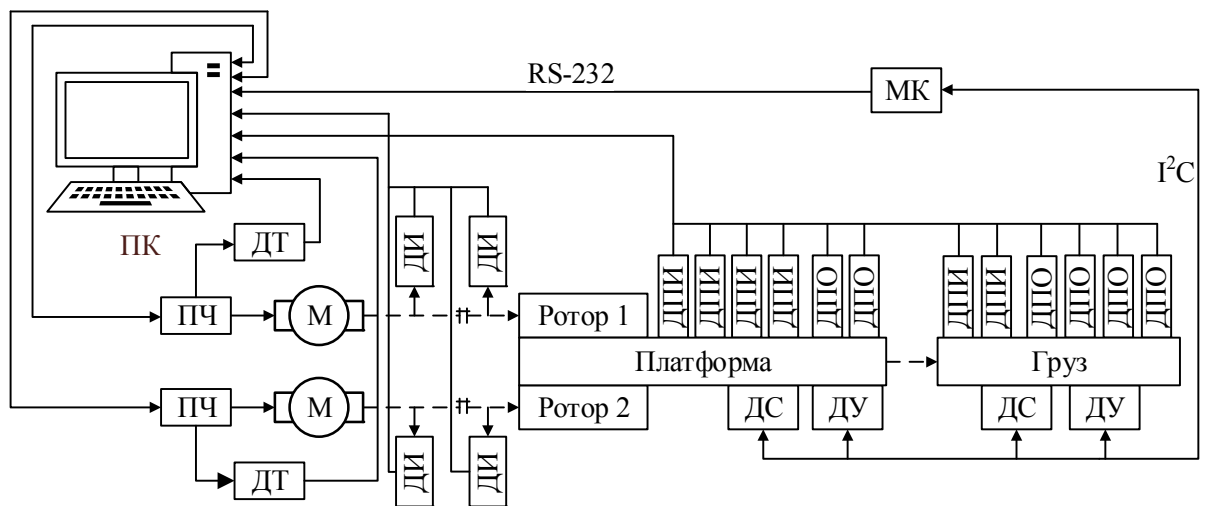


Рис. 1.5. Функциональная электрическая схема управления СВ-2М

Управление работой электродвигателей М осуществляется через силовые частотные преобразователи ПЧ, подключаемые к ЭВМ РВ через

интерфейс RS-485 и линии аналогового управления. Для контроля работы электродвигателей в цепи их электропитания установлены датчики тока ДТ, аналоговые сигналы которых поступают на специальный модуль ввода ЭВМ РВ. Замыкания контуров систем управления электродвигателей выполняются по импульсным датчикам вращения роторов ДИ (энкодерам). Колебательные движения Платформы и Груза измеряются комплексом датчиков. Линейные перемещения объектов в вертикальной плоскости в точках закрепления пружин подвеса измеряются индуктивными датчиками перемещения (ДПИ). Для измерения перемещений Платформы и Груза в горизонтальной плоскости используются оптические датчики перемещения (ДПО). Аналоговые сигналы всех датчиков перемещения поступают в ЭВМ РВ через специальный модуль ввода аналоговой информации.

Кроме датчиков линейных перемещений на объектах управления установлены твердотельные гироскоп и акселерометр. Гироскоп позволяет измерить угловые скорости объекта относительно трех осей, акселерометр позволяет измерить ускорения объектов относительно трех осей. Данные измерительные приборы имеют цифровой выход с интерфейсом передачи данных I<sup>2</sup>C. Для передачи данных с датчиков в ЭВМ РВ служит вспомогательный коммутационный микроконтроллер МК, использующий стандартный для ЭВМ интерфейс RS-232. На функциональной схеме (рис. 1.5) не показаны устройства силового электропитания и элементы силовой защиты системы управления. Данная архитектура системы ориентирована на использование средств MATLAB Simulink и RT Workshop.

#### *Трех- и четырехроторные ВУ*

В работе [51] рассматривается кратная самосинхронизация МВУ, в частности трех- и четырехроторных ВУ. И.И. Блехман и Н.П. Ярошевич в 1992 запатентовали трехроторную вибромашину [6] (рис. 1.6).

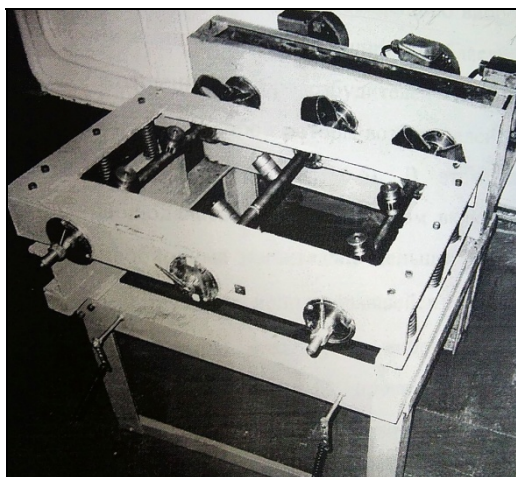


Рис. 1.6. Трехроторный вибростенд

### 1.3. Постановка задачи диссертационной работы

В диссертации рассматриваются задачи управления основными режимами мехатронной ВУ: пуском, прохождением через резонанс и синхронизацией. Предполагается, что движение МВУ происходит в вертикальной плоскости, а отклонениями от плоского движения можно пренебречь. Для постановки задачи управления МВУ математические модели, описывающие их динамику и синтезированные в виде систем дифференциальных уравнений Лагранжа II-го рода, записываются в векторно-матричной форме:

$$A(q)\ddot{q}(t) + B(q, \dot{q}) = F, \quad (1.1)$$

где  $A$  – матрица при вторых производных обобщенных координат  $\ddot{q}(t)$ ;  $B$  – вектор-столбец, включающий слагаемые, зависящие от первых производных и непосредственно от обобщенных координат  $q$ ;  $F$  – вектор сил и управляющих воздействий;  $q = [x_c, y_c, \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n]^T$  – вектор обобщенных координат системы;  $x_c, y_c$  – координаты центра масс вибрирующего органа (платформы);  $\varphi$  – угол поворота платформы в вертикальной плоскости;  $\varphi_i$  – угол поворота  $i$ -го неуравновешенного ротора вокруг оси электродвигателя,  $i = 1, \dots, n$ ;  $n$  – количество неуравновешенных роторов в ВУ. Предполагается, что матрица  $A(q)$  невырожденная, так что систему (1.1) можно разрешить

относительно вектора вторых производных и привести к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме, где все ДУ имеют первый порядок и разрешены относительно производных. Тогда в общем случае модель объекта управления (ОУ) задается в виде:

$$\dot{z} = F(z, u, t). \quad (1.2)$$

где  $z = [q, \dot{q}]^T$  – вектор обобщенных координат системы и их производных (скоростей), он же вектор состояния;  $u = \{u_i(t)\}$ ;  $u_i(t)$  – управляющее воздействие на  $i$ -й вибровозбудитель, заданное как функция времени.

В задачах пуска и прохождения резонансной зоны целью управления является выход на заданный уровень полной энергии системы. При этом цель управления записывается в виде

$$H(q(t), \dot{q}(t)) \rightarrow H^*, \quad (1.3)$$

где  $H = T + \Pi$  – полная энергия ВУ;  $T, \Pi$  – кинетическая и потенциальная энергии ВУ;  $H^*$  – заданный уровень энергии системы, определяющий величины средних скоростей роторов в установившемся режиме. Для удобства применения метода скоростного градиента цель управления (1.3) можно переформулировать, введя целевую функцию  $Q(z) \geq 0$ , в виде

$$Q(z) = (H - H^*)^2 \quad (1.4)$$

Тогда цель управления будет записываться в виде:

$$Q(z(t)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Таким образом, задача пуска состоит в синтезе алгоритма управления, реализуемого в виде обратной связи по измеряемым величинам, который обеспечивает достижение цели (1.5).

В задачах прохождения через резонанс, кроме цели управления необходимо задать ограничения на управляющие воздействия. Задача может быть переформулирована как управление энергией с ограничением:

$$|u_i(t)| \leq \bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.6)$$

где  $\bar{u}_i, i = 1, \dots, n$  – заданные ограничения на сигналы управления.

Таким образом задача управления прохождением через резонанс состоит в обеспечении достижения цели (1.5) с учетом ограничений (1.6) с помощью синтеза алгоритма управления, использующего обратные связи по величинам, измеряемым датчиками и восстанавливаемым с помощью наблюдателей состояния. Предполагается, что ограничения на сигналы управления  $\bar{u}_i, i = 1, \dots, n$  такие, что при постоянных сигналах  $u_i(t) \equiv \bar{u}_i, i = 1, \dots, n$  цель управления недостижима.

В задачах управления синхронизацией цель также задается в виде (1.5).

В существующих определениях [47] частотную синхронизацию рассматривают как точное совпадение угловых скоростей несбалансированных роторов  $\omega_s = \omega_r; s = 1, \dots, n; r = 1, \dots, n; s \neq r; n$  – количество неуравновешенных роторов в ВУ. В более общем случае – случае кратной частотной синхронизации, скорости несбалансированных роторов пропорциональны синхронной частоте  $\omega^*$  ( $\omega^* > 0$ )

$$\omega_i = n_i \cdot \omega^* (i = 1, \dots, n) \quad (1.7)$$

для некоторых целых  $n_i$ .

Координатная синхронизация [4, 28, 47] возникает, когда выходы или некоторые фазовые координаты одной из подсистем вибровозбудителей совпадают с соответствующими координатами других подсистем при всех  $t \geq t_0$ . Понятие *кратной координатной синхронизации*, сформулированное в [47, 48], предполагает, что фазы вибровозбудителей  $\varphi_i, i = 1, \dots, n$  удовлетворяют тождествам:

$$\frac{\varphi_s}{n_s} - \frac{\varphi_r}{n_r} = L_{sr}; \quad s = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, n; \quad s \neq r. \quad (1.8)$$

где  $n_s, n_r$  – заданные кратности скоростей роторов.

На практике имеет смысл рассматривать приближенную частотную синхронизацию, для которой в случае кратной синхронизации требуется выполнение неравенства, задаваемого для средних скоростей:

$$\left| \omega_{s\text{cp}} - \frac{n_s}{n_r} \cdot \omega_{r\text{cp}} \right| \leq \varepsilon^*, \quad (1.9)$$

где  $\varepsilon^* > 0$  задает требуемую точность синхронного режима. Однако соотношения (1.9) недостаточно для синхронизации, поскольку его выполнение не препятствует накоплению ошибки синхронизации по приведенному сдвигу фаз  $\frac{\varphi_s}{n_s} - \frac{\varphi_r}{n_r}$ , поэтому в дополнение к соотношению

(1.9) в практических задачах следует наложить условие на фазы, которое также может выполняться лишь приближенно, то есть (1.8) должно быть заменено на

$$\left| \frac{\varphi_s}{n_s} - \frac{\varphi_r}{n_r} - L_{sr} \right| < \varepsilon; \quad s = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, n; \quad s \neq r. \quad (1.10)$$

Будем говорить, что в системе имеет место *приближенная кратная частотно-координатная синхронизация*, если одновременно выполняются соотношения (1.9) и (1.10) для некоторых  $\varepsilon^* > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $L_{sr} = \text{const}$ .

Введем цель управления (кратным) синхронным режимом работы МВУ как обеспечение стремления  $H$  к заданному уровню  $H^*$  и обеспечение соотношения частот вращения роторов, соответствующего кратной частотной синхронизации

$$H(q(t), \dot{q}(t)) \rightarrow H^*; \quad \dot{\varphi}_s / n_s \pm \dot{\varphi}_r / n_r \rightarrow 0; \quad s = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, n; \quad s \neq r. \quad (1.11)$$

где  $\dot{\varphi}_{s,r}$  – угловые скорости роторов.

При синтезе целевой функции  $Q(z)$ , для которой цель управления записывается в виде (1.5), используем метод скоростного градиента А.Л. Фрадкова [49], преимущество которого заключается в том, что алгоритмы управления, строящиеся на его основе, являются робастными, то есть сохраняющими работоспособность даже в отсутствие точной динамической модели объекта управления:

$$Q(z) = 0,5 \left\{ (1 - \alpha)(H - H^*)^2 + \sum_{s,s \neq r}^n \alpha_{s,r} (\dot{\phi}_s / n_s \pm \dot{\phi}_r / n_r)^2 \right\}, \quad (1.12)$$

где  $\alpha_{s,r} > 0$ ,  $\sum_{s,r>i}^n \alpha_{s,r} = \alpha$ ,  $0 < \alpha$  ( $\alpha_{s,r}$ )  $< 1$  – весовой коэффициент, задающий

значимость первого и второго слагаемых (1.12).

В соответствии с вышесказанным, можно сформулировать цель диссертационной работы.

**Целью работы** является разработка комплекса эффективных алгоритмов управления мехатронными МВУ, обеспечивающих пуск и прохождение через резонанс при ограничении управляющих сигналов, а также стабильную приближенную частотно-координатную синхронизацию вибровозбудителей. Для достижения поставленной цели в работе ставятся и решаются следующие задачи:

- Разработка алгоритмов управления основными режимами работы МВУ, реализуемых в виде обратной связи по измеряемым величинам:

- алгоритмов управления пуском и прохождением через резонанс;
- алгоритмов управления режимами простой и кратной синхронизации.

- Разработка наблюдателя для скорости вертикальных перемещений платформы, позволяющего реализовать разработанные алгоритмы управления.

- Разработка методики построения математических моделей нестационарных МВУ как объектов управления, совершающих колебания в вертикальной плоскости, с учетом динамики электроприводов и упругости карданных валов.

- Компьютерное исследование эффективности разработанных алгоритмов управления для различных моделей МВУ, в том числе с учетом упругости карданных валов, нестационарности параметров и динамики электроприводов.

- Реализация системы управления вибрационным стендом СВ-2М на базе разработанных алгоритмов в программном пакете MATLAB Simulink; сравнительный анализ результатов компьютерного моделирования и экспериментального исследования в режиме пуска и прохождения резонансной зоны.

### **Выводы по первой главе.**

1. Требования повышения эффективности работы МВУ, характеризующихся существенной нелинейностью и нестационарностью параметров, обусловленной изменениями массы сыпучих материалов, делают необходимым разработку алгоритмов управления замкнутого типа с реализацией на базе компьютерных систем.

2. Предложена формулировка цели управления в единой форме (1.5) как обеспечение стремления полной энергии системы  $H$  к заданному уровню  $H^*$  при соответствующем виде целевого функционала (1.4) или (1.12).

3. Предложена формулировка приближенной кратной частотно-координатной синхронизации для реализации алгоритмов управления кратной синхронизацией роторов.

Поскольку целевые функционалы, задаваемые в виде (1.4) или (1.12), зависят от всех переменных, входящих в вектор состояния  $z = [q, \dot{q}]^T$ , для реализации управляющих алгоритмов также потребуется информация обо всех переменных состояния, что делает необходимым разработку наблюдающих устройств для переменных, неизмеряемых с помощью датчиков.



## ГЛАВА 2. СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МВУ КАК ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

### 2.1. Методика получения математических моделей МВУ

ВУ являются электромеханическими системами, в которых присутствуют взаимосвязанные механические и электромагнитные процессы. В механике для однозначного определения положения системы в пространстве используются независимые между собой геометрические величины любой размерности, называемые обобщенными координатами:  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , где  $k$  – число степеней свободы механической системы. Поскольку механические части ВУ являются несвободными системами, положения и скорости точек которых геометрически и (или) кинематически ограничены (связаны), то их обобщенные координаты ( $q_1, q_2, \dots, q_k$ ) и обобщенные скорости ( $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$ ) подчиняются ограничительным условиям (связям), которые можно представить в виде уравнений состояния. Наибольшее распространение для описания механики ВУ получили уравнения в независимых обобщенных координатах, которые обычно называют уравнениями Лагранжа II-го рода. Для электромеханических систем они составляют первую группу характеристик, вторая включает величины, описывающие электромагнитные процессы.

Рассмотрим систему с  $k$  степенями свободы и геометрическими механическими связями, ограничивающими только положения точек системы, но не их скорости (идеальными голономными связями). Положение системы в пространстве будем определять обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_k$ .

Вектор-радиус  $r_i$  любой точки системы можно выразить через обобщенные координаты и время, если связи нестационарны, по формуле

$$r_i = r_i(t, q_1, q_2, \dots, q_k), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.1)$$

Возможные перемещения определяются, как приращения вектор-радиусов

$$\delta r_1 = \sum_{j=1}^k \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (2.2)$$

причем, поскольку обобщенные координаты независимы, все приращения  $\delta q_j$  произвольны и бесконечно малы.

Обратимся к общему уравнению динамики

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta r_1 - \sum_{i=1}^n m_i \dot{v}_i \delta r_i = 0, \quad (2.3)$$

где  $F_i$  – равнодействующая задаваемых сил, приложенных к точке системы;  $m_i$  –  $i$ -я масса;  $\dot{v}_i$  –  $i$ -ое ускорение. Первая сумма выражается через обобщенные координаты

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta r_1 = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j, \quad (2.4)$$

где  $Q_j$  – обобщенная сила.

Что касается второй суммы в уравнении (2.4), определив  $\dot{v}_i$  и произведя некоторые преобразования [46], можно записать следующие соотношение

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{v}_i \delta r_i = \sum_{i=1}^k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j, \quad (2.5)$$

где  $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$  – кинетическая энергия системы; .

С учетом (2.4) и (2.5) уравнение (2.3) переписывается в виде:

$$\sum_{j=1}^k \left( Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (2.6)$$

Последнее равенство может выполняться при произвольных  $\delta q_j$ , если все круглые скобки равны 0. Таким образом, уравнения Лагранжа второго рода, составленные в независимых обобщенных координатах для системы с голономными связями, примут вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (2.7)$$

где  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Рассмотрим некоторые выражения обобщенных сил. Если существует функция декартовых координат, называемая потенциальной энергией  $\Pi$  системы, а проекции некоторой силы на оси декартовой системы координат равны частным производным этой функции, взятым с обратным знаком

$$F_{ix} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}, \quad (2.8)$$

то такая сила называется консервативной.

Выражая работу сил на малых перемещениях точек системы [31], можно получить выражения для обобщенной силы

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (2.9)$$

при этом  $\Pi$  рассматривается как функция обобщенных координат и времени.

Если на систему действуют только консервативные силы, то уравнение Лагранжа принято записывать в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_k, \quad (2.10)$$

где  $L = T - \Pi = L(t, q, \dot{q})$  – функция Лагранжа;  $Q_k$  – непотенциальные обобщенные силы;  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Уравнения, описывающие взаимосвязанные электромагнитные и механические процессы в электромеханических системах и называемые уравнениями Лагранжа-Максвелла, имеют вид [47, 50]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial i_r} + \frac{\partial \Psi}{\partial i_r} + \frac{\partial V}{\partial g_r} = E_r, \quad (2.11)$$

где  $r = 1, \dots, m$ .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(T+W)}{\partial q_k} + \frac{\partial(\Pi+V)}{\partial q_k} = Q_k, \quad (2.12)$$

где  $k = 1, \dots, m$ ;  $T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  – кинетическая энергия;  $\Pi(q_1, \dots, q_n)$  – потенциальная энергия;  $Q_k = Q(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k)$  – непотенциальные обобщенные силы;  $W = 0,5 \sum_{r,s=1}^m L_{rs} i_r i_s$  – энергия магнитного поля, причем  $L_{rs} = L_{sr}$ ; при  $r = s$  коэффициенты  $L_{ss}$  называют коэффициентами самоиндукции, а при  $r \neq s$  – коэффициентами взаимной индукции контуров;  $V = 0,5 \sum_{j=1}^m \frac{g_j^2}{c_j}$  – энергия электрического поля;  $c_j$  – емкости конденсаторов.

Предполагается, что связи в системе стационарные и голономные.

Система (2.12) содержит  $m + n$  уравнений 2-го порядка относительно  $m + n$  неизвестных функций  $g_1(t), \dots, g_m(t), q_1(t), \dots, q_n(t)$ . Все уравнения (2.12) имеют структуру уравнений механики, то есть, если принять формально  $g_1(t), \dots, g_m(t), q_1(t), \dots, q_n(t)$  за обобщенные координаты системы с кинетическим потенциалом  $L_a = T + W - (\Pi + V)$ , то (2.12) можно записать как уравнения Лагранжа 2-го рода этой системы. При этом первым  $m$  координатам соответствуют обобщенные силы  $E_r = \partial \psi / \partial i_r$ , а остальным – силы  $Q_k$ . Токи  $I_r$  имеют смысл обобщенных скоростей,  $W$  формально можно отнести к кинетической, а  $V$  – к потенциальным энергиям. Величины магнитных потоков или потоков индукции (в электротехнике – потокосцеплений)

$$\Phi_r = \frac{\partial W}{\partial i_r} \sum_{s=1}^m L_{rs} i_s, \quad r = 1, \dots, m \quad (2.13)$$

аналогичны обобщенным импульсам;  $\Phi_r$  – поток вектора индукции  $B$  через любую поверхность, натянутую на  $r$ -й контур.

## 2.2. Математические модели механической части МВУ с роторами, расположенными на горизонтальной оси

В данном разделе выводятся модели МВУ, совершающих колебания в вертикальной плоскости  $Oxy$ , с роторами, расположенными на

горизонтальной оси, проходящей через центр масс вибрирующего органа (платформы). Кинематическая расчетная схема МВУ приведена на рис. 2.1 и описывает движение МВУ в вертикальной плоскости  $Oxy$ . Система координат, связанная с платформой, обозначена  $O'x'y'$ . Координаты центра платформы – точки  $O'$  – обозначены  $\{x_c, y_c\}$ . Платформа укреплена на упругих опорах – пружинах. Абсциссы крепления пружин  $x_{pi} = \pm a$ . Оси вращения неуравновешенных роторов расположены перпендикулярно плоскости движения и считаются строго горизонтальными, поэтому перемещение МВУ по оси  $Oz$  в данной модели не учитывается. Поскольку принято данное упрощение, четыре упругих опоры можно рассматривать как две пружины с соответствующей эквивалентной жесткостью  $c_{0i}$  без учета их поперечной жесткости по оси  $Oz$  и скручивания.

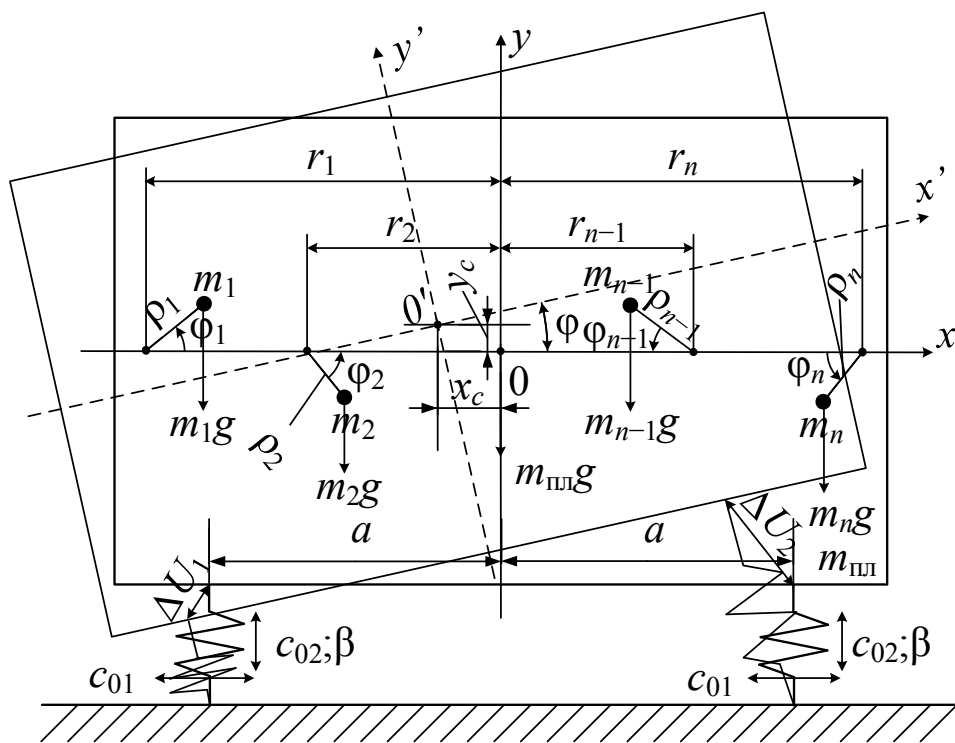


Рис. 2.1. Кинематическая схема МВУ (вид спереди)

На рис. 2.1 использованы следующие обозначения:  $x_c, y_c, \varphi, \varphi_i, i = 1, \dots, n$  – обобщенные координаты системы, где  $x_{c0} = 0, y_{c0} = 0$  –

координаты центра масс несущего тела (платформы) МВУ в декартовой системе координат, жестко связанной с фундаментом;  $\varphi$  – угол поворота платформы в вертикальной плоскости  $Oxy$ , отсчитываемый против часовой стрелки;  $\varphi_i$  – угол поворота  $i$ -го дебаланса вокруг оси электродвигателя, отсчитываемый против часовой стрелки;  $M_i$  – вращающий момент электродвигателя  $i$ -го дебаланса;  $k_c \dot{\varphi}_i$  – момент сил сопротивления вращению  $i$ -го дебаланса;  $m_{\text{пл}}$  – масса платформы МВУ;  $m_i$  – масса  $i$ -го дебаланса;  $\rho_i$  – эксцентриситет  $i$ -го дебаланса относительно оси вращения;  $r_i$  – расстояние от центра масс платформы до оси вращения  $i$ -го дебаланса;  $c_{0i}$  – коэффициенты эквивалентной жесткости упругих опорных элементов по вертикальной и горизонтальной осям;  $\beta$  – демпфирование в пружинах;  $k_c$  – коэффициенты вязкого трения в подшипниках вибровозбудителей;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\Delta U_i$  – изменение длины  $i$ -ой пружины,  $i = 1, 2$ . Роторы в данной модели могут быть идентичными или иметь разные массо-инерционные параметры ( $m_i$  и  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Координаты осей (точек крепления) неуравновешенных роторов в неподвижной системе координат выражаются формулами:

$$x_i = x_c + r_i \cos \varphi + \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i); \quad y_i = y_c + r_i \sin \varphi + \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i).$$

Скорости горизонтальных и вертикальных колебаний осей неуравновешенных роторов:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \dot{x}_c - \dot{\varphi} r_i \sin \varphi - (\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_i) \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i); \\ \dot{y}_i &= \dot{y}_c + \dot{\varphi} r_i \cos \varphi + (\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_i) \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i). \end{aligned}$$

Кинетическая энергия:

$$T = 0,5 m_{\text{пл}} v_c^2 + 0,5 \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 + 0,5 J_{\text{пл}} \dot{\varphi}^2 + 0,5 \sum_{i=1}^n (J_{ci} (\dot{\varphi}_i + \dot{\varphi})^2),$$

где  $v_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2$ ;  $v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $J_{\text{пл}}$  – момент инерции платформы относительно центра масс;  $J_{ci}$  – момент инерции ротора  $i$ -го дебаланса относительно оси вращения.

Итоговое выражение для кинетической энергии  $T$  примет вид:

$$\begin{aligned}
T = & 0,5\dot{x}_c^2 m_0 + 0,5\dot{y}_c^2 m_0 + 0,5\sum_{i=1}^n (\dot{\phi}^2 m_i r_i^2 + \dot{\phi}^2 m_i \rho_i^2 + 2\dot{\phi}^2 m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i + \\
& + \dot{\phi}_i^2 m_i \rho_i^2 + 2\dot{\phi}\dot{\phi}_i m_i \rho_i^2 + 2\dot{\phi}\dot{\phi}_i m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i - 2\dot{x}_c \dot{\phi} m_i r_i \sin \varphi - \\
& - 2\dot{x}_c \dot{\phi} m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - 2\dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) + 2\dot{y}_c \dot{\phi} m_i r_i \cos \varphi + \\
& + 2\dot{y}_c \dot{\phi} m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) + 2\dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)) + 0,5J_{\text{пл}} \dot{\phi}^2 + \\
& + 0,5\sum_{i=1}^n (J_{ci} (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\phi}_i + \dot{\phi}_i^2)),
\end{aligned}$$

где  $m_0 = m_{\text{пл}} + \sum_{i=1}^n (m_i)$  – масса ВУ. Обозначим моменты инерции роторов как  $J_i = J_{ci} + m_i \rho_i^2$  и установки как  $J = J_{\text{пл}} + \sum_{i=1}^n J_i + \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$  и перепишем уравнение кинетической энергии:

$$\begin{aligned}
T = & 0,5m_0 \dot{x}_c^2 + 0,5m_0 \dot{y}_c^2 + 0,5J\dot{\phi}^2 + \dot{\phi}^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i + 0,5\sum_{i=1}^n J_i \dot{\phi}_i^2 + \\
& + \dot{\phi} \sum_{i=1}^n J_i \dot{\phi}_i + \sum_{i=1}^n [\dot{\phi}\dot{\phi}_i m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i - \dot{x}_c \dot{\phi} m_i r_i \sin \varphi - \dot{x}_c \dot{\phi} m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \\
& - \dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) + \dot{y}_c \dot{\phi} m_i r_i \cos \varphi + \dot{y}_c \dot{\phi} m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) + \\
& + \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)].
\end{aligned}$$

Произведем дифференцирование в соответствии со схемой уравнений Лагранжа II-го рода. Возьмем частные производные от  $T$  по обобщенным скоростям:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c} = m_0 \dot{x}_c + \sum_{i=1}^n (-\dot{\phi} m_i r_i \sin \varphi - \dot{\phi} m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i));$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_c} = m_0 \dot{y}_c + \sum_{i=1}^n (\dot{\phi} m_i r_i \cos \varphi + \dot{\phi} m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) + \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i));$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = & \dot{\phi} J + 2\dot{\phi} \sum_{i=1}^n (m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i) + \sum_{i=1}^n \dot{\phi}_i J_i + \sum_{i=1}^n (\dot{\phi}_i m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i - \\
& - \dot{x}_c m_i r_i \sin \varphi - \dot{x}_c m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) + \dot{y}_c m_i r_i \cos \varphi + \dot{y}_c m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} = & \sum_{i=1}^n \dot{\phi}_i J_i + \dot{\phi} \sum_{i=1}^n J_i + \sum_{i=1}^n (\dot{\phi} m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i - \\
& - \dot{x}_c m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) + \dot{y}_c m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)).
\end{aligned}$$

Производные по времени от полученных частных производных имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c} = & m_0 \ddot{x}_c + \sum_{i=1}^n (-\ddot{\phi} m_i r_i \sin \varphi - \ddot{\phi} m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \\ & - \dot{\phi}^2 m_i r_i \cos \varphi - \dot{\phi}^2 m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \dot{\phi}_i^2 m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \\ & - 2\dot{\phi} \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_c} = & m_0 \ddot{y}_c + \sum_{i=1}^n (\ddot{\phi} m_i r_i \cos \varphi + \ddot{\phi} m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) + \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \\ & - \dot{\phi}^2 m_i r_i \sin \varphi - \dot{\phi}^2 m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{\phi}_i^2 m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - 2\dot{\phi} \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = & \ddot{\phi} J + 2\dot{\phi} \sum_{i=1}^n (m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i) + \sum_{i=1}^n \ddot{\phi}_i J_i + \sum_{i=1}^n (\dot{\phi}_i m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i - \\ & - \ddot{x}_c m_i r_i \sin \varphi - \ddot{x}_c m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) + \ddot{y}_c m_i r_i \cos \varphi + \ddot{y}_c m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \\ & - \dot{\phi}_i^2 m_i r_i \rho_i \sin \varphi_i - \dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i r_i \cos \varphi - \dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \\ & - \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i r_i \sin \varphi - \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)) + \\ & + 2\dot{\phi} \sum_{i=1}^n (-\dot{\phi}_i m_i r_i \rho_i \sin \varphi_i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} = & \ddot{\phi} \sum_{i=1}^n J_i + \sum_{i=1}^n \ddot{\phi}_i J_i + \sum_{i=1}^n (\dot{\phi}_i m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i - \ddot{x}_c m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) + \\ & + \ddot{y}_c m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \dot{\phi} \dot{\phi}_i m_i r_i \rho_i \sin \varphi_i - \dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \\ & - \dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)). \end{aligned}$$

Частные производные от  $T$  по обобщенным координатам имеют вид:

$$\frac{\partial T}{\partial x_c} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y_c} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = & \sum_{i=1}^n (-\dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i r_i \cos \varphi - \dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) + \\ & - \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i r_i \sin \varphi - \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = & \dot{\phi}^2 \sum_{i=1}^n (-m_i r_i \rho_i \sin \varphi_i) + \sum_{i=1}^n (-\dot{\phi} \dot{\phi}_i m_i r_i \rho_i \sin \varphi_i - \dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \\ & - \dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)). \end{aligned}$$

Потенциальная энергия имеет следующий вид:

$$\Pi = m_{\text{пл}} g y_c + g \sum_{i=1}^n m_i y_i + 0,5 c_0 \sum_{i=1}^n \Delta U_i^2.$$

Будем считать  $\Delta U_i^2 = \Delta x_{\Pi i}^2 + \Delta y_{\Pi i}^2$ ,  $i = 1, 2$ ; где  $\Delta x_{\Pi i}^2, \Delta y_{\Pi i}^2$  – изменение длины пружины по соответствующей оси. Поскольку, как правило,



жесткости по вертикали и горизонтали различны, вместо слагаемого  $(0,5c_0\Delta U_i^2)$  запишем  $(0,5(c_{01}\Delta x_{\Pi i}^2 + c_{02}\Delta y_{\Pi i}^2))$ , где  $c_{01}$  – жесткость по оси  $X$ ,  $c_{02}$  – жесткость по оси  $Y$ . Очевидно, что приращения (сжатия-растяжения) пружин по соответствующим координатам составят:

$$\begin{aligned}\Delta x_{\Pi 1}^2 &= (x_c + a \cos \varphi)^2; & \Delta x_{\Pi 2}^2 &= (x_c - a \cos \varphi)^2; \\ \Delta y_{\Pi 1}^2 &= (y_c - a \sin \varphi)^2; & \Delta y_{\Pi 2}^2 &= (y_c + a \sin \varphi)^2.\end{aligned}$$

Тогда выражение для потенциальной энергии примет вид:

$$\begin{aligned}\Pi &= m_{\text{пл}}gy_c + g \sum_{i=1}^n (m_i y_c + m_i r_i \sin \varphi + m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)) + c_{01}(x_c^2 + a^2 \cos^2 \varphi) + \\ &+ c_{02}(y_c^2 + a^2 \sin^2 \varphi) = m_0 gy_c + g \sum_{i=1}^n (m_i r_i \sin \varphi + m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)) + \\ &+ c_{01}(x_c^2 + a^2 \cos^2 \varphi) + c_{02}(y_c^2 + a^2 \sin^2 \varphi).\end{aligned}$$

Уравнение полной механической энергии

$$\begin{aligned}H = T + \Pi &= 0,5m_0\dot{x}_c^2 + 0,5m_0\dot{y}_c^2 + 0,5J\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i + \\ &+ 0,5 \sum_{i=1}^n J_i \dot{\varphi}_i^2 + \sum_{i=1}^n J_i \dot{\varphi} \dot{\varphi}_i + \sum_{i=1}^n [\dot{\varphi} \dot{\varphi}_i m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i - \dot{x}_c \dot{\varphi} m_i r_i \sin \varphi - \\ &- \dot{x}_c \dot{\varphi} m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{x}_c \dot{\varphi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) + \dot{y}_c \dot{\varphi} m_i r_i \cos \varphi + \\ &+ \dot{y}_c \dot{\varphi} m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) + \dot{y}_c \dot{\varphi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)] + m_0 gy_c + \\ &+ g \sum_{i=1}^n [m_i r_i \sin \varphi + m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)] + c_{01}(x_c^2 + a^2 \cos^2 \varphi) + \\ &+ c_{02}(y_c^2 + a^2 \sin^2 \varphi).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Частные производные от  $\Pi$  по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_c} = 2c_{01}x_c; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y_c} = m_0 g + 2c_{02}y_c;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = g \sum_{i=1}^n (m_i r_i \cos \varphi + m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)) - a^2 (c_{01} - c_{02}) \sin 2\varphi;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} = g \sum_{i=1}^n (m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)).$$

Окончательно уравнения динамики МВУ примут вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c} - \frac{\partial T}{\partial x_c} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_c} + \beta \dot{x}_c = 0;$$

$$m_0 \ddot{x}_c + \sum_{i=1}^n [-\dot{\phi} m_i r_i \sin \varphi - \dot{\phi} m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \ddot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{\phi}^2 m_i r_i \cos \varphi - \dot{\phi}^2 m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \ddot{\phi}_i^2 m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - 2\dot{\phi} \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)] + 2c_{01} \dot{x}_c + \beta \dot{x}_c = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_c} - \frac{\partial T}{\partial y_c} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_c} + \beta \dot{y}_c = 0;$$

$$m_0 \ddot{y}_c + \sum_{i=1}^n [\ddot{\phi} m_i r_i \cos \varphi + \ddot{\phi} m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) + \ddot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \dot{\phi}^2 m_i r_i \sin \varphi - \dot{\phi}^2 m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \ddot{\phi}_i^2 m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - 2\dot{\phi} \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)] + m_0 g + 2c_{02} \dot{y}_c + \beta \dot{y}_c = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \beta \dot{\phi} = 0; \quad (2.15)$$

$$J \ddot{\phi} + 2\dot{\phi} \sum_{i=1}^n m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i + \sum_{i=1}^n J_i \ddot{\phi}_i + \sum_{i=1}^n [\ddot{\phi}_i m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i - \dot{\phi}_c m_i r_i \sin \varphi - \dot{\phi}_c m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) + \ddot{y}_c m_i r_i \cos \varphi + \ddot{y}_c m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \dot{\phi}_i^2 m_i r_i \rho_i \sin \varphi_i] + 2\dot{\phi} \sum_{i=1}^n (-\dot{\phi}_i m_i r_i \rho_i \sin \varphi_i) + g \sum_{i=1}^n [m_i r_i \cos \varphi + m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)] - a^2 (c_{01} - c_{02}) \sin 2\varphi + \beta \dot{\phi} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} + k_c \dot{\phi}_i = M_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$-\ddot{x}_c m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) + \ddot{y}_c m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) + \ddot{\phi} (J_i + m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i) + J_i \ddot{\phi}_i - \dot{\phi}^2 m_i r_i \rho_i \sin \varphi_i + m_i g \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) + k_c \dot{\phi}_i = M_i.$$

где  $M_i$  – управляющие моменты,  $i = 1, \dots, n$ ;  $k_c$  – коэффициент вязкого трения в подшипниках вибровозбудителей.

По синтезированной выше универсальной модели МВУ с  $n$  роторами получим комплекс моделей, у которых роторы расположены симметрично и их количество равно одному ( $n = 1$ ), двум ( $n = 2$ ) и трем ( $n = 3$ ).

Кинематическая схема для однороторной ВУ представлена на рис. 2.2.

Ротор расположен в центре масс платформы, то есть  $r = 0$ .

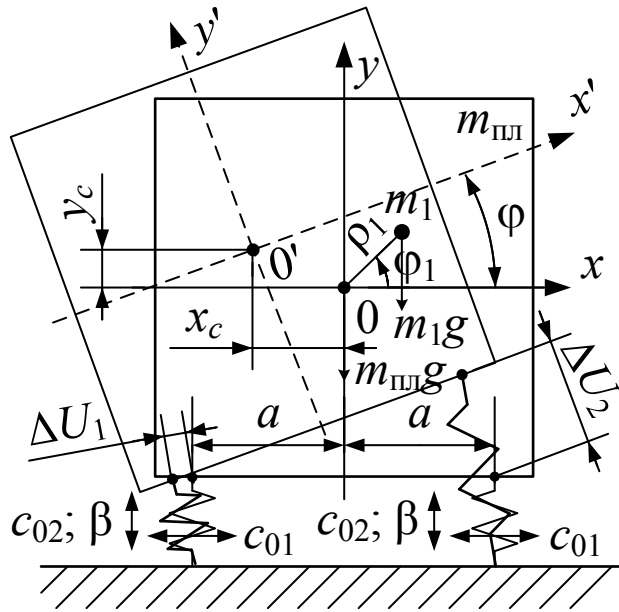


Рис. 2.2. Кинематическая схема однороторной ВУ (вид спереди)

Уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 m_0 \ddot{x}_c - \ddot{\phi} m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \dot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \dot{\phi}^2 m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - \\
 - \dot{\phi}_1^2 m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + 2c_{01} x_c + \beta \dot{x}_c = 0; \\
 m_0 \ddot{y}_c + \ddot{\phi} m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + \dot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - \dot{\phi}^2 m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \\
 - \dot{\phi}_1^2 m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) + m_0 g + 2c_{02} y_c + \beta \dot{y}_c = 0; \\
 - \ddot{x}_c m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) + \ddot{y}_c m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + \ddot{\phi} J + \dot{\phi}_1 J_1 - \\
 + m_1 \rho_1 g \cos(\varphi + \varphi_1) - a^2 (c_{01} - c_{02}) \sin 2\varphi + \beta \dot{\phi} = 0; \\
 - \ddot{x}_c m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) + \ddot{y}_c m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + \ddot{\phi} J_1 + \dot{\phi}_1 J_1 + \\
 + m_1 \rho_1 g \cos(\varphi + \varphi_1) + k_c \dot{\phi}_1 = M_1.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Кинематическая схема для двухроторной ВУ представлена на рис. 2.3.

Роторы расположены симметрично относительно начала координат (центра масс платформы), то есть  $r_1 = -r$ ;  $r_2 = r$ . Данная модель является базовой, поскольку ее кинематическая схема (рис. 2.3) соответствует упрощенной динамике двухроторного лабораторного стенда без груза.

Уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
& m_0 \ddot{x}_c + \ddot{\phi}[(m_1 - m_2)r \sin \varphi - m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2)] - \\
& \quad - \ddot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \ddot{\phi}_2 m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) + \\
& \quad + \dot{\phi}^2 [(m_1 - m_2)r \cos \varphi - m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2)] - \\
& - \dot{\phi}_1^2 m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - \dot{\phi}_2^2 m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - \\
& \quad - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_2 m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + 2c_{01}x_c + \beta \dot{x}_c = 0; \\
& m_0 \ddot{y}_c - \ddot{\phi}[(m_1 - m_2)r \cos \varphi - m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2)] + \\
& \quad + \ddot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + \ddot{\phi}_2 m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + \\
& \quad + \dot{\phi}^2 [(m_1 - m_2)r \sin \varphi - m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2)] - \\
& - \dot{\phi}_1^2 m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \dot{\phi}_2^2 m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \\
& \quad - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_2 m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) + m_0 g + 2c_{01}y_c + \beta \dot{y}_c = 0; \\
& \ddot{x}_c [(m_1 - m_2)r \sin \varphi - m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2)] + \\
& + \ddot{y}_c [-(m_1 - m_2)r \cos \varphi + m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2)] + \\
& + \ddot{\phi}(J - 2m_1 r \rho_1 \cos \varphi_1 + 2m_2 r \rho_2 \cos \varphi_2) + \ddot{\phi}_1(J_1 - m_1 r \rho_1 \cos \varphi_1) + \\
& \quad + \ddot{\phi}_2(J_2 + m_2 r \rho_2 \cos \varphi_2) + \dot{\phi}_1^2 m_1 r \rho_1 \sin \varphi_1 - \dot{\phi}_2^2 m_2 r \rho_2 \sin \varphi_2 + \\
& \quad + 2\dot{\phi}\dot{\phi}_1 m_1 r \rho_1 \sin \varphi_1 - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_2 m_2 r \rho_2 \sin \varphi_2 - (m_1 - m_2)gr \cos \varphi + \\
& + m_1 g \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + m_2 g \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) - a^2(c_{01} - c_{02}) \sin 2\varphi + \beta \dot{\phi} = 0; \\
& - \ddot{x}_c m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) + \ddot{y}_c m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + \ddot{\phi}(J_1 - m_1 r \rho_1 \cos \varphi_1) + \\
& \quad + \ddot{\phi}_1 J_1 - \dot{\phi}^2 m_1 r \rho_1 \sin \varphi_1 + m_1 g \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + k_c \dot{\phi}_1 = M_1. \\
& - \ddot{x}_c m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) + \ddot{y}_c m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + \ddot{\phi}(J_2 + m_2 r \rho_2 \cos \varphi_2) + \\
& \quad + \ddot{\phi}_2 J_2 + \dot{\phi}^2 m_2 r \rho_2 \sin \varphi_2 + m_2 g \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + k_c \dot{\phi}_2 = M_2.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Кинематическая схема для трехроторной ВУ представлена на рис. 2.4.

Для удобства перехода от двухроторной модели (2.17) к трехроторной модели (2.18) первый и второй роторы расположены так же, как и в предыдущем случае (рис. 2.3), а третий ротор помещен в центре масс платформы, то есть  $r_1 = -r$ ;  $r_2 = r$ ,  $r_3 = 0$ .

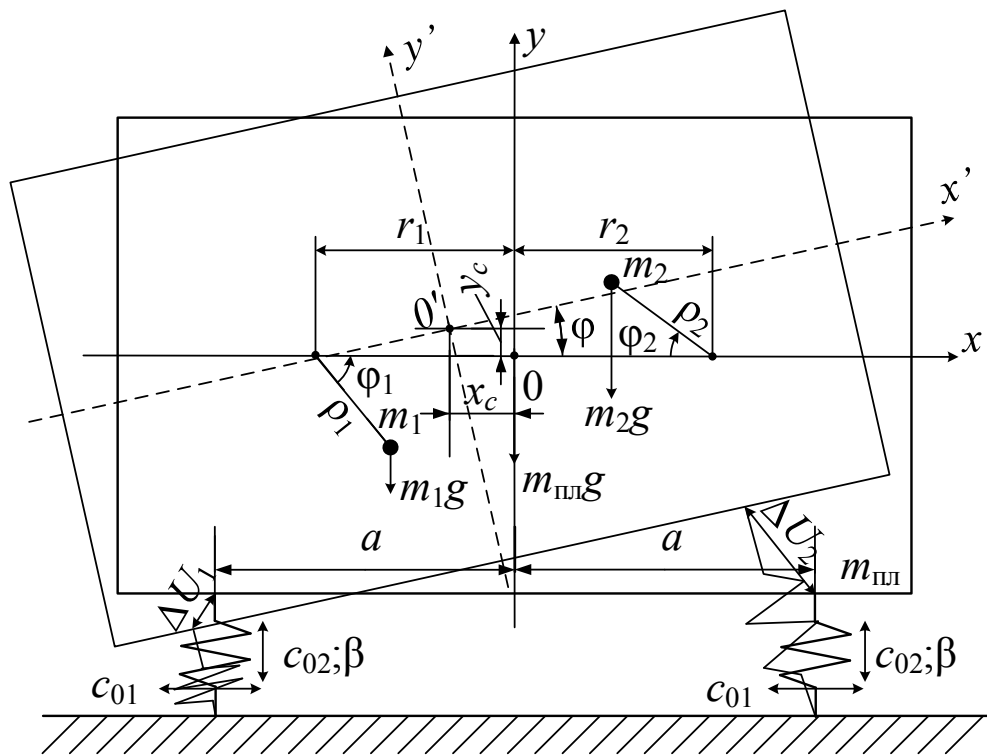


Рис. 2.3. Кинематическая схема двухроторной ВУ (вид спереди)

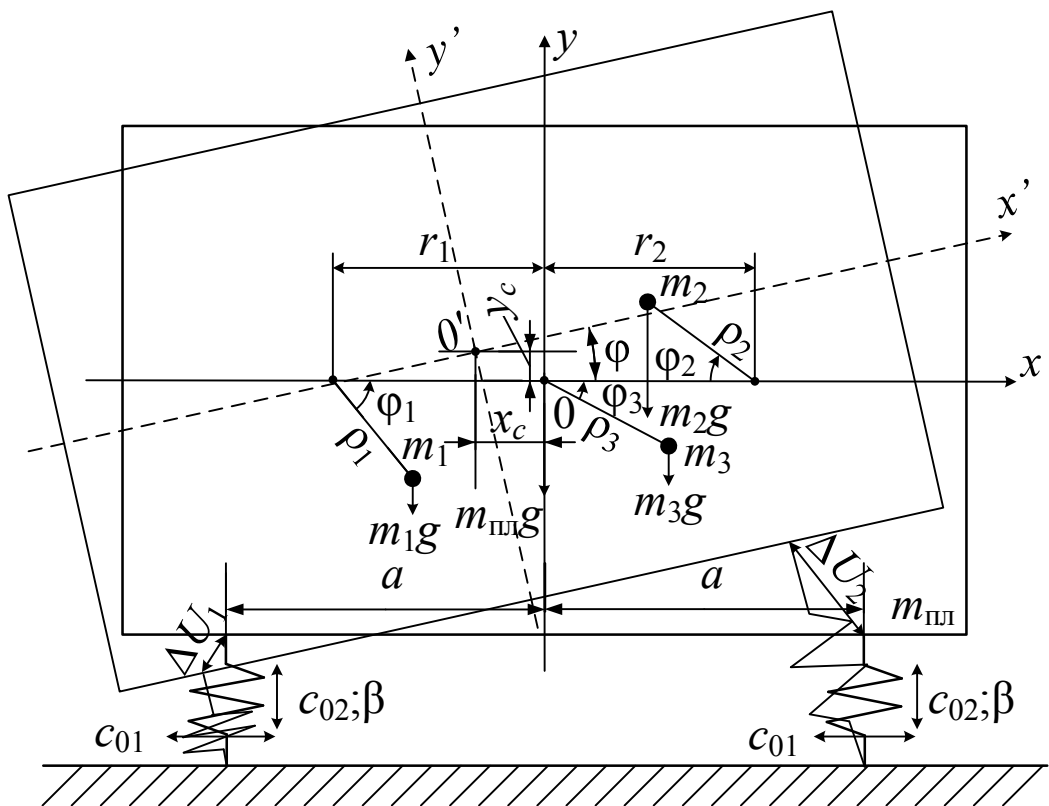


Рис. 2.4. Кинематическая схема трехроторной ВУ (вид спереди)

Уравнения динамики трехроторной ВУ будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
& m_0 \ddot{x}_c + \ddot{\phi}[(m_1 - m_2)r \sin \varphi - m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - \\
& - m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3)] - \ddot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \ddot{\phi}_2 m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - \\
& - \ddot{\phi}_3 m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3) + \dot{\phi}^2[(m_1 - m_2)r \cos \varphi - m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - \\
& - m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) - m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3)] - \dot{\phi}_1^2 m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - \\
& - \dot{\phi}_2^2 m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) - \dot{\phi}_3^2 m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - \\
& - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_2 m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_3 m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) + 2c_{01}x_c + \beta \dot{x}_c = 0; \\
& m_0 \ddot{y}_c - \ddot{\phi}[(m_1 - m_2)r \cos \varphi - m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + \\
& + m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3)] + \ddot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + \ddot{\phi}_2 m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + \\
& + \ddot{\phi}_3 m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) + \dot{\phi}^2[(m_1 - m_2)r \sin \varphi - m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \\
& - m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3)] - \dot{\phi}_1^2 m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \\
& - \dot{\phi}_2^2 m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - \dot{\phi}_3^2 m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3) - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \\
& - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_2 m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_3 m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3) + m_0 g + 2c_{01}y_c + \beta \dot{y}_c = 0; \\
& \ddot{x}_c [(m_1 - m_2)r \sin \varphi - m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - \\
& - m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3)] + \ddot{y}_c [-(m_1 - m_2)r \cos \varphi + m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + \\
& + m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3)] + \ddot{\phi}(J - 2m_1 \rho_1 r \cos \varphi_1 + \\
& + 2m_2 r \rho_2 \cos \varphi_2) + \ddot{\phi}_1(J_1 - m_1 r \rho_1 \cos \varphi_1) + \ddot{\phi}_2(J_2 + m_2 r \rho_2 \cos \varphi_2) + \\
& + \ddot{\phi}_3 J_3 + \dot{\phi}_1^2 m_1 r \rho_1 \sin \varphi_1 - \dot{\phi}_2^2 m_2 r \rho_2 \sin \varphi_2 + 2\dot{\phi}\dot{\phi}_1 m_1 r \rho_1 \sin \varphi_1 - \\
& - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_2 m_2 r \rho_2 \sin \varphi_2 - (m_1 - m_2)gr \cos \varphi + \\
& + m_1 g \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + m_2 g \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + m_3 g \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) - \\
& - a^2(c_{01} - c_{02})\sin 2\varphi + \beta \dot{\phi} = 0; \\
& - \ddot{x}_c m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) + \ddot{y}_c m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + \ddot{\phi}(J_1 - m_1 r \rho_1 \cos \varphi_1) + \\
& + J_1 \ddot{\phi}_1 - \dot{\phi}_1^2 m_1 r \rho_1 \sin \varphi_1 + m_1 g \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + k_c \dot{\phi}_1 = M_1; \\
& - \ddot{x}_c m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) + \ddot{y}_c m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + \ddot{\phi}(J_2 + m_2 r \rho_2 \cos \varphi_2) + \\
& + J_2 \ddot{\phi}_2 + \dot{\phi}_2^2 m_2 r \rho_2 \sin \varphi_2 + m_2 g \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + k_c \dot{\phi}_2 = M_2; \\
& - \ddot{x}_c m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3) + \ddot{y}_c m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) + J_3 \ddot{\phi} + \\
& + J_3 \ddot{\phi}_3 + m_3 g \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) + k_c \dot{\phi}_3 = M_3.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

### 2.3. Модель динамики системы электроприводов

В данном разделе выводится модель динамики для двухроторной МВУ, соответствующей вибростенду СВ-1. Структурная схема системы электропривода (СЭП)  $i$ -го вибровозбудителя показана на рис. 2.5. Структура электрической части привода выбрана как традиционная одноконтурная система с контуром тока. Контур тока, как правило, настраивается на наибольшее быстродействие, то есть на оптимум по модулю (ОМ). Контур скорости не рассматривается, поскольку датчики скорости в двухроторном СВ-1 не предусмотрены.

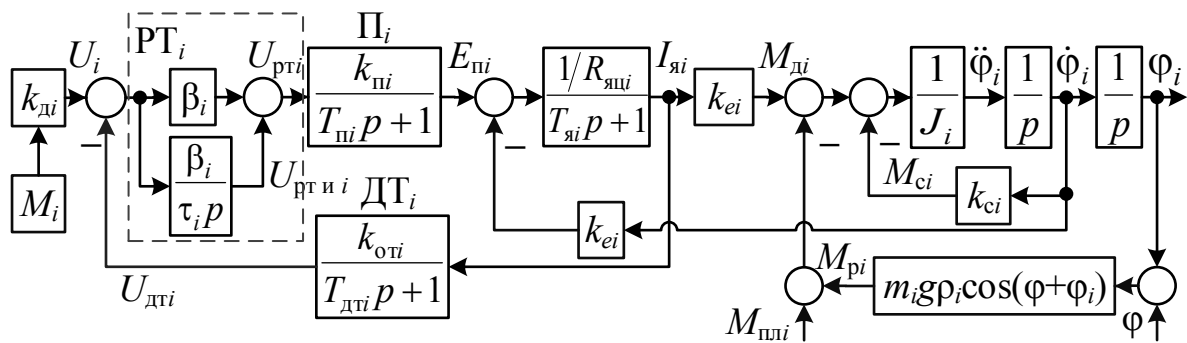


Рис. 2.5. Структурная схема одноконтурной СЭП

На рис. 2.5 использованы следующие обозначения:  $RT_i$  – пропорционально-интегральный регулятор тока;  $\Pi_i$  – силовой преобразователь;  $DT_i$  – датчик тока;  $I_{яi}$  – ток якоря;  $E_{пi}$ ,  $E_{дi}$  – ЭДС преобразователя и двигателя;  $M_{дi}$  – электромеханический момент двигателя;  $M_{сi}$  – момент сопротивления ротора, обусловленный вязким трением;  $k_{дi} = 1/k\Phi$  – коэффициент передачи двигателя по моменту;  $k_{пi}$ ,  $k_{отi}$  – коэффициенты усиления  $\Pi_i$  и обратной связи по току;  $k_{ei} = k\Phi$  – коэффициент момента (ЭДС) двигателя;  $k_{ci}$  – коэффициент вязкого трения;  $T_{пi}$ ,  $T_{дтi}$  – постоянные времени преобразователя и датчика тока;  $T_{яi}$  – постоянная времени якоря;  $R_{яi}$  – сопротивление якорной цепи;  $\beta_i$ ,  $\tau_i$  – динамический коэффициент усиления и постоянная времени  $RT_i$ ;  $U_{ргi}$ ,  $U_{дтi}$  – выходные

напряжения регулятора тока и датчика тока;  $U_i$  – напряжение, соответствующее значению момента  $M_i$ , поступающему с задающего устройства;  $i = 1, \dots, n$ ; в случае СВ-1  $n = 2$ .

Для синтеза алгоритма управления кратной синхронизацией необходимо перейти от передаточных функций и структурных схем к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме. Построим модель в пространстве состояний для  $i$ -го привода в соответствии со структурной схемой на рис. 2.5. Для блока, соответствующего датчику тока, имеем:

$$(T_{дтi} p + 1)U_{дтi}(p) = k_{отi} I_{яi}(p).$$

Раскроем скобки и оставим в левой части уравнения переменные под знаком « $p$ »:

$$T_{дтi} p U_{дтi}(p) = -U_{дтi}(p) + k_{отi} I_{яi}(p).$$

Аналогично, для остальных элементов структурной схемы:

$$T_{яi} p I_{яi}(p) = -I_{яi}(p) + \frac{1}{R_{яцi}} (E_{пi}(p) - E_{дi}(p));$$

$$T_{пi} p E_{пi}(p) = -E_{пi}(p) + k_{пi} U_{рти}(p);$$

$$U_{ртиi}(p) = \frac{\beta_i}{\tau_i} (U_i(p) - U_{дтi}(p)).$$

Заменяем оператор дифференцирования « $p$ » на производную по времени  $p \rightarrow d/dt$ , разрешив уравнения относительно переменных состояния:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{яi}}{dt} &= \frac{1}{T_{яi}} (-I_{яi}(t) + \frac{1}{R_{яцi}} (E_{пi}(t) - E_{дi}(t))); \\ \frac{dE_{пi}}{dt} &= \frac{1}{T_{пi}} (-E_{пi}(t) + k_{пi} U_{рти}(t)); \\ \frac{d}{dt} U_{ртиi}(t) &= \frac{\beta_i}{\tau_i} (U_i(t) - U_{дтi}(t)); \\ \frac{d}{dt} U_{дтi}(t) &= \frac{1}{T_{дтi}} (-U_{дтi}(t) + k_{отi} I_{яi}(t)). \end{aligned} \tag{2.19}$$



## 2.4. Модель динамики упругости карданных валов между двигателем и ротором

ВУ, как правило, рассматривается как одномассовая электромеханическая система с приведением массы рабочего органа (платформы) и элементов механической передачи к оси двигателя и использованием эквивалентной массы  $m$  и соответствующего ей момента инерции на валу двигателя  $J$ . Однако при достаточной длине валов в передачах, их упругие деформации могут существенно влиять на динамику ВУ, накладывая основные ограничения на быстродействие, особенно в современных высокоскоростных электроприводах. Следовательно, в случае упругих механических связей нужно рассматривать ВУ как двухмассовую систему с отдельным учетом масс неуравновешенного ротора и механизма. Момент инерции механизма приводится к скорости вращения двигателя [52].

Модель механизма должна быть достаточно подробной, чтобы адекватно работать в области существенных частот, и, при этом, достаточно простой для ее практической реализации. Реальный механизм почти всегда представляет собой систему с распределенными параметрами, но в большинстве случаев допустимо рассматривать механизм как систему с сосредоточенными параметрами, при этом общепринятыми являются следующие допущения:

- 1) упругие звенья невесомы и характеризуются постоянной жесткостью, то есть постоянным коэффициентом пропорциональности между моментом (силой) и деформацией;
- 2) силы и моменты, действующие в системе, приложены к сосредоточенным массам, которые не деформируются;
- 3) волновое распределение деформации не учитывается.

Модель МВУ, учитывающая упругие свойства связи в паре «исполнительный двигатель – неуравновешенный ротор», синтезируется в виде уравнений в пространстве состояний. Частный случай данной модели –

двухроторная ВУ – соответствует вибростендам СВ-1, СВ-2 и СВ-2М, конструкция которых описана в главе 1. Кинематическая схема МВУ (рис. 2.6) аналогична МВУ на рис. 2.1, но с упругими валами между двигателями и роторами, схематично представленными как пружины, соединяющие двигатели  $M$  и точки крепления роторов. В [53] показано, что при частоте упругих колебаний  $\omega_y \geq 1000 \text{ с}^{-1}$  карданный вал можно рассматривать как жесткий, в противном случае необходимо учитывать его упругость.

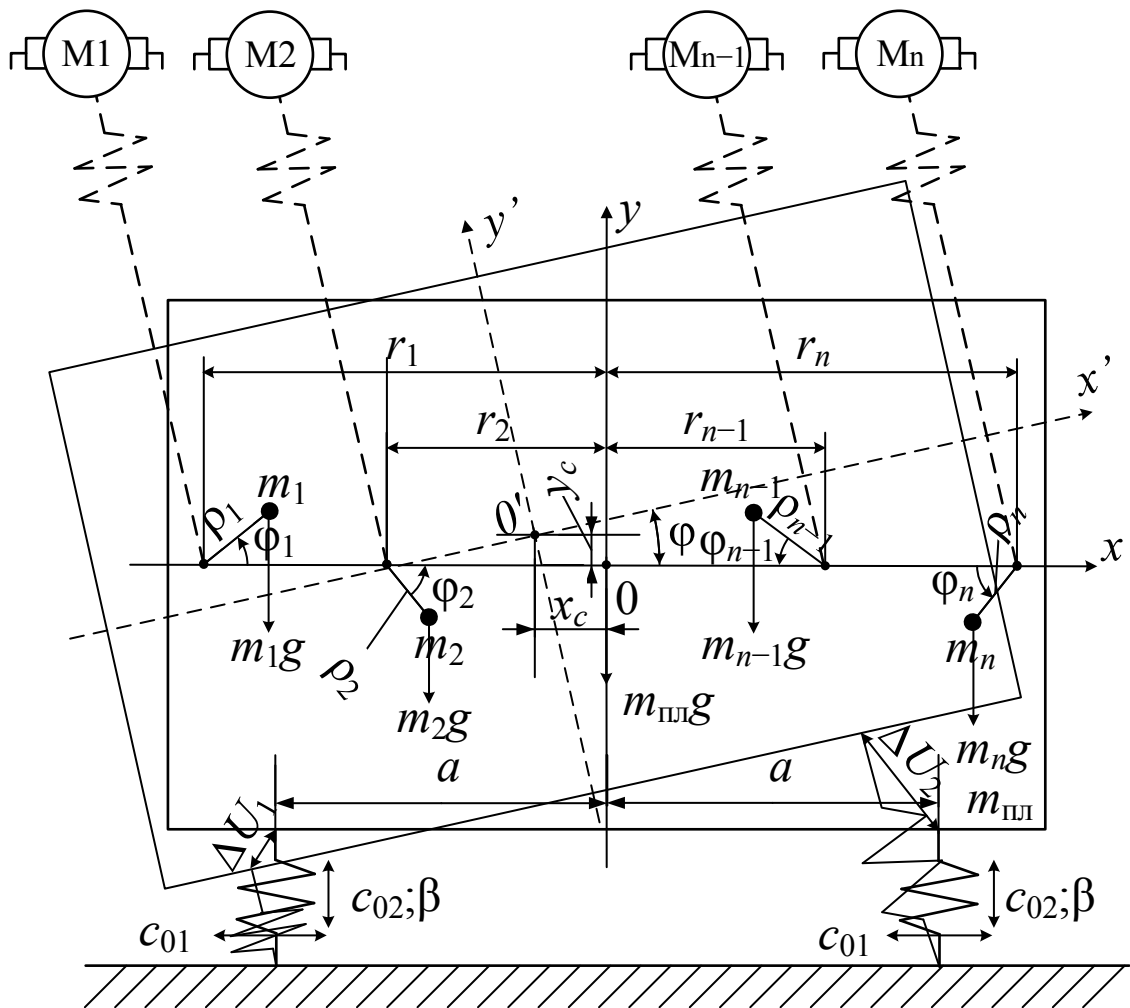


Рис. 2.6. Расчетная схема МВУ с учетом упругости валов

Упругость карданного вала, соединяющего неуравновешенный ротор и двигатель, можно учесть в модели для  $i$ -го ротора МВУ, воспользовавшись структурной схемой, изображенной на рис. 2.7.

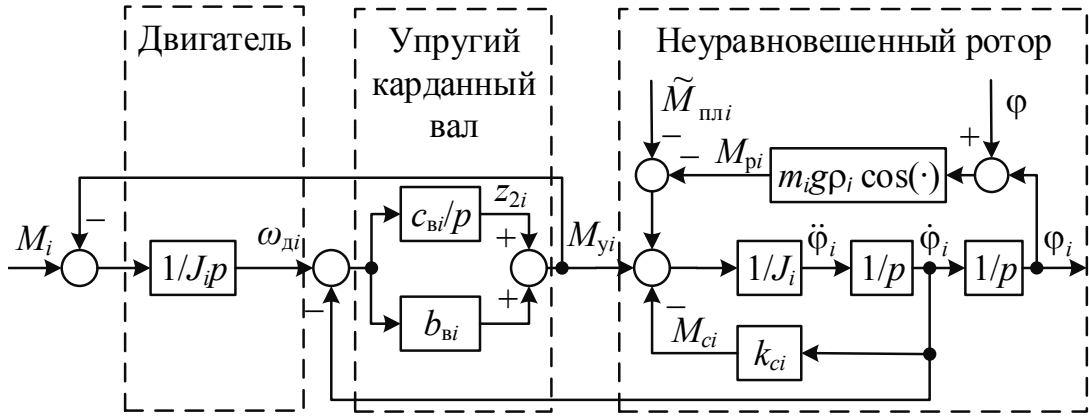


Рис. 2.7. Система двигатель–ротор с учетом упругости карданного вала

На рис. 2.7 введены следующие обозначения:  $c_{vi}$ ,  $b_{vi}$  – коэффициенты жесткости и демпфирования карданного вала;  $M_{ci} = k_c \cdot \dot{\phi}_i$  – момент сопротивления  $i$ -го ротора, обусловленный вязким трением;  $M_{pi}$  – собственный момент  $i$ -го ротора;  $\omega_{di}$  – угловая скорость  $i$ -го двигателя;  $\tilde{M}_{pli}$  –  $i$ -й момент, обусловленный воздействием платформы,  $M_i$  – электромеханический момент  $i$ -го двигателя,  $i = 1, \dots, n$ ;  $k_c$  – коэффициент вязкого трения в подшипниках. Для перехода к уравнениям состояния с учетом упругости введем переменные состояния  $z_{1i} = \omega_{di}$  и  $z_{2i}$  как выходы соответствующих интеграторов,  $i = 1, 2$  (рис. 2.7). Тогда динамика карданного вала с учетом упругости описывается дифференциальными уравнениями:

$$\dot{z}_{1i} = \frac{1}{J_i}(M_i - M_{yi}) = \frac{1}{J_i}M_i - \frac{1}{J_i}z_{2i} - \frac{b_{vi}}{J_i}z_{1i} + \frac{b_{vi}}{J_i}\dot{\phi}_i, \quad \dot{z}_{2i} = c_{vi}z_{1i} - c_{vi}\dot{\phi}_i. \quad (2.20)$$

Опуская индекс  $i$ , запишем упругий момент через координаты  $z_1$  и  $z_2$ :

$$M_y = z_2 + b_v(\omega_d - \dot{\phi}) = z_2 + b_v(z_1 - \dot{\phi}).$$

Тогда уравнения динамики роторов примут вид:

$$J_i \ddot{\phi}_i = M_{yi} - M_{pi} - M_{ci} - \tilde{M}_{pli}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.21)$$

Модель, учитывающую упругость карданных валов, будем получать для МВУ (2.15). При этом формулы для расчета моментов  $M_{pi}$  и  $\tilde{M}_{pli}$  для модели с учетом упругости валов имеют вид:

$$\begin{aligned}
M_{pi}(t) &= m_i \rho_i g \cos(\varphi + \varphi_i); \\
\tilde{M}_{\text{пл}i} &= -(\ddot{x}_c m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \ddot{y}_c m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \\
&\quad - \ddot{\phi}(J_i + r_i m_i \rho_i \cos \varphi_1) - \dot{\phi}^2 r_i m_i \rho_i \sin \varphi_i).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Подставив выражения (2.22) для моментов  $M_{pi}$ ,  $M_{ci}$  и  $\tilde{M}_{\text{пл}i}$  в (2.21) и перенеся их в левую часть этих уравнений, получим окончательные уравнения для роторов с учетом упругих карданных валов (2.23).

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{1i} &= \frac{1}{J_i} M_i - \frac{1}{J_i} z_{2i} - \frac{b_B}{J_i} z_{1i} + \frac{b_B}{J_i} \dot{\phi}_i; \quad \dot{z}_{2i} = c_B z_{1i} - c_B \dot{\phi}_i; \\
M_{yi} &= z_{2i} + b_B (z_{1i} - \dot{\phi}_i).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

На рис. 2.9 представлена структурная схема двухроторной ВУ с упругими карданными валами, включающая: ВУ с блоками платформы и роторов; электронный блок усилителя-преобразователя; систему датчиков с контроллером для снятия и обработки сигналов; персональный компьютер (ПК) с устройствами сопряжения с физической аппаратурой. Структура для МВУ получается добавлением необходимого количества роторов. Расчет управляющего момента производится на ПК. С ПК управляющий момент приходит на вход цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) и подается на двигатель, откуда через упругие карданные валы подается на роторы. Координаты движения центра масс платформы снимаются с датчика положения (ДП), преобразуются в цифровую форму посредством аналого-цифрового преобразователя (АЦП) и подаются на ПК. Углы и угловые скорости роторов снимаются с датчиков импульсов (ДИ) или энкодеров, которые выводят данные на ПК в цифровой форме. Сигналы в цифровой форме обозначены звездочкой (\*), сигналы, не имеющие такого обозначения – аналоговые. Как видно из рис. 2.9, в случае упругих валов энкодеры выдают информацию о скоростях двигателей  $\omega_{di}$ , а не о скоростях дебалансов  $\dot{\phi}_i$ , что необходимо учитывать при реализации алгоритмов.

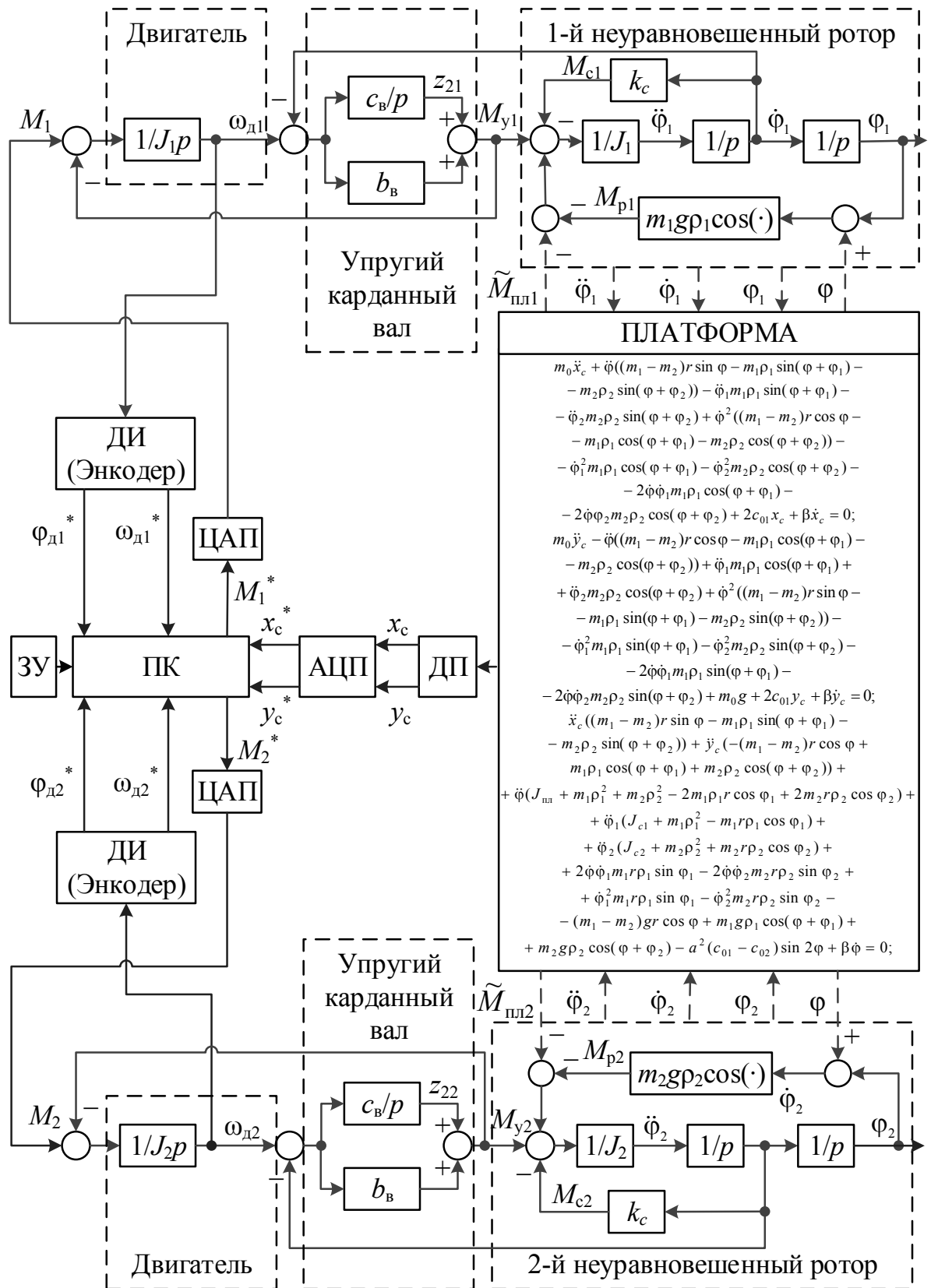


Рис. 2.9. Структурная схема двухроторной ВУ с учетом упругости карданных валов

## 2.5. Математические модели механической части МВУ с роторами, расположенными на горизонтальной оси и упруго присоединенным грузом

В реальных ВУ масса обрабатываемого материала влияет на динамику, поэтому для разработки алгоритмов управления ВУ необходимо учитывать груз и его нестационарность (переменность). Расчетная схема МВУ с упруго-присоединенным грузом изображена на рис. 2.10, где  $m_r$  – масса груза;  $x_r, y_r$  – координаты колебаний груза по горизонтали и вертикали соответственно;  $c_{11}$  и  $c_{12}$  – жесткости верхней пружины, упруго соединяющей груз с платформой, по горизонтали и вертикали соответственно.

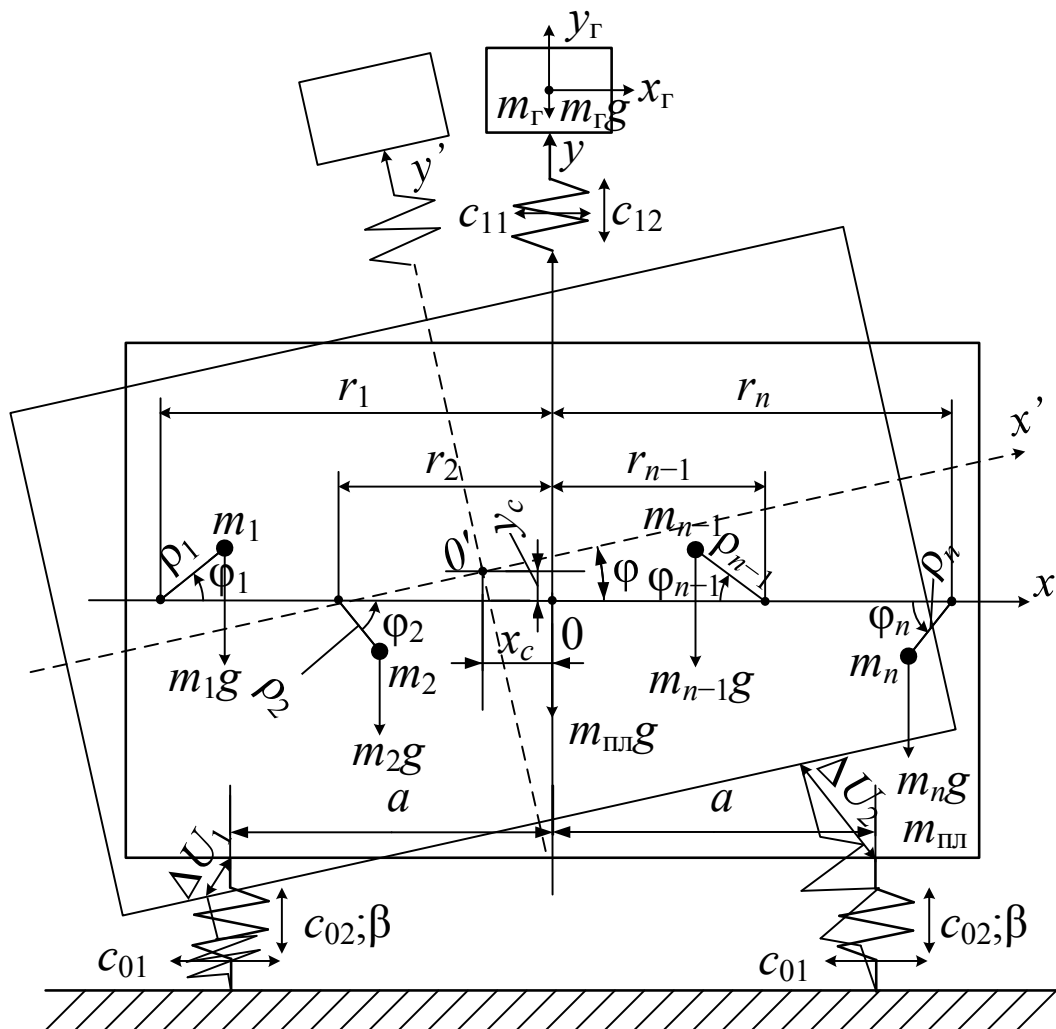


Рис. 2.10. Кинематическая схема МВУ с грузом (вид спереди)

Выражение для кинетической энергии аналогично энергии для модели (2.15) из раздела 2.2, но с добавлением второго слагаемого для груза:

$$T = 0,5m_{\text{пл}}v_c^2 + 0,5m_{\text{г}}v_{\text{г}}^2 + 0,5\sum_{i=1}^n m_i v_i^2 + 0,5J_{\text{пл}}\dot{\phi}^2 + 0,5\sum_{i=1}^n (J_{ci}(\dot{\phi}_i + \dot{\phi})^2),$$

где  $v_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2$ ;  $v_{\text{г}}^2 = \dot{x}_{\text{г}}^2 + \dot{y}_{\text{г}}^2$ ;  $v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2$ ;  $i = 1, \dots, n$ .

Итоговое выражение для кинетической энергии примет вид:

$$\begin{aligned} T = & 0,5m_0\dot{x}_c^2 + 0,5m_0\dot{y}_c^2 + 0,5\dot{x}_{\text{г}}^2 m_0 + 0,5\dot{y}_{\text{г}}^2 m_0 + 0,5J\dot{\phi}^2 + \\ & + \dot{\phi}^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i + 0,5 \sum_{i=1}^n J_i \dot{\phi}_i^2 + \dot{\phi} \sum_{i=1}^n J_i \dot{\phi}_i + \sum_{i=1}^n [\dot{\phi} \dot{\phi}_i m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i - \\ & - \dot{x}_c \dot{\phi} m_i r_i \sin \varphi - \dot{x}_c \dot{\phi} m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) + \dot{y}_c \dot{\phi} m_i r_i \cos \varphi + \\ & + \dot{y}_c \dot{\phi} m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) + \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

В уравнение для потенциальной энергии системы с грузом добавится помимо второго слагаемого с грузом выражение приращения (сжатия-растяжения) пружины упруго присоединенного груза по соответствующим координатам  $0,5c_1 \Delta U_3^2 = 0,5[c_{11}(x_c - x_{\text{г}})^2 + c_{12}(y_c - y_{\text{г}})^2]$ .

$$\begin{aligned} \Pi = & m_{\text{пл}} g y_c + m_{\text{г}} g y_{\text{г}} + g \sum_{i=1}^n m_i y_i + 0,5c_0 \sum_{i=1}^n \Delta U_i^2 = m_0 g y_c + m_{\text{г}} g y_{\text{г}} + \\ & + g \sum_{i=1}^n (m_i r_i \sin \varphi + m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)) + c_{01}(x_c^2 + a^2 \cos^2 \varphi) + \\ & + c_{02}(y_c^2 + a^2 \sin^2 \varphi) + 0,5c_{11}(x_c - x_{\text{г}})^2 + 0,5c_{12}(y_c - y_{\text{г}})^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Полная механическая энергия системы (2.15) с грузом примет вид:

$$\begin{aligned} H = T + \Pi = & 0,5m_0\dot{x}_c^2 + 0,5m_0\dot{y}_c^2 + 0,5\dot{x}_{\text{г}}^2 m_0 + 0,5\dot{y}_{\text{г}}^2 m_0 + 0,5J\dot{\phi}^2 + \\ & + \dot{\phi}^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i + 0,5 \sum_{i=1}^n J_i \dot{\phi}_i^2 + \sum_{i=1}^n J_i \dot{\phi} \dot{\phi}_i + \\ & + \sum_{i=1}^n [\dot{\phi} \dot{\phi}_i m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i - \dot{x}_c \dot{\phi} m_i r_i \sin \varphi - \dot{x}_c \dot{\phi} m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \\ & - \dot{x}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) + \dot{y}_c \dot{\phi} m_i r_i \cos \varphi + \dot{y}_c \dot{\phi} m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) + \\ & + \dot{y}_c \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)] + m_0 g y_c + m_{\text{г}} g y_{\text{г}} + \\ & + g \sum_{i=1}^n [m_i r_i \sin \varphi + m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)] + c_{01}(x_c^2 + a^2 \cos^2 \varphi) + \\ & + c_{02}(y_c^2 + a^2 \sin^2 \varphi) + 0,5c_{11}(x_c - x_{\text{г}})^2 + 0,5c_{12}(y_c - y_{\text{г}})^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Уравнения динамики для горизонтальных и вертикальных колебаний платформы также будут содержать слагаемые для учета груза, получаемые

при дифференцировании потенциальной энергии (2.25) по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_c} = 2c_{01}x_c + c_{11}(x_c - x_r); \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y_c} = m_0g + 2c_{02}y_c + c_{12}(y_c - y_r).$$

Произведя операции, подробно описанные при синтезе модели (2.15) в итоге получим следующие изменения в двух первых уравнениях:

$$\begin{aligned} m_0\ddot{x}_c + \sum_{i=1}^n (\ddot{\phi}m_i r_i \sin \varphi - \ddot{\phi}m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \\ - \dot{\phi}^2 m_i r_i \cos \varphi - \dot{\phi}^2 m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \dot{\phi}_i^2 m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \\ - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)) + 2c_{01}x_c + c_{11}(x_c - x_r) + \beta\dot{x}_c = 0; \\ m_0\ddot{y}_c + \sum_{i=1}^n (\ddot{\phi}m_i r_i \cos \varphi + \ddot{\phi}m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) + \dot{\phi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \\ - \dot{\phi}^2 m_i r_i \sin \varphi - \dot{\phi}^2 m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{\phi}_i^2 m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \\ - 2\dot{\phi}\dot{\phi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)) + m_0g + 2c_{02}y_c + c_{12}(y_c - y_r) + \beta\dot{y}_c = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

В систему дифференциальных уравнений динамики МВУ добавятся два уравнения для координат груза. Для стационарного груза (груза с постоянной массой) они будут иметь вид:

$$\begin{aligned} m_r\ddot{x}_r - c_{11}(x_c - x_r) + \beta\dot{x}_r = 0; \\ m_r\ddot{y}_r + m_r g - c_{12}(y_c - y_r) + \beta\dot{y}_r = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для нестационарного груза уравнения переписутся в виде:

$$\begin{aligned} m_r\ddot{x}_r - c_{11}(x_c - x_r) + \dot{m}_r\dot{x}_r + \beta\dot{x}_r = F_x; \\ m_r\ddot{y}_r + \dot{m}_r\dot{y}_r + m_r g - c_{12}(y_c - y_r) + \beta\dot{y}_r = F_y. \end{aligned} \quad (2.29)$$

где  $F_x$ ,  $F_y$  – проекции на оси  $0x$  и  $0y$  соответственно результирующей внешних сил  $F$ , действующих на груз, и обусловленной скоростью и массой просеиваемого материала, ссыпавшегося с разгрузочного конца МВУ.

## 2.6. Методика реализации математических моделей МВУ как объектов управления в среде MATLAB

Математические модели динамики МВУ, синтезированные в виде систем дифференциальных уравнений Лагранжа II-го рода в разделах 2.2 –



2.5 данной главы, исследуются в программной среде MATLAB (Simulink), для чего их необходимо привести к матричной форме (1.1).

Методика построения математических моделей МВУ в программной среде MATLAB может быть представлена следующим образом:

1. В дифференциальных уравнениях, описывающих динамику механической части МВУ (2.15), задается количество роторов ( $n$ ) и абсциссы точек их крепления к несущему телу (платформе)  $r_i, i = 1, \dots, n$ . Полученная система ДУ имеет порядок  $N = N_1 = 6 + 2n$ .

2. При учете упругости  $n$ -роторной ВУ система ДУ (2.15) порядка  $2n$  объединяется с уравнениями (2.24), полученными в разделе 2.4, с заменой электромеханических моментов  $M_i$  в правых частях на упругие моменты  $M_{yi}, i = 1, \dots, n$ . Полученная система ДУ имеет порядок  $N = N_1 + N_2 = 6 + 4n$ .

3. При учете динамики электроприводов к (2.15) добавляется система уравнений (2.19) – (2.20) для  $n$  роторов при этом значения электромеханических моментов будут вычисляться по формуле  $M_{di} = k_d I_{яi}$ . Порядок системы, описывающей динамику систему электроприводов равен  $N_3 = 4n$ . Порядок системы, описывающей динамику МВУ с учетом упругости карданных валов и динамики электроприводов, составит  $N = N_1 + N_2 + N_3 = 6 + 8n$ .

4. При учете упруго-присоединенного груза уравнения для вертикальных и горизонтальных колебаний платформы заменяются на (2.27) и добавляются ДУ вида (2.28) в случае стационарного груза и (2.29) в случае нестационарного. Уравнения имеют порядок  $N_4 = 5$ . Окончательно порядок системы ДУ, описывающей нестационарную  $n$ -роторную ВУ с учетом динамики СЭП и упругости карданных валов составляет  $N = \sum_{i=1}^4 N_i$ .

5. Уравнения записываются в матричной форме (1.1), в которой выделяется матрица при вторых производных. Уравнение (1.1) преобразуется к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме, где все ДУ имеют первый порядок и разрешены относительно производных. Указанное

преобразование уравнений целесообразно выполнять с помощью программы в среде MATLAB с использованием операторов `solve` и `simplify`. Программа выводит результат в символьном виде. На основании полученных уравнений записывается подпрограмма (программа со стандартным расширением `.m` и пометкой `pp` в названии файла), которая будет использоваться далее для расчета динамики модели. Создается также основная программа, служащая для задания параметров модели, процесса моделирования и способа вывода результатов исследования.

В MATLAB Simulink модель строится по тем же принципам, но состоит из единого файла с расширением `.slx`. Для удобства восприятия и модификации уравнения, разрешенные относительно вторых производных, в модели Simulink задаются отдельными блоками-подсистемами (Subsystem). Также в виде подсистем задаются уравнения, относящиеся к платформе, роторам и грузу. Создание моделей в Simulink необходимо для последующего использования их в управлении реальным вибростендом, поскольку в MATLAB отсутствуют необходимые для этого функции и компоненты (возможность написания драйверов для плат сопряжения между компьютером и датчиками стенда, работа со стендом в реальном времени). Часть модели, касающаяся алгоритма управления и расчета полной механической энергии, переносилась затем в модель управления реальным вибростендом.

Продемонстрируем построение математической модели по указанной методике с использованием средств программной среды MATLAB.

1. Рассмотрим многороторную модель (2.15) и перепишем ее в виде (1.1), заменив множители при вторых производных на коэффициенты  $a_{11}, \dots, a_{mm}$ , где индекс  $m$  равен количеству уравнений в системе и количеству слагаемых с коэффициентами  $a$  в каждом уравнении (количеству элементов в строке квадратной матрицы  $A$  размерности  $m \times m$ ). Слагаемые, не содержащие вторые производные, заменим на коэффициенты  $b_1, \dots, b_m$ . В общем виде для МВУ (2.15) система уравнений будет выглядеть следующим образом

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{x}_c + a_{12}\ddot{y}_c + a_{13}\ddot{\phi} + a_{14}\ddot{\phi}_1 + \dots + a_{1m}\ddot{\phi}_n + b_1 = 0; \\ a_{21}\ddot{x}_c + a_{22}\ddot{y}_c + a_{23}\ddot{\phi} + a_{24}\ddot{\phi}_1 + \dots + a_{2m}\ddot{\phi}_n + b_2 = 0; \\ a_{31}\ddot{x}_c + a_{32}\ddot{y}_c + a_{33}\ddot{\phi} + a_{34}\ddot{\phi}_1 + \dots + a_{3m}\ddot{\phi}_n + b_3 = 0; \\ a_{41}\ddot{x}_c + a_{42}\ddot{y}_c + a_{43}\ddot{\phi} + a_{44}\ddot{\phi}_1 + \dots + a_{4m}\ddot{\phi}_n + b_4 = M_1; \\ \dots \\ a_{m1}\ddot{x}_c + a_{m2}\ddot{y}_c + a_{m3}\ddot{\phi} + a_{m4}\ddot{\phi}_1 + \dots + a_{mm}\ddot{\phi}_n + b_m = M_n, \end{cases} \quad (2.30)$$

где индекс  $n$  обозначает количество роторов. Таким образом в (1.1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3m} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_1 \\ \dots \\ M_n \end{pmatrix}.$$

Детальная запись (2.15) в матричной форме представлена на рис. 2.11.

2. В случае учета упругости карданных валов  $n$ -роторной ВУ (2.15), переписанной в виде (2.30), необходимо заменить  $M_i$  в правых частях уравнений моментов на моменты с упругостью  $M_{yi}$  и добавить два уравнения динамики упругого вала для каждого ротора

$$\begin{aligned} a_{41}\ddot{x}_c + a_{42}\ddot{y}_c + a_{43}\ddot{\phi} + a_{44}\ddot{\phi}_1 + \dots + a_{4m}\ddot{\phi}_n + b_4 &= M_{y1}; \\ \dots \\ a_{m1}\ddot{x}_c + a_{m2}\ddot{y}_c + a_{m3}\ddot{\phi} + a_{m4}\ddot{\phi}_1 + \dots + a_{mm}\ddot{\phi}_n + b_m &= M_{yn}; \\ \dot{z}_{11} &= \frac{1}{J_1}M_1 - \frac{1}{J_1}z_{2i} - \frac{b_B}{J_1}z_{11} + \frac{b_B}{J_1}\dot{\phi}_1; \quad \dot{z}_{21} = c_B z_{11} - c_B \dot{\phi}_1; \\ \dots \\ \dot{z}_{1n} &= \frac{1}{J_n}M_n - \frac{1}{J_n}z_{2n} - \frac{b_B}{J_n}z_{11} + \frac{b_B}{J_n}\dot{\phi}_n; \quad \dot{z}_{2n} = c_B z_{1n} - c_B \dot{\phi}_n, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где  $M_{yi} = z_{2i} + b_B(z_{1i} - \dot{\phi}_i)$ . Три первых уравнения (2.30), описывающих динамику платформы, останутся без изменений.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3m} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \cdots \\ \ddot{\varphi}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_1 \\ \cdots \\ M_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} m_0 & 0 & \sum_{i=1}^n [-m_i r_i \sin \varphi - m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)] & \sum_{i=1}^n [-m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)] \\ 0 & m_0 & \sum_{i=1}^n [m_i r_i \cos \varphi + m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)] & \sum_{i=1}^n [m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)] \\ \sum_{i=1}^n [-m_i r_i \sin \varphi - m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)] & \sum_{i=1}^n [m_i r_i \cos \varphi + m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)] & J + 2 \sum_{i=1}^n m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i & \sum_{i=1}^n J_i + \sum_{i=1}^n m_i r_i \rho_i \cos \varphi_i \\ -m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) & m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) & J_1 + m_1 r_1 \rho_1 \cos \varphi_1 & J_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -m_n \rho_n \sin(\varphi + \varphi_n) & m_n \rho_n \cos(\varphi + \varphi_n) & J_n + m_n r_n \rho_n \cos \varphi_n & J_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \cdots \\ \ddot{\varphi}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n [-\dot{\varphi}^2 m_i r_i \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - \dot{\varphi}_i^2 m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i) - 2\dot{\varphi} \dot{\varphi}_i m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)] + 2c_{01} x_c + \beta \dot{x}_c \\ \sum_{i=1}^n [-\dot{\varphi}^2 m_i r_i \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - \dot{\varphi}_i^2 m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i) - 2\dot{\varphi} \dot{\varphi}_i m_i \rho_i \sin(\varphi + \varphi_i)] + m_0 g + 2c_{02} y_c + \beta \dot{y}_c \\ \sum_{i=1}^n [-\dot{\varphi}_i^2 m_i r_i \rho_i \sin \varphi_i] + 2\dot{\varphi} \sum_{i=1}^n (-\dot{\varphi}_i m_i r_i \rho_i \sin \varphi_i) + g \sum_{i=1}^n [m_i r_i \cos \varphi + m_i \rho_i \cos(\varphi + \varphi_i)] - a^2 (c_{01} - c_{02}) \sin 2\varphi + \beta \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi}^2 m_1 r_1 \rho_1 \sin \varphi_1 + m_1 g \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + k_c \dot{\varphi}_1 \\ \cdots \\ \dot{\varphi}^2 m_n r_n \rho_n \sin \varphi_n + m_n g \rho_n \cos(\varphi + \varphi_n) + k_c \dot{\varphi}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_1 \\ \cdots \\ M_n \end{pmatrix}.$$

Рис. 2.11. Матричная форма системы (2.15) для моделирования в MATLAB

3. В случае учета динамики электроприводов роторов моменты  $M_i$  в соответствующих уравнениях (2.30) необходимо заменить на  $M_{дi}$ . Также необходимо добавить 4 уравнения динамики для электропривода каждого ротора:

$$\begin{aligned}
 & a_{41}\ddot{x}_c + a_{42}\ddot{y}_c + a_{43}\ddot{\phi} + a_{44}\ddot{\phi}_1 + \dots + a_{4m}\ddot{\phi}_n + b_4 = M_{д1}; \\
 & \dots \\
 & a_{m1}\ddot{x}_c + a_{m2}\ddot{y}_c + a_{m3}\ddot{\phi} + a_{m4}\ddot{\phi}_1 + \dots + a_{mm}\ddot{\phi}_n + b_m = M_{дn}; \\
 & \frac{dI_{яi}}{dt} = \frac{1}{T_{яi}}(-I_{яi}(t) + \frac{1}{R_{яиi}}(E_{пi}(t) - E_{дi}(t))); \\
 & \frac{dE_{пi}}{dt} = \frac{1}{T_{пi}}(-E_{пi}(t) + k_{пi}U_{рги}(t)); \\
 & \frac{d}{dt}U_{рги}(t) = \frac{\beta_i}{\tau_i}(U_i(t) - U_{дги}(t)); \\
 & \frac{d}{dt}U_{дги}(t) = \frac{1}{T_{дги}}(-U_{дги}(t) + k_{отги}I_{яi}). \\
 & \dots
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

где  $i = 1, \dots, n$ ;  $M_{дi} = k_{дi}I_{яi}$ . Три первых уравнения (2.30), описывающих динамику платформы, останутся без изменений.

Если кроме динамики приводов учитывается еще и упругость, то в уравнениях моментов в (2.32)  $M_{дi}$  заменяется на  $M_{yi}$  и добавляются два уравнения для упругого вала каждой пары двигатель – ротор с заменой  $M_i$  в правых частях на  $M_{дi}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$$\begin{aligned}
 & a_{41}\ddot{x}_c + a_{42}\ddot{y}_c + a_{43}\ddot{\phi} + a_{44}\ddot{\phi}_1 + \dots + a_{4m}\ddot{\phi}_n + b_4 = M_{y1}; \\
 & \dots \\
 & a_{m1}\ddot{x}_c + a_{m2}\ddot{y}_c + a_{m3}\ddot{\phi} + a_{m4}\ddot{\phi}_1 + \dots + a_{mm}\ddot{\phi}_n + b_m = M_{yn}; \\
 & \dot{z}_{11} = \frac{1}{J_1}M_{д1} - \frac{1}{J_1}z_{21} - \frac{b_B}{J_1}z_{11} + \frac{b_B}{J_1}\dot{\phi}_1; \quad \dot{z}_{21} = c_B z_{11} - c_B \dot{\phi}_1; \\
 & \dots \\
 & \dot{z}_{1n} = \frac{1}{J_n}M_{дn} - \frac{1}{J_n}z_{2n} - \frac{b_B}{J_n}z_{11} + \frac{b_B}{J_n}\dot{\phi}_n; \quad \dot{z}_{2n} = c_B z_{1n} - c_B \dot{\phi}_n.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Таким образом полная запись системы с учетом упругости валов и динамики приводов будет состоять из трех первых уравнений из (2.30), четырех последних уравнений из (2.32) и системы (2.33).

4. При учете упруго-присоединенного груза в первые два уравнения (2.30) добавляются слагаемые для груза. Готовые уравнения (2.27) с учетом груза были получены в разделе 2.5. Вводятся дополнительные ДУ вида (2.28) в случае стационарного груза и (2.29) в случае нестационарного.

Если рассматривать систему (2.15) без учета упругости карданных валов, динамики электроприводов и груза, пункты 2, 3 и 4 можно пропустить.

5. Преобразуем (2.30) к системе дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Для упрощения вывода рассмотрим частный случай модели двухроторной ВУ (2.17).

Обозначим переменные, входящие в вектор состояния системы, для более удобного ввода их в программу следующим образом:  $x_1$  – положение платформы по горизонтали ( $x_c$ );  $x_2$  – скорость платформы по горизонтали ( $\dot{x}_c$ );  $x_3$  – положение платформы по вертикали ( $y_c$ );  $x_4$  – скорость платформы по вертикали ( $\dot{y}_c$ );  $x_5, x_6$  – угол поворота платформы  $\varphi$  и скорость поворота  $\dot{\varphi}$ ;  $x_7, x_8$  – положение  $\varphi_1$  и скорость первого дебаланса  $\dot{\varphi}_1$ ;  $x_9, x_{10}$  – положение  $\varphi_2$  и скорость второго дебаланса  $\dot{\varphi}_2$ .

Вторые производные по обобщенным координатам (первые производные по скоростям) модели (2.17) обозначим в виде:

$$\ddot{x}_c \rightarrow \text{xdot2}; \ddot{y}_c \rightarrow \text{xdot4}; \ddot{\varphi}_c \rightarrow \text{xdot6}; \ddot{\varphi}_1 \rightarrow \text{xdot8}; \ddot{\varphi}_2 \rightarrow \text{xdot10}.$$

Для приведения системы дифференциальных уравнений второго порядка к виду удобному для интегрирования в MATLAB, разрешим уравнение (2.30) относительно вторых производных. Сделаем это в MATLAB с помощью вспомогательной программы `prav_chasti`. Программа `prav_chasti` для базовой двухроторной модели (2.17) приведена ниже, программы для остальных моделей строятся аналогичным образом.

`clear`

```

close all
syms DF...
    F1 F2 F3 F4 F5...
    a11 a12 a13 a14 a15...
    a21 a22 a23 a24 a25...
    a31 a32 a33 a34 a35...
    a41 a42 a43 a44 a45...
    a51 a52 a53 a54 a55...
    b1 b2 b3 b4 b5...
    xdot2 xdot4 xdot6 xdot8 xdot10
F1=a11*xdot2+a12*xdot4+a13*xdot6+a14*xdot8+a15*xdot10+b1;
F2=a21*xdot2+a22*xdot4+a23*xdot6+a24*xdot8+a25*xdot10+b2;
F3=a31*xdot2+a32*xdot4+a33*xdot6+a34*xdot8+a35*xdot10+b3;
F4=a41*xdot2+a42*xdot4+a43*xdot6+a44*xdot8+a45*xdot10+b4;
F5=a51*xdot2+a52*xdot4+a53*xdot6+a54*xdot8+a55*xdot10+b5;
DF = solve(F1,F2,F3,F4,F5,'xdot2','xdot4','xdot6','xdot8','xdot10');
xdot2=simplify(DF.xdot2)
xdot4=simplify(DF.xdot4)
xdot6=simplify(DF.xdot6)
xdot8=simplify(DF.xdot8)
xdot10=simplify(DF.xdot10)

```

Результат работы данной программы prav\_chasti приведен в Приложении 1.

## **Выводы по главе 2**

1. Для построения математических моделей МВУ как объектов управления целесообразно использовать формализм уравнений Лагранжа второго рода с голономными связями и уравнений Лагранжа-Максвелла.

2. Разработан комплекс моделей вибрационных стенов как объектов управления для одно-, двух-, трех- и  $n$ -роторных систем с учетом нестационарности груза, динамики электроприводов и упругости карданных валов, соединяющих двигатели и неуравновешенные роторы.

3. Предложена методика реализации математических моделей МВУ как объектов управления в программной среде MATLAB.

## ГЛАВА 3. СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ОСНОВНЫМИ РЕЖИМАМИ РАБОТЫ МВУ

### 3.1. Синтез алгоритмов управления кратной синхронизацией вращения роторов

Синтез алгоритмов управления синхронизацией вращения роторов МВУ будем осуществлять на основе метода алгоритмов скоростного градиента (АСГ). АСГ будем называть непрерывные алгоритмы, в которых направление настраиваемых параметров или сигнала управления противоположно градиенту от скорости изменения заданной целевой функции, вычисленной в силу уравнений объекта. Уравнения, описывающие динамику объекта управления (ОУ), задаются в виде (1.2)

$$\dot{z} = F(z, u, t),$$

где  $z = [q, \dot{q}]^T$  – вектор обобщенных координат системы и их производных (скоростей);  $u = \{u_i(t)\}$ ;  $u_i(t)$  – управляющее воздействие на  $i$ -й вибровозбудитель, заданное как функция времени.

Пусть задан некоторый целевой функционал  $Q(t)$ , являющийся неотрицательной функцией от фазовых координат  $z(t)$ , и целью управления является уменьшение значения  $Q(t)$ , то есть (1.5). Такой функционал  $Q(t)$  называется локальным.

В этом случае можно вычислить скорость изменения функционала в силу уравнения (1.2) – производную по времени  $\dot{Q}(t)$ :

$$\dot{Q} = \nabla Q(z)^T F(z, u, t). \quad (3.1)$$

где  $\dot{Q}(t) = \omega(x, u, t)$ .

Алгоритм скоростного градиента в конечной форме [49]:

$$u = -\gamma \nabla_u \dot{Q}, \quad (3.2)$$

где  $\gamma > 0$  – коэффициент усиления, параметр алгоритма, выбираемый экспериментально. Условия достижения ЦУ (1.5) в системах (1.2), (1.5) для задач управления энергией получены в работе А.Л. Фрадкова с соавторами



[35]. В более общем виде алгоритм скоростного градиента (АСГ) определяется как интегро-дифференциальный (3.3) [10]:

$$\frac{du}{dt} + \delta(u - \bar{u}) = -\beta \nabla_u \omega - \frac{\gamma d(\nabla_u \omega)}{dt}, \quad (3.3)$$

где  $\gamma > 0$ ;  $\delta > 0$ ;  $\beta > 0$ ;  $\bar{u}$  – некоторый постоянный вектор.

Соотношение (3.3) задает преобразование вектора  $\nabla_u \omega(x, u, t)$  в вектор поправки к управлению  $u - \bar{u}$ . Очевидно, что этот закон является линейным и может быть задан в виде:

$$u - \bar{u} = W(p) \nabla_u \omega,$$

где  $W(p)$  – передаточная функция вида

$$W(p) = -\frac{\beta + \gamma p}{p + \delta} I, \quad (3.4)$$

где  $I$  – единичная матрица, то есть алгоритму (3.3) соответствует матричное интегро-дифференцирующее звено (3.4). При такой постановке, алгоритм (3.2), в котором значение управляющего сигнала пропорционально градиенту от скорости изменения целевого функционала, будем называть пропорциональным (П-) алгоритмом управления.

Синтез АСГ с целевой функцией вида (1.12) проведем для трехроторной ВУ ( $n = 3$ ).

### **3.1.1. Синтез управления кратной взаимной синхронизацией движений неуравновешенных роторов для трехроторного вибрационного стенда**

Модель динамики трехроторного вибрационного стенда получена в главе 2 и описывается уравнениями (2.18). Целевую функцию выбираем в виде (1.12) для  $n = 3$ :

$$Q(z) = 0,5 \left\{ (1 - \alpha)(H - H^*)^2 + \alpha_{12} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_2}{n_1 \pm n_2} \right)^2 + \alpha_{13} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_3}{n_1 \pm n_3} \right)^2 + \alpha_{23} \left( \frac{\dot{\phi}_2 \pm \dot{\phi}_3}{n_2 \pm n_3} \right)^2 \right\}, \quad (3.5)$$

где  $z = [x_c, \dot{x}_c, y_c, \dot{y}_c, \varphi, \dot{\varphi}, \phi_1, \dot{\phi}_1, \phi_2, \dot{\phi}_2, \phi_3, \dot{\phi}_3]^T$  – вектор состояния системы;  $\alpha_{sr}$  – весовые коэффициенты,  $\sum_{s,r} \alpha_{sr} = \alpha$ ,  $0 < \alpha_{sr} < 1$ ;  $H^*$  – заданное значение

полной механической энергии системы, знак «+» в круглых скобках соответствует противофазному движению роторов, знак «-» – синфазному. В дальнейшем при синтезе будем рассматривать для определенности синфазное движение. При достижении цели управления  $Q(z) = 0$ , получим  $H = H^*$  и совпадение кратных скоростей  $\frac{\dot{\phi}_s}{n_s} = \frac{\dot{\phi}_r}{n_r}$ ,  $s, r = 1, 2, 3$ . В данном случае

контролируются кратные разности скоростей для каждой пары роторов, поэтому алгоритм назван алгоритмом *взаимной* синхронизации.

Выражение для энергии трехроторной МВУ без учета груза следующее:

$$\begin{aligned} H = T + \Pi = & 0,5m_0\dot{x}_c^2 + 0,5m_0\dot{y}_c^2 + 0,5J\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^2 m_1 r \rho_1 \cos \varphi_1 + \\ & + \dot{\varphi}^2 m_2 r \rho_2 \cos \varphi_2 + 0,5J_1\dot{\phi}_1^2 + 0,5J_2\dot{\phi}_2^2 + 0,5J_3\dot{\phi}_3^2 + \\ & + J_1\dot{\varphi}\dot{\phi}_1 + J_2\dot{\varphi}\dot{\phi}_2 + J_3\dot{\varphi}\dot{\phi}_3 - \dot{\varphi}\dot{\phi}_1 m_1 r \rho_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}\dot{\phi}_2 m_2 r \rho_2 \cos \varphi_2 + \\ & + \dot{x}_c \dot{\varphi} m_1 r \sin \varphi - \dot{x}_c \dot{\varphi} m_2 r \sin \varphi - \dot{x}_c \dot{\varphi} m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \\ & - \dot{x}_c \dot{\varphi} m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - \dot{x}_c \dot{\varphi} m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3) - \dot{x}_c \dot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \\ : & - \dot{x}_c \dot{\phi}_2 m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - \dot{x}_c \dot{\phi}_3 m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3) - \dot{y}_c \dot{\varphi} m_1 r \cos \varphi + \\ & + \dot{y}_c \dot{\varphi} m_2 r \cos \varphi + \dot{y}_c \dot{\varphi} m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + \dot{y}_c \dot{\varphi} m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + \\ & + \dot{y}_c \dot{\varphi} m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) + \dot{y}_c \dot{\phi}_1 m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + \dot{y}_c \dot{\phi}_2 m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + \\ & + \dot{y}_c \dot{\phi}_3 m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) + m_0 g y_c - m_1 r g \sin \varphi + m_2 r g \sin \varphi + \\ & + m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) + m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) + m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3) + \\ & + c_{01}(x_c^2 + a^2 \cos^2 \varphi) + c_{02}(y_c^2 + a^2 \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Первый этап синтеза состоит в вычислении скорости изменения  $Q(z)$  вдоль траекторий ОУ в предположении, что система консервативна ( $k_c = 0$ ;  $\beta = 0$ ). Кроме того, на этапе синтеза будем считать, что груз отсутствует.

$$\begin{aligned} \dot{Q}(z) = & (1 - \alpha)[(H - H^*)\dot{H}] + \alpha_{12} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_2}{n_1} \right) \left( \frac{\ddot{\phi}_1 \pm \ddot{\phi}_2}{n_2} \right) + \\ & + \alpha_{13} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_3}{n_1} \right) \left( \frac{\ddot{\phi}_1 \pm \ddot{\phi}_3}{n_3} \right) + \alpha_{23} \left( \frac{\dot{\phi}_2 \pm \dot{\phi}_3}{n_2} \right) \left( \frac{\ddot{\phi}_2 \pm \ddot{\phi}_3}{n_3} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\dot{H}$  – производная полной механической энергии по времени. При вычислении указанной производной, проведенном для двухроторной ВУ в [4], было получено следующее выражение:

$$\dot{H} = \dot{\phi}_1 M_1 + \dot{\phi}_2 M_2.$$

Расчеты при  $n = 3$  привели к аналогичному выражению для  $\dot{H}$ :

$$\dot{H} = \dot{\phi}_1 M_1 + \dot{\phi}_2 M_2 + \dot{\phi}_3 M_3.$$

Тогда выражение (3.7) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(z) = & (1 - \alpha)(H - H^*)(\dot{\phi}_1 M_1 + \dot{\phi}_2 M_2 + \dot{\phi}_3 M_3) + \alpha_{12} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_2}{n_1} \right) \left( \frac{\ddot{\phi}_1 \pm \ddot{\phi}_2}{n_2} \right) + \\ & + \alpha_{13} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_3}{n_1} \right) \left( \frac{\ddot{\phi}_1 \pm \ddot{\phi}_3}{n_3} \right) + \alpha_{23} \left( \frac{\dot{\phi}_2 \pm \dot{\phi}_3}{n_2} \right) \left( \frac{\ddot{\phi}_2 \pm \ddot{\phi}_3}{n_3} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выразим ускорения роторов  $\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2, \ddot{\phi}_3$  из уравнений моментов в (2.18)

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 = & \frac{1}{J_1} \{ M_1 + \ddot{x}_c m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \ddot{y}_c m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - \\ & - \dot{\phi}(J_1 - m_1 r \rho_1 \cos \varphi_1) + \dot{\phi}^2 m_1 r \rho_1 \sin \varphi_1 - m_1 g \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - k_c \dot{\phi}_1 \}; \\ \ddot{\phi}_2 = & \frac{1}{J_2} \{ M_2 + \ddot{x}_c m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - \ddot{y}_c m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) - \\ & - \dot{\phi}(J_2 + m_2 r \rho_2 \cos \varphi_2) - \dot{\phi}^2 m_2 r \rho_2 \sin \varphi_2 - m_2 g \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) - k_c \dot{\phi}_2 \}; \\ \ddot{\phi}_3 = & \frac{1}{J_3} \{ M_3 + \ddot{x}_c m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3) - \ddot{y}_c m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) - J_3 \dot{\phi} - \\ & - m_3 g \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) - k_c \dot{\phi}_3 \}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставим выражения (3.9) в формулу (3.8)

$$\begin{aligned}
\dot{Q}(z) = & (1 - \alpha)(H - H^*)(\dot{\phi}_1 M_1 + \dot{\phi}_2 M_2 + \dot{\phi}_3 M_3) + \\
& + \alpha_{12} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_2}{n_1 \quad n_2} \right) \left( \frac{1}{J_1 n_1} \{M_1 + \ddot{x}_c m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \ddot{y}_c m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - \right. \\
& - \ddot{\phi}(J_1 - m_1 r \rho_1 \cos \varphi_1) + \dot{\phi}^2 m_1 r \rho_1 \sin \varphi_1 - m_1 g \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - k_c \dot{\phi}_1 \} - \\
& - \frac{1}{J_2 n_2} \{M_2 + \ddot{x}_c m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - \ddot{y}_c m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) - \\
& - \ddot{\phi}(J_2 + m_2 r \rho_2 \cos \varphi_2) - \dot{\phi}^2 m_2 r \rho_2 \sin \varphi_2 - m_2 g \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) - k_c \dot{\phi}_2 \} \Big) + \\
& + \alpha_{13} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_3}{n_1 \quad n_3} \right) \left( \frac{1}{J_1 n_1} \{M_1 + \ddot{x}_c m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \ddot{y}_c m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - \right. \\
& - \ddot{\phi}(J_1 - m_1 r \rho_1 \cos \varphi_1) + \dot{\phi}^2 m_1 r \rho_1 \sin \varphi_1 - m_1 g \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - k_c \dot{\phi}_1 \} - \\
& - \frac{1}{J_3 n_3} \{M_3 + \ddot{x}_c m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3) - \ddot{y}_c m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) - \ddot{\phi} J_3 - \\
& \quad \left. - m_3 g \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) - k_c \dot{\phi}_3 \} \right) + \\
& + \alpha_{23} \left( \frac{\dot{\phi}_2 \pm \dot{\phi}_3}{n_2 \quad n_3} \right) \left( \frac{1}{J_2 n_2} \{M_2 + \ddot{x}_c m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - \ddot{y}_c m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) - \right. \\
& - \ddot{\phi}(J_2 + m_2 r \rho_2 \cos \varphi_2) - \dot{\phi}^2 m_2 r \rho_2 \sin \varphi_2 - m_2 g \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) - k_c \dot{\phi}_2 \} - \\
& - \frac{1}{J_3 n_3} \{M_3 + \ddot{x}_c m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3) - \ddot{y}_c m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) - \ddot{\phi} J_3 - \\
& \quad \left. - m_3 g \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) - k_c \dot{\phi}_3 \} \right). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Частные производные по управляющим моментам  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{Q}}{\partial M_1} &= (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_2}{n_1 \quad n_2} \right) + \frac{\alpha_{13}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_3}{n_1 \quad n_3} \right); \\
\frac{\partial \dot{Q}}{\partial M_2} &= (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_2 \pm \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_2}{n_1 \quad n_2} \right) + \frac{\alpha_{23}}{J_2 n_2} \left( \frac{\dot{\phi}_2 \pm \dot{\phi}_3}{n_2 \quad n_3} \right); \\
\frac{\partial \dot{Q}}{\partial M_3} &= (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_3 \pm \frac{\alpha_{13}}{J_3 n_3} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_3}{n_1 \quad n_3} \right) \pm \frac{\alpha_{23}}{J_3 n_3} \left( \frac{\dot{\phi}_2 \pm \dot{\phi}_3}{n_2 \quad n_3} \right). \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Откуда в соответствии с методом скоростного градиента получаем уравнения для моментов (формула записана как для случая синфазного движения, так и для противофазного):

$$\begin{cases} M_1 = -\gamma_1 \left[ (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \frac{\alpha_{13}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) \right]; \\ M_2 = -\gamma_2 \left[ (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_2 \pm \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \frac{\alpha_{23}}{J_2 n_2} \left( \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) \right]; \\ M_3 = -\gamma_3 \left[ (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_3 \pm \frac{\alpha_{13}}{J_3 n_3} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) \pm \frac{\alpha_{23}}{J_3 n_3} \left( \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) \right]. \end{cases} \quad (3.12)$$

Поскольку выражения для  $H$  (2.14), (2.26) довольно громоздки, их целесообразно редуцировать для упрощения расчета управляющих моментов. Необходимость редуцирования диктуется имеющимися датчиками и возможностями для восстановления других координат, в частности параметров груза, а его правомерность будет исследоваться с помощью компьютерного моделирования. Основанием для такого подхода являются робастные свойства АСГ. Наибольшее затруднение вызывает измерение или оценка с помощью наблюдателей угла поворота платформы  $\varphi$ , который в установившихся режимах незначителен  $|\varphi| \leq 1,8^\circ$ , поэтому возможно упростить выражение для  $H$ , положив  $\varphi = 0$ . Выражение для энергии без учета груза (2.14) в редуцированном алгоритме имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \tilde{T} + \tilde{P} = & 0,5m_0\dot{x}_c^2 + 0,5m_0\dot{y}_c^2 + 0,5J_1\dot{\phi}_1^2 + 0,5J_2\dot{\phi}_2^2 + 0,5J_3\dot{\phi}_3^2 - \\ & - \dot{x}_c\dot{\phi}_1 m_1\rho_1 \sin \varphi_1 - \dot{x}_c\dot{\phi}_2 m_2\rho_2 \sin \varphi_2 - \dot{x}_c\dot{\phi}_3 m_3\rho_3 \sin \varphi_3 + \\ & + \dot{y}_c\dot{\phi}_1 m_1\rho_1 \cos \varphi_1 + \dot{y}_c\dot{\phi}_2 m_2\rho_2 \cos \varphi_2 + \dot{y}_c\dot{\phi}_3 m_3\rho_3 \cos \varphi_3 + \\ & + m_0gy_c + m_1\rho_1 \sin \varphi_1 + m_2\rho_2 \sin \varphi_2 + m_3\rho_3 \sin \varphi_3 + \\ & + c_{01}(x_c^2 + a^2 \cos^2 \varphi) + c_{02}(y_c^2 + a^2 \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Энергия с учетом груза (2.26) в редуцированном алгоритме примет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \tilde{T} + \tilde{P} = & 0,5m_0\dot{x}_c^2 + 0,5m_0\dot{y}_c^2 + 0,5\dot{x}_r^2 m_0 + 0,5\dot{y}_r^2 m_0 + \\ & + 0,5J_1\dot{\phi}_1^2 + 0,5J_2\dot{\phi}_2^2 + 0,5J_3\dot{\phi}_3^2 - \dot{x}_c\dot{\phi}_1 m_1\rho_1 \sin \varphi_1 - \dot{x}_c\dot{\phi}_2 m_2\rho_2 \sin \varphi_2 - \\ & - \dot{x}_c\dot{\phi}_3 m_3\rho_3 \sin \varphi_3 + \dot{y}_c\dot{\phi}_1 m_1\rho_1 \cos \varphi_1 + \dot{y}_c\dot{\phi}_2 m_2\rho_2 \cos \varphi_2 + \\ & + \dot{y}_c\dot{\phi}_3 m_3\rho_3 \cos \varphi_3 + m_0gy_c + m_r gy_r + m_1\rho_1 \sin \varphi_1 + m_2\rho_2 \sin \varphi_2 + \\ & + m_3\rho_3 \sin \varphi_3 + c_{01}(x_c^2 + a^2) + c_{02}y_c^2 + 0,5c_{11}(x_c - x_r)^2 + 0,5c_{12}(y_c - y_r)^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Произведем те же действия, что и для нередуцированного алгоритма:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{M}_1 &= -\gamma_1 \left[ (1-\alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \frac{\alpha_{13}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) \right]; \\ \tilde{M}_2 &= -\gamma_2 \left[ (1-\alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_2 \pm \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \frac{\alpha_{23}}{J_2 n_2} \left( \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) \right]; \\ \tilde{M}_3 &= -\gamma_3 \left[ (1-\alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_3 \pm \frac{\alpha_{13}}{J_3 n_3} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) \pm \frac{\alpha_{23}}{J_3 n_3} \left( \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) \right]. \end{aligned} \right. \quad (3.15)$$

При  $\delta = 0$  и  $\beta \neq 0$  в (3.4) для (1.12) получим пропорционально-интегральный (ПИ-) алгоритм управления кратной взаимной синхронизацией, имеющий большее быстродействие в переходных режимах:

$$\begin{aligned} M_s &= -\gamma_s \left\{ (1-\alpha) \left[ (H - H^*)\dot{\phi}_s + \int (H - H^*)\dot{\phi}_s dt \right] \pm \right. \\ &\left. \pm \sum_r \frac{\alpha_{s,r}}{J_s n_s} \left[ (\dot{\phi}_s/n_s \pm \dot{\phi}_r/n_r) \pm (\varphi_s/n_s \pm \varphi_r/n_r + C_s) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для упрощения ПИ-алгоритма пренебрежем интегралами от первых членов в правых частях. Как показало моделирование, по окончании переходного процесса в синхронном режиме величины этих интегралов пренебрежимо малы. Тогда ПИ-алгоритмы для трехроторной ВУ имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned} M_1 &= -\gamma_1 \left\{ (1-\alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \left( \frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_2}{n_2} \right) \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\alpha_{13}}{J_1 n_1} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) + \left( \frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_3}{n_3} \right) \right] \right\}; \\ M_2 &= -\gamma_2 \left\{ (1-\alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_2 \pm \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \left( \frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_2}{n_2} \right) \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\alpha_{23}}{J_2 n_2} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) + \left( \frac{\varphi_2}{n_2} \pm \frac{\varphi_3}{n_3} \right) \right] \right\}; \\ M_3 &= -\gamma_3 \left\{ (1-\alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_3 \pm \frac{\alpha_{13}}{J_3 n_3} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) + \left( \frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_3}{n_3} \right) \right] \pm \right. \\ &\left. \pm \frac{\alpha_{23}}{J_3 n_3} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) + \left( \frac{\varphi_2}{n_2} \pm \frac{\varphi_3}{n_3} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (3.17)$$

Аналогично для случая редуцированной энергии:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{M}_1 &= -\gamma_1 \left\{ (1-\alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_2}{n_1} \right) + \left( \frac{\phi_1 \pm \phi_2}{n_2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_{13}}{J_1 n_1} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_3}{n_1} \right) + \left( \frac{\phi_1 \pm \phi_3}{n_3} \right) \right] \right\}; \\ \tilde{M}_2 &= -\gamma_2 \left\{ (1-\alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_2 \pm \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_2}{n_1} \right) + \left( \frac{\phi_1 \pm \phi_2}{n_2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_{23}}{J_2 n_2} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_2 \pm \dot{\phi}_3}{n_2} \right) + \left( \frac{\phi_2 \pm \phi_3}{n_3} \right) \right] \right\}; \\ \tilde{M}_3 &= -\gamma_3 \left\{ (1-\alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_3 \pm \frac{\alpha_{13}}{J_3 n_3} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_3}{n_1} \right) + \left( \frac{\phi_1 \pm \phi_3}{n_3} \right) \right] \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\alpha_{23}}{J_3 n_3} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_2 \pm \dot{\phi}_3}{n_2} \right) + \left( \frac{\phi_2 \pm \phi_3}{n_3} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (3.18)$$

### 3.1.2. Синтез алгоритма кратной синхронизации с одним ведущим ротором для трехроторной ВУ

При управлении синхронизацией можно выделить один из вибровозбудителей в качестве ведущего, а остальные – в качестве ведомых. Такой подход приводит к более простым выражениям для управляющих сигналов, чем в случае взаимной синхронизации. Выберем первый ротор в качестве ведущего, а второй и третий – в качестве ведомых, и запишем целевую функцию (1.12) для этого случая:

$$Q(z) = 0,5 \left\{ (1-\alpha)(H - H^*)^2 + \alpha_{12} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_2}{n_1} \right)^2 + \alpha_{13} \left( \frac{\dot{\phi}_1 \pm \dot{\phi}_3}{n_1} \right)^2 \right\}, \quad (3.19)$$

где  $z = [x_c, \dot{x}_c, y_c, \dot{y}_c, \phi, \dot{\phi}, \phi_1, \dot{\phi}_1, \phi_2, \dot{\phi}_2, \phi_3, \dot{\phi}_3]^T$ .

При достижении цели управления (1.5)  $Q(z) = 0$  получим  $H = H^*$  и равенство кратных скоростей  $\frac{\dot{\phi}_1}{n_1} = \mp \frac{\dot{\phi}_2}{n_2}$ ;  $\frac{\dot{\phi}_1}{n_1} = \mp \frac{\dot{\phi}_3}{n_3}$ .

Выведем скорость изменения целевой функции (3.19) вдоль траекторий объекта управления (трехроторной ВУ) в предположении, что система консервативна ( $k_c = 0$ ;  $\beta = 0$ ):

$$\begin{aligned} \dot{Q}(z) = & (1 - \alpha)[(H - H^*)\dot{H}] + \alpha_{12} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 & \ddot{\phi}_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} + \\ & + \alpha_{13} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_3 \\ n_1 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 & \ddot{\phi}_3 \\ n_1 & n_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где как и в 3.1.1 производная  $\dot{H} = \dot{\phi}_1 M_1 + \dot{\phi}_2 M_2 + \dot{\phi}_3 M_3$ .

Таким образом:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(z) = & (1 - \alpha)(H - H^*)(\dot{\phi}_1 M_1 + \dot{\phi}_2 M_2 + \dot{\phi}_3 M_3) + \\ & + \alpha_{12} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 & \ddot{\phi}_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} + \alpha_{13} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_3 \\ n_1 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 & \ddot{\phi}_3 \\ n_1 & n_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(z) = & (1 - \alpha)(H - H^*)(\dot{\phi}_1 M_1 + \dot{\phi}_2 M_2 + \dot{\phi}_3 M_3) + \\ & + \alpha_{12} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{J_1 n_1} \{M_1 + \ddot{x}_c m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \ddot{y}_c m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - \\ - \ddot{\phi}(J_1 - m_1 r \rho_1 \cos \varphi_1) + \dot{\phi}^2 m_1 r \rho_1 \sin \varphi_1 - m_1 g \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1)\} \pm \\ \pm \frac{1}{J_2 n_2} \{M_2 + \ddot{x}_c m_2 \rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2) - \ddot{y}_c m_2 \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2) - \ddot{\phi}(J_2 + \\ + m_2 r \rho_2 \cos \varphi_2) - \dot{\phi}^2 m_2 r \rho_2 \sin \varphi_2 - m_2 g \rho_2 \cos(\varphi + \varphi_2)\} \} + \\ & + \alpha_{13} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_3 \\ n_1 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{J_1 n_1} \{M_1 + \ddot{x}_c m_1 \rho_1 \sin(\varphi + \varphi_1) - \ddot{y}_c m_1 \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - \\ - \ddot{\phi}(J_1 - m_1 r \rho_1 \cos \varphi_1) + \dot{\phi}^2 m_1 r \rho_1 \sin \varphi_1 - m_1 g \rho_1 \cos(\varphi + \varphi_1)\} \pm \\ \pm \frac{1}{J_3 n_3} \{M_3 + \ddot{x}_c m_3 \rho_3 \sin(\varphi + \varphi_3) - \ddot{y}_c m_3 \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3) - \ddot{\phi} J_3 - \\ - m_3 g \rho_3 \cos(\varphi + \varphi_3)\} \}. \end{aligned}$$

Частные производные по управляющим моментам  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ :



$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{Q}}{\partial M_1} &= (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \frac{\alpha_{13}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right); \\ \frac{\partial \dot{Q}}{\partial M_2} &= (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_2 + \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right); \\ \frac{\partial \dot{Q}}{\partial M_3} &= (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_3 + \frac{\alpha_{13}}{J_3 n_3} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right).\end{aligned}$$

Откуда получаем уравнения для моментов:

$$\begin{cases} M_1 = -\gamma_1 \left\{ (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \frac{\alpha_{13}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) \right\}; \\ M_2 = -\gamma_2 \left\{ (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_2 + \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) \right\}; \\ M_3 = -\gamma_3 \left\{ (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_3 + \frac{\alpha_{13}}{J_3 n_3} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) \right\}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Редуцированный алгоритм кратной синхронизации с одним ведущим ротором имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{M}_1 = -\gamma_1 \left\{ (1 - \alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \frac{\alpha_{13}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) \right\}; \\ \tilde{M}_2 = -\gamma_2 \left\{ (1 - \alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_2 + \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) \right\}; \\ \tilde{M}_3 = -\gamma_3 \left\{ (1 - \alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_3 + \frac{\alpha_{13}}{J_3 n_3} \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) \right\}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Для повышения быстродействия целесообразно ввести пропорциональные составляющие, зависящие от приведенных разностей фаз роторов. Окончательно выражения для управляющих моментов алгоритма с одним ведущим ротором для трехроторной ВУ будут следующими:

$$\left\{ \begin{aligned} M_1 &= -\gamma_1 \left\{ (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \left( \frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_2}{n_2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha_{13}}{J_1 n_1} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) + \left( \frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_3}{n_3} \right) \right] \right\}; \\ M_2 &= -\gamma_2 \left\{ (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_2 + \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \left( \frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_2}{n_2} \right) \right] \right\}; \\ M_3 &= -\gamma_3 \left\{ (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\phi}_3 + \frac{\alpha_{13}}{J_3 n_3} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) + \left( \frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_3}{n_3} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (3.22)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{M}_1 &= -\gamma_1 \left\{ (1 - \alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \left( \frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_2}{n_2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha_{13}}{J_1 n_1} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) + \left( \frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_3}{n_3} \right) \right] \right\}; \\ \tilde{M}_2 &= -\gamma_2 \left\{ (1 - \alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_2 + \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \left( \frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_2}{n_2} \right) \right] \right\}; \\ \tilde{M}_3 &= -\gamma_3 \left\{ (1 - \alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_3 + \frac{\alpha_{13}}{J_3 n_3} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_3}{n_3} \right) + \left( \frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_3}{n_3} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (3.23)$$

### 3.1.3. Синтез алгоритмов кратной синхронизации для двухроторной ВУ

Из предыдущих разделов 3.1.1 и 3.1.2 очевидно, что для двухроторного вибрационного стенда П- и ПИ-алгоритмы управления синхронизацией выводятся аналогично. Представим П-алгоритм сразу в редуцированном виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{M}_1 &= -\gamma_1 \left\{ (1 - \alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} (\dot{\phi}_1/n_1 \pm \dot{\phi}_2/n_2) \right\}; \\ \tilde{M}_2 &= -\gamma_2 \left\{ (1 - \alpha)(\tilde{H} - H^*)\dot{\phi}_2 \pm \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} (\dot{\phi}_1/n_1 \pm \dot{\phi}_2/n_2) \right\}. \end{aligned} \right. \quad (3.24)$$

ПИ-алгоритм запишется в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} M_1 &= -\gamma_1 \left\{ (1 - \alpha_{12}) \left[ (H - H^*) \dot{\phi}_1 + \int (H - H^*) \dot{\phi}_1 dt \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \left( \frac{\phi_1}{n_1} \pm \frac{\phi_2}{n_2} + C_1 \right) \right] \right\}; \\ M_2 &= -\gamma_2 \left\{ (1 - \alpha_{12}) \left[ (H - H^*) \dot{\phi}_2 + \int (H - H^*) \dot{\phi}_2 dt \right] \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) \pm \left( \frac{\phi_1}{n_1} \pm \frac{\phi_2}{n_2} + C_2 \right) \right] \right\}; \end{aligned} \right. \quad (3.25)$$

Дополнительное слагаемое  $\left( \frac{\phi_1}{n_1} \pm \frac{\phi_2}{n_2} + C_1 \right)$  можно рассматривать как интеграл от  $(\dot{\phi}_1/n_1 \pm \dot{\phi}_2/n_2)$ , где  $C = \Delta\phi_{изад}$ , причем  $\Delta\phi_{изад}$  позволяет влиять на установившееся значение приведенного сдвига фаз  $\Delta\phi(\infty)$  и, в конечном итоге, на параметры траектории платформы. Чтобы упростить ПИ-алгоритм, по аналогии с (3.17) пренебрежем интегралами от первых членов в правых частях. Тогда окончательный ПИ-алгоритм для двухроторной ВУ примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} M_1 &= -\gamma_1 \left\{ (1 - \alpha_{12})(H - H^*) \dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \left( \frac{\phi_1}{n_1} \pm \frac{\phi_2}{n_2} + \Delta\phi_{1зад} \right) \right] \right\}; \\ M_2 &= -\gamma_2 \left\{ (1 - \alpha_{12})(H - H^*) \dot{\phi}_2 \pm \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \left( \frac{\phi_1}{n_1} \pm \frac{\phi_2}{n_2} + \Delta\phi_{2зад} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (3.26)$$

Редуцированный ПИ-алгоритм для двухроторной ВУ примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{M}_1 &= -\gamma_1 \left\{ (1 - \alpha_{12})(\tilde{H} - H^*) \dot{\phi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \left( \frac{\phi_1}{n_1} \pm \frac{\phi_2}{n_2} + \Delta\phi_{1зад} \right) \right] \right\}; \\ \tilde{M}_2 &= -\gamma_2 \left\{ (1 - \alpha_{12})(\tilde{H} - H^*) \dot{\phi}_2 \pm \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left[ \left( \frac{\dot{\phi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\phi}_2}{n_2} \right) + \left( \frac{\phi_1}{n_1} \pm \frac{\phi_2}{n_2} + \Delta\phi_{2зад} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (3.27)$$

### 3.2. Синтез алгоритмов управления пуском и прохождением резонансной зоны

В данном разделе рассматривается управление скоростями роторов на этапе пуска и разгона с помощью алгоритмов, основанных на методе скоростного градиента А. Л. Фрадкова [49, 54].

Наличие в ВУ полумедленных движений внутреннего маятника позволяет использовать для прохождения резонансной частоты так называемую раскачку, которая также эффективна в алгоритмах управления пуском вибровозбудителей. Алгоритмы раскачки позволяют уменьшить колебания, вызывающие повышенную диссипацию энергии в ВУ, и снизить нагрузку на приводы роторов.

Для работы ВУ во всем диапазоне скоростей вращения роторов используется модификация алгоритма управления, предложенного в [4], который работает до достижения системой уровня энергии  $H^*$ , а затем отключается и роторы продолжают вращаться управляющим сигналом, постоянным или меняющимся по другому алгоритму, например, одному из представленных ранее (3.26), (3.27):

$$u_i = \begin{cases} \gamma, & \text{if } \gamma_1 = 1 \quad \& \quad H^* - H > 0; \\ \gamma, & \text{if } \gamma_1 = 0 \quad \& \quad \dot{\phi}_i(t) - \psi_i(t) > 0; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (3.28)$$

$$T_\psi \dot{\psi}_i = -\psi_i + \dot{\phi}_i, \quad \gamma_1 = \max_{0 \leq \tau \leq t} \text{sgn}(H(x(\tau)) - H^*); \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $u_i$  – управляющий сигнал;  $\gamma$  – величина управляющего сигнала;  $\dot{\phi}_i$  – угловая скорость вращения  $i$ -го ротора;  $\psi$  – угловая скорость ротора, сглаженная апериодическим фильтром;  $T_\psi$  – постоянная времени фильтра,  $i$  – номер ротора,  $i = 1, \dots, n$ ;  $\gamma_1$  – функция-флаг. В данном случае неуравновешенные роторы продолжают вращаться постоянным моментом той же величины  $\gamma$ , что использовалась при раскачке. В работе предлагается модификация алгоритма, заключающаяся в использовании переменной

уставки по энергии  $H^* = H^*(t)$  и обеспечивающая возможность попадания в различные области фазового пространства сложной системы.

Отметим, что если часть вектора состояния не измеряется датчиками, установленными на стенде, в алгоритме (3.27) может использоваться редуцированное выражение для вычисления энергии  $\tilde{H}$ , по аналогии с разделом 3.1:

$$u_i = \begin{cases} \gamma, & \text{if } \gamma_1 = 1 \quad \& \quad H^* - \tilde{H} > 0; \\ \gamma, & \text{if } \gamma_1 = 0 \quad \& \quad \dot{\phi}_i(t) - \psi_i(t) > 0; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (3.29)$$

$$T_\psi \dot{\psi}_i = -\psi_i + \dot{\phi}_i, \quad \gamma_1 = \max_{0 \leq \tau \leq t} \text{sgn}(\tilde{H}(x(\tau)) - H^*); \quad i = 1, \dots, n.$$

### 3.3. Нестационарный наблюдатель для восстановления скорости колебаний по вертикальной оси

Алгоритмы управления, описанные в этой главе, могут быть реализованы при работе с полным вектором состояния установки, когда все его переменные измеряются. Однако на практике часто трудно, дорого или невозможно установить дополнительные датчики для получения всей информации о состоянии объекта управления, также могут возникать сложности из-за необходимости введения дифференциаторов высоких порядков. Данные проблемы решаются с помощью наблюдателей (идентификаторов состояния) [55, 56].

Наблюдатели применяются для косвенной оценки переменных состояния малодоступных или недоступных для измерения, строятся на базе математической модели объекта управления и встраиваются в регулятор [57]. На вход наблюдателя дублируются входные сигналы объекта управления, а также подаются выходы объекта, измеряемые датчиками. Выходные сигналы наблюдателя – это оценки переменных состояния объекта, всех или только неизмеряемых. Математическая модель наблюдателя строится таким

образом, чтобы его оценки стремились к соответствующим переменным состояниям объекта.

В данном разделе синтезируется линейный нестационарный наблюдатель полного порядка для восстановления скорости вертикальных колебаний платформы. Исследование адекватности синтезируемого наблюдателя с помощью компьютерного моделирования приведено в разделе 4.4.

Изначально наблюдатель создавался для модели однороторной ВУ, совершающей колебания только по вертикальной оси, кинематическая схема которой представлена на рис. 3.1. Данная модель может быть получена из более сложной модели однороторной ВУ (2.3), совершающей колебания в вертикальной плоскости, в случае, когда горизонтальное отклонение платформы  $\varphi$  демпфируется большой поперечной жесткостью пружин-виброизоляторов  $c_{01}$  и этим отклонением можно пренебречь. Исследования, проведенные в разделе 4.4, показали возможность использования наблюдателя с более сложными моделями и установками.

Обозначения на рис. 3.1 аналогичны таковым на рис. 2.1, их описание приведено в разделе 2.2.

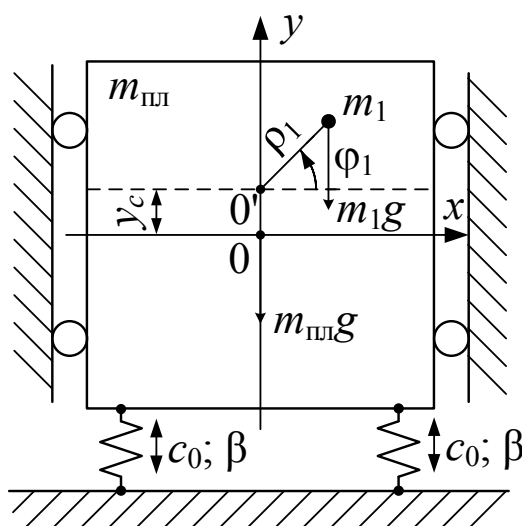


Рис. 3.1. Кинематическая схема однороторной ВУ, совершающая колебания по вертикальной оси (вид спереди)

Вектор состояния ВУ на рис. 3.1  $q = [y_c, \dot{y}_c, \varphi_1, \dot{\varphi}_1]^T$ . Полная механическая энергия системы:

$$H = 0,5m_0\dot{y}_c^2 + 0,5J\dot{\varphi}_1^2 + m_1\rho\dot{y}_c\dot{\varphi}_1\cos\varphi + m_0gy_c + mgr\sin\varphi + c_0y_c^2. \quad (3.30)$$

ВУ на рис. 3.1 имеет две степени свободы: вертикальные колебания платформы и вращение ротора, соответственно система, описывающая ее динамику, будет состоять из двух уравнений:

$$\begin{cases} m_0\ddot{y}_c + \ddot{\varphi}_1m_1\rho_1\cos\varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2m_1\rho_1\sin\varphi_1 + m_0g + 2c_0y_c + \beta\dot{y}_c = 0; \\ m_1\rho_1\cos\varphi_1\ddot{y}_c + J_1\ddot{\varphi}_1 + m_1g\rho_1\cos\varphi + k_c\dot{\varphi}_1 = M_1. \end{cases} \quad (3.31)$$

Полная механическая энергия системы (3.30), которая будет использоваться при расчете управляющих воздействий в алгоритмах, содержит все переменные вектора состояния  $q$ : положение платформы  $y_c$  и скорость ее колебаний по вертикали  $\dot{y}_c$ , угол поворота ротора  $\varphi_1$  и его угловую скорость  $\dot{\varphi}_1$ . Датчик-энкодер ротора измеряет  $\varphi_1$  и  $\dot{\varphi}_1$ , индуктивный датчик положения платформы измеряет только  $y_c$ .  $\dot{y}_c$  не измеряется и для ее восстановления в регулятор вводится нестационарный наблюдатель.

Для синтеза наблюдателя перепишем первое уравнение системы (3.31), оставив все слагаемые, относящиеся к вертикальным колебаниям платформы в левой части, а все остальные переместив вправо и заменив их на  $F(t)$ :

$$m_0\ddot{y}_c + \beta\dot{y}_c + 2c_0y_c = F(t), \quad (3.32)$$

где

$$F(t) = -\ddot{\varphi}_1m_1\rho_1\cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2m_1\rho_1\sin\varphi_1 - m_0g. \quad (3.33)$$

Формула  $F(t)$  (3.33) содержит не измеряемую переменную  $\ddot{\varphi}_1$ . Необходимо получить выражение, зависящее только от измеряемых величин. Разрешим систему (3.31) относительно старших производных.

$$\ddot{y}_c = \frac{-J_1(2c_0 y_c + \beta \dot{y}_c - \dot{\phi}^2 m_1 \rho_1 \sin \varphi_1 + m_0 g)}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} - \frac{m_1 \rho_1 \cos \varphi_1 (M_1 - m_1 g \rho_1 \cos \varphi_1 - k_c \dot{\phi}_1)}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1},$$

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{m_0 (M_1 - m_1 g \rho_1 \cos \varphi_1 - k_c \dot{\phi}_1)}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} - \frac{m_1 \rho_1 \cos \varphi_1 (-2c_0 y_c - \beta \dot{y}_c + \dot{\phi}_1^2 m_1 \rho_1 \sin \varphi_1 - m_0 g)}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1}.$$

Подставим полученное выражение для  $\ddot{\phi}_1$  в (3.33):

$$F(t) = \frac{-m_1 \rho_1 \cos \varphi_1 [m_0 (M_1 - m_1 g \rho_1 \cos \varphi_1 - k_c \dot{\phi}_1)]}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} - m_0 g + \frac{m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1 (-2c_0 y_c - \beta \dot{y}_c + \dot{\phi}_1^2 m_1 \rho_1 \sin \varphi_1 - m_0 g)}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} + \dot{\phi}_1^2 m_1 \rho_1 \sin \varphi_1.$$

Перенесем слагаемое  $\left( -\frac{\beta m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} \right) \dot{y}_c$  в левую часть

уравнения (3.32):

$$m_0 \ddot{y}_c + \beta \left( 1 + \frac{m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} \right) \dot{y}_c + 2c_0 y_c = F_1(t), \quad (3.34)$$

где

$$F_1(t) = \frac{-m_1 \rho_1 \cos \varphi_1 [m_0 (M_1 - m_1 g \rho_1 \cos \varphi_1 - k_c \dot{\phi}_1)]}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} - m_0 g + \frac{m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1 (-2c_0 y_c + \dot{\phi}_1^2 m_1 \rho_1 \sin \varphi_1 - m_0 g)}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} + \dot{\phi}_1^2 m_1 \rho_1 \sin \varphi_1.$$

Таким образом мы получили выражение (3.34), зависящее только от измеряемых переменных ( $y_c$ ,  $\varphi$ ,  $\dot{\phi}$ ).

Введем коэффициент  $\beta_1(t)$

$$\beta_1(t) = \beta \left( 1 + \frac{m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} \right) = \beta \left( \frac{m_0 J_1}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} \right) > 0. \quad (3.35)$$



Очевидно, что  $\beta_1(t)$  будет минимальным при  $\cos \varphi = 0$ :  $\min \beta_1 = \beta$ , и при существующих значениях массо-инерционных параметров ВУ СВ-1 коэффициент  $\beta_1(t)$  всегда положителен.

Уравнение (3.34) с учетом (3.35) примет вид:

$$m_0 \ddot{y}_c + \beta_1(t) \dot{y}_c + 2c_0 y_c = F_1(t). \quad (3.36)$$

Перейдем от дифференциального уравнения второго порядка (3.36) к уравнениям состояния, обозначив  $x_1 = y_c$ ;  $x_2 = \dot{y}_c$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = -\beta_1(t)x_2(t) - 2c_0x_1(t) + F_2(t) \end{cases}$$

и затем к векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2c'_0 & -\beta_0(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_2(t) \end{pmatrix},$$

где  $\beta_0(t) = \beta_1(t)/m_0$ ;  $c'_0 = c_0/m_0$ ;  $F_2(t) = F_1(t)/m_0$ .

Окончательные уравнения для нестационарного наблюдателя полного порядка запишутся в виде:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + k_1(x_1(t) - \hat{x}_1(t)); \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = -\beta_0(t)\hat{x}_2(t) - 2c'_0\hat{x}_1(t) + F_2(t) + k_2(x_1(t) - \hat{x}_1(t)). \end{cases} \quad (3.37)$$

Дифференциальные уравнения ошибок наблюдения  $e_{н1}(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ ,  $e_{н2}(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{н1}(t) &= x_2(t) - \hat{x}_2(t) - k_1(x_1(t) - \hat{x}_1(t)) = e_{н2}(t) - k_1 e_{н1}(t); \\ \dot{e}_{н2}(t) &= \dot{x}_2(t) - \dot{\hat{x}}_2(t) = -\beta_0(t)x_2(t) - 2c'_0x_1(t) + F_2(t) + \beta_0(t)\hat{x}_2(t) + 2c'_0\hat{x}_1(t) - \\ &\quad - F_2(t) - k_2(x_1(t) - \hat{x}_1(t)) = -(2c'_0 + k_2)e_{н1}(t) - \beta_0(t)e_{н2}(t). \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{н1}(t) \\ \dot{e}_{н2}(t) \end{pmatrix} = A_H(t) \cdot \begin{pmatrix} e_{н1}(t) \\ e_{н2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -(2c'_0 + k_2) & -\beta_0(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{н1}(t) \\ e_{н2}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Переходный процесс ошибок наблюдения описывается матрицей  $A_M(t)$

$$A_{\text{н}}(t) = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -(2c'_0 + k_2) & -\beta_0(t) \end{pmatrix}.$$

Сходимость системы определяется согласно критерию устойчивости Демидовича [58] собственными значениями симметризованной матрицы, а именно:

$$A_{\text{н}}(t) + A_{\text{н}}^T(t) = \begin{pmatrix} -2k_1 & 1 - (2c'_0 + k_2) \\ 1 - (2c'_0 + k_2) & -2\beta_0(t) \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Характеристический полином матрицы (3.37)

$$D(p) = p^2 + 2(k_1 + \beta_0(t))p + 4k_1\beta_0(t) - [1 - (2c'_0 + k_2)]^2 \quad (3.40)$$

и дискриминант квадратичного уравнения

$$[2(k_1 + \beta_0(t))]^2 - 4[4k_1\beta_0(t) - (1 - 2c'_0 - k_2)] = 4(k_1 - \beta_0(t))^2 + 4(k_2 + 2c'_0 - 1)^2 > 0.$$

Уравнение (3.40) имеет два вещественных корня, которые можно сделать отрицательными, правильно выбрав коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$ .

$$\lambda_{1,2} = -(k_1 + \beta_0(t)) \pm \sqrt{(k_1 - \beta_0(t))^2 + (k_2 + 2c'_0 - 1)^2}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{m_0} \left( 1 - \frac{m_1 \rho_1}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2} \right) \beta < \beta_0(t) < \frac{1}{m_0} \left( 1 + \frac{m_1 \rho_1}{m_0 J_1 - m_1^2 \rho_1^2} \right) \beta,$$

корни отрицательны и равно отделены от нуля. Следовательно, по критерию Демидовича, ошибки наблюдения сходятся к нулю.

$$\begin{aligned} \det(pI_2 - A_{\text{н}}) &= \det \left( \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -(2c'_0 + k_2) & -\beta_0(t) \end{pmatrix} \right) = \\ &= p^2 + (k_1 + \beta_0(t))p + (k_1\beta_0(t) + 2c'_0 + k_2). \end{aligned}$$

Учитывая, что для СВ-1 коэффициент  $0 < \beta_0(t) < 2$ , с помощью выбора  $k_1$  и  $k_2$  можно обеспечить заданный набор собственных чисел матрицы  $A_{\text{н}}$  и, тем самым, заданное быстродействие системы оценивания. В процессе моделирования было эмпирически установлено, что быстродействие наблюдателя должно превосходить быстродействие объекта наблюдения таким образом чтобы время переходного процесса наблюдателя  $t_{\text{пп}} \geq 3/\eta$ , где

$\eta = \min_i |\operatorname{Re} \lambda_i|$ , то есть  $\eta$  – минимальная величина вещественной части корня характеристического уравнения объекта наблюдения.

### **Выводы по главе 3**

1. Разработаны алгоритмы пуска и прохождения через резонансную зону, использующие величину полной механической энергии системы, а также упрощенную (редуцированную) энергию системы.

2. Разработан наблюдатель для скорости вертикальных перемещений платформы, позволяющий реализовать разработанные алгоритмы управления. Получены условия на выбор его параметров, обеспечивающие устойчивость и заданное быстродействие системы оценивания.

3. Синтезированы два типа интегро-дифференцирующих алгоритмов управления синхронизацией, в том числе кратной синхронизацией  $n$  роторов ( $n \geq 3$ ): алгоритм взаимной синхронизации и алгоритм с одним ведущим ротором. Предложены их модификации, использующие редуцированное выражение полной энергии, что упрощает практическую реализацию системы управления МВУ.

## **ГЛАВА 4. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНТЕЗИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ МВУ И АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ИХ РАБОЧИМИ РЕЖИМАМИ**

Моделирование и исследование работы моделей, полученных в Главе 2, и алгоритмов, синтезированных в Главе 3, осуществлялось в программной среде MATLAB (MATLAB Simulink).

Далее для записи модели в MATLAB составляются основная программа и подпрограмма. В основной программе задаются начальные значения переменных, а также указываются константы, выражающие параметры вибростенда (модели), формируется вектор начальных условий. Затем определяются параметры и формы вывода информации на экран компьютера во время счета. Производится организация цикла, в котором происходит обращение к подпрограмме, где заложены дифференциальные уравнения динамики вибростенда, которые мы получили с помощью вспомогательной программы `prav_chasti`. Потом реализуется расчет управляющих воздействий на приводы вибростенда по алгоритмам, которые будут рассмотрены далее. Таким образом, формируется новый вектор состояния системы, и расчет циклически повторяется до тех пор, пока не будет просчитано поведение системы на всем интересующем интервале времени.

Для моделирования может быть использован ряд явных и неявных методов численного интегрирования (Эйлера, Рунге–Кутты и т. д.). В нашем случае вычисления производятся по методу Рунге–Кутты 4-го – 5-го порядков с помощью функции `ode45`, которая служит для вызова подпрограммы. При работе в MATLAB Simulink использовался метод интегрирования Дорманда–Принца 4-го – 5-го порядков с переменным шагом интегрирования, как самый точный из доступных.

В программе для двухроторной ВУ используются следующие идентификаторы:

$J, J_1, J_2$  – моменты инерции платформы и роторов;  
 $M_{pd}$  – масса платформы;  
 $m_1, m_2$  – массы роторов;  
 $m_0$  – масса виброустановки ( $m_0 = M_{pd} + m_1 + m_2$ );  
 $\rho_{h1}, \rho_{h2}$  – эксцентриситеты роторов;  
 $k_c$  – коэффициент вязкого трения в подшипниках;  
 $U_1, U_2$  – управляющие электромеханические моменты двигателей;  
 $g$  – ускорение свободного падения;  
 $\beta$  – коэффициент демпфирования пружин;  
 $c_1, c_2$  – коэффициенты жесткости виброизоляторов платформы;  
 $c_{11}, c_{12}$  – коэффициенты жесткости пружин груза;  
 $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$  – коэффициенты алгоритмов управления;  
 $H, H_G$  – текущее и желаемое значение полной механической энергии системы;  
 $t_0, t_{fin}$  – начальное и конечное время интегрирования управлений станда;  
 $t_s$  – время синхронизации;  
 $r$  – расстояние от места крепления пружин до центра масс платформы (начала координат) по оси абсцисс;  
 $\delta$  – определитель;  
 $\delta\phi$  – заданный приведенный сдвиг фаз;  
 $n_1, n_2$  – задаваемые кратности угловых скоростей роторов;  
 $\phi_{h1}, \phi_{h2}$  – начальные положения роторов;  
 Моделирование проводилось при следующих значениях параметров модели динамики механической системы:

- моменты инерции:  $J_1 = J_2 = J_3 = 0.014 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, J = 0.3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;
- масса платформы:  $m_{pd} = 9 \text{ кг}$ ;
- жесткость пружин по горизонтали и вертикали:  $c_1 = c_2 = 5300 \text{ Н/м}$ ;
- коэффициент вязкого трения в подшипниках:  $k_c = 0.01 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$ ;

- коэффициент демпфирования пружин:  $\beta=5$  кг/с;
- эксцентриситет дебаланса:  $\rho=0.04$  м;
- расстояние от места крепления пружин до центра платформы по оси абсцисс:  $r=0.2$  м.

заданная энергия:  $H^*=var.$

#### **4.1. Исследование алгоритмов синхронизации для двухроторных ВУ**

##### **4.1.1. Исследование алгоритма кратной синхронизации, позволяющего регулировать сдвиги фаз роторов**

В предыдущих работах [59, 60] по управлению синхронными режимами для двухроторных ВУ алгоритм управления содержал лишь слагаемые соответствующие кратной разности скоростей роторов. Алгоритм (3.27), предлагаемый в данной работе, содержит в уравнениях для управляющих моментов дополнительные слагаемые с разностями фаз роторов. Это дает дополнительные возможности по обеспечению заданных характеристик вибрационного поля.

В данном разделе исследуется динамика модели двухроторной ВУ (2.17) и под управлением алгоритма (3.24). Массы роторов в (2.17) задавались идентичными и неидентичными по массе. Результаты моделирования (2.17) при одинаковых массах роторов  $m_1 = m_2 = 1,5$  кг представлены на рис. 4.1 и рис. 4.2, синхронизация роторов – однократная ( $n_1 = n_2 = 1$ ).

На рисунках 4.1 и 4.2 изображены а) графики изменения разности фаз  $\Delta\varphi_{iзад} = \varphi_1 - \varphi_2$ ; б) диаграммы плоского поля колебаний платформы, построенные по результатам моделирования для десяти различных точек платформы. Третья точка расположена в центре масс платформы, расстояние между соседними точками по вертикали составляет 0,15 м, по горизонтали – 0,1 м.

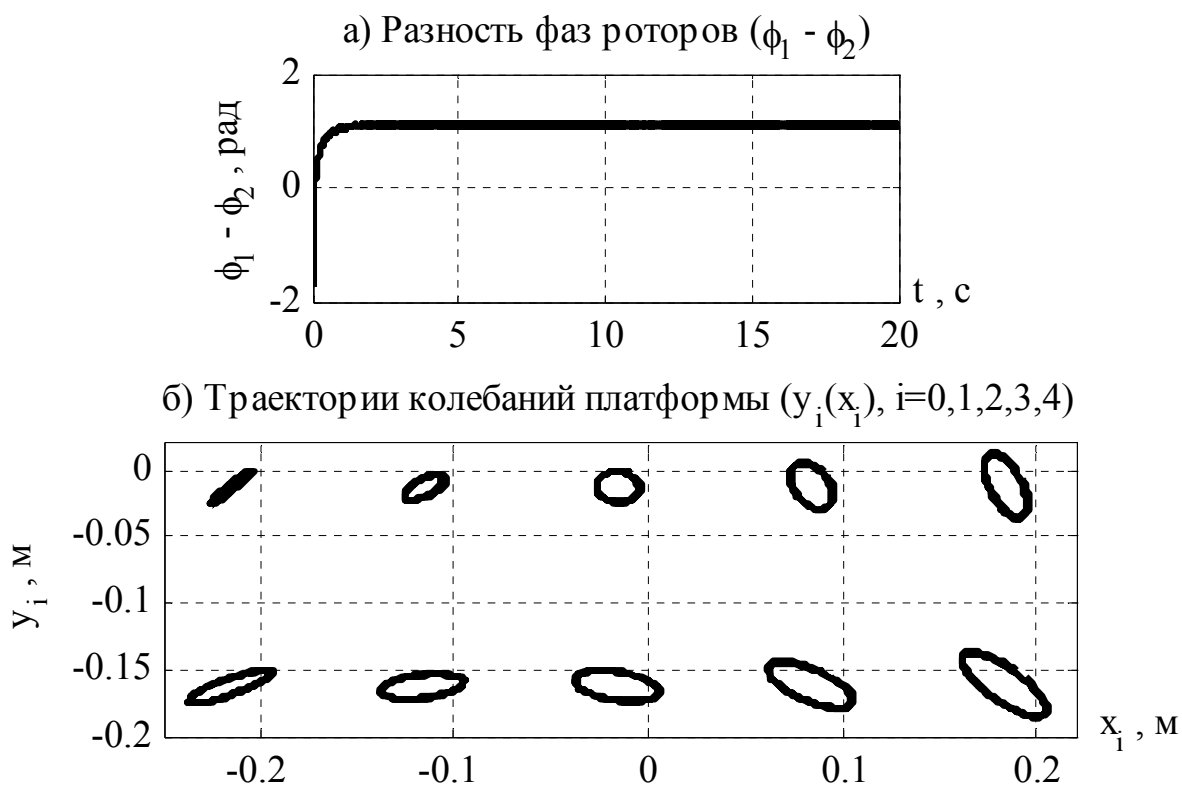


Рис. 4.1. Результаты моделирования при  $\Delta\phi_{\text{зад}} = 1,1$  рад

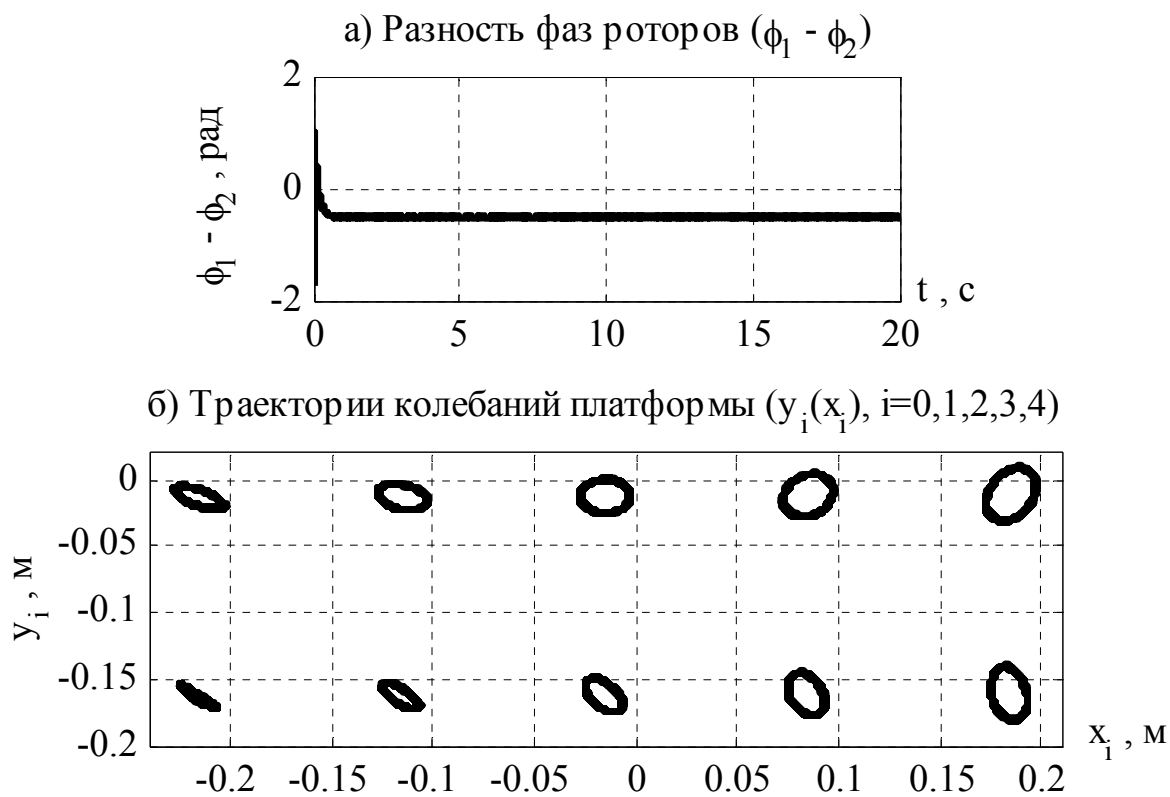


Рис. 4.2. Результаты моделирования при  $\Delta\phi_{\text{зад}} = -0,52$  рад

Левая траектория соответствует загрузочному концу платформы, правая траектория – разгрузочному. Как видно из графиков, в системе имеет место координатная синхронизация, поскольку  $\Delta\varphi_{i\text{зад}}(\infty)$  стремится к постоянной величине, а поле вибраций является неоднородным, что важно при вибротранспортировании. Диаграмма на рис. 4.1,б получена для  $\Delta\varphi_{1\text{зад}} = 1,1$  рад, а на рис. 4.2,б – для  $\Delta\varphi_{2\text{зад}} = -0,52$  рад.

Численные характеристики для эллиптических траекторий разгрузочного конца платформы (крайние правые траектории), указаны в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Характеристики эллиптических траекторий разгрузочного конца платформы

Опыт		Характеристики вибрационного поля			
		$a, \times 10^{-3}$ м	$b, \times 10^{-3}$ м	$\varphi$ , рад	$\varphi$ , град
Рис. 4.1,б $\Delta\varphi_{i\text{зад}} = 1,1$ рад	Верхняя траектория	25,589	8,233	1,288	73,775
	Нижняя траектория	30,431	10,69	0,890	51,002
Рис. 4.2,б $\Delta\varphi_{i\text{зад}} = -0,52$ рад	Верхняя траектория	20,374	11,444	1,246	71,395
	Нижняя траектория	19,927	9,034	1,458	83,517

$a$  – длина большой полуоси эллипса,  $b$  – длина малой полуоси,  $\varphi$  – угол наклона большой полуоси к горизонтали в радианах и в градусах соответственно.

Алгоритм (3.15), как и другие алгоритмы кратной синхронизации, позволяет также варьировать кратности скоростей роторов. Результат работы алгоритма при  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$  ( $\Delta\varphi_{i\text{зад}} = 0$ ) приведен на рис. 4.3: а) графики кратных скоростей; б) кратный приведенный сдвиг фаз; в) траектории движения пяти точек на оси абсцисс ВУ (3-я точка – центр масс платформы, расстояние между соседними точками – 0,1 м).



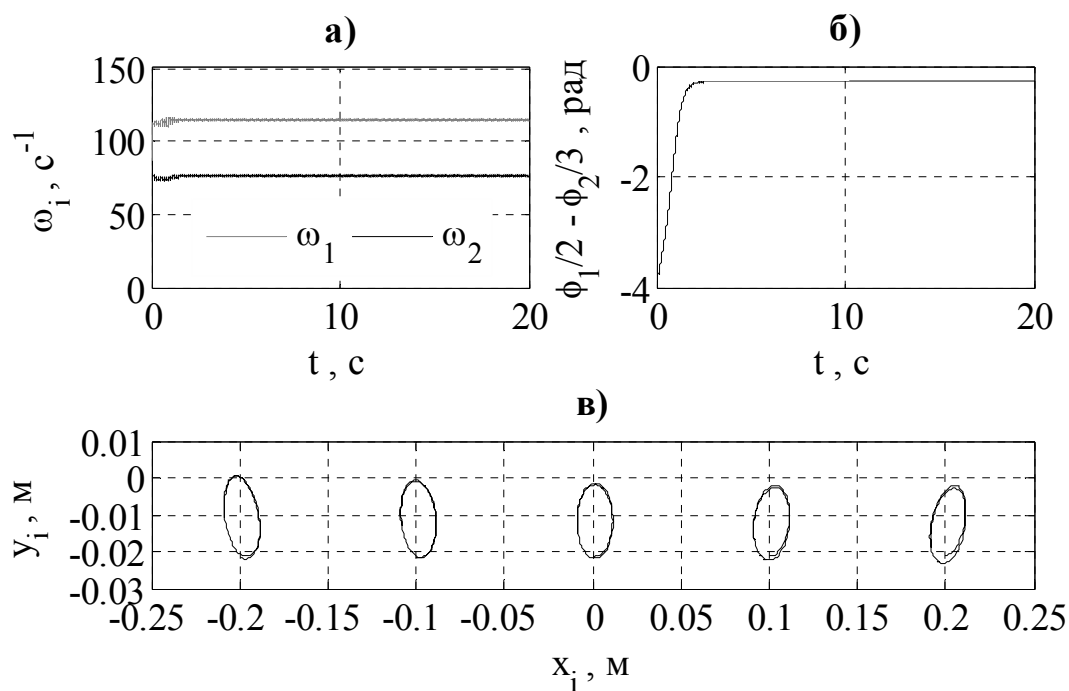


Рис. 4.3. Результаты моделирования при идентичных роторах;  $\Delta\varphi_{\text{зад}} = 0$ ;  
 $n_1 = 2, n_2 = 3$

Рис. 4.4 иллюстрирует работу алгоритма (3.27) для кратного синхронного режима, когда  $n_1 = 1, n_2 = 2$ . Увеличение вертикальной амплитуды колебаний на правом выходном конце платформы предотвращает заторы при сбросе сыпучего материала. Усложнение формы траектории позволяет избежать налипания влажных обрабатываемых материалов на корпус установки.

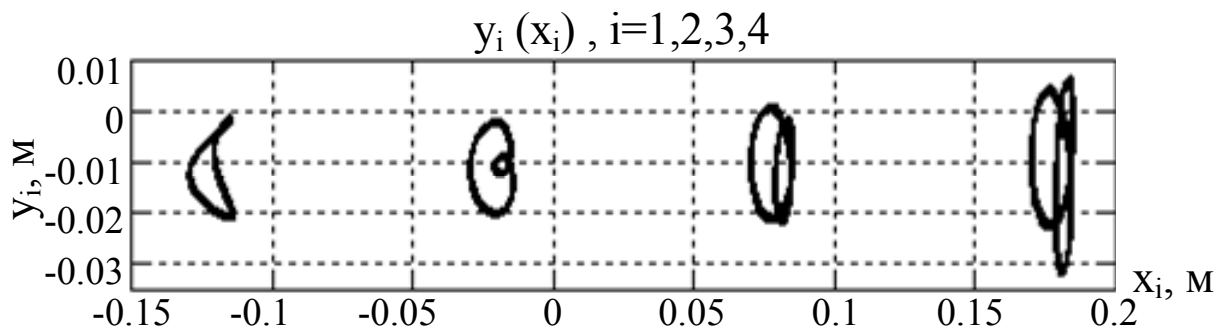


Рис. 4.4. Результаты моделирования при  $n_1 = 1, n_2 = 2$

Результаты компьютерного моделирования при традиционном управлении с помощью постоянных по величине моментов  $M_1, M_2$  и при различающихся массах дебалансов  $m_1 = 1,5$  кг,  $m_2 = 2,5$  кг представлены на рис. 4.5. Различающиеся по массе роторы введены, чтобы показать эффективность работы алгоритма в тех условиях, когда традиционное управление постоянными сигналами не обеспечивает самосинхронизацию. Алгоритм обеспечивает стабильную кратную синхронизацию и в более простых условиях, когда роторы одинаковы. На рис. 4.5,в представлены траектории движения пяти точек, расположенных на горизонтальной оси, проходящей через центр масс платформы. Как видно из графиков  $\omega_1 \neq \omega_2$  и  $\phi_1 - \phi_2 \rightarrow \infty$ , то есть синхронизация отсутствует, что приводит к быстрому износу оборудования и ухудшению качества технологического процесса.

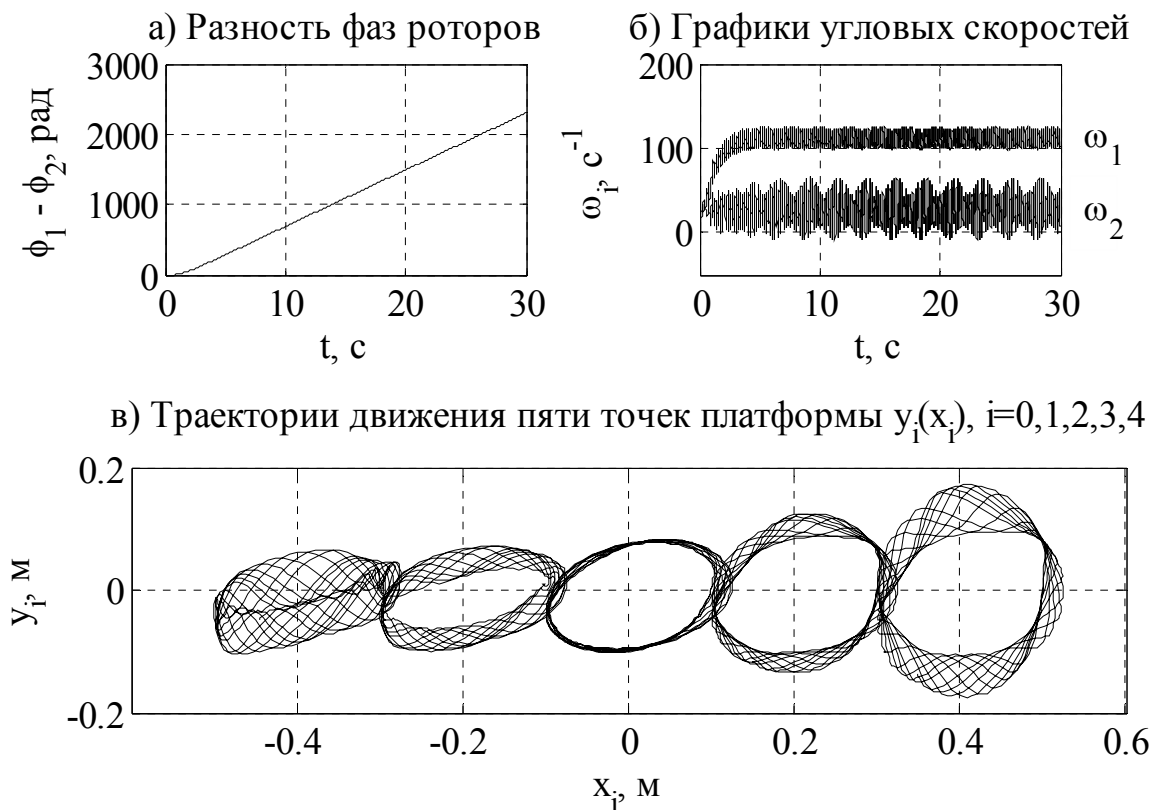


Рис. 4.5. Результаты моделирования при постоянных моментах и разных массах роторов

На рис. 4.6 изображены графики при следующих параметрах модели и алгоритма:  $H^* = 500$  Дж,  $m_1 = 1,5$  кг,  $m_2 = 2,5$  кг,  $\Delta\phi_{1зад} = -1$  рад;  $\Delta\phi_{2зад} = 5$  рад;  $n_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ . При виде траекторий ВУ с горизонтально расположенной платформой как на рис. 4.6,в эффективность вибротранспортирования повышается: загрузка сыпучего материала из бункера на левый конец платформы производится эффективнее при более горизонтально направленной большой полуоси эллиптической траектории крайней левой точки. При перемещении материала слева направо в сторону ротора с большей массой  $m_2$  указанная полуось будет принимать все более вертикальное положение, причем амплитуда вертикальных колебаний при таком движении все возрастает. Это приводит к более интенсивному грохочению на разгрузочном конце платформы, сыпучий материал подбрасывается здесь выше, что улучшает процесс грохочения в целом и позволяет уменьшить заторы при выгрузке.

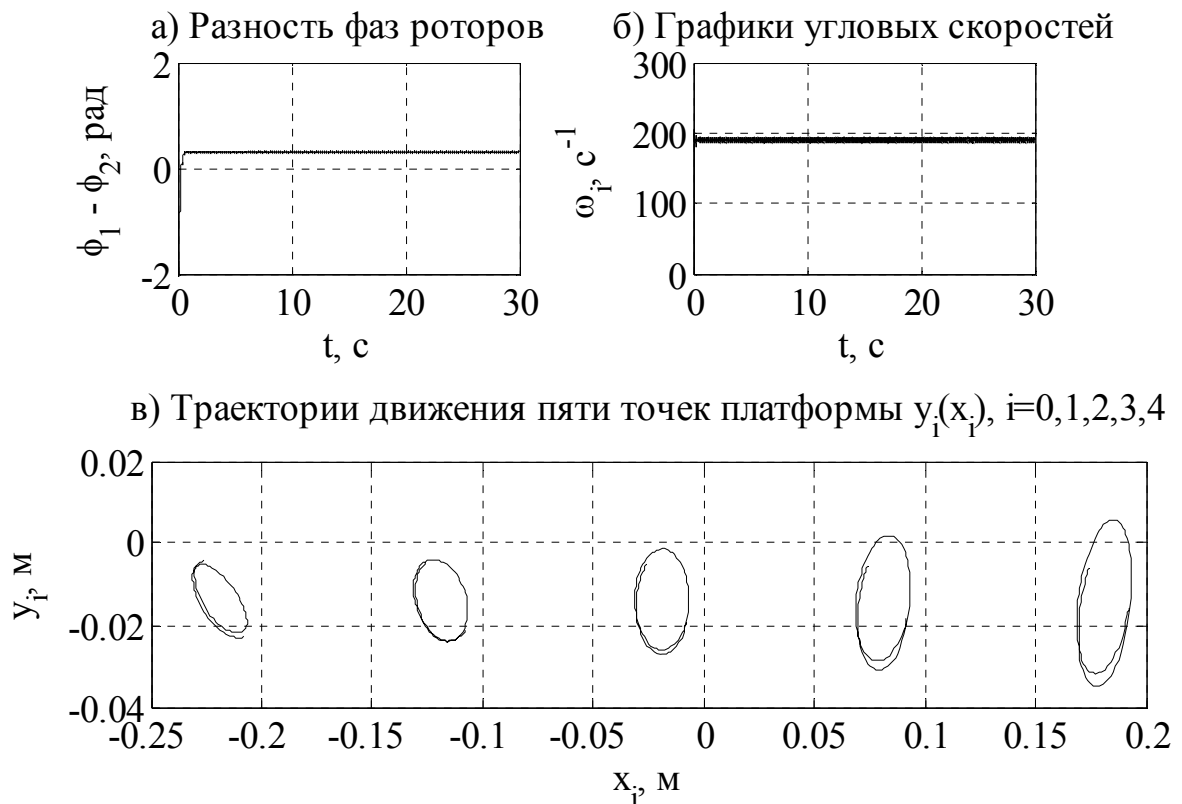


Рис. 4.6. Результаты моделирования при использовании алгоритма (3.27)

Таким образом, разработанный алгоритм управления кратной синхронизацией роторов позволяет синтезировать различные вибрационные поля за счет варьирования приведенного сдвига фаз  $\Delta\varphi_{\text{зад}}$  и заданной кратности скоростей роторов  $n_i$ , обеспечивая при этом стабильный кратный синхронный режим работы. Задание величин  $\Delta\varphi_{\text{зад}}$  в алгоритме (3.27) позволяет влиять на установившееся значение сдвига фаз  $\Delta\varphi(\infty)$ , определяющего наклон эллиптических траекторий, оптимизируя работу ВУ под конкретные технологические условия и процессы, что было невозможно получить при использовании алгоритмов из [60].

Как показано в [61], указанный характер вибрационного поля платформы может быть обеспечен с помощью аппаратных средств, когда ВУ оснащена тремя независимо вращающимися роторами, два из которых являются одинаковыми парными, а третий может быть произвольным. Однако для получения требуемого неравномерного поля вибраций приходится проводить сложный численный эксперимент по нахождению подходящего расположения всех трех роторов. В случае же применения алгоритма управления синхронизацией с регулированием сдвига фаз роторов (3.27) сложные вибрационные поля для уже существующих двухроторных ВУ реализуются существенно проще.

#### **4.1.2. Компьютерное исследование алгоритма кратной синхронизации при управлении ВУ с учетом динамики электроприводов**

В данном разделе исследуется модель двухроторной ВУ с учетом динамики приводов (2.17), (2.19) под управлением алгоритма (3.24).

На рис. 4.7 и рис. 4.8 приведены результаты моделирования для двух случаев: без учета ограничений по моментам и с ними. Кратности роторов в алгоритме задавались как  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ .

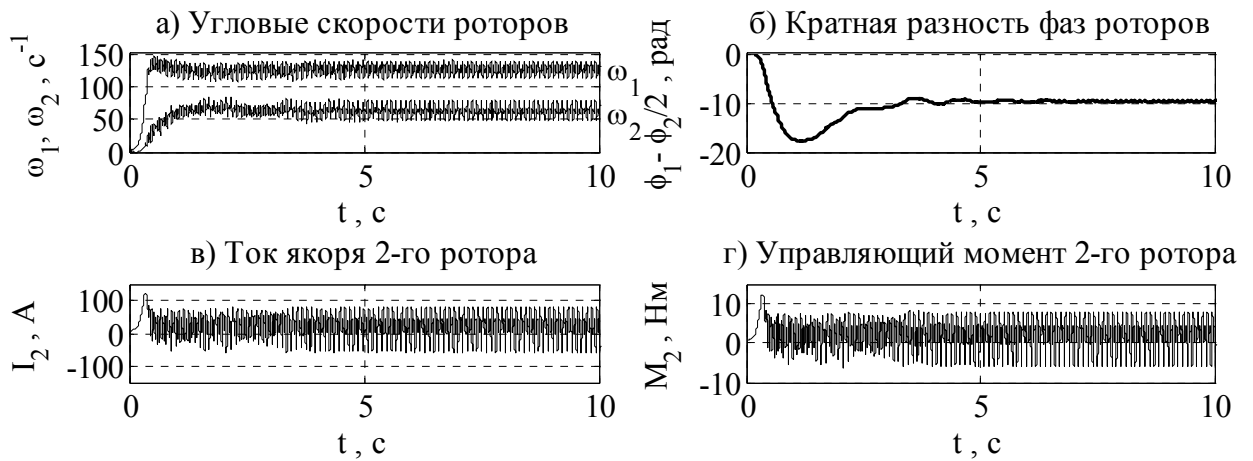


Рис. 4.7. Результаты моделирования с учетом динамики приводов без ограничений

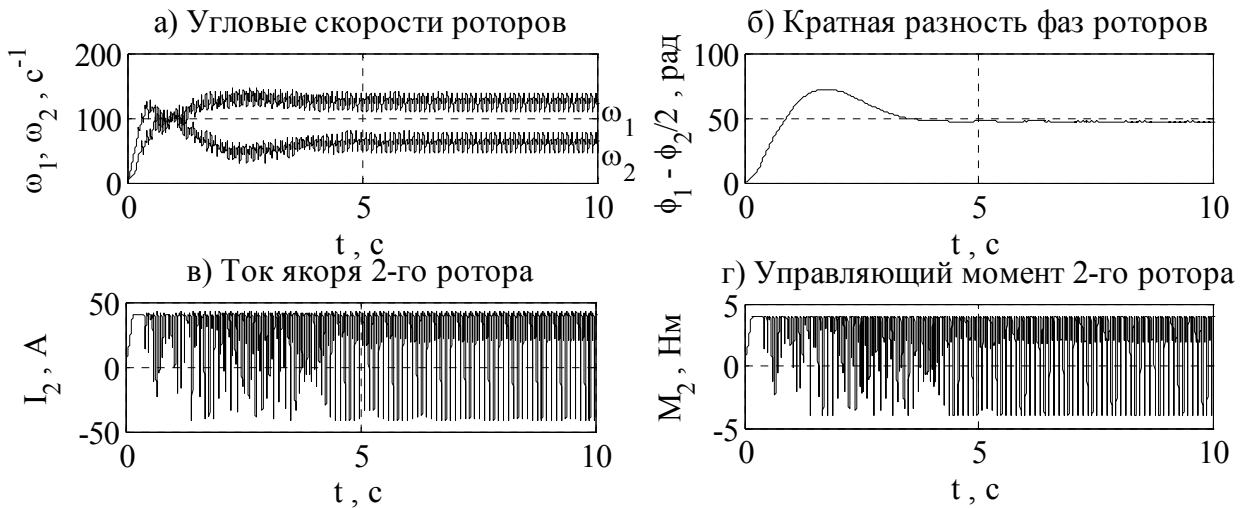


Рис. 4.8. Результаты моделирования с учетом динамики приводов с ограничениями  $|M_i| < 4$  Н·м

Из представленных графиков видно, что время переходных процессов скоростей роторов при наличии ограничений (рис. 4.8,а) увеличивается приблизительно вдвое, оставаясь при этом в пределах 2,5 с. Кратная синхронизация при этом сохраняется в обоих случаях, что демонстрирует эффективность предложенного алгоритма (3.24).

### 4.1.3. Компьютерное исследование алгоритмов кратной синхронизации при управлении моделью с (не)идентичными роторами и стационарным грузом

В данном разделе исследуется динамика двухроторной ВУ (2.17) с учетом стационарного груза (2.27), (2.28) под управлением алгоритма (3.24). Работа предложенного алгоритма анализировалась при различных заданных кратностях скоростей вращения роторов. В процессе моделирования сравнивалась динамика (2.17), (2.27), (2.28) при одинаковых массоинерционных параметрах роторов  $m_1 = m_2 = 1,5$  кг;  $\rho_1 = \rho_2 = 0,04$  м (рис. 4.9 – рис. 4.11) и при различных массоинерционных параметрах  $m_1 = 1,5$  кг;  $m_2 = 3$  кг;  $\rho_1 = 0,04$  м;  $\rho_2 = 0,06$  м (рис. 4.12 – рис. 4.13).

Параметры ВУ соответствовали параметрам СВ-2М [4]:  $m_{пл} = 9$  кг;  $g = 9,81$  кг·м/с<sup>2</sup>;  $c_{01} = c_{02} = 5300$  кг·м<sup>2</sup>/с;  $c_{11} = c_{12} = 2650$  кг·м<sup>2</sup>/с;  $k_c = 0,01$  кг·м<sup>2</sup>/с;  $b = 5$  кг·м<sup>2</sup>/с;  $J_1 = J_2 = 0,014$  кг·м<sup>2</sup>;  $m_\Gamma = 1$  кг. Параметры алгоритма управления:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,02$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,25$ ;  $H^* = 150$  Дж.

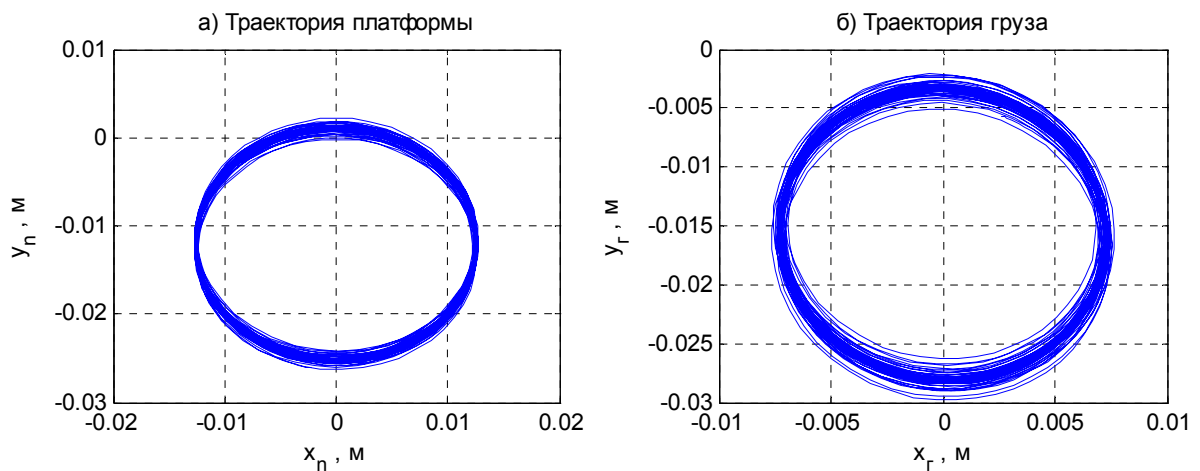


Рис. 4.9. Однократная синхронизация при одинаковых роторах

$$\omega_1 = \omega_2 = -74 \text{ с}^{-1}$$

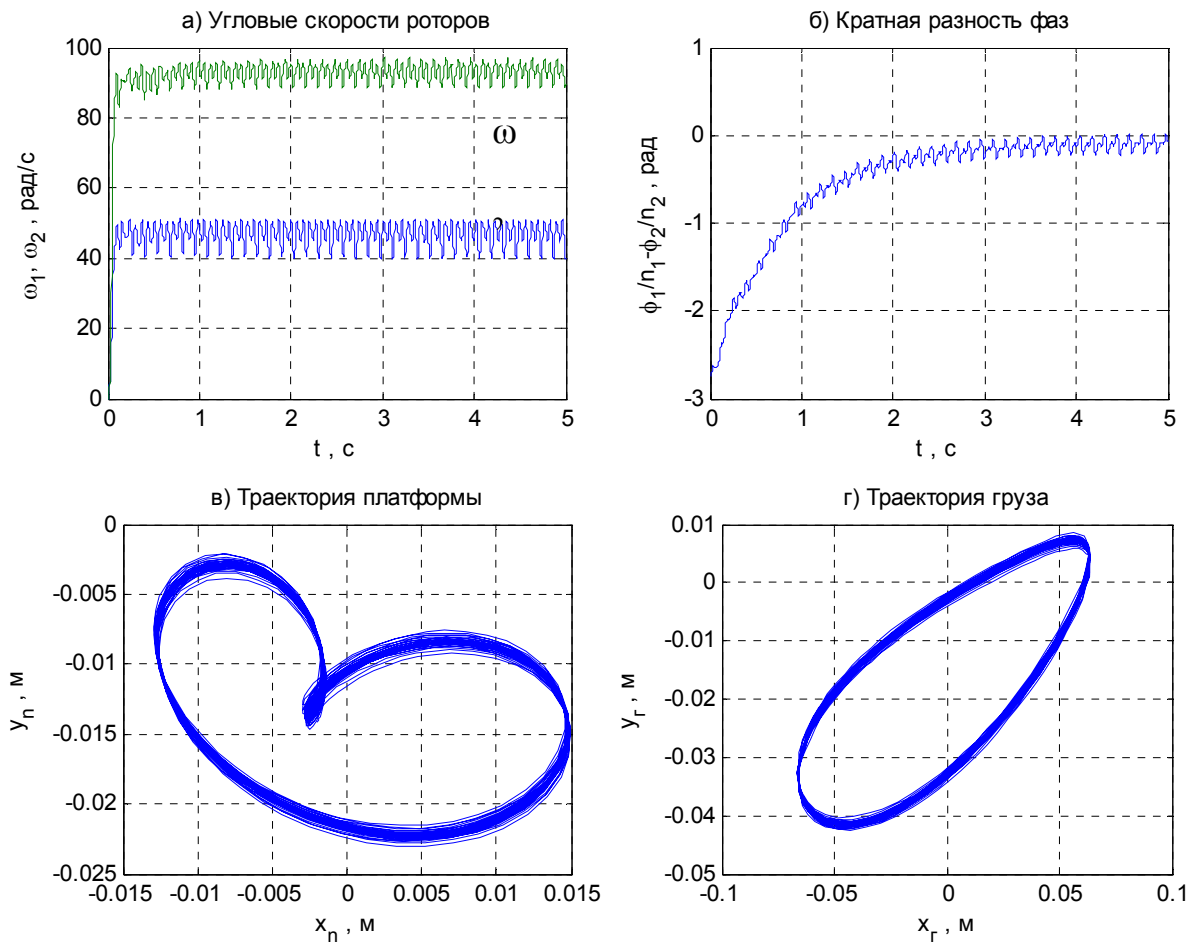


Рис. 4.10. Двукратная синхронизация при одинаковых роторах

$$\omega_1 = 45 \text{ с}^{-1}; \omega_2 = 90 \text{ с}^{-1}$$

Наличие стабильного кратного синхронного режима подтверждается графиками изменения угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 4.10,а; рис. 4.13,а) и кратной разности фаз  $\Delta\varphi = \varphi_1/n_1 - \varphi_2/n_2$  (рис. 4.10,б; рис. 4.13,б) для случаев, когда  $n_2/n_1 = 2$ . Как видно из рисунков между средними скоростями соблюдается заданное соотношение ( $n_2/n_1 = 2$ ), а кратный сдвиг фаз  $\Delta\varphi(\infty)$  стабилизируется на постоянном уровне, что соответствует определению кратной синхронизации. Время координатной синхронизации рассчитывается по графикам кратной разности фаз как время вхождения в 5 % окрестность установившегося значения  $\Delta\varphi(\infty)$ . В данном примере  $t_c = 4$  с для одинаковых роторов и  $t_c = 2$  с при различных массоинерционных параметрах роторов.

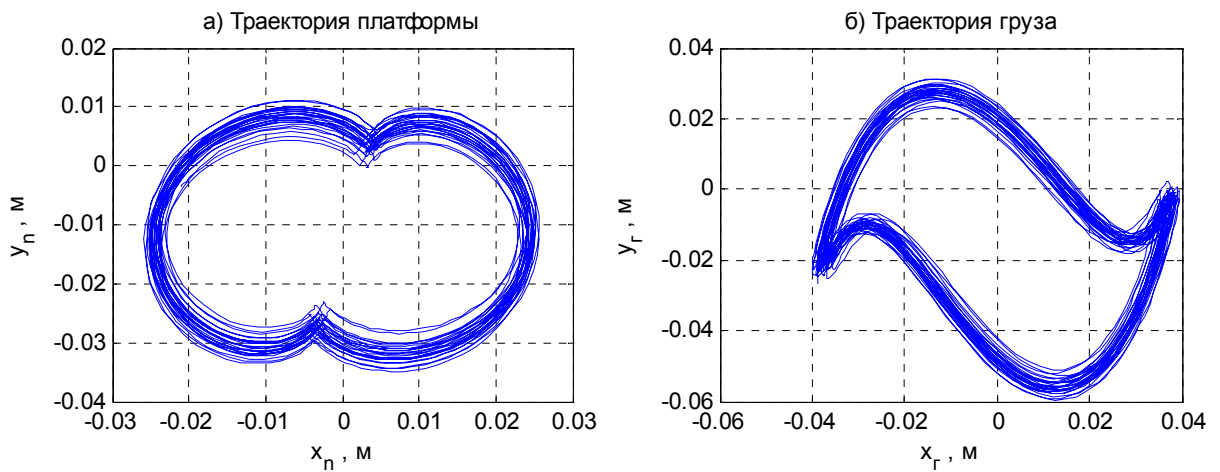


Рис. 4.11. Трехкратная синхронизация при одинаковых роторах

$$\omega_1 = -33 \text{ с}^{-1}; \omega_2 = -100 \text{ с}^{-1}$$

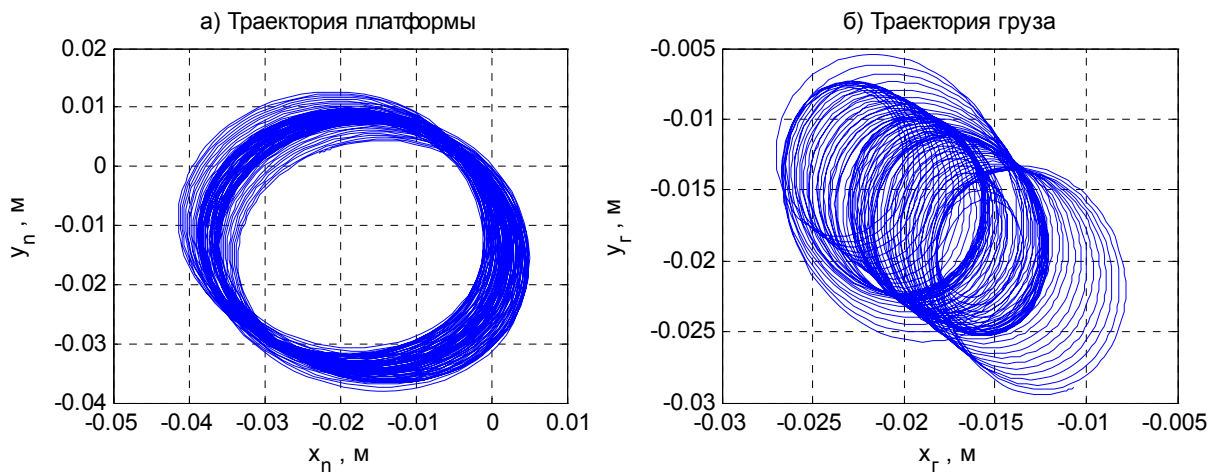


Рис. 4.12. Однократная синхронизация при неравных роторах

$$\omega_1 = \omega_2 = -105 \text{ с}^{-1}$$

Как видно из графиков, представленных на рис. 4.9 – 4.11 и рис. 4.12 – 4.14, траектории центра масс груза и платформы в случае неравных роторов существенно сложнее и уже при  $n_1 = n_2 = 1$  траектория груза имеет наклон относительно горизонтальной оси, что важно при вибротранспортировании. По результатам исследования можно сделать вывод о работоспособности алгоритма кратной синхронизации и о целесообразности совместного использования и аппаратных средств и средств управления для организации процесса вибротранспортирования.



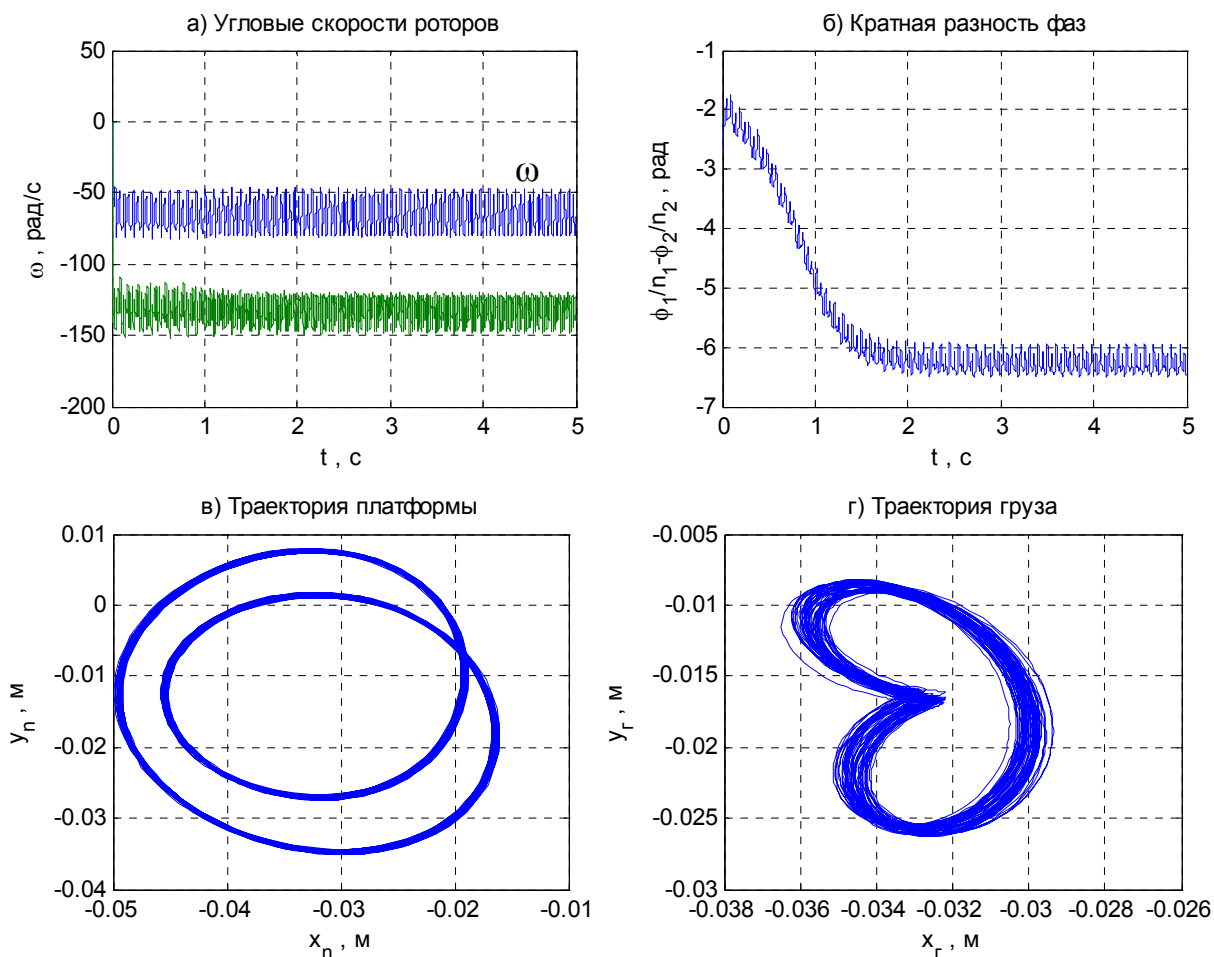


Рис. 4.13. Двукратная синхронизация при неравных роторах

$$\omega_1 = -65 \text{ с}^{-1}; \omega_2 = -130 \text{ с}^{-1}$$

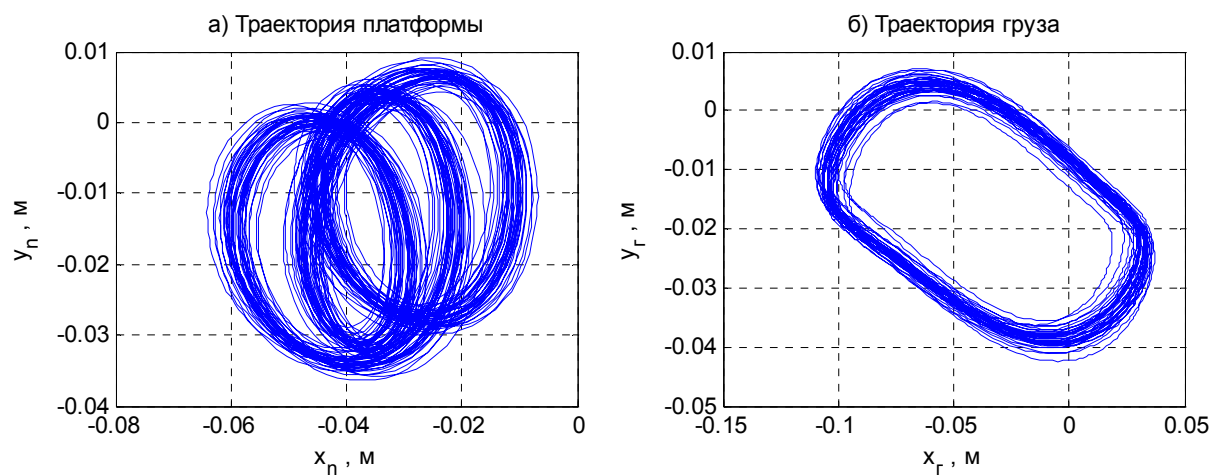


Рис. 4.14. Трехкратная синхронизация при неравных роторах

$$\omega_1 = -50 \text{ с}^{-1}; \omega_2 = -150 \text{ с}^{-1}$$

## 4.2. Исследование алгоритмов синхронизации для трехроторных ВУ

### 4.2.1. Исследование алгоритмов взаимной синхронизации и синхронизации с одним ведущим ротором

В данном разделе исследуется система (2.18) под управлением алгоритмов взаимной синхронизации (3.18) и синхронизации с одним ведущим ротором (3.23). Тексты программ, содержащие трехроторную модель, управляемую алгоритмами (3.18) и (3.23), находятся в Приложении 3, 4 и в Приложении 5, 6 соответственно.

Результаты моделирования алгоритма (3.18) при кратностях  $n_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$  приведены на рис. 4.15. Кратные приведенные сдвиги фаз (рис. 4.15,г,д,е) стабилизируются вблизи постоянных значений, что доказывает наличие устойчивой координатной синхронизации. Одинаковые угловые скорости роторов (рис. 4.15,а,б,в) показывают устойчивую частотную синхронизацию. Алгоритм (3.18) сложнее в реализации, чем (3.23), однако он позволяет расширить диапазон зарезонансных рабочих скоростей при однократной синхронизации вниз до  $\omega_i = 60 \text{ с}^{-1}$  (рис. 4.15,а,б,в).

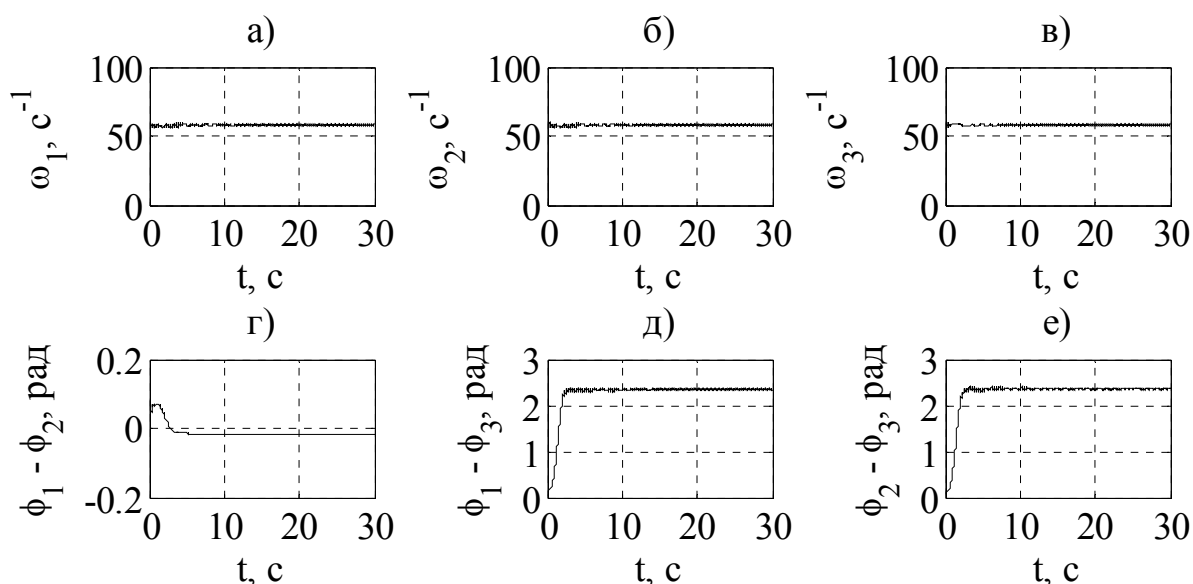


Рис. 4.15. Результаты моделирования для алгоритма (3.18)

при  $n_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$

Результаты моделирования для алгоритма с одним ведущим ротором (3.23) при кратностях  $n_i = 1, i = 1, 2, 3$  приведены на рис. 4.16. Более простой в сравнении с (3.18) алгоритм (3.23) не обеспечивает работу в зарезонансной зоне на низких угловых скоростях роторов, как видно из рис. 4.16, а, б, в, скорости роторов «застревают» на резонансной частоте  $\omega_p \approx 30 \text{ с}^{-1}$  под влиянием эффекта Зоммерфельда.

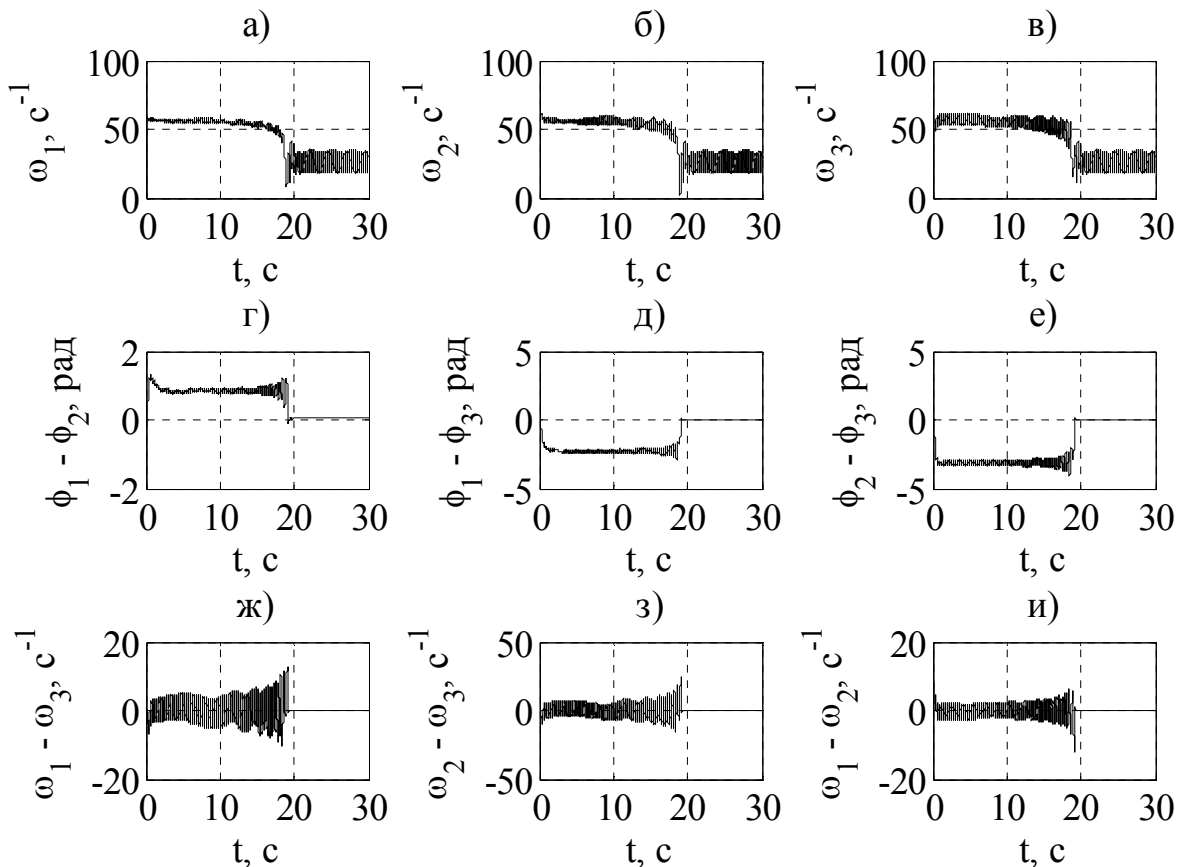


Рис. 4.16. Результаты моделирования для алгоритма (3.23) при  $n_i = 1, i = 1, 2, 3$

Результаты моделирования под управлением с помощью предложенных алгоритмов (3.18), (3.23) для случаев, когда скорость центрального 3-го ротора в два раза больше скоростей соседних роторов ( $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$ ) приведены на рис. 4.17 и 4.18 соответственно. Моделирование в данном случае проводилось таким образом, чтобы

скорости роторов были далеки от резонансных. Это обеспечивалось за счет задания высокого уровня  $H^* = 1800$  Дж.

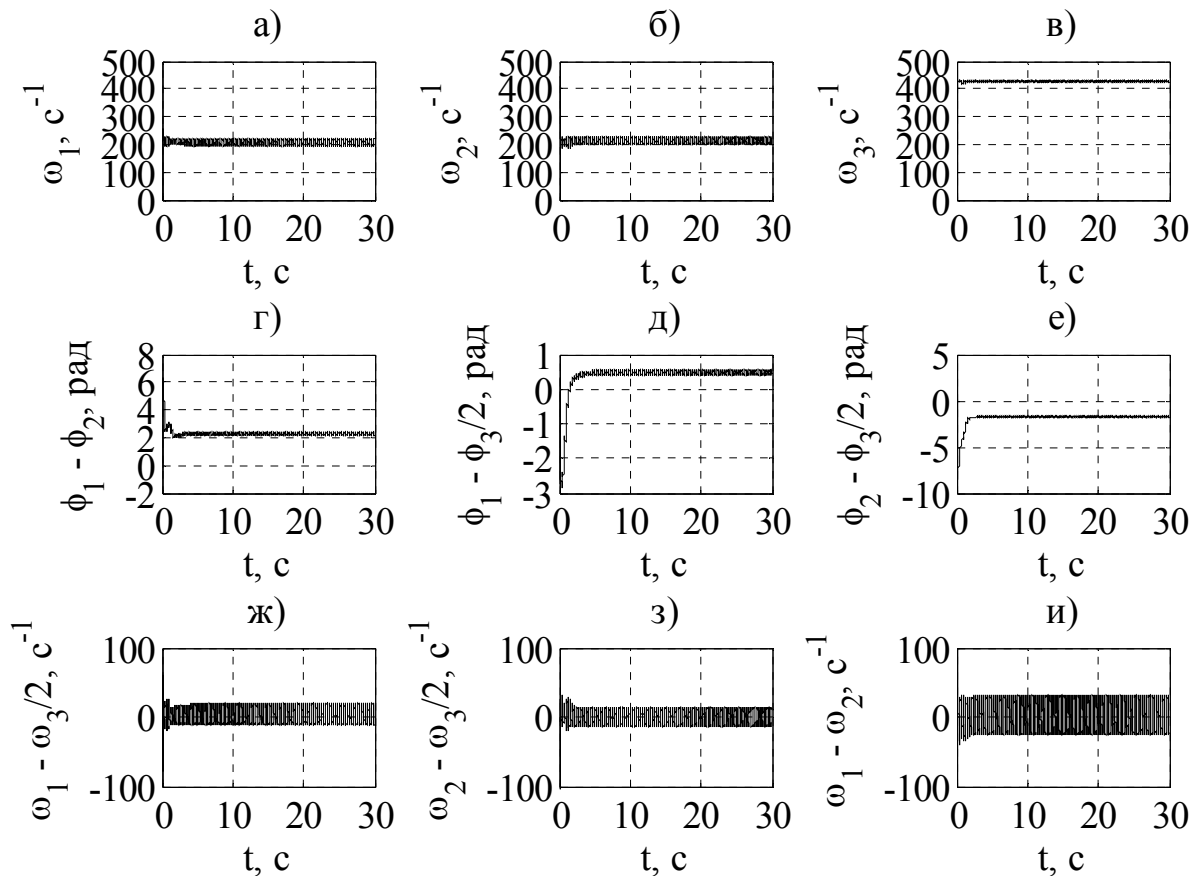


Рис. 4.17. Результаты моделирования для алгоритма (3.18)

при  $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$

Из графиков на рис. 4.17,г,д,е и рис. 4.18,г,д,е видно, что время переходного процесса для приведенного кратного сдвига фаз ( $\phi_i / n_j - \phi_j / n_i$ ) при использовании алгоритма (3.23) несколько больше. Однако это не оказывает существенного влияния на работу ВУ.

Графики на рис. 4.17 – 4.18 демонстрируют устойчивую координатную (рис. 4.17 – 4.18,г,д,е) и частотную (рис. 4.17 – 4.18,ж,з,и) синхронизации. Таким образом на более высоких скоростях вращения роторов, упрощенный алгоритм (3.23) также обеспечивает устойчивую работу ВУ в двукратном синхронном режиме.

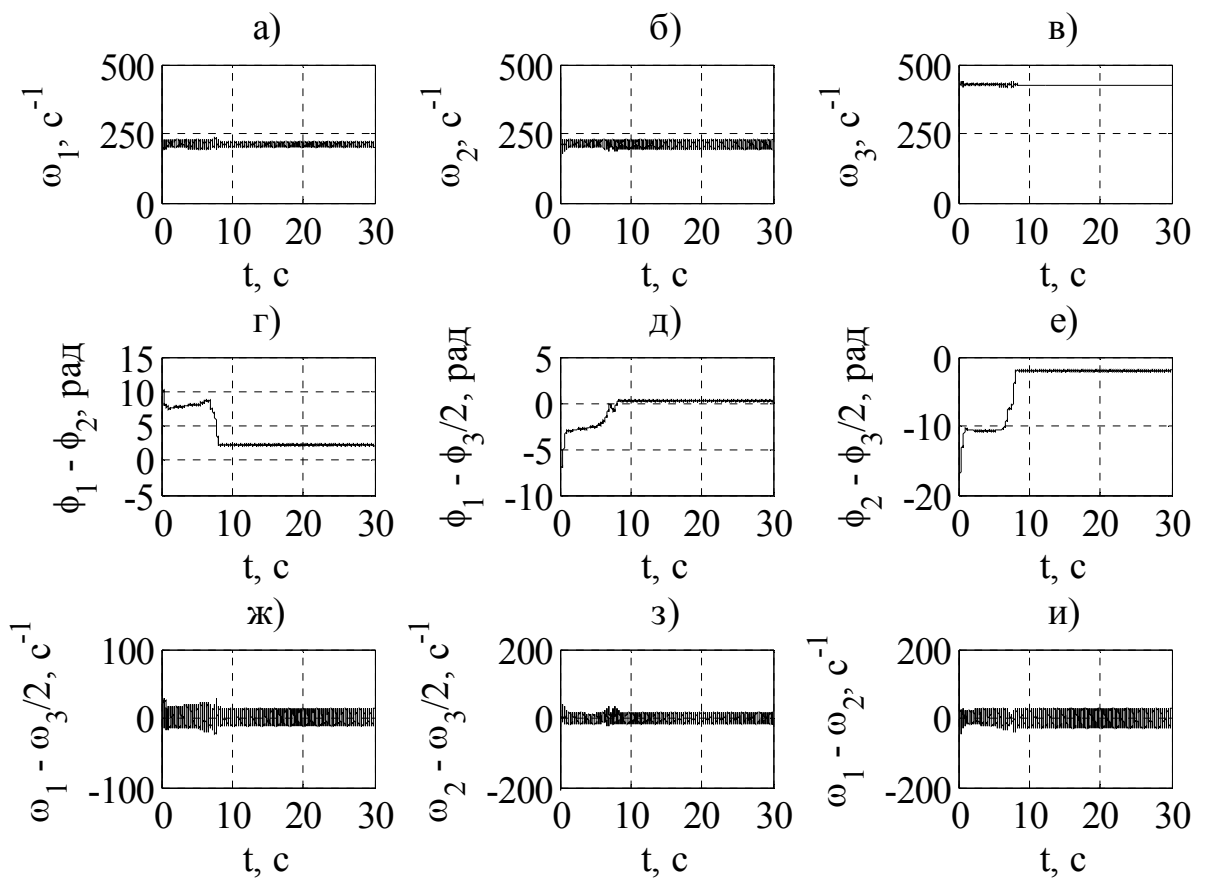


Рис. 4.18. Результаты моделирования для алгоритма (3.23)

при  $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$

На рис. 4.19 – 4.20 приведены траектории центра масс платформы  $y_c(x_c)$  для случаев однократной и двукратной синхронизации соответственно.

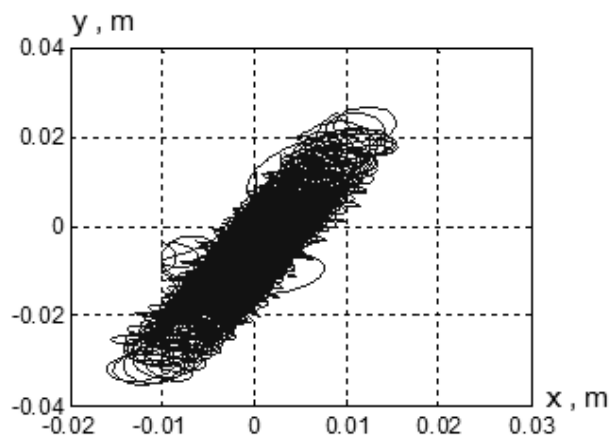


Рис. 4.19. Траектория центра масс платформы

при  $n_i = 1, i = 1, 2, 3, H^* = 1000$  Дж

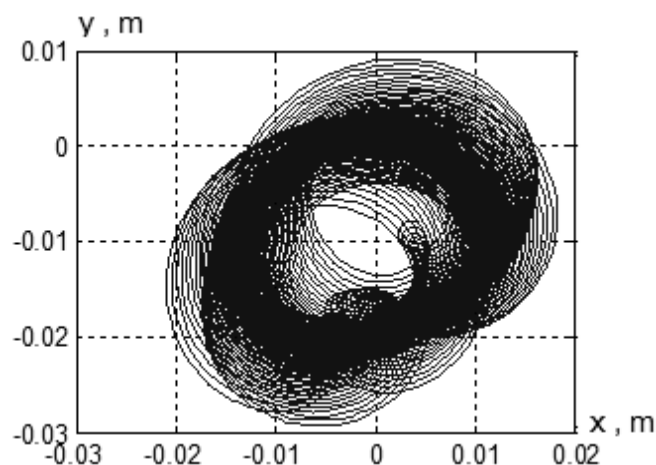


Рис. 4.20. Траектория центра масс платформы  
при  $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2, H^* = 210$  Дж

Как видно из (1.12), поведение системы в установившемся режиме определяется параметрами  $H^*$  and  $n_i$ . Выбор данных параметров определяется требованиями технологических процессов, в частности, необходимостью получения заданной амплитуды, частоты и траектории колебаний платформы. Так, траектория движения различных точек платформы при вибротранспортировании имеет форму эллипса, наклоненного в сторону перемещения обрабатываемого материала, тогда как при просеивании сыпучих материалов горизонтальные колебания пренебрежимо малы. Кратный синхронный режим вносит асимметрию в траекторию платформы, что при правильном выборе значений  $n_i$  позволяет избежать заторов на выходе вибротранспортера. Таким образом работоспособность и эффективность алгоритмов (3.18) и (3.23) подтверждается компьютерным моделированием.

На рис. 4.21 – 4.22 приведены номограммы зависимости установившихся колебаний  $x_c, y_c$  от задаваемой энергии  $H^*$  для случаев однократной и двукратной синхронизации соответственно.

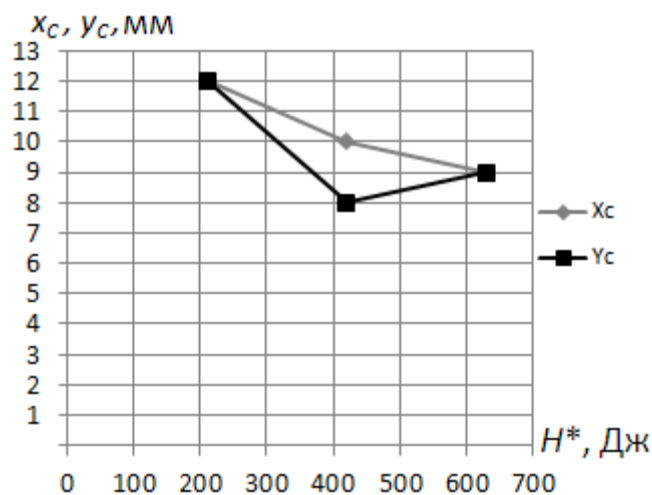


Рис. 4.21. Номограммы зависимости амплитуд колебаний платформы по осям  $Ox$  and  $Oy$  от задаваемого уровня энергии  $H^*$  при  $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$

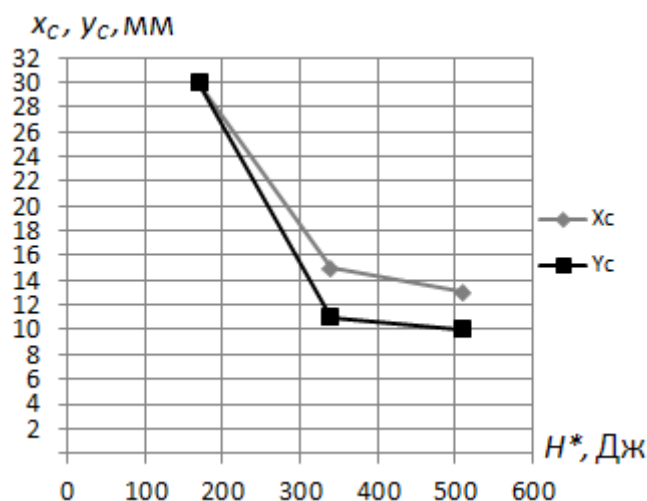


Рис. 4.22. Номограммы зависимости амплитуд колебаний платформы по осям  $Ox$  and  $Oy$  от задаваемого уровня энергии  $H^*$  при  $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 3$

#### 4.2.2. Исследование алгоритма синхронизации с одним ведущим ротором при управлении трехроторной ВУ с учетом упругих связей между двигателем и ротором

В данном разделе проводится компьютерное моделирование динамики трехроторной ВУ (2.18) с упругими карданными валами (2.23). Значения параметров модели следующие:  $J_i = 0,014 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $J = 0,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $m_{\text{пл}} = 9 \text{ кг}$ ;  $m_i = 1,5 \text{ кг}$ ;  $c_1 = 5300 \text{ Н/м}$ ;  $c_2 = 5300 \text{ Н/м}$ ;  $k_c = 0,01 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\beta = 5 \text{ кг/с}$ ;

$\rho = 0,04$  м;  $r = 0,2$  м. Сравнилось традиционное управление постоянными моментами с алгоритмическим управлением (3.23).

Диапазон изменения параметров упругого вала определялся в несколько этапов. Сначала моделировалась система (2.18) без учета упругости при традиционном управлении. Результаты исследования при значении управляющих моментов  $M_i = 2,5$  Н·м представлены на рис. 4.23 – 4.24.

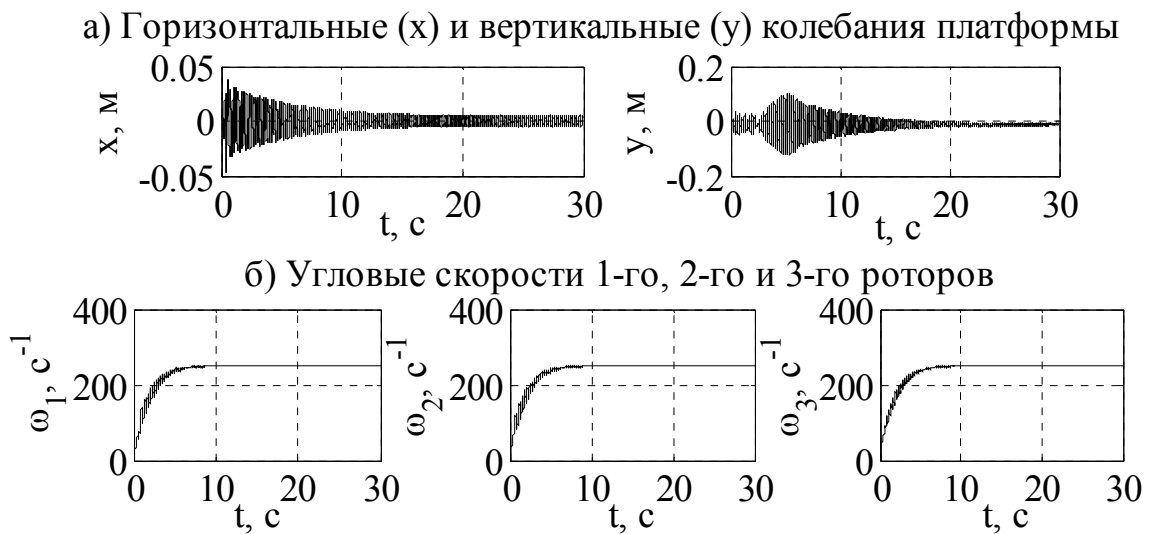


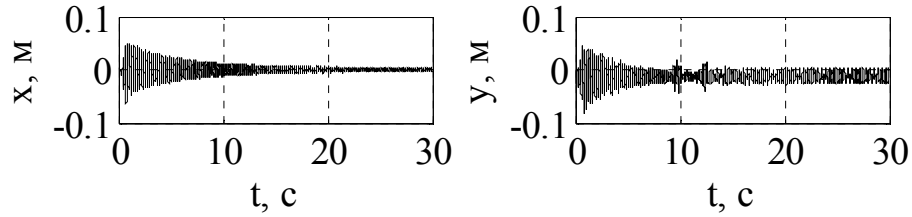
Рис. 4.23. Результаты моделирования ВУ без учёта упругости [11]

Из графиков видно, что все средние скорости  $\omega_{срi}$  одинаковы и выходят в резонансную область частот  $\omega_{срi} > \omega_{рез} = 30 \text{ с}^{-1}$ , а амплитуды колебаний платформы по вертикали и горизонтали стабилизируются.

Далее исследовалось влияние упругости (2.23) на динамику системы (2.18). Моделирование проводилось при  $100 \leq c_b \leq 3000$  Н·м/рад;  $0,01 \leq b_b \leq 0,5$  Н·м·с, что соответствует частотам упругих колебаний вала  $120 \text{ с}^{-1} \leq \omega_y \leq 1000 \text{ с}^{-1}$ . Было определено, что система (2.18), (2.23) теряет работоспособность при  $c_b < 300$  Н·м/рад и  $b_b < 0,3$  Н·м·с из-за значительных биений скоростей роторов (до 15% от заданного значения) и неустойчивости амплитуды колебаний платформы (рис. 4.24).



а) Горизонтальные (x) и вертикальные (y) колебания платформы



б) Угловые скорости 1-го, 2-го и 3-го роторов

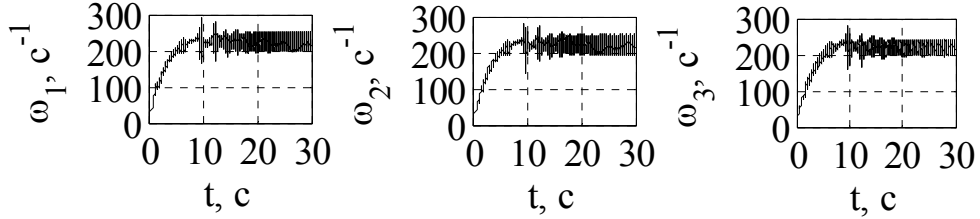


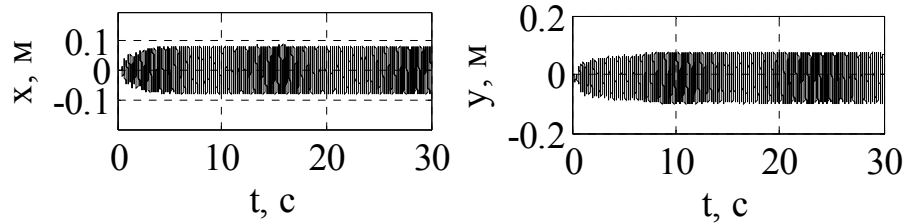
Рис. 4.24. Результаты исследования ВУ при  $c_B = 300 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ;

$$b_B = 0,1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с} [11]$$

Затем было проведено сравнительное моделирование системы без учета упругости (2.18) и с учетом упругости (2.18), (2.23) при традиционном управлении с помощью постоянных электромеханических моментов и с применением алгоритма (3.23). Для модели (2.18) без упругости были экспериментально найдены минимальные величины постоянных управляющих моментов, обеспечивающие выход скоростей всех роторов в зарезонансную область, причем на все три двигателя подавались электромеханические моменты, одинаковые по величине. На рис. 4.25 и рис. 4.26 представлены графики изменения угловых скоростей  $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3$  при значениях моментов  $M_i = 1,32 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и  $M_i = 1,35 \text{ Н}\cdot\text{м}$  соответственно. Как видно из графиков если величины моментов малы ( $M_i = 1,32 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ), то скорость третьего ротора  $\dot{\phi}_3$  на рис. 4.25 не выходит в зарезонансную область ( $\omega_{\text{рез}} = 28 \text{ с}^{-1}$ ), то есть происходит «захват» скоростей под действием эффекта Зоммерфельда. При этом скорости роторов остаются различными, то есть синхронизация также отсутствует. При больших значениях моментов все три ротора вращаются с равными, но большими по величине средними скоростями из зарезонансной области (рис. 4.26). Следовательно, диапазон

скоростей от  $\omega_{рез} = 28 \text{ с}^{-1}$  до  $\omega = 135 \text{ с}^{-1}$  выпадает из области стабильных рабочих скоростей ВУ.

а) Горизонтальные (x) и вертикальные (y) колебания платформы



б) Угловые скорости 1-го, 2-го и 3-го роторов

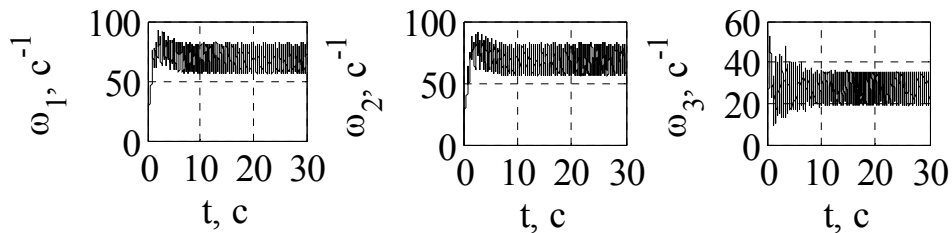
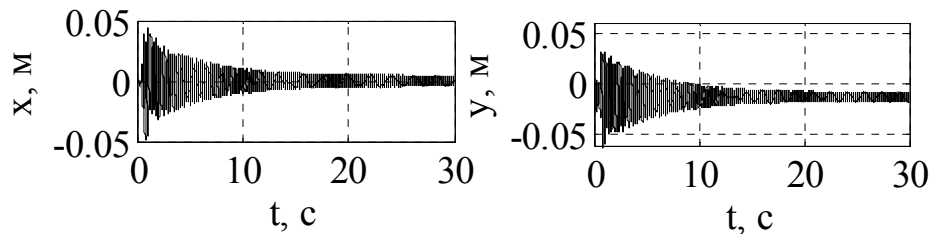


Рис. 4.25. Результаты исследования (2.18) при малых моментах

$$M_i = 1,32 \text{ Н}\cdot\text{м} [11]$$

а) Горизонтальные (x) и вертикальные (y) колебания платформы



б) Угловые скорости 1-го, 2-го и 3-го роторов

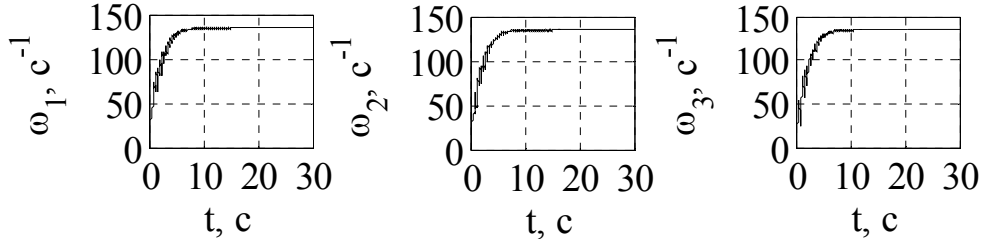


Рис. 4.26. Результаты исследования модели (2.18) при  $M_i = 1,35 \text{ Н}\cdot\text{м} [11]$

На следующем этапе аналогичное исследование было проведено для модели с упругими карданными валами (2.18), (2.23). Первоначально на вход системы подавались постоянные моменты. Как показало моделирование,

наличие упругости карданных валов приводит к необходимости увеличения значений моментов примерно на 10÷15%, в противном случае под действием эффекта Зоммерфельда скорости некоторых роторов не могут выйти в зарезонансную область и синхронность вращения теряется. Так, для модели трехроторной ВУ при коэффициентах жесткости и демпфирования в карданном вале  $c_b = 3000$  Н·м/рад;  $b_b = 0,5$  Н·м·с минимальные величины моментов, обеспечивающие выход в зарезонансную область частот,  $M_i = 1,7$  Н·м.

Далее проводилось исследование модели (2.18), (2.23) при управлении с помощью алгоритма (3.31). Параметры алгоритма и параметры карданных валов выбраны совпадающими с параметрами системы (2.18), управляемой с помощью постоянных моментов, графики для которой представлены на рис. 4.26:  $H^* = 390$  Дж, что соответствует скоростям роторов  $\dot{\phi}_i = 135$  с<sup>-1</sup>;  $\gamma_i = 0,0025$ ;  $\alpha_i = 0,25$ ;  $i = 1, 2, 3$ . Моделирование показало, что амплитуда колебаний платформы по вертикали и горизонтали после окончания переходного процесса стабильна, средние скорости роторов одинаковы. Более того, управление с помощью алгоритма (3.31) позволяет существенно сузить область недостижимых из-за эффекта Зоммерфельда зарезонансных частот. На рис. 4.27 представлены результаты моделирования системы (2.18), (2.23) при  $H^* = 75$  Дж, что соответствует заданию средних скоростей роторов равными  $\dot{\phi}_i = 60$  с<sup>-1</sup> при параметрах упругого вала, являющихся критическими для управления с помощью постоянных моментов:  $c_b = 100$  Н·м/рад;  $b_b = 0,1$  Н·м·с. При исследовании эффективности алгоритма (3.23) для управления кратными синхронными режимами трехроторной ВУ с упругими карданными валами (2.18), (2.23) варьировались заданные кратности скоростей роторов ( $n_i = 1, 2, 3$ ). Также изменялись установившиеся скорости роторов путем задания величины энергии системы  $H^*$  ( $H^* = 75$  Дж;  $H^* = 390$  Дж;  $H^* = 1865$  Дж) при тех же значениях коэффициентов усиления  $\gamma_i$  и  $\alpha_i$ . На

рис. 4.28 приведены результаты моделирования системы (2.18), (2.23) при заданных кратностях скоростей роторов  $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$ .

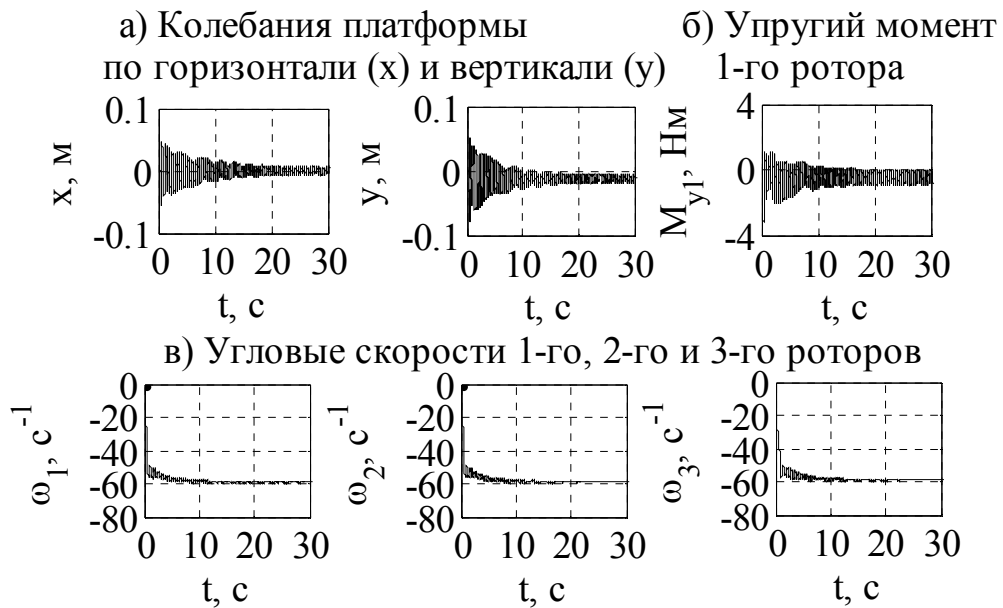


Рис. 4.27. Результаты моделирование (2.18), (2.23) при управлении с помощью алгоритма (3.23) для малых заданных скоростей роторов [11]



Рис. 4.28. Результаты исследования трехроторной ВУ при заданных кратностях скоростей роторов  $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$  [11]

На рис. 4.28 дополнительно представлен график изменения одного из упругих моментов ( $M_{y1}$ ), величина которого в установившемся режиме  $|M_{y1}| < 1$  Н·м, что является допустимым с технической точки зрения.

На рис. 4.29 и рис. 4.30 представлены номограммы зависимости времени синхронизации и времени переходного процесса от параметров упругого карданного вала.

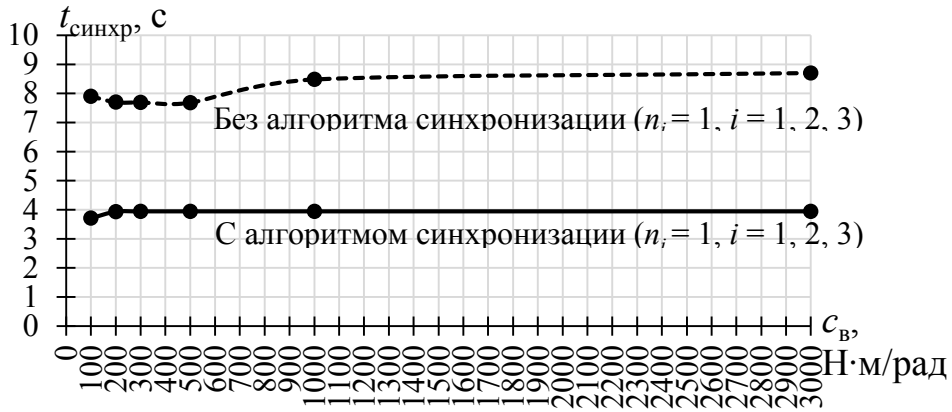


Рис. 4.29. Номограмма зависимости времени синхронизации от параметров карданного упругого вала [11]

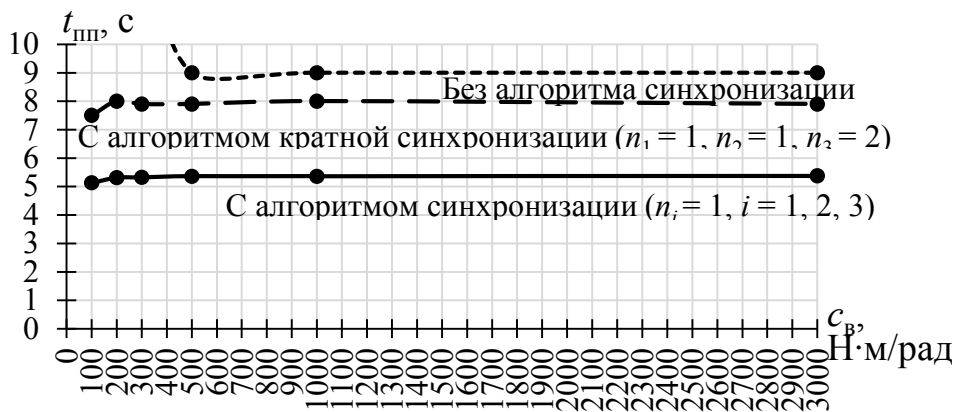


Рис. 4.30. Номограмма зависимости времени переходного процесса от параметров карданного упругого вала [11]

Как видно из рис. 4.27 – 4.30, в системе имеет место стабильный приближенный кратный синхронный режим при параметрах упругого вала, соответствующих диапазону частот упругих колебаний вала

$120 \text{ с}^{-1} \leq \omega_y \leq 1000 \text{ с}^{-1}$ . Упругий момент изменяется в пределах, соответствующих изменению управляющих электромеханических моментов, а время синхронизации и время переходного процесса уменьшается и практически не зависит от параметров упругости вала (рис. 4.29).

На рис. 4.30 изображены номограммы зависимости времени синхронизации от жесткости вала  $c_b$  при  $b_b = 0,1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ . Как видно из графиков, время синхронизации при управлении с помощью алгоритма (3.23) меньше, чем в случае допустимых значений  $M_i = \text{const}$ , а диапазон допустимых значений коэффициента  $c_b$  шире.

Предложенный алгоритм управления (3.23) для МВУ с учетом упругой связи двигателей и неуравновешенных роторов позволяет: 1) обеспечить прохождение через зону резонанса при пуске и разгоне роторов при пониженных величинах управляющих моментов; 2) обеспечить устойчивый приближенный кратный синхронный режим вращения роторов; 3) расширить полосу зарезонансных рабочих частот за счет обеспечения им устойчивого соотношения скоростей роторов уже на этапе пуска, что препятствует стабилизации одной из скоростей на частоте резонанса при разгоне роторов, то есть алгоритм «подтягивает» скорость «проблемного» ротора таким образом, чтобы выполнялись соотношения  $\dot{\phi}_1 / n_1 - \dot{\phi}_r / n_r \rightarrow 0$ .

### **4.2.3. Синхронизация роторов трехроторной ВУ с учетом нестационарного груза**

В данном разделе исследуется динамика модели трехроторной ВУ с учетом нестационарного груза (2.18), (2.27), (2.29) под управлением алгоритмов (3.18) и (3.23). Результаты моделирования системы без груза (2.18) при традиционном управлении приведены на рис. 4.31 – 4.32. Для получения двукратного синхронного режима с кратностями  $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$  величины моментов задавались следующими:  $M_1 = M_2 = 2 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $M_3 = 4 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Эти параметры соответствуют скоростям  $\omega_1 = \omega_2 = 200 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_3 = 400 \text{ с}^{-1}$ .

Моделирование показало отсутствие самосинхронизации: кратные сдвиги фаз не стабилизируются  $\phi_i - \phi_3/2 \rightarrow \infty, i = 1, 2$  (рис. 4.31) и кратные разности скоростей не сохраняются (рис. 4.32).

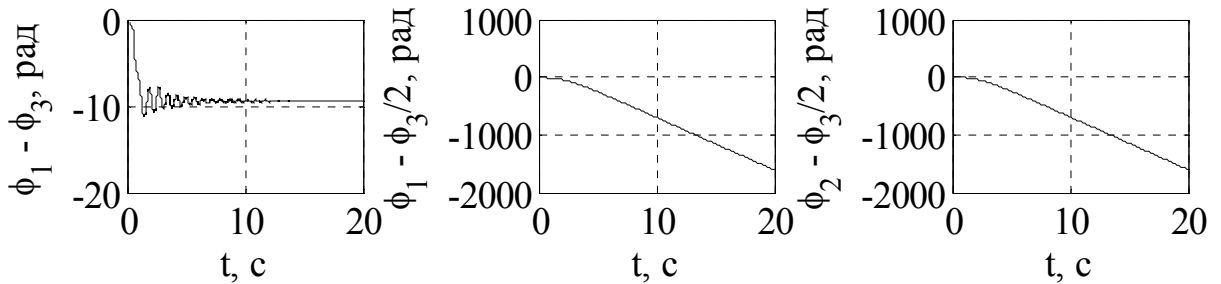


Рис. 4.31. Графики кратных разностей скоростей при  $M_i = \text{const}$

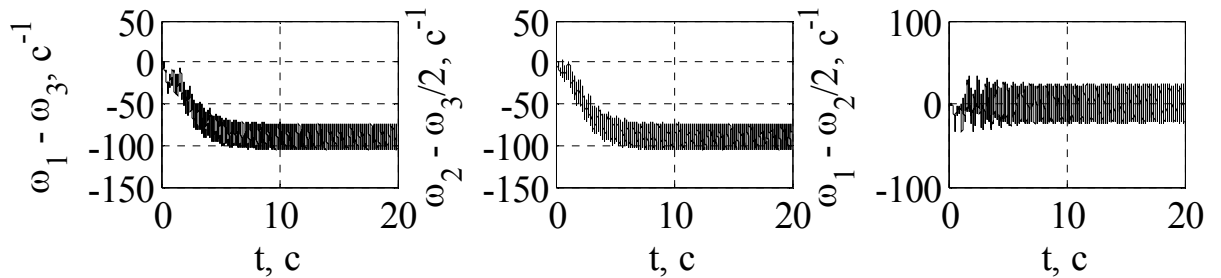


Рис. 4.32. Графики кратных разностей фаз при  $M_i = \text{const}$

Использование алгоритма управления синхронизации с одним ведущим ротором (3.31) обеспечивает стабильный двукратный синхронный режим ( $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$ ) не только для модели без груза (2.18) из предыдущего опыта, но и для модели с нестационарным грузом (2.18), (2.27), (2.29). Результаты моделирования для случая, когда  $m_r(0) = 1$  кг и скорость нагружения  $V = 2$  кг/с, приведены на рис. 4.33 и рис. 4.34. Для вибрационных сит типичное колебание массы груза  $\Delta m_r = 0,5m_0$ . Для моделирования нагружения применялся закон линейного роста  $\Delta m_r = m_r(0) + Vt; t_1 \leq t \leq t_2$ , где  $t_1$  – начало нагружения;  $t_2$  – окончание нагружения (или время, когда нагружение стабилизируется). Скорость нагружения варьировалась от 1 кг/с до 12 кг/с таким образом, чтобы  $\Delta m_r = V(t_1 - t_2) = 0,5m_0$ .

На рис. 4.33 представлены графики угловых скоростей, где средние значения  $\omega_1 = \omega_2 = 100 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_3 = 200 \text{ с}^{-1}$ . На рис. 4.34 показаны графики кратных разностей фаз  $\phi_s/n_s - \phi_r/n_r$ ;  $s, r = 1, 2, 3$ ;  $s \neq r$ , из которых видно, что фазовые сдвиги стабилизируются, демонстрируя тем самым приближенный кратный синхронный режим. По окончании нагружения колебания платформы принимают устойчивую амплитуду по горизонтали и по вертикали (рис. 4.35).

Стоит отметить, что широко используемые алгоритмы управления, например, с помощью модального регулятора или адаптивного регулятора вырабатывают управляющие сигналы, намного превышающие допустимые значения в режиме пуска. Поэтому механизм насыщения часто встраивается в систему управления.

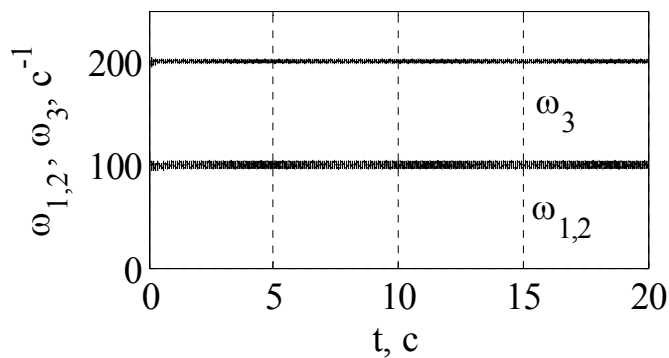


Рис. 4.33. Кратные разности скоростей при управлении алгоритмом (3.18)

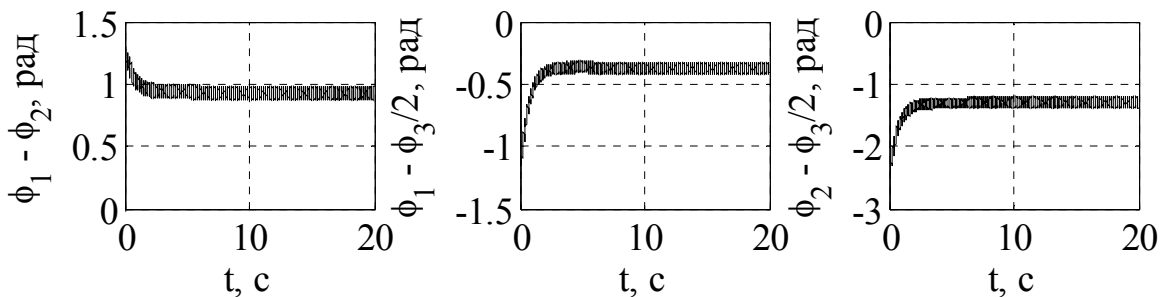


Рис. 4.34. Графики кратных разностей фаз при управлении алгоритмом (3.18)



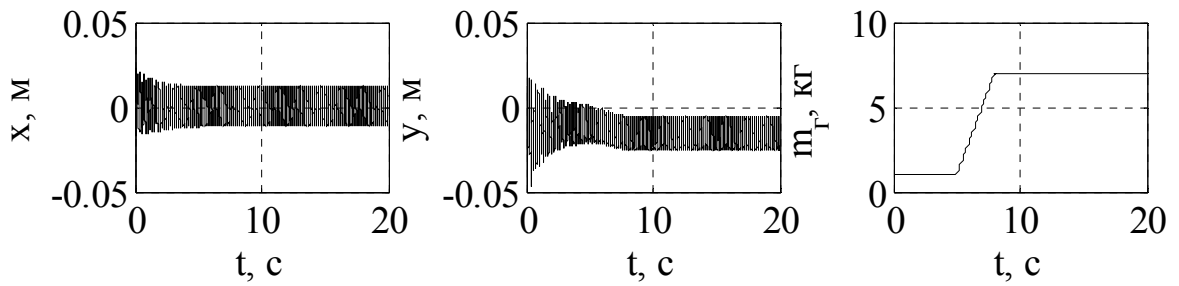


Рис. 4.35. Амплитуды колебаний платформы и изменение нагружения при управлении алгоритмом (3.18)

Результаты моделирования (2.18), (2.27), (2.29) под управлением алгоритма (3.23) и с насыщением при параметрах  $H^* = 300$  Дж;  $V = 3$  кг/с;  $t_1 = 10$  с;  $t_2 = 12$  с приведены на рис. 4.36. Моделирование демонстрирует удовлетворительную производительность замкнутой системы. На рис. 4.37 представлен график управляющего момента  $M_1$  при ограничении  $|M_i| < 6$  Н·м. Стоит отметить, что для системы без ограничений максимальная величина  $M_1 = 82$  Н·м при тех же параметрах.

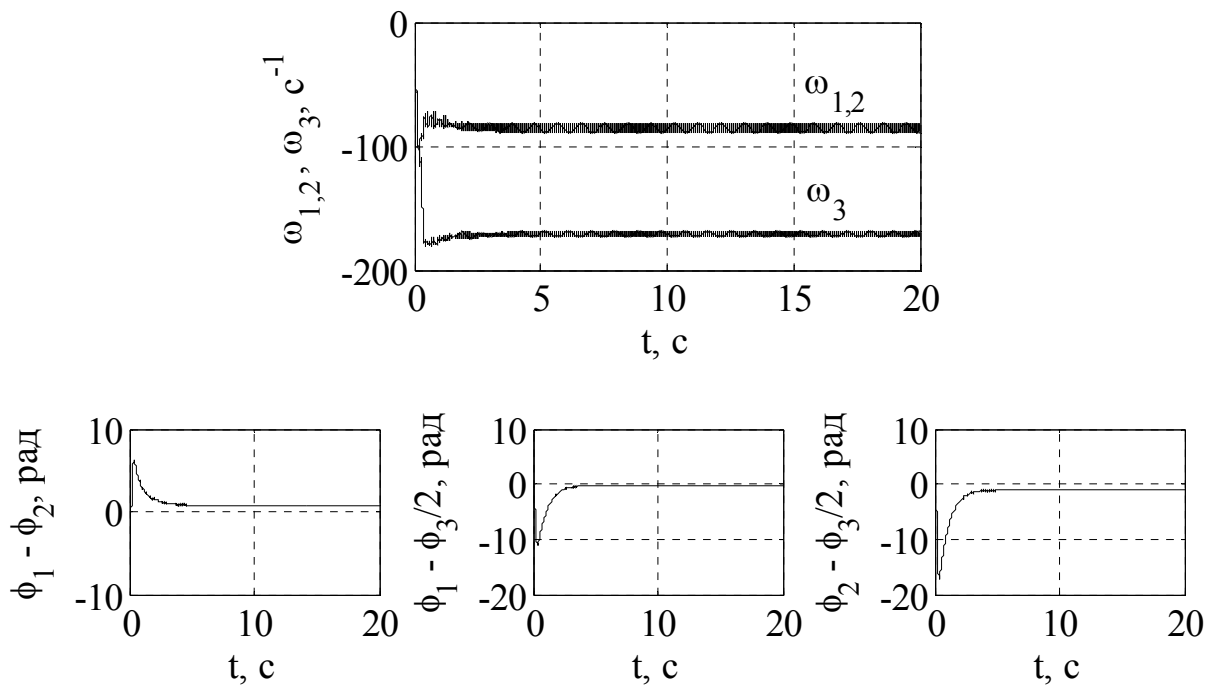


Рис. 4.36. Скорости роторов и кратные разности фаз при управлении алгоритмом (3.23)

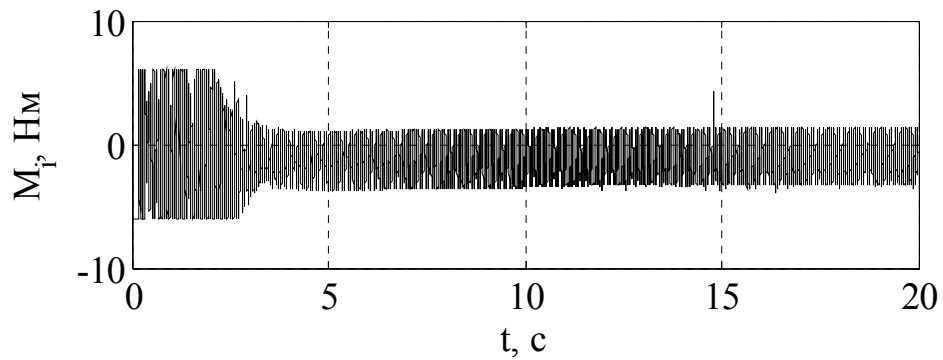


Рис. 4.37. График управляющего момента  $M_1$  при управлении алгоритмом (3.23)

Динамика анализировалась в околорезонансной зоне в диапазоне  $\omega_i \in [\omega_p, \omega_{\min}^*]$ , где  $\omega_p = 30 \text{ с}^{-1}$  – резонансная частота;  $\omega_{\min}^* = 300 \text{ с}^{-1}$  – минимальные скорости роторов, достижимые при постоянных моментах. Наличие нестационарного упруго присоединенного груза не нарушает синхронизацию ни в случае алгоритма (3.18), ни в случае алгоритма (3.23). Более того, время синхронизации практически не зависит от скорости нагружения и конечной массы груза, оно, в основном, задается с помощью  $H^*$ , который, в свою очередь, определяет установившиеся скорости роторов  $\omega_i(\infty)$ . К тому же, чем ближе  $\omega_i(\infty)$  к резонансной частоте, тем больше время синхронизации.

Номограммы зависимости времени синхронизации  $t_c$  от  $H^*$  показаны на рис. 4.38 и рис. 4.39 для простой ( $n_i = 1$ ) и двукратной ( $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$ ) синхронизации в системе (2.18), (2.27), (2.29) без и с ограничениями по управляющим моментам.

Таким образом алгоритмы (3.18) и (3.23) работают эффективно и их можно применять на реальных ВУ. Очевидно, что алгоритм (3.23) проще в реализации, однако и алгоритм (3.18) имеет свои преимущества, например, он позволяет попасть в зарезонансную область скоростей, недостижимую для управления (3.23). Для больших значений  $\omega_i(\infty)$  результаты работы обоих алгоритмов практически идентичны.

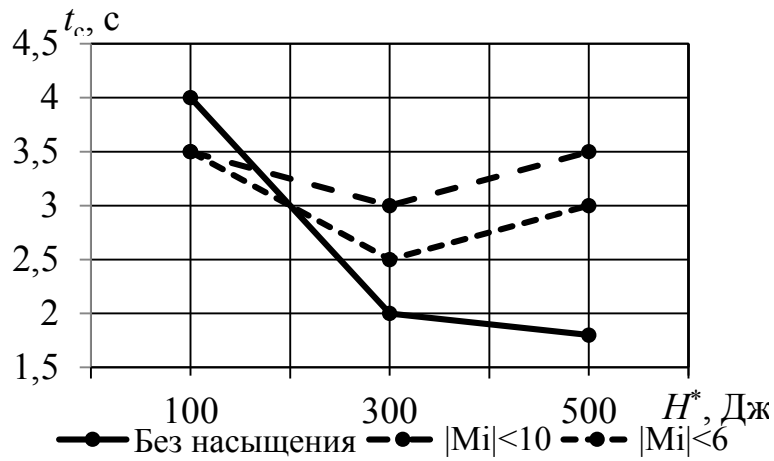


Рис. 4.38. Номограмма  $t_c(H^*)$  ( $n_i=1$ )

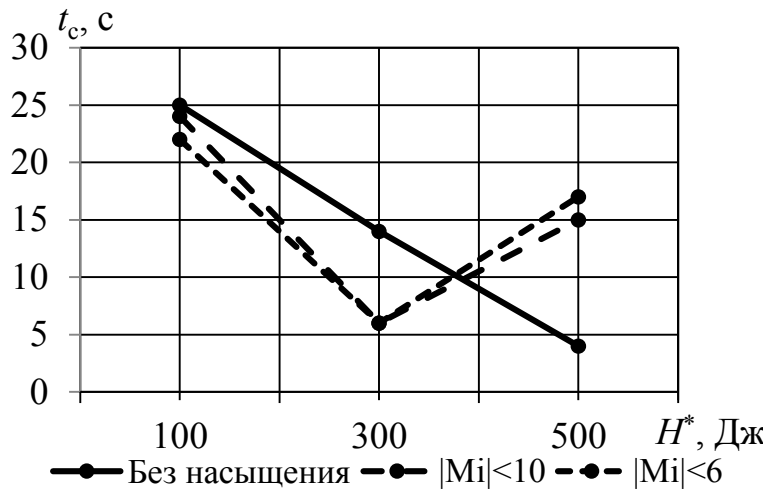


Рис. 4.39. Номограмма  $t_c(H^*)$  ( $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$ )

### 4.3. Исследование эффективности нестационарного наблюдателя

В данном разделе исследуются однороторные модели (2.16), (3.31) и сравнивается их динамика в условиях измеряемости всех переменных состояния и при неполной измеряемости с использованием нестационарного

наблюдателя (3.37). Моделирование проводилось с основными параметрами:  $J_1 = 0,014 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $m_1 = 1,5 \text{ кг}$ ;  $m_{\text{пл}} = 9 \text{ кг}$ ;  $\rho_1 = 0,04 \text{ м}$ ;  $k_c = 0,01 \text{ Дж/с}$ ;  $\beta = 5 \text{ кг/с}$ ;  $c_{01} = 5300 \text{ Н/м}$ ;  $c_{02} = 1300 \text{ Н/м}$ . Текст программы, содержащий модель наблюдателя и алгоритм (3.29), помещен в Приложении 2, 3.

Рис. 4.40 – рис. 4.42 демонстрируют результаты моделирования для модели (2.16) при полном векторе переменных состояния. На рис. 4.40 модель (2.16) запускается подачей на приводы постоянных моментов  $M_0 = 0,82 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (нижний график, «захват скоростей») и  $M_0 = 0,83 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (верхний график, прохождение резонанса). Для модели (3.31) соответствующие значения будут следующими:  $M_0 = 0,82 \text{ Н}\cdot\text{м}$  («захват скоростей»),  $M_0 = 0,83 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (прохождение резонанса).

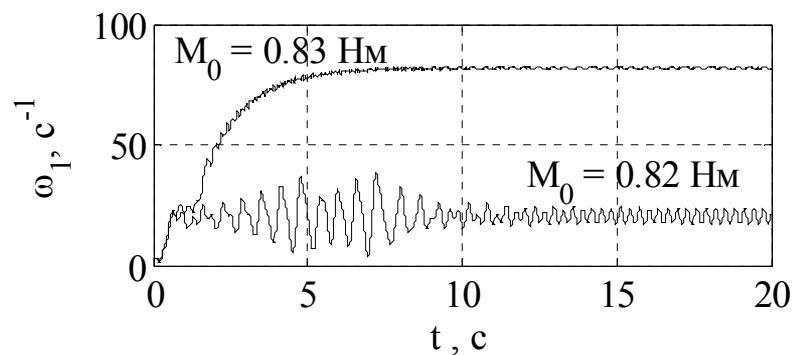


Рис. 4.40. Моделирование (2.16) при подаче постоянных моментов

Графики угловой скорости  $\omega_1$  и переменной фильтра  $\psi_1(t)$  для модели (2.16) под управлением алгоритма (3.29) показаны на рис. 4.41,б и рис. 4.42. Оба значения меньше  $M_0 = 0,82 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , при котором без управления алгоритмом происходит «захват скоростей». В дополнение к графикам скоростей (рис. 4.41,б) на рис. 4.41,а представлены графики координат платформы  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $\varphi$ . Как видно из рисунков, применение алгоритма (3.29) позволяет значительно расширить диапазон зарезонансных рабочих частот и обеспечить устойчивую амплитуду колебаний платформы после прохождения резонанса.

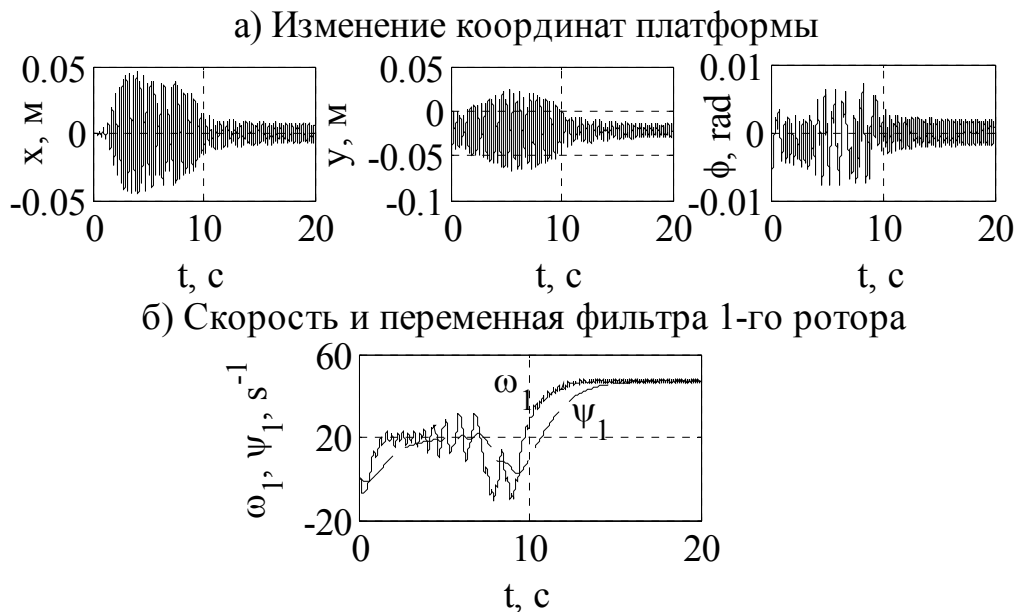


Рис. 4.41. Результаты моделирования (2.16) при управлении алгоритмом (3.29) при  $M_0 = 0,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $T_\psi = 0,12 \text{ с}$

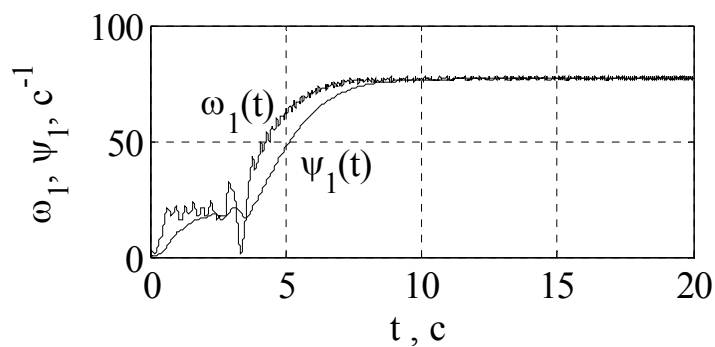


Рис. 4.42. Результаты моделирования (2.16) при управлении алгоритмом (3.29) при  $M_0 = 0,8 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $T_\psi = 0,8 \text{ с}$

Показатели производительности системы (2.16) под управлением алгоритма (3.29) при условии полной измеряемости представлены в табл. 4.2, аналогичные показатели для системы (3.35) приведены в табл. 4.3, где  $t_1$  – время прохождения через резонанс;  $t_2$  – время переходного процесса.

Таблица 4.2

Показатели производительности системы (2.16) под управлением алгоритма (3.29) (случай полной измеряемости)

$M_0, \text{Н}\cdot\text{м}$	$T_\psi, \text{с}$	Модель (2.16)	
		$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$
0,8	0,8	3,5	8
0,7	0,9	2,29	8,5
0,6	1	4,47	9
0,65	1,1	5,71	9,5
0,59	0,9	4,45	7,9
0,5	1,2	9,71	14
0,4	1,5	11,73	15,5

Таблица 4.3

Показатели производительности системы (3.31) под управлением алгоритма (3.29) (случай полной измеряемости)

$M_0, \text{Н}\cdot\text{м}$	$T_\psi, \text{с}$	Модель (3.31)	
		$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$
0,71	0,058	1,627	2
0,6	0,17	5,174	5,925
0,5	0,23	5,819	6,702
0,45	0,14	15,08	16,07
0,4	0,7	17,08	18,89
0,36	0,8	10,04	13,08

Как видно из таблиц 4.2 и 4.3, диапазон значений  $M_0$  и скоростей ротора в околорезонансной зоне для моделей (2.16) и (3.31) близок, если для управления используется алгоритм (3.29). Дальнейшее снижение  $M_0$  ниже 0,4 Н·м для модели (2.16) и ниже 0,36 Н·м для модели (3.31) ведет к «захвату» скоростей ротора на резонансной частоте (эффект Зоммерфельда).

На рис. 4.43 изображены графики переменных состояния ( $x_c, y_c, \dot{x}_c, \dot{y}_c, \varphi, \dot{\varphi}$ ), угла поворота ротора  $\varphi_1$  и его скорости  $\dot{\varphi}_1$  с переменной фильтра  $\psi_1(t)$ , а также графики ошибок наблюдения  $e_{n1}, e_{n2}$ . Как видно из графиков, нормализованная ошибка наблюдений для скорости платформы

$$E = \frac{\max |e_{H2}|}{\max |dy_c / dt|} \cdot 100\% = 2,5\%.$$

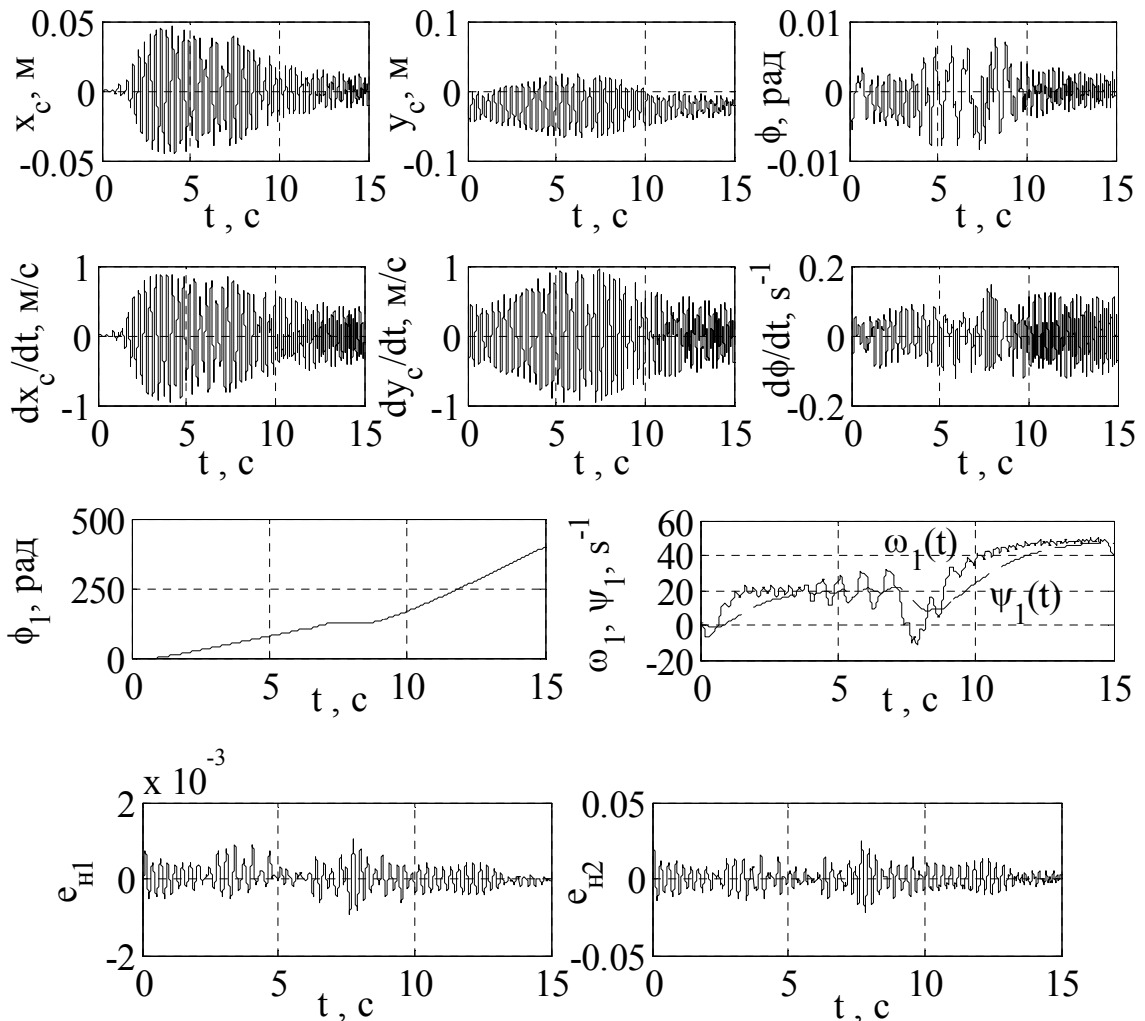


Рис. 4.43. Результаты моделирования ВУ (2.16) с наблюдателем (3.37)

Показатели производительности систем с использованием алгоритма (3.29) и наблюдателя (3.37) представлены в табл. 4.4 (для модели (2.16)) и в табл. 4.5 (для модели (3.31)). Синтезированный нестационарный наблюдатель (3.37) был проверен в работе на двух однороторных моделях под управлением алгоритма (3.29) и была продемонстрирована его эффективность. Максимальная абсолютная ошибка наблюдений не превышает 2.5% от максимальной амплитуды колебаний скорости. Время затухания ошибки меньше, чем время прохождения резонанса  $t_1$  в 2-3 раза.

Таблица 4.4

Показатели производительности системы (2.16) с наблюдателем (3.35) под управлением алгоритма (3.29)

$M_0, \text{Н}\cdot\text{м}$	$T_\psi, \text{с}$	Модель (2.16)	
		$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$
0,8	0,8	3,55	8,1
0,7	0,9	2,295	8,53
0,6	1	4,671	9,05
0,65	1,1	5,715	9,53
0,5	1,2	9,713	14,14
0,4	1,5	11,73	15,5

Таблица 4.5

Показатели производительности системы (3.31) с наблюдателем (3.37) под управлением алгоритма (3.29)

$M_0, \text{Н}\cdot\text{м}$	$T_\psi, \text{с}$	Модель (3.31)	
		$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$
0,71	0,058	1,632	2,102
0,6	0,17	2,637	3,183
0,5	0,23	4,899	5,948
0,45	0,14	12,467	13,057
0,4	0,7	14,431	16,519
0,36	0,8	11,562	14,297

Алгоритм (3.29) успешно работает в паре с наблюдателем (3.35) при отсутствии датчика вертикальной скорости платформы. Предложенный наблюдатель позволяет снизить величину управляющего момента примерно в 2 раза, что соответствует результатам моделирования с алгоритмом (3.29) в случае полной измеряемости. Время прохождения резонанса  $t_1$  для алгоритма (3.29) при работе в паре с синтезированным наблюдателем (3.37) не превышает  $t_1$  в случае полной измеряемости. Таким образом, наблюдатель, полученный для упрощенной модели (3.31), может успешно применяться и для более сложной модели (2.16).



#### 4.4. Исследование алгоритма прохождения через резонанс для двухроторной ВУ с учетом динамики электроприводов

В данном разделе исследуется работа моделей (2.17) и (2.17), (2.19) под управлением алгоритма экономичного пуска и прохождения резонанса (3.29). Моделирование проводилось с основными параметрами:  $J_i = 0,014$  кг·м<sup>2</sup>;  $m_1 = m_2 = 1,5$  кг;  $m_{пл} = 10,5$  кг;  $\rho_1 = \rho_2 = 0,04$  м;  $k_c = 0,01$  Дж/с;  $\beta = 5$  кг/с;  $c_{01} = 2650$  Н/м,  $c_{02} = 2650$  Н/м. На рис. 4.44 – рис. 4.45 представлены результаты моделирования при традиционном управлении ( $M_i = \text{const}$ ) для модели без учета динамики приводов (2.17) и с учетом динамики (2.17), (2.19) соответственно. На рис. 4.44 модель (2.17) запускается подачей на приводы постоянных моментов  $M_{0i} = 1,3$  Н·м (нижний график, «захват скоростей») и  $M_{0i} = 1,35$  Н·м (верхний график, прохождение резонанса),  $i = 1, 2$ .

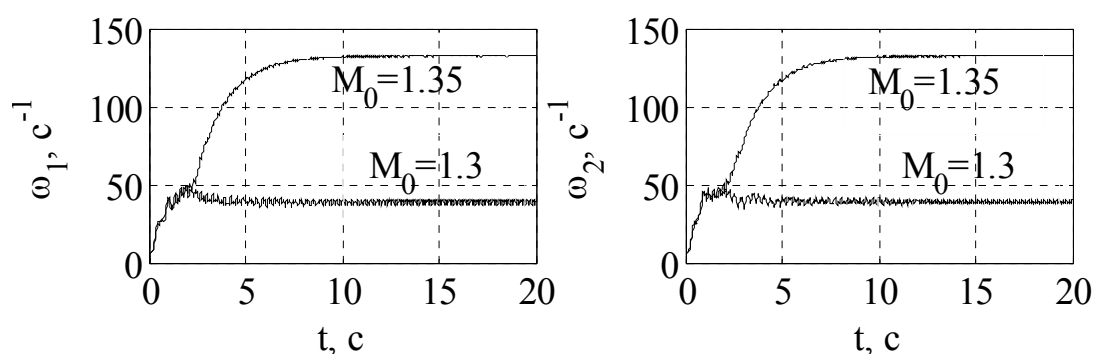


Рис. 4.44. Моделирование (2.17) при подаче постоянных моментов

На рис. 4.45 модель (2.17), (2.19) запускается подачей на приводы постоянных моментов  $M_{0i} = 1,5$  Н·м («захват скоростей») и  $M_{0i} = 1,55$  Н·м (прохождение резонанса), то есть учет динамики приводов вынуждает повышать моменты на 13,3 %.

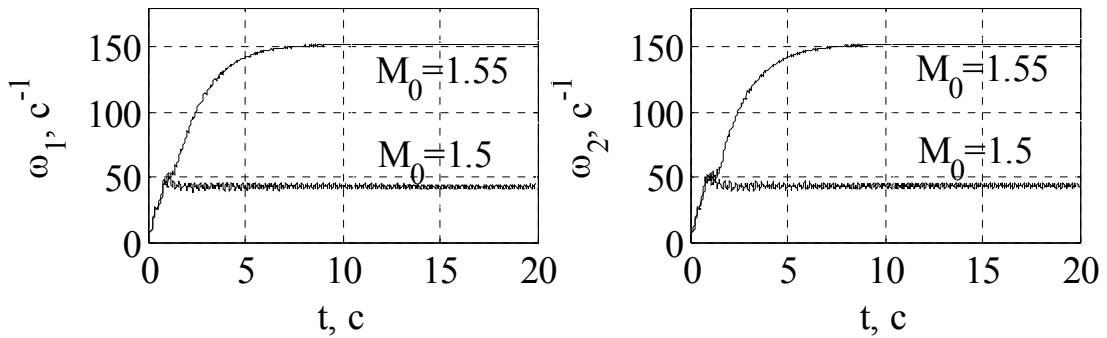


Рис. 4.45. Моделирование (2.17), (2.19) при подаче постоянных моментов

На рис. 4.46 приведены результаты моделирования (2.17) при управлении алгоритмом (3.29): *a*), *б*) и *в*) – графики изменения координат платформы ( $x_c, y_c, \varphi$ ); *г*) – исходные угловые скорости роторов  $\omega_i$  и они же, пропущенные через апериодический фильтр  $\psi_i$ . Модель (2.17) успешно проходит резонанс ( $\omega_p = 28 \text{ с}^{-1}$ ) при минимальных значениях моментов  $M_{0i} = 0,846 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , что на 35 % меньше  $M_{0i} = 1,3 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , при которых без управления алгоритмом происходит «захват скоростей». Постоянные времени фильтра  $T_{\psi i} = 0,1 \text{ с}$ .

Результаты моделирования (2.17) с учетом динамики электроприводов (2.17), (2.19) приведены на рис. 4.47. Правильный выбор коэффициентов усиления датчика тока  $k_{дт}$  и ПИ регулятора тока  $\beta$  и задание соответствующих значений  $M_0$  и  $I_{я}$  может обеспечить тот же диапазон скоростей, что и в предыдущем случае без учета динамики приводов. Здесь, несмотря на увеличенное вдвое время переходного процесса (время прохождения резонанса), скорости роторов также успешно вышли в зарезонансную зону, это удалось обеспечить даже с меньшими значениями моментов  $M_{0i} = 0,83 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , что на 46,45 % ниже, чем без управления.

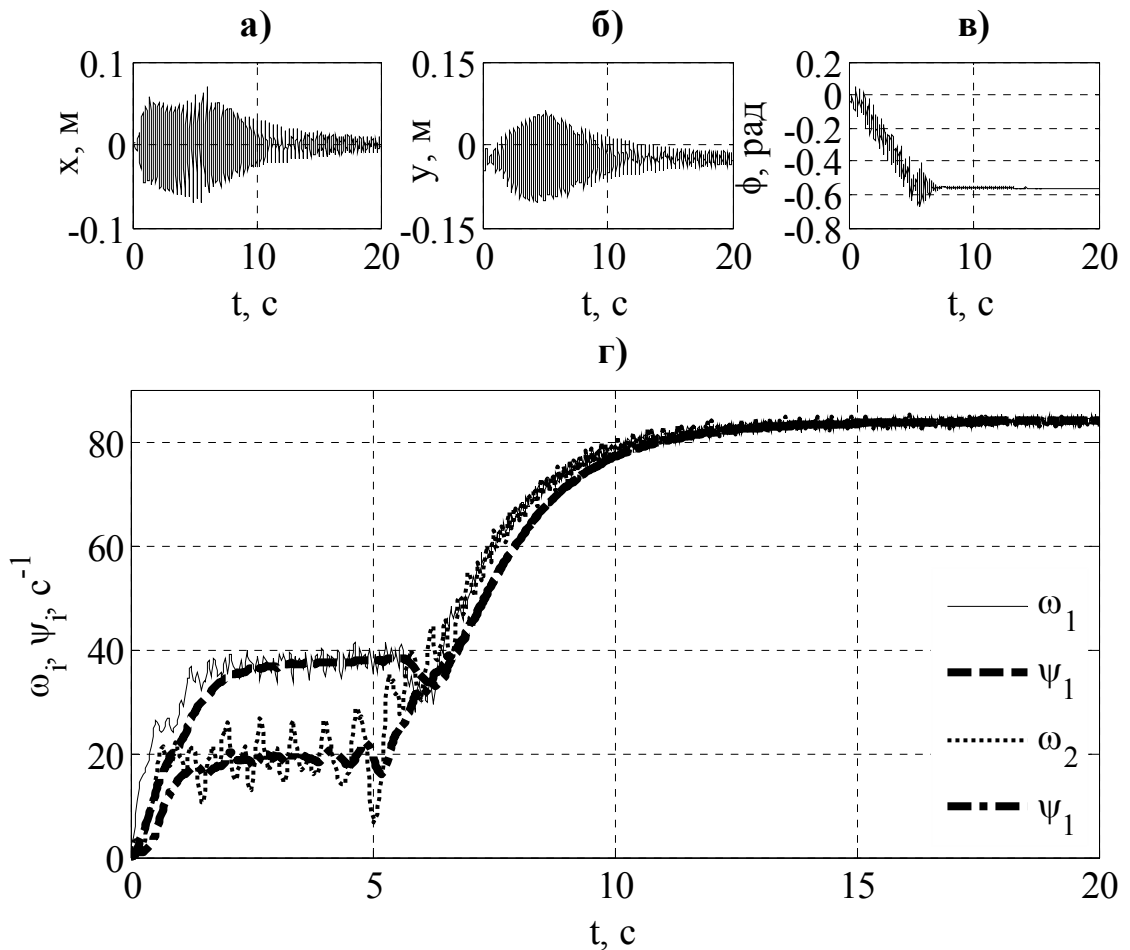


Рис. 4.46. Результаты моделирования (2.17) при управлении алгоритмом (3.29) при  $M_{0i} = 0,846 \text{ Н}\cdot\text{м}$

Моделирование показало, что применение алгоритма (3.29) позволяет значительно расширить диапазон зарезонансных рабочих частот в более близкую к резонансу область и обеспечить устойчивую амплитуду колебаний платформы после прохождения резонанса. Достижимые зарезонансные угловые скорости удалось снизить со  $130 \text{ с}^{-1}$  до  $84 \text{ с}^{-1}$  для модели (2.17) и со  $150 \text{ с}^{-1}$  до  $80 \text{ с}^{-1}$  для (2.17), (2.19). Алгоритм (3.29) также позволяет снизить пусковые моменты с  $M_{0i} = 1,35 \text{ Н}\cdot\text{м}$  до  $M_{0i} = 0,846 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (35 %) для (2.17) и с  $M_{0i} = 1,55 \text{ Н}\cdot\text{м}$  до  $M_{0i} = 0,83 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (46,45 %) для (2.17), (2.19).

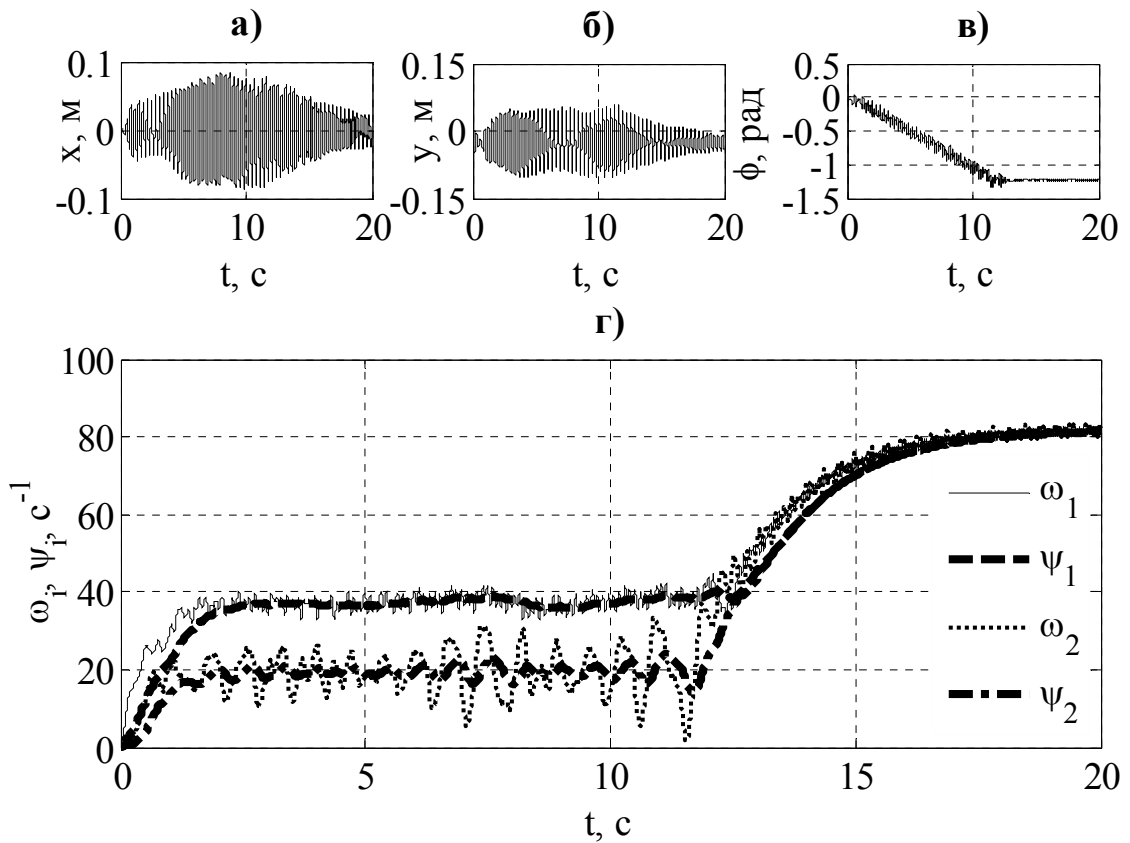


Рис. 4.47. Результаты моделирования (2.17), (2.19) при управлении алгоритмом (3.29) при  $M_{0i} = 0,83 \text{ Н}\cdot\text{м}$

Как видно из рис. 4.47, учет динамики приводов не влияет на нижнюю границу достижимых резонансных частот. Более того, не требуется даже изменения постоянной времени фильтра  $T_\psi$ .

#### Выводы по главе 4

1. Компьютерное моделирование алгоритмов П- (3.24) и ПИ- (3.27) алгоритмов кратной синхронизации подтвердило их эффективность для обеспечения стабильного приближенного частотно-координатного синхронного режима вращения роторов. Оба алгоритма показывают стабильную работу в режиме кратной синхронизации для моделей двухроторных ВУ с неидентичными роторами, с учетом динамики СЭП и груза. При этом, как видно из графиков, ПИ-алгоритм (3.27) обеспечивает меньшие биения скоростей роторов в установившемся режиме.

2. Алгоритмы управления кратной синхронизацией для МВУ с числом роторов  $n \geq 3$  при моделировании на трехроторных ВУ, в том числе на моделях, учитывающих упругость карданных валов и нестационарность груза, обеспечивают стабильный приближенный кратный частотно-координатный синхронный режим вращения роторов. При этом алгоритм взаимной синхронизации (3.18) обеспечивает более высокое быстродействие процесса синхронизации, чем алгоритм с одним ведущим ротором (3.23), преимущество которого заключается в более простой реализации.

3. Наблюдатель скорости вертикальных перемещений платформы (3.37), разработанный в главе 3, был исследован в опытах прохождения резонанса на однороторной модели ВУ (2.16), совершающей колебания в вертикальной плоскости. Максимальная абсолютная ошибка наблюдений не превысила 2.5% от максимальной амплитуды колебаний скорости. Моделирование показало, что наблюдатель, синтезированный по упрощенной модели (3.31), движущейся только по вертикальной оси, позволяет реализовать управление более сложной моделью (2.16) с помощью алгоритмов, использующих обратные связи.

4. Алгоритм (3.29) показал свою эффективность, обеспечив проходимость резонанса моделей одно- и двухроторных ВУ, в том числе учитывающих динамику электроприводов, в условиях неполной измеряемости и редуцированной энергии, позволив расширить область достижимых зарезонансных частот в сторону резонансной зоны.

## ГЛАВА 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ МВУ НА СТЕНДЕ СВ-2М

### 5.1. Управление пуском и прохождением резонансной зоны СВ-2М

В данном разделе приведены результаты экспериментов по пуску и прохождению резонанса на двухроторном вибростенде СВ-2М при управлении алгоритмом (3.29). Для встраивания в систему управления стендом СВ-2М алгоритм (3.29) был переведен в MATLAB Simulink в виде блока-подсистемы, структура которого приведена на рис. 5.1.

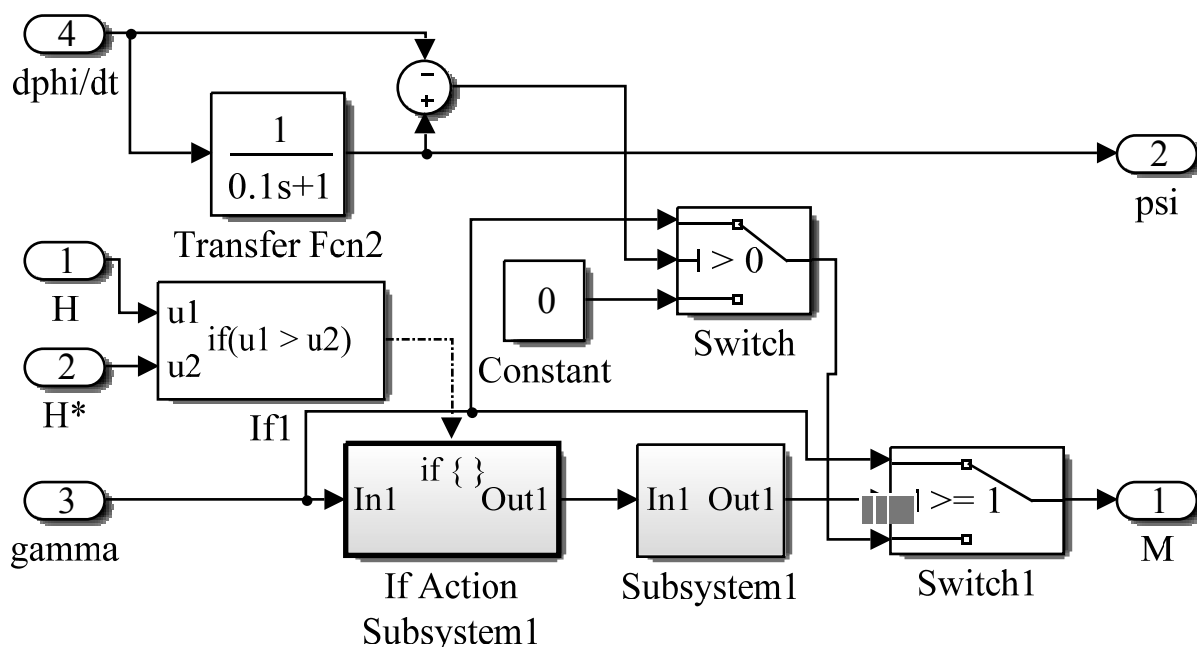


Рис. 5.1. Алгоритм раскачки и прохождения резонанса (3.29)

На первом этапе исследовалось влияние постоянной времени фильтра  $T_\psi$  на время разгона (раскачки) роторов  $t_{pi}$ ,  $i = 1, 2$ .  $T_\psi$  изменялась в диапазоне от 0,1 с до 2 с с шагом 0,1. Величина  $u_i$  была выбрана равной 0,95, при которой ВУ успешно разгонялась во всем диапазоне изменения  $T_\psi$ . Ниже представлена соответствующая зависимость.

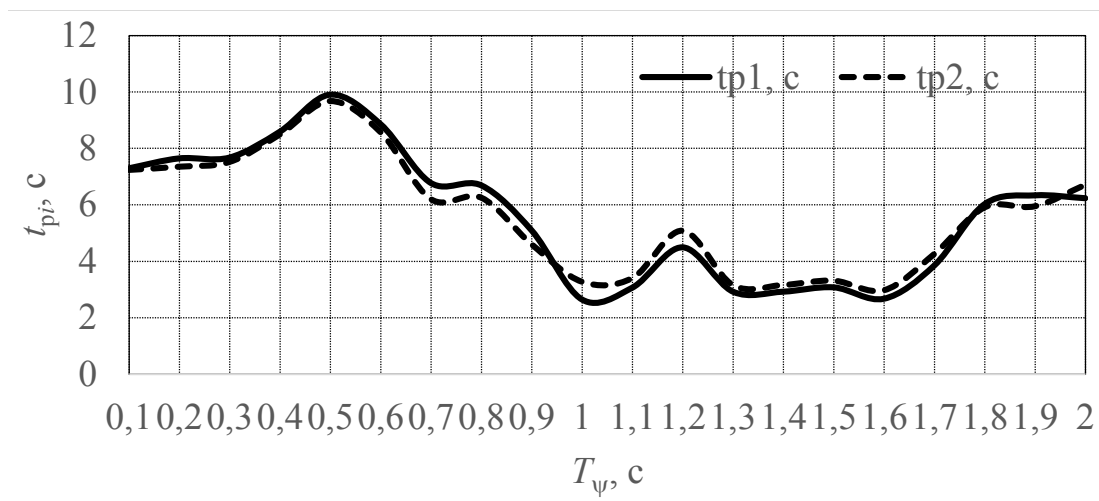


Рис. 5.2. Зависимость времени раскочки от постоянной времени фильтра

Из графика  $t_{pi}(T_\psi)$  на рис. 5.2 видно, что время раскочки роторов достигает близких к минимальным значений ( $t_{p1} = 2,65$  с;  $t_{p2} = 3,27$  с), когда постоянная времени фильтра равна 1 с. Из рис. 5.3 видно, что перерегулирование при  $T_\psi = 1$  с практически отсутствует, поэтому эта постоянная времени фильтра является оптимальной для раскочки. Дальнейшие исследования по нахождению минимальной величины управляющего сигнала  $\gamma$  будут производиться при  $T_\psi = 1$  с.

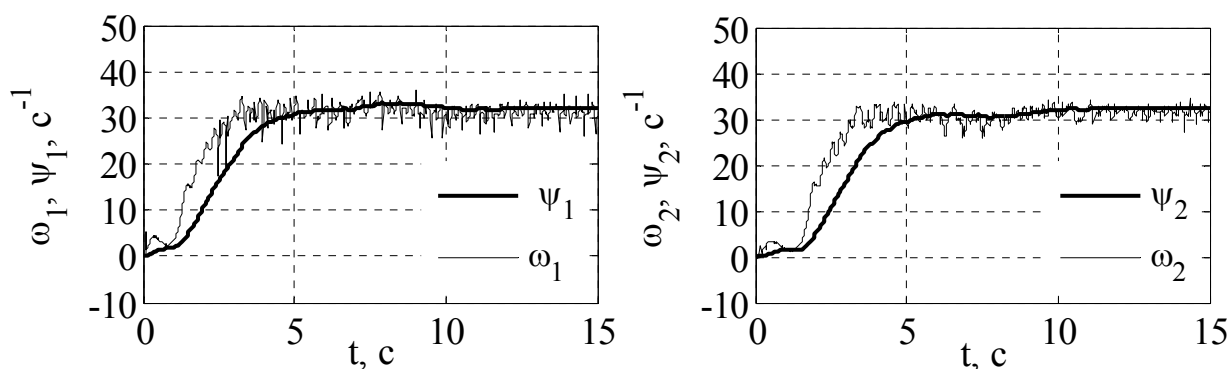


Рис. 5.3. Графики угловых скоростей роторов  $T_\psi = 1$  с

Минимальная величина управляющего сигнала в алгоритме, при которой роторы стартовали и разгонялись до одинаковых угловых скоростей ( $\omega \approx 30 \text{ с}^{-1}$ ), составила 0,81. Задаваемый уровень полной механической

энергии  $H^*$  при этом был равен 100 Дж. Ниже приведены графики трех прогонов при  $\gamma = 0,81$  (рис. 5.4 – 5.6), время одного прогона увеличено до 30 с, поскольку снижение  $\gamma$ , как правило, увеличивает время раскачки.

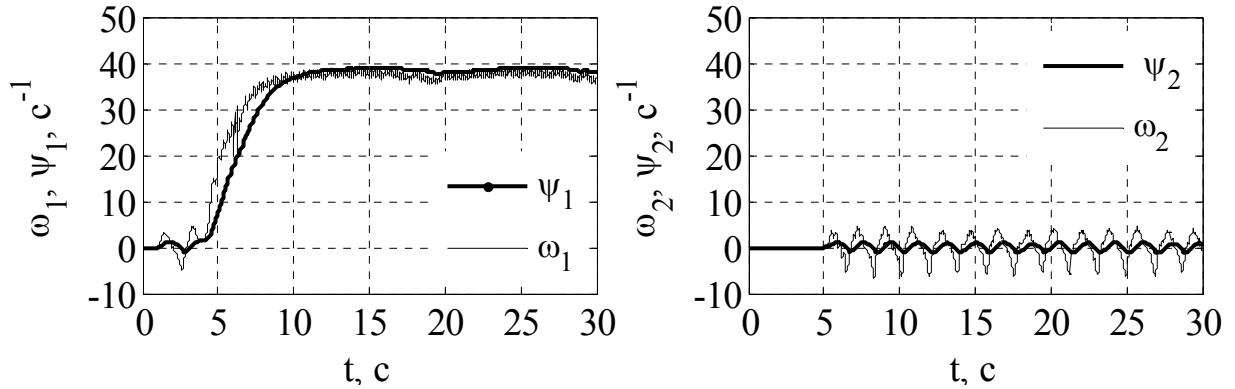


Рис. 5.4. Графики угловых скоростей роторов при  $\gamma = 0,81$  (1-й прогон)

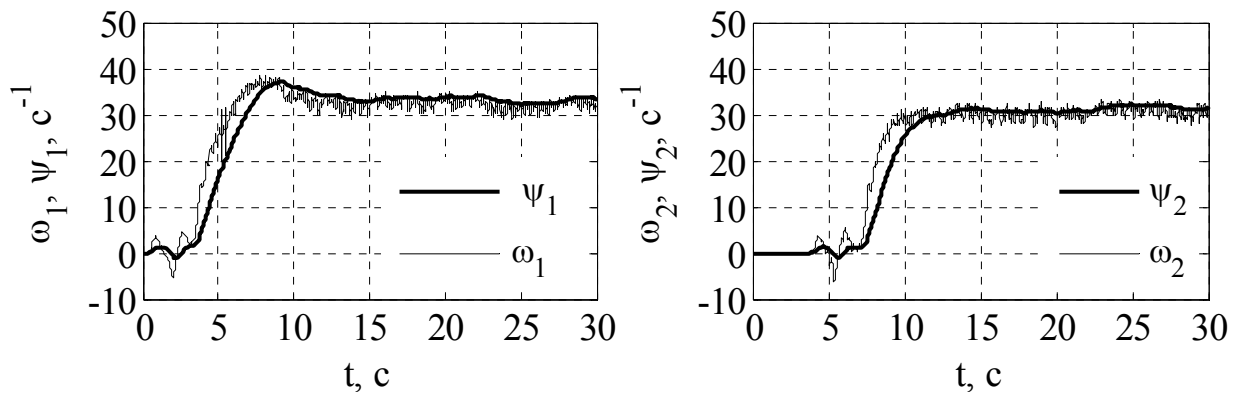


Рис. 5.5. Графики угловых скоростей роторов при  $\gamma = 0,81$  (2-й прогон)

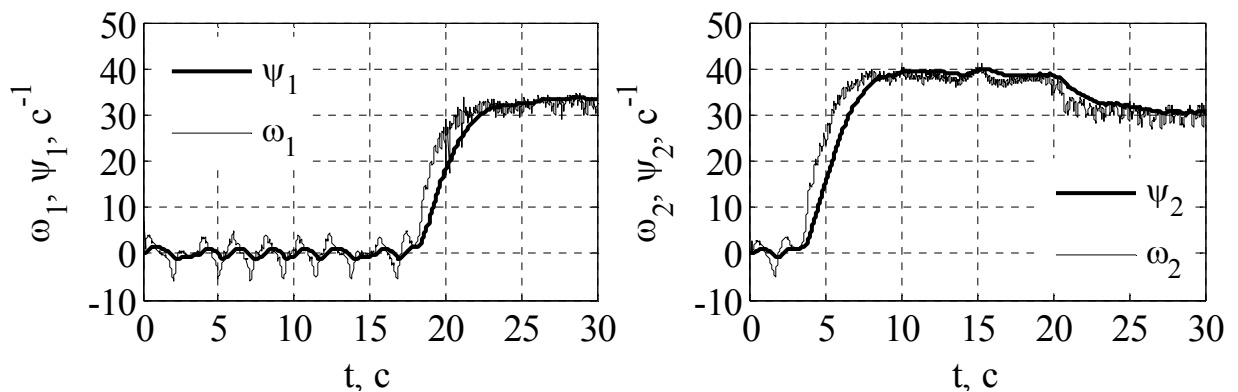


Рис. 5.6. Графики угловых скоростей роторов при  $\gamma = 0,81$  (3-й прогон)



Как видно из рис. 5.4 – 5.6, при  $\gamma = 0,81$  результаты не были стабильными. В первом прогоне (рис. 5.4) первый ротор разогнался до  $38 \text{ с}^{-1}$ , а второй – не смог раскачаться и стартовать; во втором случае (рис. 5.5) оба ротора успешно разогнались, но их угловые скорости «застряли» на резонансной частоте  $\omega \approx 30 \text{ с}^{-1}$ ; в третьем случае (рис. 5.6) второй ротор разогнался раньше и вышел на скорость  $38 \text{ с}^{-1}$ , а первый смог раскачаться до  $30 \text{ с}^{-1}$  за очень большое время порядка 18 с и вызвал снижение скорости второго ротора также до  $30 \text{ с}^{-1}$ , то есть оба ротора «застряли» на резонансной частоте под влиянием эффекта Зоммерфельда.

Третий параметр, который можно задавать в алгоритме помимо  $T_\psi$  и  $\gamma$  – это  $H^*$ . Его влияние на скорости роторов представлено на рис. 5.7. Чтобы максимально исключить препятствование малой величины  $\gamma$  раскачке роторов, ее значение было выбрано намного больше необходимого для успешного пуска стенда ( $\gamma = 0,95$ ). Это значение, при котором роторы успешно разгоняются и без использования алгоритма.

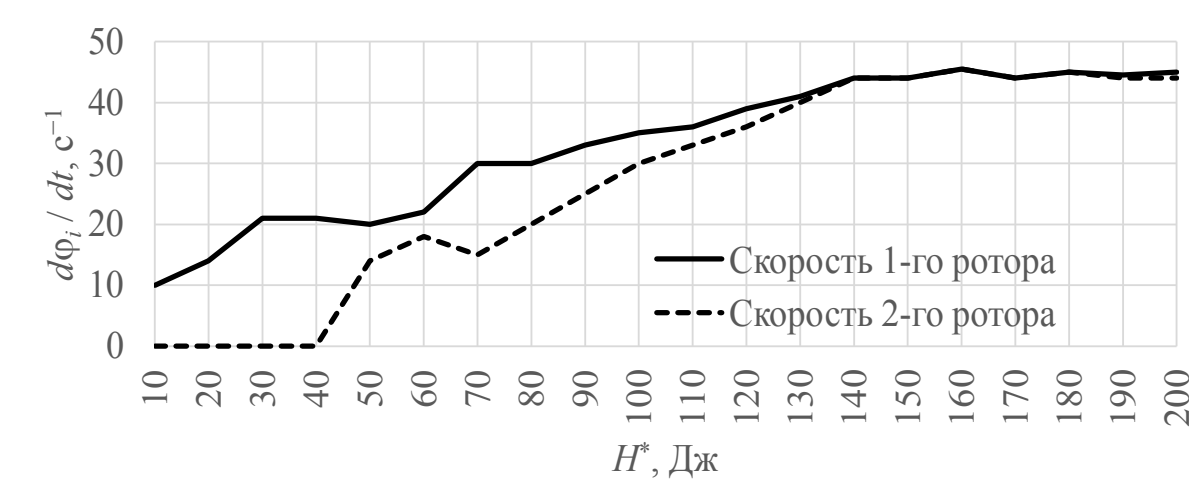


Рис. 5.7. Зависимость угловых скоростей роторов от уровня  $H^*$

Как видно из рис. 5.7, рост  $H^*$  увеличивает угловые скорости до определенного момента – до  $H^* = 140 \text{ Дж}$ , а затем они стабилизируются около  $44 \text{ с}^{-1}$ , т. е. дальнейшее повышение  $H^*$  не имеет смысла. Причем

роторы проходят резонансную зону уже при  $H^* \geq 110$  Дж. Будем использовать это значение  $H^*$  при исследовании прохождения резонансной зоны в случае минимального управляющего сигнала, при котором стенд успешно запускается (оба ротора раскручиваются).

Результаты опытов, приведенные на рис. 5.4 – 5.6, показывают, что даже в случае разгона роторов, они застревали на резонансной частоте в  $30 \text{ с}^{-1}$ . Повысим  $H^*$  до 110 Дж (рис. 5.8).

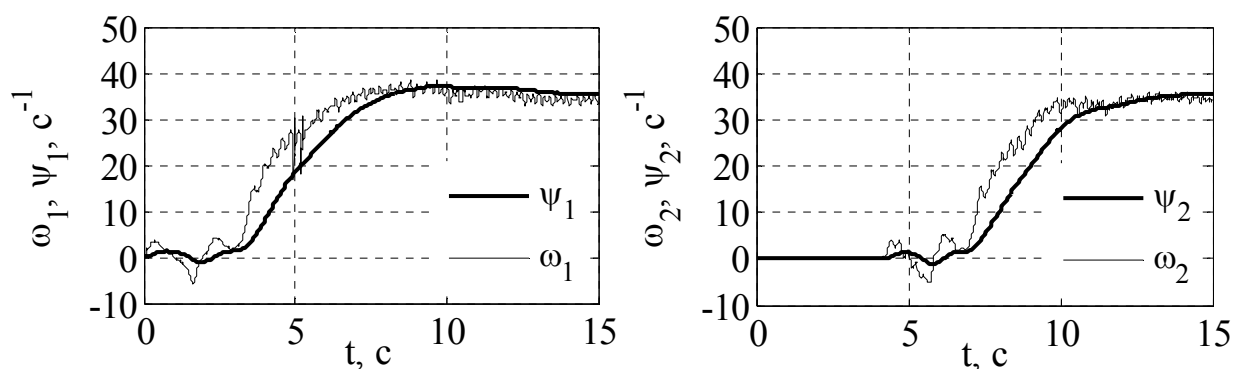


Рис. 5.8. Графики угловых скоростей роторов при  $\gamma = 0,81$  и  $H^* = 110$  Дж

Оба ротора прошли резонанс и стабилизировались на скорости в  $34 \text{ с}^{-1}$ . При  $H^* \geq 140$  Дж скорости становятся равными  $36,5 \text{ с}^{-1}$  и далее не поднимаются. С повышением  $\gamma$  до 0,82 ( $H^* = 110$  Дж) роторы стабильно запускаются, и проходят резонансную зону. Таким образом, минимально возможное значение  $\gamma$ , при котором в большинстве случаев происходила успешная раскочка роторов составляет 0,81, а значение  $\gamma$ , при котором роторы всегда раскручивались при оптимальной  $T_\psi = 1 \text{ с} - 0,82$ . Постоянные моменты позволяют стенду запуститься, преодолеть резонанс и выйти на скорости порядка  $44 \text{ с}^{-1}$  при величине  $M_i = 0,95$ . При  $M_i < 0,95$  пуск ВУ происходит нестабильно: один или оба ротора не всегда раскручиваются (рис. 5.9).

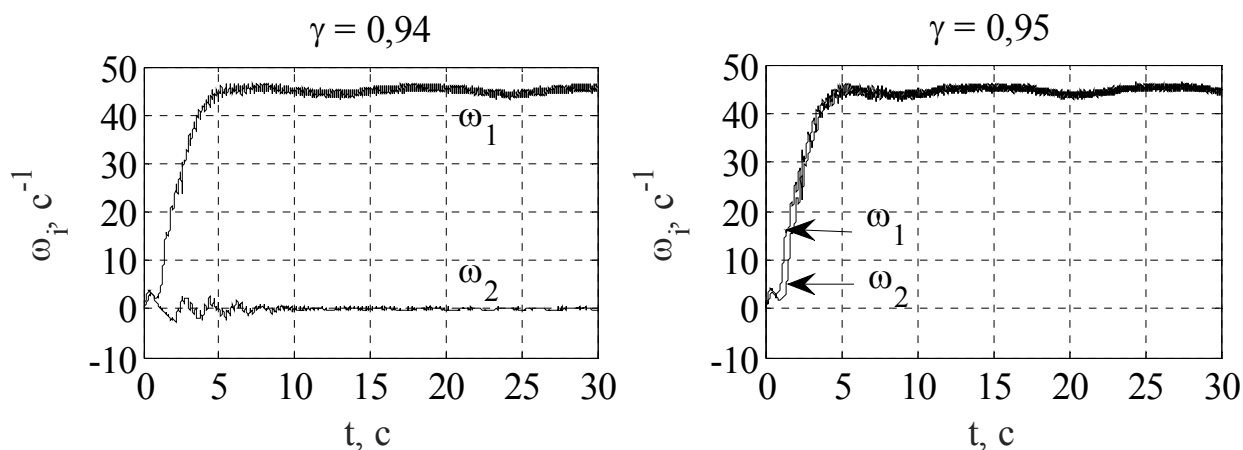


Рис. 5.9. Графики угловых скоростей роторов при  $M_i = 0,95$

Таким образом, эксперименты на стенде показали, что алгоритм позволяет раскрутить, провести через резонансную зону и вывести на заданную скорость роторы при меньших значениях управляющих сигналов ( $\gamma = 0,81$ ), чем в случае подачи на приводы постоянных моментов ( $M_i = 0,95$ ), то есть применение алгоритма снижает пусковые моменты на 13,8 %.

Также алгоритм расширяет диапазон рабочих скоростей в сторону резонансной зоны. Минимальная зарезонансная скорость, на которую вышли оба ротора при  $\gamma = 0,81$  и  $H^* = 110$  Дж,  $\omega_{\min} \approx 34 \text{ c}^{-1}$ . При управлении постоянными моментами ( $M_i = 0,95$ ) скорость обоих роторов  $\omega_{\min} \approx 44 \text{ c}^{-1}$ , то есть применение алгоритма позволяет снизить рабочие скорости на 22,7 %.

Численные результаты экспериментов сведены в таблицу 5.1.

Таблица 5.1

Результаты исследований эффективности работы алгоритма (3.29) в сравнении с управлением постоянными моментами

Параметры стенда	Управление с помощью алгоритма				Управление с помощью постоянных моментов	
	$T_{\psi}, \text{ c}$	$H^*, \text{ Дж}$	$\gamma$	$\omega_i, \text{ c}^{-1}$	$\gamma$	$\omega_i, \text{ c}^{-1}$
Значения	1	110	0,81	34	0,95	$44 \text{ c}^{-1}$

## 5.2. Экспериментальное исследование алгоритмов кратной синхронизации роторов МВУ

В данном разделе приведены результаты управления простой и кратной синхронизацией роторов двухроторного вибростенда СВ-2М с помощью алгоритма (3.26), который встраивался в систему управления стендом в MATLAB Simulink в виде блока-подсистемы (рис. 5.10).

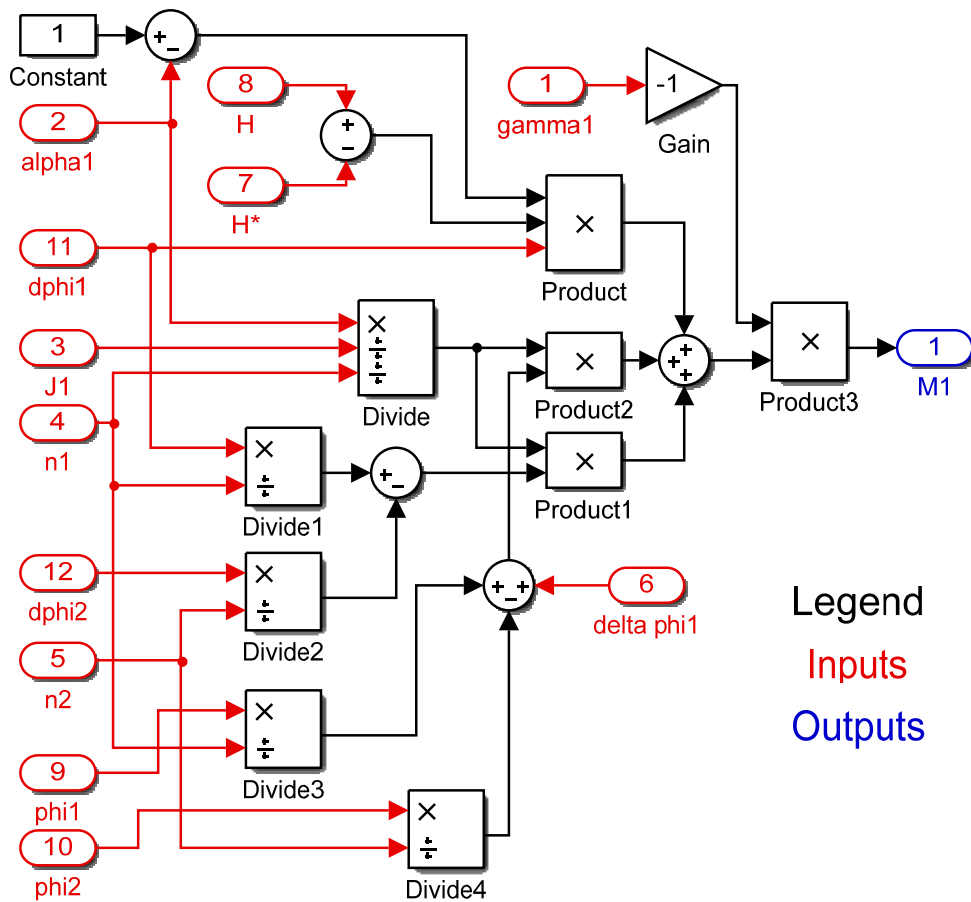


Рис. 5.10. Структура алгоритма (3.26) для 1-го ротора в MATLAB Simulink

Параметры алгоритма во время экспериментов задавались следующими:  $\gamma_i = 0,02$ ;  $\alpha_{12} = 0,25$ ;  $H^* = 350$  Дж;  $J_i = 0,014$ ;  $n_i = \text{var}$ ;  $\Delta\phi_i = \text{var}$ . Результаты экспериментов выводились в виде графиков угловых скоростей вибровозбудителей (а) для демонстрации наличия кратной частотной синхронизации и приведенного кратного сдвига фаз (б), показывающей

наличие кратной координатной синхронизации. Кратная координатная синхронизация при управлении алгоритмом (3.26) достигается при  $\varphi_s/n_s - \varphi_r/n_r \rightarrow \text{const}$ . Кратная частотная синхронизация при использовании алгоритма (3.26) достигается при  $\Delta\dot{\varphi} = (\dot{\varphi}_s/n_s - \dot{\varphi}_r/n_r) \rightarrow 0$ ,  $s = 1, \dots, n$ ;  $r = 1, \dots, n$ ;  $s \neq r$ .

На рис. 5.11 приведены результаты опыта управления простой (однократной) синхронизацией.

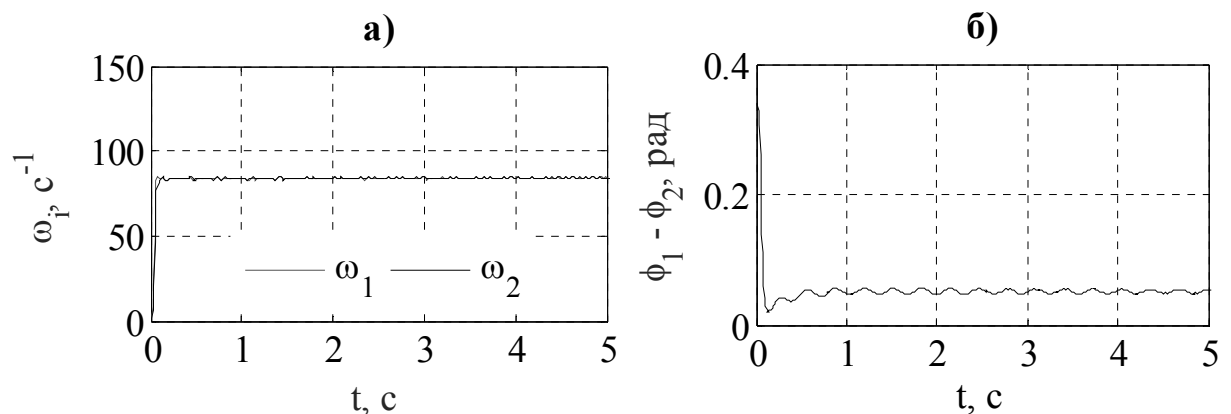


Рис. 5.11. Результаты экспериментов при  $\Delta\varphi_{1\text{зад}} = 2$ ;  $\Delta\varphi_{2\text{зад}} = -2$ ;  $n_i = 1$

На рис. 5.12 приведены результаты опыта управления двухкратной синхронизацией.

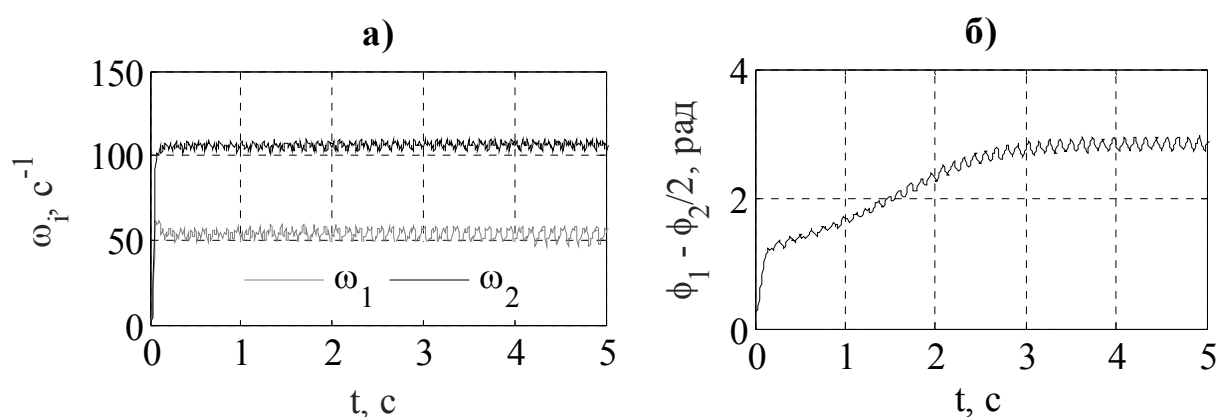


Рис. 5.12. Результаты экспериментов при  $\Delta\varphi_{1\text{зад}} = 2$ ;  $\Delta\varphi_{2\text{зад}} = -2$ ;  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$

На рис. 5.13 приведены результаты опыта управления кратной синхронизацией при  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ .

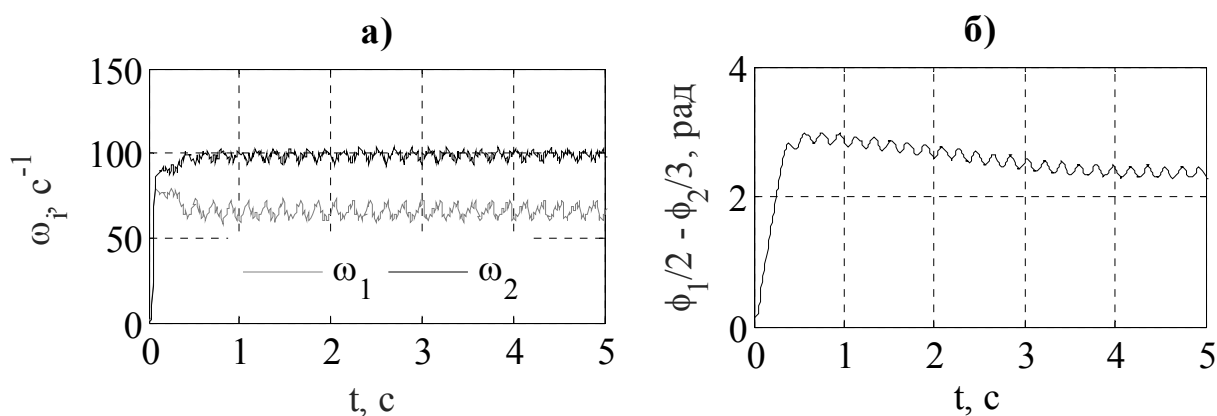


Рис. 5.13. Результаты экспериментов при  $\Delta\varphi_{1зад} = 2$ ;  $\Delta\varphi_{2зад} = -2$ ;  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$

Во всех трех случаях наблюдается устойчивая кратная синхронизация, что подтверждает эффективность алгоритма (3.26)

### Выводы по главе 5

1. Экспериментальное исследование пуска и прохождения резонансной зоны на двухроторном вибростенде СВ-2М показало, что алгоритм (3.29) позволяет осуществлять запуск стенда при меньших значениях управляющих сигналов, чем в случае подачи постоянных сигналов без использования управления. Также алгоритм (3.29) позволяет расширить диапазон скоростей вращения роторов в сторону меньших значений, приближенных к резонансной зоне.

2. Эксперименты по работе стенда СВ-2М в кратном синхронном режиме продемонстрировали эффективность ПИ-алгоритма (3.27) в обеспечении устойчивой приближенной кратной частотно-координатной синхронизации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

- Предложено определение приближенной кратной частотно-координатной синхронизации роторов МВУ.
- Разработаны новые алгоритмы управления простой и кратной синхронизацией роторов двухроторной ВУ, обеспечивающие возможность управления приведенным сдвигом фаз, влияющим на форму траекторий колебаний.
- Разработаны два типа упрощенных алгоритмов управления МВУ с числом роторов не менее трех, обеспечивающие приближенную кратную частотно-координатную синхронизацию роторов в условиях нестационарности нагрузки и с учетом динамики приводов при ограничении величины электромеханических моментов.
- Разработаны и протестированы на компьютерных моделях и лабораторном вибростенде алгоритмы пуска и прохождения резонансной зоны.
- Разработан нестационарный наблюдатель для оценки линейных скоростей платформы ВУ, позволяющий реализовывать управление в условиях неполной измеряемости переменных состояния ВУ.
- Предложена методика реализации математических моделей МВУ как объектов управления в программной среде MATLAB и разработан комплекс моделей вибрационных стендов как объектов управления для одно-, двух-, трех- и  $n$ -роторных систем с учетом нестационарности груза, динамики электроприводов и упругости карданных валов, соединяющих двигатели и неуравновешенные роторы.

Алгоритмы управления, синтезированные в этой работе, обеспечивают улучшение производительности ВУ в основных эксплуатационных режимах,

их эффективность проверялась с помощью компьютерного моделирования и экспериментов на лабораторном вибростенде.

Результаты работы были использованы в ИПМаш РАН при проведении научных исследований, поддержанных грантом Российского научного фонда 14-29-00142.



## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- ВУ – вибрационная установка;
- МВУ – многороторная ВУ;
- ПК – персональный компьютер;
- ЦАП – цифроаналоговый преобразователь;
- АЦП – аналого-цифровой преобразователь;
- Ц-Ц – канал цифра-цифра;
- УПУ – усилительно-преобразовательное устройство;
- М – электродвигатели;
- ДИ – датчики импульсов (энкодеры);
- ДП – датчики положения (перемещения);
- ЭВМ – электронно-вычислительная машина;
- ЭВМ РВ – ЭВМ реального времени;
- ПЧ – преобразователь частоты;
- ДТ – датчики тока;
- ДПИ – ДП индуктивные;
- ДПО – ДП оптические;
- ДСС – детализированная структурная схема;
- ЭП – электропривод;
- СЭП – система электропривода;
- РТ – регулятор тока;
- ПИ-РТ – пропорционально-интегральный РТ;
- П – преобразователь (силовой);
- ОМ – оптимум по модулю.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Блехман И.И., Вайсберг Л.А., Фирсова А.Д. Определение поля траекторий точек корпуса вибрационной машины с двумя дебалансными вибровозбудителями. // Обогащение руд. – 2001. – №2. – С. 39-42.
2. Блехман И.И., Жгулев А.С. К расчету вибрационных машин с внецентренно расположенным дебалансным вибровозбудителем. // Обогащение руд, 1974. – №2. – С. 36-39.
3. Блехман И.И., Вайсберг Л.А., Лавров Б.П., Васильков В.Б., Якимова К.С. Универсальный вибрационный стенд: опыт использования в исследованиях, некоторые результаты // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – СПб, 2003. – №3. – С. 224-227.
4. Управление мехатронными вибрационными установками. / Под ред. И.И. Блехмана и А.Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 2001. – 278 с.
5. V. Boikov, V. Andrievsky, V. Shiegin. Experimental study of unbalanced rotors synchronization of the mechatronic vibration setup // Cybernetics and Physics, Vol. 5, No. 1, 2016. – P. 5-11.
6. Блехман И.И., Ярошевич Н.П. Установка для вибрационной обработки. Авт. свид. №1773695. Б.И. №1. 1992.
7. Машиностроение. Энциклопедия. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. В 2-х кн. Кн. 1 / К. С. Колесников, Д. А. Александров, В. К. Асташев и др.; Под общ. ред. К. С. Колесникова. М.: Машиностроение, 1994. – 534 с.
8. Галицкая В. А., Горлатов Д. В. Алгоритм кратной синхронизации для трехроторной виброустановки. // Инструмент и технологии, № 35 (выпуск 1). – 2012. – С. 23-31.
9. O. Tomchina, V. Galitskaya, D. Gorlatov, J. Bagaev. Master-Slave and Mutual Multiple Synchronization for Multi-Rotor Vibration Units // Cybernetics And Physics, Vol. 1, No. 3, 2012. – P. 216-222.

10. Фрадков А. Л., Томчина О. П., Галицкая В. А., Горлатов Д. В. Интегро-дифференцирующие алгоритмы скоростного градиента в задачах кратной синхронизации вибрационных установок // Научно-технический вестник ИТМО. – 2013. №1 (83). – С. 30-37.

11. Томчина О. П., Резниченко В. В., Горлатов Д. В. Энергоскоростные алгоритмы синхронизации для многороторных вибрационных установок с упругими карданными валами // Информатика и системы управления. – 2014. – №4 (42). – С. 101-112.

12. Томчина О. П., Резниченко В. В., Горлатов Д. В. Алгоритмы управления вибрационным полем виброустановки для транспортирования сыпучих строительных материалов // Вестник гражданских инженеров. – 2015. – №1(48). – С. 115-122.

13. Галицкая В. А., Горлатов Д. В., Томчина О. П. Алгоритм кратной синхронизации для многороторной виброустановки. // XL Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч. VIII. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – С. 74-76.

14. Томчина О. П., Томчин Д. А., Горлатов Д. В. Алгоритм кратной синхронизации для виброустановки с роторами, имеющими разные массоинерционные характеристики // В кн.: Современное машиностроение. Наука и образование: мат-лы 2-й Междун. научно-практической конф. под ред. М. М. Радкевича и А. Н. Евграфова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – С. 752-762.

15. Горлатов Д. В., Багаев Д. З., Томчина О. П. Управление синхронизацией и параметрами траекторий двухроторной виброустановки с неидентичными роторами // XLI Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч. VIII. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – С. 64-66.

16. Томчина О. П., Горлатов Д. В. Анализ вибрационного поля при синхронных режимах в управляемой виброустановке с двумя неидентичными

вибровозбудителями // В кн.: Материалы конф. «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012), СПб, 9-11 октября 2012. – С. 610-613.

17. A. Fradkov, O. Tomchina, V. Galitskaya, D. Gorlatov. Multiple Controlled Synchronization for 3-Rotor Vibration Unit with Varying Payload // 5th IFAC International Work-shop on Periodic Control Systems. July 3-5, 2013, Caen, France. – P. 5-10.

18. D. Gorlatov, J. Bagaev. Integral-differential speed-gradient algorithms for multiple synchronization of vibration units // Automation & Control: Proceedings of the International Conference of Young Scientists, 21-22 November 2013. – SPb: St. Petersburg State Polytechnical University, 2013. – P. 18-23.

19. Томчина О.П., Горлатов Д.В., Чубенко А.П. Кратная синхронизация роторов многороторной виброустановки при учете динамики электроприводов и возмущающих воздействий // Неделя науки СПбГПУ: материалы научно-практической конференции с международным участием. Институт информационных технологий и управления СПбГПУ. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – С. 106-109.

20. Томчина О. П., Резниченко В. В., Горлатов Д. В. Синхронизация роторов трехроторной вибрационной установки при учете упругих связей в электромеханической системе // Доклады 70-й научной конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета: в 3 ч.; СПбГАСУ. – СПб., 2014. – Ч. II. – С. 253-256.

21. Томчина О. П., Горлатов Д. В. Влияние эксцентриситетов роторов на вибрационное поле виброустановки для транспортирования сыпучих строительных материалов // Доклады 71-й научной конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета; СПбГАСУ. – СПб., 2014. – С. 215-218.

22. D.V. Gorlatov. D.A. Tomchin. O.P. Tomchina. Controlled Passage through Resonance for Two-Rotor Vibration Unit: Influence of Drive Dynamics //

1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON 2015 Saint Petersburg, Russia, 24-26 June 2015. – P. 313-318.

23. Горлатов Д. В. Управление параметрами колебаний вибрационного грохота с помощью реализуемого на компьютере алгоритма // Неделя науки СПбПУ. Научный форум с международным участием, материалы научно-практической конференции. Институт металлургии, машиностроения и транспорта СПбПУ. – СПб., 2015. – С. 404-406.

24. Горлатов Д. В. Моделирование двухроторной вибрационной установки и алгоритма прохождения роторами резонансных частот // Неделя науки СПбПУ. Материалы научного форума с международным участием. Институт металлургии, машиностроения и транспорта. СПб., 2015. – С. 49-51.

25. A.L. Fradkov, O.P. Tomchina, D.A. Tomchin, D.V. Gorlatov. Time-varying observer of the supporting body velocity for vibration units. // 6th IFAC Workshop on Periodic Control Systems PSYCO 2016. Eindhoven, The Netherlands, 29 June – 1 July 2016. Vol. 49, Issue 14. P. 18-23.

26. Модель динамики трехроторной виброустановки. Рег. №50201351239 от 26.12.2013. Авторы: Томчина О.П., Горлатов Д. В.

27. Модель динамики двухроторной вибрационной установки с учетом динамики электроприводов. Рег. №50201450401 от 02.06.2014 Авторы: Томчина О.П., Резниченко В.В., Горлатов Д. В.

28. Блехман И.И. Вибрационная механика – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.

29. Гортинский В.В., Хвалов Б.Г. Об одном способе управления запуском колебательной системы с инерционным возбудителем // Механика машин. Вып. 58. – М.: Наука, 1981. – С. 42-46.

30. Герц М.Е., Герц М.М. Авторезонансные колебания в системе с ограниченным возбуждением // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 1. – С. 52-56.

31. Кельзон А.С., Малинин Л.М. Управление колебаниями роторов. СПб.: Политехника, 1992. – 118 с.
32. Малинин Л.М., Первозванский А.А. Оптимизация перехода несбалансированного ротора через критическую скорость // *Машиноведение*. – 1983. – №4. – С. 36-41.
33. Kinsey R.J., Mingori D.L., Rand R.H. Nonlinear controller to reduce resonance effects during despin of a dual-spin spacecraft through precession phase lock // *Proc. 31 IEEE Conf. Dec. Contr.*, 1992. – P. 3025-3030.
34. Tomchina O.P. Passing through resonances in vibratory actuators by speed-gradient control and averaging // *Proc. 1st IEEE Intern. Conf. Contr. of Oscillations and Chaos. St.Petersburg, 1997. Vol. 1.* – P. 138-141.
35. Андриевский Б. Р., Гузенко П.Ю., Фрадков А.Л. Управление колебаниями механических систем методом скоростного градиента // *Автоматика и телемеханика*. – 1996. – №4. – С. 4-17.
36. Fradkov, A.L., Tomchina, O.P., Tomchin, D.A. Controlled passage through resonance in mechanical systems // *Journal of Sound and Vibration*, V. 330, Is. 6, 2011. – P. 1065-1073.
37. Fradkov, A.L., Tomchin, D.A., Tomchina, O. P. Controlled Passage Through Resonance for Two-Rotor Vibration Unit // *Mechanics and Model-Based Control of Advanced Engineering Systems*, Springer-Verlag, Wien, 2014. – P. 95-102.
38. G. Panovko, A. Shokhin, S. Eremeykin, A. Gorbunov. Comparative analysis of two control algorithms of resonant oscillations of the vibration machine driven by an asynchronous AC motor // *Journal of Vibroengineering*, 17(4), 2015. – P. 1903-1911.
39. Пановко Г.Я., Шохин А.Е., Еремейкин С.А. Управление резонансным режимом работы вибромашины с приводом от асинхронного электродвигателя // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. – 2015. – № 2. – С 3-8.

40. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. – 254 с.
41. Quinn D., Rand R., Bridge J. The Dynamics of Resonant Capture // *Nonlinear Dynamics*, V. 8, Is. 1, 1995. – P. 1-20.
42. Cvetićanin, L. Dynamics of the non-ideal mechanical systems // *A review Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, V. 4, No. 2, 2010. – P. 75-86.
43. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике, М.: Наука, 1981. – 352 с.
44. Блехман И.И., Ярошевич Н.П. Кратные режимы вибрационного поддержания вращения неуравновешенных роторов // *Известия АН СССР. Машиноведение*. – 1986. – № 6. – С. 62-67.
45. Ярошевич Н.П. К теории синхронизации механических вибровозбудителей, связанных с линейной колебательной системой // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. – 2003. – № 4. – С. 4-17.
46. Томчина О.П., Кудрявцева И.М. Алгоритм синхронизации роторов для многомассовой упругой нестационарной виброустановки. СПбГПУ, XXXVI неделя науки СПбГПУ / Всероссийская межвузовская научн.-техн. конф. – СПб.: СПбГПУ, 2008.
47. Blekhman I.I., Fradkov A.L. On general definitions of synchronization // *Selected topics in vibrational mechanics / Ed. I.I.Blekhman*. – Singapore: World Scientific. – 2004. – P. 179-188.
48. Галицкая В.А., Томчина О.П. Пропорционально-интегральный энергоскоростной алгоритм управления кратной синхронизацией роторов вибрационной установки // *Информатика и системы управления*. – 2012. – № 3. – С. 158-168.
49. Фрадков А. Л. Схема скоростного градиента и ее применения в задачах адаптивного управления // *Автоматика и телемеханика*. – 1979. N9. – С. 90-101.

50. Blekhman, I.I. Computer-controlled vibrational set-up for education and research // I.I Blekhman et al. – Proc. 14th IFAC World Congress. 1999, vol. M. – P. 193-197.

51. Ярошевич Н.П. Динамика вибрационных машин в условиях «слабой» синхронизации: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06 / Ярошевич Николай Павлович. – СПб., 2004. – 35 с.

52. Борцов Ю. А., Соколовский Г. Г. Автоматизированный электропривод с упругими связями. 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Энергоатомиздат, 1992. – 288 с.

53. Шестаков В. М., Епишкин А. Е., Шаряков В. А. Динамика взаимосвязанных электромеханических систем многороторных вибрационных установок. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 107 с.

54. Фрадков А.Л. Адаптивное управление сложными системами. – М.: Наука, 1990. – 296 с.

55. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. – СПб.: Наука, 1999. – 467 с.

56. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: Учебное пособие. – М.: Наука, 1986. – 615 с.

57. Andrievsky B., Fradkov A. Feedback resonance in single and coupled 1-DOF oscillators // Intern. J. of Bifurcations and Chaos. 1999. N 10. – P. 2047-2058.

58. Pavlov, A., Pogromsky, A., Van de Wouw, N., Nijmeijer, H. (2004). Convergent dynamics, a tribute to Boris Pavlovich Demidovich. Systems & Control Letters. V. 52, Issues 3-4. – P. 257-261.

59. Томчина О. П., Кудрявцева И. М., Галицкая В. А. Управление кратной синхронизацией двухроторных вибрационных установок // Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления. Вибрационная механика / Под ред. В. В. Белецкого, Д. А. Индейцева, А. Л.



Фрадкова; Ин-т проблем машиноведения РАН. – СПб.: Наука, 2009. – С. 456-475.

60. Кудрявцева И.М. Энергоскоростные алгоритмы кратной синхронизации роторов многомассовой упругой нестационарной виброустановки: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.11.16 / Кудрявцева Ирина Михайловна. – СПб., 2010. – 22 с.

61. Romyantsev S., Tarasov D. Numerical Simulation of Nonlinear Dynamics of Vibration Transport Machines in Case of Three Independently Rotating Vibration Exciters // Recent Advances in Applied Mathematics: Proceedings of the American Conference on Applied Mathematics (AMERICAN-MATH'10). Harvard University, Cambridge, USA, January 27-29, 2010. – P. 191-194.

## **ПРИЛОЖЕНИЯ**

## Приложение 1

Результат работы программы prav\_chasti

>> prav\_chasti

xdot2 =

$$\begin{aligned} & -(a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}b_5 - a_{12}a_{23}a_{35}a_{44}b_5 - a_{12}a_{24}a_{33}a_{45}b_5 + \\ & a_{12}a_{24}a_{35}a_{43}b_5 + a_{12}a_{25}a_{33}a_{44}b_5 - a_{12}a_{25}a_{34}a_{43}b_5 - \\ & a_{13}a_{22}a_{34}a_{45}b_5 + a_{13}a_{22}a_{35}a_{44}b_5 + a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}b_5 - \\ & a_{13}a_{24}a_{35}a_{42}b_5 - a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}b_5 + a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}b_5 + \\ & a_{14}a_{22}a_{33}a_{45}b_5 - a_{14}a_{22}a_{35}a_{43}b_5 - a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}b_5 + \\ & a_{14}a_{23}a_{35}a_{42}b_5 + a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}b_5 - a_{14}a_{25}a_{33}a_{42}b_5 - \\ & a_{15}a_{22}a_{33}a_{44}b_5 + a_{15}a_{22}a_{34}a_{43}b_5 + a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}b_5 - \\ & a_{15}a_{23}a_{34}a_{42}b_5 - a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}b_5 + a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}b_5 - \\ & a_{12}a_{23}a_{34}a_{55}b_4 + a_{12}a_{23}a_{35}a_{54}b_4 + a_{12}a_{24}a_{33}a_{55}b_4 - \\ & a_{12}a_{24}a_{35}a_{53}b_4 - a_{12}a_{25}a_{33}a_{54}b_4 + a_{12}a_{25}a_{34}a_{53}b_4 + \\ & a_{13}a_{22}a_{34}a_{55}b_4 - a_{13}a_{22}a_{35}a_{54}b_4 - a_{13}a_{24}a_{32}a_{55}b_4 + \\ & a_{13}a_{24}a_{35}a_{52}b_4 + a_{13}a_{25}a_{32}a_{54}b_4 - a_{13}a_{25}a_{34}a_{52}b_4 - \\ & a_{14}a_{22}a_{33}a_{55}b_4 + a_{14}a_{22}a_{35}a_{53}b_4 + a_{14}a_{23}a_{32}a_{55}b_4 - \\ & a_{14}a_{23}a_{35}a_{52}b_4 - a_{14}a_{25}a_{32}a_{53}b_4 + a_{14}a_{25}a_{33}a_{52}b_4 + \\ & a_{15}a_{22}a_{33}a_{54}b_4 - a_{15}a_{22}a_{34}a_{53}b_4 - a_{15}a_{23}a_{32}a_{54}b_4 + \\ & a_{15}a_{23}a_{34}a_{52}b_4 + a_{15}a_{24}a_{32}a_{53}b_4 - a_{15}a_{24}a_{33}a_{52}b_4 + \\ & a_{12}a_{23}a_{44}a_{55}b_3 - a_{12}a_{23}a_{45}a_{54}b_3 - a_{12}a_{24}a_{43}a_{55}b_3 + \\ & a_{12}a_{24}a_{45}a_{53}b_3 + a_{12}a_{25}a_{43}a_{54}b_3 - a_{12}a_{25}a_{44}a_{53}b_3 - \\ & a_{13}a_{22}a_{44}a_{55}b_3 + a_{13}a_{22}a_{45}a_{54}b_3 + a_{13}a_{24}a_{42}a_{55}b_3 - \\ & a_{13}a_{24}a_{45}a_{52}b_3 - a_{13}a_{25}a_{42}a_{54}b_3 + a_{13}a_{25}a_{44}a_{52}b_3 + \\ & a_{14}a_{22}a_{43}a_{55}b_3 - a_{14}a_{22}a_{45}a_{53}b_3 - a_{14}a_{23}a_{42}a_{55}b_3 + \\ & a_{14}a_{23}a_{45}a_{52}b_3 + a_{14}a_{25}a_{42}a_{53}b_3 - a_{14}a_{25}a_{43}a_{52}b_3 - \\ & a_{15}a_{22}a_{43}a_{54}b_3 + a_{15}a_{22}a_{44}a_{53}b_3 + a_{15}a_{23}a_{42}a_{54}b_3 - \\ & a_{15}a_{23}a_{44}a_{52}b_3 - a_{15}a_{24}a_{42}a_{53}b_3 + a_{15}a_{24}a_{43}a_{52}b_3 - \\ & a_{12}a_{33}a_{44}a_{55}b_2 + a_{12}a_{33}a_{45}a_{54}b_2 + a_{12}a_{34}a_{43}a_{55}b_2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{12}a_{34}a_{45}a_{53}b_2 - a_{12}a_{35}a_{43}a_{54}b_2 + a_{12}a_{35}a_{44}a_{53}b_2 + \\
& a_{13}a_{32}a_{44}a_{55}b_2 - a_{13}a_{32}a_{45}a_{54}b_2 - a_{13}a_{34}a_{42}a_{55}b_2 + \\
& a_{13}a_{34}a_{45}a_{52}b_2 + a_{13}a_{35}a_{42}a_{54}b_2 - a_{13}a_{35}a_{44}a_{52}b_2 - \\
& a_{14}a_{32}a_{43}a_{55}b_2 + a_{14}a_{32}a_{45}a_{53}b_2 + a_{14}a_{33}a_{42}a_{55}b_2 - \\
& a_{14}a_{33}a_{45}a_{52}b_2 - a_{14}a_{35}a_{42}a_{53}b_2 + a_{14}a_{35}a_{43}a_{52}b_2 + \\
& a_{15}a_{32}a_{43}a_{54}b_2 - a_{15}a_{32}a_{44}a_{53}b_2 - a_{15}a_{33}a_{42}a_{54}b_2 + \\
& a_{15}a_{33}a_{44}a_{52}b_2 + a_{15}a_{34}a_{42}a_{53}b_2 - a_{15}a_{34}a_{43}a_{52}b_2 + \\
& a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}b_1 - a_{22}a_{33}a_{45}a_{54}b_1 - a_{22}a_{34}a_{43}a_{55}b_1 + \\
& a_{22}a_{34}a_{45}a_{53}b_1 + a_{22}a_{35}a_{43}a_{54}b_1 - a_{22}a_{35}a_{44}a_{53}b_1 - \\
& a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}b_1 + a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}b_1 + a_{23}a_{34}a_{42}a_{55}b_1 - \\
& a_{23}a_{34}a_{45}a_{52}b_1 - a_{23}a_{35}a_{42}a_{54}b_1 + a_{23}a_{35}a_{44}a_{52}b_1 + \\
& a_{24}a_{32}a_{43}a_{55}b_1 - a_{24}a_{32}a_{45}a_{53}b_1 - a_{24}a_{33}a_{42}a_{55}b_1 + \\
& a_{24}a_{33}a_{45}a_{52}b_1 + a_{24}a_{35}a_{42}a_{53}b_1 - a_{24}a_{35}a_{43}a_{52}b_1 - \\
& a_{25}a_{32}a_{43}a_{54}b_1 + a_{25}a_{32}a_{44}a_{53}b_1 + a_{25}a_{33}a_{42}a_{54}b_1 - \\
& a_{25}a_{33}a_{44}a_{52}b_1 - a_{25}a_{34}a_{42}a_{53}b_1 + a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}b_1) / \\
& (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} - a_{11}a_{22}a_{33}a_{45}a_{54} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}a_{55} + \\
& a_{11}a_{22}a_{34}a_{45}a_{53} + a_{11}a_{22}a_{35}a_{43}a_{54} - a_{11}a_{22}a_{35}a_{44}a_{53} - \\
& a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55} + a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}a_{55} - \\
& a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{52} - a_{11}a_{23}a_{35}a_{42}a_{54} + a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{52} + \\
& a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}a_{55} - a_{11}a_{24}a_{32}a_{45}a_{53} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}a_{55} + \\
& a_{11}a_{24}a_{33}a_{45}a_{52} + a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53} - a_{11}a_{24}a_{35}a_{43}a_{52} - \\
& a_{11}a_{25}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{11}a_{25}a_{32}a_{44}a_{53} + a_{11}a_{25}a_{33}a_{42}a_{54} - \\
& a_{11}a_{25}a_{33}a_{44}a_{52} - a_{11}a_{25}a_{34}a_{42}a_{53} + a_{11}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52} - \\
& a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{12}a_{21}a_{33}a_{45}a_{54} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}a_{55} - \\
& a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53} - a_{12}a_{21}a_{35}a_{43}a_{54} + a_{12}a_{21}a_{35}a_{44}a_{53} + \\
& a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}a_{55} - a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{55} + \\
& a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51} + a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54} - a_{12}a_{23}a_{35}a_{44}a_{51} - \\
& a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}a_{55} + a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}a_{55} - \\
& a_{12}a_{24}a_{33}a_{45}a_{51} - a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53} + a_{12}a_{24}a_{35}a_{43}a_{51} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54} - a_{12}a_{25}a_{31}a_{44}a_{53} - a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}a_{54} + \\
& a_{12}a_{25}a_{33}a_{44}a_{51} + a_{12}a_{25}a_{34}a_{41}a_{53} - a_{12}a_{25}a_{34}a_{43}a_{51} + \\
& a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55} - a_{13}a_{21}a_{32}a_{45}a_{54} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55} + \\
& a_{13}a_{21}a_{34}a_{45}a_{52} + a_{13}a_{21}a_{35}a_{42}a_{54} - a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52} - \\
& a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55} + a_{13}a_{22}a_{31}a_{45}a_{54} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}a_{55} - \\
& a_{13}a_{22}a_{34}a_{45}a_{51} - a_{13}a_{22}a_{35}a_{41}a_{54} + a_{13}a_{22}a_{35}a_{44}a_{51} + \\
& a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}a_{55} - a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55} + \\
& a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51} + a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}a_{52} - a_{13}a_{24}a_{35}a_{42}a_{51} - \\
& a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52} + a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54} - \\
& a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51} - a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52} + a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51} - \\
& a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{14}a_{21}a_{32}a_{45}a_{53} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}a_{55} - \\
& a_{14}a_{21}a_{33}a_{45}a_{52} - a_{14}a_{21}a_{35}a_{42}a_{53} + a_{14}a_{21}a_{35}a_{43}a_{52} + \\
& a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55} - a_{14}a_{22}a_{31}a_{45}a_{53} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}a_{55} + \\
& a_{14}a_{22}a_{33}a_{45}a_{51} + a_{14}a_{22}a_{35}a_{41}a_{53} - a_{14}a_{22}a_{35}a_{43}a_{51} - \\
& a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55} + a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}a_{52} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55} - \\
& a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51} - a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52} + a_{14}a_{23}a_{35}a_{42}a_{51} + \\
& a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53} - a_{14}a_{25}a_{31}a_{43}a_{52} - a_{14}a_{25}a_{32}a_{41}a_{53} + \\
& a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51} + a_{14}a_{25}a_{33}a_{41}a_{52} - a_{14}a_{25}a_{33}a_{42}a_{51} + \\
& a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{54} - a_{15}a_{21}a_{32}a_{44}a_{53} - a_{15}a_{21}a_{33}a_{42}a_{54} + \\
& a_{15}a_{21}a_{33}a_{44}a_{52} + a_{15}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53} - a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52} - \\
& a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54} + a_{15}a_{22}a_{31}a_{44}a_{53} + a_{15}a_{22}a_{33}a_{41}a_{54} - \\
& a_{15}a_{22}a_{33}a_{44}a_{51} - a_{15}a_{22}a_{34}a_{41}a_{53} + a_{15}a_{22}a_{34}a_{43}a_{51} + \\
& a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54} - a_{15}a_{23}a_{31}a_{44}a_{52} - a_{15}a_{23}a_{32}a_{41}a_{54} + \\
& a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51} + a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52} - a_{15}a_{23}a_{34}a_{42}a_{51} - \\
& a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53} + a_{15}a_{24}a_{31}a_{43}a_{52} + a_{15}a_{24}a_{32}a_{41}a_{53} - \\
& a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}a_{51} - a_{15}a_{24}a_{33}a_{41}a_{52} + a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51})
\end{aligned}$$

x<sub>dot</sub>4 =

$$\begin{aligned}
& (a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}b_5 - a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}b_5 - a_{11}a_{24}a_{33}a_{45}b_5 + \\
& a_{11}a_{24}a_{35}a_{43}b_5 + a_{11}a_{25}a_{33}a_{44}b_5 - a_{11}a_{25}a_{34}a_{43}b_5 - \\
& a_{13}a_{21}a_{34}a_{45}b_5 + a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}b_5 + a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}b_5 - \\
& a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}b_5 - a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}b_5 + a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}b_5 + \\
& a_{14}a_{21}a_{33}a_{45}b_5 - a_{14}a_{21}a_{35}a_{43}b_5 - a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}b_5 + \\
& a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}b_5 + a_{14}a_{25}a_{31}a_{43}b_5 - a_{14}a_{25}a_{33}a_{41}b_5 - \\
& a_{15}a_{21}a_{33}a_{44}b_5 + a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}b_5 + a_{15}a_{23}a_{31}a_{44}b_5 - \\
& a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}b_5 - a_{15}a_{24}a_{31}a_{43}b_5 + a_{15}a_{24}a_{33}a_{41}b_5 - \\
& a_{11}a_{23}a_{34}a_{55}b_4 + a_{11}a_{23}a_{35}a_{54}b_4 + a_{11}a_{24}a_{33}a_{55}b_4 - \\
& a_{11}a_{24}a_{35}a_{53}b_4 - a_{11}a_{25}a_{33}a_{54}b_4 + a_{11}a_{25}a_{34}a_{53}b_4 + \\
& a_{13}a_{21}a_{34}a_{55}b_4 - a_{13}a_{21}a_{35}a_{54}b_4 - a_{13}a_{24}a_{31}a_{55}b_4 + \\
& a_{13}a_{24}a_{35}a_{51}b_4 + a_{13}a_{25}a_{31}a_{54}b_4 - a_{13}a_{25}a_{34}a_{51}b_4 - \\
& a_{14}a_{21}a_{33}a_{55}b_4 + a_{14}a_{21}a_{35}a_{53}b_4 + a_{14}a_{23}a_{31}a_{55}b_4 - \\
& a_{14}a_{23}a_{35}a_{51}b_4 - a_{14}a_{25}a_{31}a_{53}b_4 + a_{14}a_{25}a_{33}a_{51}b_4 + \\
& a_{15}a_{21}a_{33}a_{54}b_4 - a_{15}a_{21}a_{34}a_{53}b_4 - a_{15}a_{23}a_{31}a_{54}b_4 + \\
& a_{15}a_{23}a_{34}a_{51}b_4 + a_{15}a_{24}a_{31}a_{53}b_4 - a_{15}a_{24}a_{33}a_{51}b_4 + \\
& a_{11}a_{23}a_{44}a_{55}b_3 - a_{11}a_{23}a_{45}a_{54}b_3 - a_{11}a_{24}a_{43}a_{55}b_3 + \\
& a_{11}a_{24}a_{45}a_{53}b_3 + a_{11}a_{25}a_{43}a_{54}b_3 - a_{11}a_{25}a_{44}a_{53}b_3 - \\
& a_{13}a_{21}a_{44}a_{55}b_3 + a_{13}a_{21}a_{45}a_{54}b_3 + a_{13}a_{24}a_{41}a_{55}b_3 - \\
& a_{13}a_{24}a_{45}a_{51}b_3 - a_{13}a_{25}a_{41}a_{54}b_3 + a_{13}a_{25}a_{44}a_{51}b_3 + \\
& a_{14}a_{21}a_{43}a_{55}b_3 - a_{14}a_{21}a_{45}a_{53}b_3 - a_{14}a_{23}a_{41}a_{55}b_3 + \\
& a_{14}a_{23}a_{45}a_{51}b_3 + a_{14}a_{25}a_{41}a_{53}b_3 - a_{14}a_{25}a_{43}a_{51}b_3 - \\
& a_{15}a_{21}a_{43}a_{54}b_3 + a_{15}a_{21}a_{44}a_{53}b_3 + a_{15}a_{23}a_{41}a_{54}b_3 - \\
& a_{15}a_{23}a_{44}a_{51}b_3 - a_{15}a_{24}a_{41}a_{53}b_3 + a_{15}a_{24}a_{43}a_{51}b_3 - \\
& a_{11}a_{33}a_{44}a_{55}b_2 + a_{11}a_{33}a_{45}a_{54}b_2 + a_{11}a_{34}a_{43}a_{55}b_2 - \\
& a_{11}a_{34}a_{45}a_{53}b_2 - a_{11}a_{35}a_{43}a_{54}b_2 + a_{11}a_{35}a_{44}a_{53}b_2 + \\
& a_{13}a_{31}a_{44}a_{55}b_2 - a_{13}a_{31}a_{45}a_{54}b_2 - a_{13}a_{34}a_{41}a_{55}b_2 + \\
& a_{13}a_{34}a_{45}a_{51}b_2 + a_{13}a_{35}a_{41}a_{54}b_2 - a_{13}a_{35}a_{44}a_{51}b_2 - \\
& a_{14}a_{31}a_{43}a_{55}b_2 + a_{14}a_{31}a_{45}a_{53}b_2 + a_{14}a_{33}a_{41}a_{55}b_2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{14}a_{33}a_{45}a_{51}b_2 - a_{14}a_{35}a_{41}a_{53}b_2 + a_{14}a_{35}a_{43}a_{51}b_2 + \\
& a_{15}a_{31}a_{43}a_{54}b_2 - a_{15}a_{31}a_{44}a_{53}b_2 - a_{15}a_{33}a_{41}a_{54}b_2 + \\
& a_{15}a_{33}a_{44}a_{51}b_2 + a_{15}a_{34}a_{41}a_{53}b_2 - a_{15}a_{34}a_{43}a_{51}b_2 + \\
& a_{21}a_{33}a_{44}a_{55}b_1 - a_{21}a_{33}a_{45}a_{54}b_1 - a_{21}a_{34}a_{43}a_{55}b_1 + \\
& a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}b_1 + a_{21}a_{35}a_{43}a_{54}b_1 - a_{21}a_{35}a_{44}a_{53}b_1 - \\
& a_{23}a_{31}a_{44}a_{55}b_1 + a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}b_1 + a_{23}a_{34}a_{41}a_{55}b_1 - \\
& a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}b_1 - a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}b_1 + a_{23}a_{35}a_{44}a_{51}b_1 + \\
& a_{24}a_{31}a_{43}a_{55}b_1 - a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}b_1 - a_{24}a_{33}a_{41}a_{55}b_1 + \\
& a_{24}a_{33}a_{45}a_{51}b_1 + a_{24}a_{35}a_{41}a_{53}b_1 - a_{24}a_{35}a_{43}a_{51}b_1 - \\
& a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}b_1 + a_{25}a_{31}a_{44}a_{53}b_1 + a_{25}a_{33}a_{41}a_{54}b_1 - \\
& a_{25}a_{33}a_{44}a_{51}b_1 - a_{25}a_{34}a_{41}a_{53}b_1 + a_{25}a_{34}a_{43}a_{51}b_1) / \\
& (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} - a_{11}a_{22}a_{33}a_{45}a_{54} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}a_{55} + \\
& a_{11}a_{22}a_{34}a_{45}a_{53} + a_{11}a_{22}a_{35}a_{43}a_{54} - a_{11}a_{22}a_{35}a_{44}a_{53} - \\
& a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55} + a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}a_{55} - \\
& a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{52} - a_{11}a_{23}a_{35}a_{42}a_{54} + a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{52} + \\
& a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}a_{55} - a_{11}a_{24}a_{32}a_{45}a_{53} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}a_{55} + \\
& a_{11}a_{24}a_{33}a_{45}a_{52} + a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53} - a_{11}a_{24}a_{35}a_{43}a_{52} - \\
& a_{11}a_{25}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{11}a_{25}a_{32}a_{44}a_{53} + a_{11}a_{25}a_{33}a_{42}a_{54} - \\
& a_{11}a_{25}a_{33}a_{44}a_{52} - a_{11}a_{25}a_{34}a_{42}a_{53} + a_{11}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52} - \\
& a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{12}a_{21}a_{33}a_{45}a_{54} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}a_{55} - \\
& a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53} - a_{12}a_{21}a_{35}a_{43}a_{54} + a_{12}a_{21}a_{35}a_{44}a_{53} + \\
& a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}a_{55} - a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{55} + \\
& a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51} + a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54} - a_{12}a_{23}a_{35}a_{44}a_{51} - \\
& a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}a_{55} + a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}a_{55} - \\
& a_{12}a_{24}a_{33}a_{45}a_{51} - a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53} + a_{12}a_{24}a_{35}a_{43}a_{51} + \\
& a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54} - a_{12}a_{25}a_{31}a_{44}a_{53} - a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}a_{54} + \\
& a_{12}a_{25}a_{33}a_{44}a_{51} + a_{12}a_{25}a_{34}a_{41}a_{53} - a_{12}a_{25}a_{34}a_{43}a_{51} + \\
& a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55} - a_{13}a_{21}a_{32}a_{45}a_{54} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55} + \\
& a_{13}a_{21}a_{34}a_{45}a_{52} + a_{13}a_{21}a_{35}a_{42}a_{54} - a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55} + a_{13}a_{22}a_{31}a_{45}a_{54} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}a_{55} - \\
& a_{13}a_{22}a_{34}a_{45}a_{51} - a_{13}a_{22}a_{35}a_{41}a_{54} + a_{13}a_{22}a_{35}a_{44}a_{51} + \\
& a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}a_{55} - a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55} + \\
& a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51} + a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}a_{52} - a_{13}a_{24}a_{35}a_{42}a_{51} - \\
& a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52} + a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54} - \\
& a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51} - a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52} + a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51} - \\
& a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{14}a_{21}a_{32}a_{45}a_{53} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}a_{55} - \\
& a_{14}a_{21}a_{33}a_{45}a_{52} - a_{14}a_{21}a_{35}a_{42}a_{53} + a_{14}a_{21}a_{35}a_{43}a_{52} + \\
& a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55} - a_{14}a_{22}a_{31}a_{45}a_{53} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}a_{55} + \\
& a_{14}a_{22}a_{33}a_{45}a_{51} + a_{14}a_{22}a_{35}a_{41}a_{53} - a_{14}a_{22}a_{35}a_{43}a_{51} - \\
& a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55} + a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}a_{52} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55} - \\
& a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51} - a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52} + a_{14}a_{23}a_{35}a_{42}a_{51} + \\
& a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53} - a_{14}a_{25}a_{31}a_{43}a_{52} - a_{14}a_{25}a_{32}a_{41}a_{53} + \\
& a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51} + a_{14}a_{25}a_{33}a_{41}a_{52} - a_{14}a_{25}a_{33}a_{42}a_{51} + \\
& a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{54} - a_{15}a_{21}a_{32}a_{44}a_{53} - a_{15}a_{21}a_{33}a_{42}a_{54} + \\
& a_{15}a_{21}a_{33}a_{44}a_{52} + a_{15}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53} - a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52} - \\
& a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54} + a_{15}a_{22}a_{31}a_{44}a_{53} + a_{15}a_{22}a_{33}a_{41}a_{54} - \\
& a_{15}a_{22}a_{33}a_{44}a_{51} - a_{15}a_{22}a_{34}a_{41}a_{53} + a_{15}a_{22}a_{34}a_{43}a_{51} + \\
& a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54} - a_{15}a_{23}a_{31}a_{44}a_{52} - a_{15}a_{23}a_{32}a_{41}a_{54} + \\
& a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51} + a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52} - a_{15}a_{23}a_{34}a_{42}a_{51} - \\
& a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53} + a_{15}a_{24}a_{31}a_{43}a_{52} + a_{15}a_{24}a_{32}a_{41}a_{53} - \\
& a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}a_{51} - a_{15}a_{24}a_{33}a_{41}a_{52} + a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51})
\end{aligned}$$

xdot6 =

$$\begin{aligned}
& -(a_{11}a_{22}a_{34}a_{45}b_5 - a_{11}a_{22}a_{35}a_{44}b_5 - a_{11}a_{24}a_{32}a_{45}b_5 + \\
& a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}b_5 + a_{11}a_{25}a_{32}a_{44}b_5 - a_{11}a_{25}a_{34}a_{42}b_5 - \\
& a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}b_5 + a_{12}a_{21}a_{35}a_{44}b_5 + a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}b_5 - \\
& a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}b_5 - a_{12}a_{25}a_{31}a_{44}b_5 + a_{12}a_{25}a_{34}a_{41}b_5 + \\
& a_{14}a_{21}a_{32}a_{45}b_5 - a_{14}a_{21}a_{35}a_{42}b_5 - a_{14}a_{22}a_{31}a_{45}b_5 +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& a_{14}a_{22}a_{35}a_{41}b_5 + a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}b_5 - a_{14}a_{25}a_{32}a_{41}b_5 - \\
& a_{15}a_{21}a_{32}a_{44}b_5 + a_{15}a_{21}a_{34}a_{42}b_5 + a_{15}a_{22}a_{31}a_{44}b_5 - \\
& a_{15}a_{22}a_{34}a_{41}b_5 - a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}b_5 + a_{15}a_{24}a_{32}a_{41}b_5 - \\
& a_{11}a_{22}a_{34}a_{55}b_4 + a_{11}a_{22}a_{35}a_{54}b_4 + a_{11}a_{24}a_{32}a_{55}b_4 - \\
& a_{11}a_{24}a_{35}a_{52}b_4 - a_{11}a_{25}a_{32}a_{54}b_4 + a_{11}a_{25}a_{34}a_{52}b_4 + \\
& a_{12}a_{21}a_{34}a_{55}b_4 - a_{12}a_{21}a_{35}a_{54}b_4 - a_{12}a_{24}a_{31}a_{55}b_4 + \\
& a_{12}a_{24}a_{35}a_{51}b_4 + a_{12}a_{25}a_{31}a_{54}b_4 - a_{12}a_{25}a_{34}a_{51}b_4 - \\
& a_{14}a_{21}a_{32}a_{55}b_4 + a_{14}a_{21}a_{35}a_{52}b_4 + a_{14}a_{22}a_{31}a_{55}b_4 - \\
& a_{14}a_{22}a_{35}a_{51}b_4 - a_{14}a_{25}a_{31}a_{52}b_4 + a_{14}a_{25}a_{32}a_{51}b_4 + \\
& a_{15}a_{21}a_{32}a_{54}b_4 - a_{15}a_{21}a_{34}a_{52}b_4 - a_{15}a_{22}a_{31}a_{54}b_4 + \\
& a_{15}a_{22}a_{34}a_{51}b_4 + a_{15}a_{24}a_{31}a_{52}b_4 - a_{15}a_{24}a_{32}a_{51}b_4 + \\
& a_{11}a_{22}a_{44}a_{55}b_3 - a_{11}a_{22}a_{45}a_{54}b_3 - a_{11}a_{24}a_{42}a_{55}b_3 + \\
& a_{11}a_{24}a_{45}a_{52}b_3 + a_{11}a_{25}a_{42}a_{54}b_3 - a_{11}a_{25}a_{44}a_{52}b_3 - \\
& a_{12}a_{21}a_{44}a_{55}b_3 + a_{12}a_{21}a_{45}a_{54}b_3 + a_{12}a_{24}a_{41}a_{55}b_3 - \\
& a_{12}a_{24}a_{45}a_{51}b_3 - a_{12}a_{25}a_{41}a_{54}b_3 + a_{12}a_{25}a_{44}a_{51}b_3 + \\
& a_{14}a_{21}a_{42}a_{55}b_3 - a_{14}a_{21}a_{45}a_{52}b_3 - a_{14}a_{22}a_{41}a_{55}b_3 + \\
& a_{14}a_{22}a_{45}a_{51}b_3 + a_{14}a_{25}a_{41}a_{52}b_3 - a_{14}a_{25}a_{42}a_{51}b_3 - \\
& a_{15}a_{21}a_{42}a_{54}b_3 + a_{15}a_{21}a_{44}a_{52}b_3 + a_{15}a_{22}a_{41}a_{54}b_3 - \\
& a_{15}a_{22}a_{44}a_{51}b_3 - a_{15}a_{24}a_{41}a_{52}b_3 + a_{15}a_{24}a_{42}a_{51}b_3 - \\
& a_{11}a_{32}a_{44}a_{55}b_2 + a_{11}a_{32}a_{45}a_{54}b_2 + a_{11}a_{34}a_{42}a_{55}b_2 - \\
& a_{11}a_{34}a_{45}a_{52}b_2 - a_{11}a_{35}a_{42}a_{54}b_2 + a_{11}a_{35}a_{44}a_{52}b_2 + \\
& a_{12}a_{31}a_{44}a_{55}b_2 - a_{12}a_{31}a_{45}a_{54}b_2 - a_{12}a_{34}a_{41}a_{55}b_2 + \\
& a_{12}a_{34}a_{45}a_{51}b_2 + a_{12}a_{35}a_{41}a_{54}b_2 - a_{12}a_{35}a_{44}a_{51}b_2 - \\
& a_{14}a_{31}a_{42}a_{55}b_2 + a_{14}a_{31}a_{45}a_{52}b_2 + a_{14}a_{32}a_{41}a_{55}b_2 - \\
& a_{14}a_{32}a_{45}a_{51}b_2 - a_{14}a_{35}a_{41}a_{52}b_2 + a_{14}a_{35}a_{42}a_{51}b_2 + \\
& a_{15}a_{31}a_{42}a_{54}b_2 - a_{15}a_{31}a_{44}a_{52}b_2 - a_{15}a_{32}a_{41}a_{54}b_2 + \\
& a_{15}a_{32}a_{44}a_{51}b_2 + a_{15}a_{34}a_{41}a_{52}b_2 - a_{15}a_{34}a_{42}a_{51}b_2 + \\
& a_{21}a_{32}a_{44}a_{55}b_1 - a_{21}a_{32}a_{45}a_{54}b_1 - a_{21}a_{34}a_{42}a_{55}b_1 + \\
& a_{21}a_{34}a_{45}a_{52}b_1 + a_{21}a_{35}a_{42}a_{54}b_1 - a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}b_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{22}a_{31}a_{44}a_{55}b_1 + a_{22}a_{31}a_{45}a_{54}b_1 + a_{22}a_{34}a_{41}a_{55}b_1 - \\
& a_{22}a_{34}a_{45}a_{51}b_1 - a_{22}a_{35}a_{41}a_{54}b_1 + a_{22}a_{35}a_{44}a_{51}b_1 + \\
& a_{24}a_{31}a_{42}a_{55}b_1 - a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}b_1 - a_{24}a_{32}a_{41}a_{55}b_1 + \\
& a_{24}a_{32}a_{45}a_{51}b_1 + a_{24}a_{35}a_{41}a_{52}b_1 - a_{24}a_{35}a_{42}a_{51}b_1 - \\
& a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}b_1 + a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}b_1 + a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}b_1 - \\
& a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}b_1 - a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}b_1 + a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}b_1) / \\
& (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} - a_{11}a_{22}a_{33}a_{45}a_{54} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}a_{55} + \\
& a_{11}a_{22}a_{34}a_{45}a_{53} + a_{11}a_{22}a_{35}a_{43}a_{54} - a_{11}a_{22}a_{35}a_{44}a_{53} - \\
& a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55} + a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}a_{55} - \\
& a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{52} - a_{11}a_{23}a_{35}a_{42}a_{54} + a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{52} + \\
& a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}a_{55} - a_{11}a_{24}a_{32}a_{45}a_{53} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}a_{55} + \\
& a_{11}a_{24}a_{33}a_{45}a_{52} + a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53} - a_{11}a_{24}a_{35}a_{43}a_{52} - \\
& a_{11}a_{25}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{11}a_{25}a_{32}a_{44}a_{53} + a_{11}a_{25}a_{33}a_{42}a_{54} - \\
& a_{11}a_{25}a_{33}a_{44}a_{52} - a_{11}a_{25}a_{34}a_{42}a_{53} + a_{11}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52} - \\
& a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{12}a_{21}a_{33}a_{45}a_{54} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}a_{55} - \\
& a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53} - a_{12}a_{21}a_{35}a_{43}a_{54} + a_{12}a_{21}a_{35}a_{44}a_{53} + \\
& a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}a_{55} - a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{55} + \\
& a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51} + a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54} - a_{12}a_{23}a_{35}a_{44}a_{51} - \\
& a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}a_{55} + a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}a_{55} - \\
& a_{12}a_{24}a_{33}a_{45}a_{51} - a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53} + a_{12}a_{24}a_{35}a_{43}a_{51} + \\
& a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54} - a_{12}a_{25}a_{31}a_{44}a_{53} - a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}a_{54} + \\
& a_{12}a_{25}a_{33}a_{44}a_{51} + a_{12}a_{25}a_{34}a_{41}a_{53} - a_{12}a_{25}a_{34}a_{43}a_{51} + \\
& a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55} - a_{13}a_{21}a_{32}a_{45}a_{54} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55} + \\
& a_{13}a_{21}a_{34}a_{45}a_{52} + a_{13}a_{21}a_{35}a_{42}a_{54} - a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52} - \\
& a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55} + a_{13}a_{22}a_{31}a_{45}a_{54} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}a_{55} - \\
& a_{13}a_{22}a_{34}a_{45}a_{51} - a_{13}a_{22}a_{35}a_{41}a_{54} + a_{13}a_{22}a_{35}a_{44}a_{51} + \\
& a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}a_{55} - a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55} + \\
& a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51} + a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}a_{52} - a_{13}a_{24}a_{35}a_{42}a_{51} - \\
& a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52} + a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51} - a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52} + a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51} - \\
& a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{14}a_{21}a_{32}a_{45}a_{53} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}a_{55} - \\
& a_{14}a_{21}a_{33}a_{45}a_{52} - a_{14}a_{21}a_{35}a_{42}a_{53} + a_{14}a_{21}a_{35}a_{43}a_{52} + \\
& a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55} - a_{14}a_{22}a_{31}a_{45}a_{53} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}a_{55} + \\
& a_{14}a_{22}a_{33}a_{45}a_{51} + a_{14}a_{22}a_{35}a_{41}a_{53} - a_{14}a_{22}a_{35}a_{43}a_{51} - \\
& a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55} + a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}a_{52} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55} - \\
& a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51} - a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52} + a_{14}a_{23}a_{35}a_{42}a_{51} + \\
& a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53} - a_{14}a_{25}a_{31}a_{43}a_{52} - a_{14}a_{25}a_{32}a_{41}a_{53} + \\
& a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51} + a_{14}a_{25}a_{33}a_{41}a_{52} - a_{14}a_{25}a_{33}a_{42}a_{51} + \\
& a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{54} - a_{15}a_{21}a_{32}a_{44}a_{53} - a_{15}a_{21}a_{33}a_{42}a_{54} + \\
& a_{15}a_{21}a_{33}a_{44}a_{52} + a_{15}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53} - a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52} - \\
& a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54} + a_{15}a_{22}a_{31}a_{44}a_{53} + a_{15}a_{22}a_{33}a_{41}a_{54} - \\
& a_{15}a_{22}a_{33}a_{44}a_{51} - a_{15}a_{22}a_{34}a_{41}a_{53} + a_{15}a_{22}a_{34}a_{43}a_{51} + \\
& a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54} - a_{15}a_{23}a_{31}a_{44}a_{52} - a_{15}a_{23}a_{32}a_{41}a_{54} + \\
& a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51} + a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52} - a_{15}a_{23}a_{34}a_{42}a_{51} - \\
& a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53} + a_{15}a_{24}a_{31}a_{43}a_{52} + a_{15}a_{24}a_{32}a_{41}a_{53} - \\
& a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}a_{51} - a_{15}a_{24}a_{33}a_{41}a_{52} + a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51})
\end{aligned}$$

x<sub>dot</sub>8 =

$$\begin{aligned}
& (a_{11}a_{22}a_{33}a_{45}b_5 - a_{11}a_{22}a_{35}a_{43}b_5 - a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}b_5 + \\
& a_{11}a_{23}a_{35}a_{42}b_5 + a_{11}a_{25}a_{32}a_{43}b_5 - a_{11}a_{25}a_{33}a_{42}b_5 - \\
& a_{12}a_{21}a_{33}a_{45}b_5 + a_{12}a_{21}a_{35}a_{43}b_5 + a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}b_5 - \\
& a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}b_5 - a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}b_5 + a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}b_5 + \\
& a_{13}a_{21}a_{32}a_{45}b_5 - a_{13}a_{21}a_{35}a_{42}b_5 - a_{13}a_{22}a_{31}a_{45}b_5 + \\
& a_{13}a_{22}a_{35}a_{41}b_5 + a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}b_5 - a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}b_5 - \\
& a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}b_5 + a_{15}a_{21}a_{33}a_{42}b_5 + a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}b_5 - \\
& a_{15}a_{22}a_{33}a_{41}b_5 - a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}b_5 + a_{15}a_{23}a_{32}a_{41}b_5 - \\
& a_{11}a_{22}a_{33}a_{55}b_4 + a_{11}a_{22}a_{35}a_{53}b_4 + a_{11}a_{23}a_{32}a_{55}b_4 - \\
& a_{11}a_{23}a_{35}a_{52}b_4 - a_{11}a_{25}a_{32}a_{53}b_4 + a_{11}a_{25}a_{33}a_{52}b_4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rclcl}
a_{12}a_{21}a_{33}a_{55}b_4 & - & a_{12}a_{21}a_{35}a_{53}b_4 & - & a_{12}a_{23}a_{31}a_{55}b_4 & + \\
a_{12}a_{23}a_{35}a_{51}b_4 & + & a_{12}a_{25}a_{31}a_{53}b_4 & - & a_{12}a_{25}a_{33}a_{51}b_4 & - \\
a_{13}a_{21}a_{32}a_{55}b_4 & + & a_{13}a_{21}a_{35}a_{52}b_4 & + & a_{13}a_{22}a_{31}a_{55}b_4 & - \\
a_{13}a_{22}a_{35}a_{51}b_4 & - & a_{13}a_{25}a_{31}a_{52}b_4 & + & a_{13}a_{25}a_{32}a_{51}b_4 & + \\
a_{15}a_{21}a_{32}a_{53}b_4 & - & a_{15}a_{21}a_{33}a_{52}b_4 & - & a_{15}a_{22}a_{31}a_{53}b_4 & + \\
a_{15}a_{22}a_{33}a_{51}b_4 & + & a_{15}a_{23}a_{31}a_{52}b_4 & - & a_{15}a_{23}a_{32}a_{51}b_4 & + \\
a_{11}a_{22}a_{43}a_{55}b_3 & - & a_{11}a_{22}a_{45}a_{53}b_3 & - & a_{11}a_{23}a_{42}a_{55}b_3 & + \\
a_{11}a_{23}a_{45}a_{52}b_3 & + & a_{11}a_{25}a_{42}a_{53}b_3 & - & a_{11}a_{25}a_{43}a_{52}b_3 & - \\
a_{12}a_{21}a_{43}a_{55}b_3 & + & a_{12}a_{21}a_{45}a_{53}b_3 & + & a_{12}a_{23}a_{41}a_{55}b_3 & - \\
a_{12}a_{23}a_{45}a_{51}b_3 & - & a_{12}a_{25}a_{41}a_{53}b_3 & + & a_{12}a_{25}a_{43}a_{51}b_3 & + \\
a_{13}a_{21}a_{42}a_{55}b_3 & - & a_{13}a_{21}a_{45}a_{52}b_3 & - & a_{13}a_{22}a_{41}a_{55}b_3 & + \\
a_{13}a_{22}a_{45}a_{51}b_3 & + & a_{13}a_{25}a_{41}a_{52}b_3 & - & a_{13}a_{25}a_{42}a_{51}b_3 & - \\
a_{15}a_{21}a_{42}a_{53}b_3 & + & a_{15}a_{21}a_{43}a_{52}b_3 & + & a_{15}a_{22}a_{41}a_{53}b_3 & - \\
a_{15}a_{22}a_{43}a_{51}b_3 & - & a_{15}a_{23}a_{41}a_{52}b_3 & + & a_{15}a_{23}a_{42}a_{51}b_3 & - \\
a_{11}a_{32}a_{43}a_{55}b_2 & + & a_{11}a_{32}a_{45}a_{53}b_2 & + & a_{11}a_{33}a_{42}a_{55}b_2 & - \\
a_{11}a_{33}a_{45}a_{52}b_2 & - & a_{11}a_{35}a_{42}a_{53}b_2 & + & a_{11}a_{35}a_{43}a_{52}b_2 & + \\
a_{12}a_{31}a_{43}a_{55}b_2 & - & a_{12}a_{31}a_{45}a_{53}b_2 & - & a_{12}a_{33}a_{41}a_{55}b_2 & + \\
a_{12}a_{33}a_{45}a_{51}b_2 & + & a_{12}a_{35}a_{41}a_{53}b_2 & - & a_{12}a_{35}a_{43}a_{51}b_2 & - \\
a_{13}a_{31}a_{42}a_{55}b_2 & + & a_{13}a_{31}a_{45}a_{52}b_2 & + & a_{13}a_{32}a_{41}a_{55}b_2 & - \\
a_{13}a_{32}a_{45}a_{51}b_2 & - & a_{13}a_{35}a_{41}a_{52}b_2 & + & a_{13}a_{35}a_{42}a_{51}b_2 & + \\
a_{15}a_{31}a_{42}a_{53}b_2 & - & a_{15}a_{31}a_{43}a_{52}b_2 & - & a_{15}a_{32}a_{41}a_{53}b_2 & + \\
a_{15}a_{32}a_{43}a_{51}b_2 & + & a_{15}a_{33}a_{41}a_{52}b_2 & - & a_{15}a_{33}a_{42}a_{51}b_2 & + \\
a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}b_1 & - & a_{21}a_{32}a_{45}a_{53}b_1 & - & a_{21}a_{33}a_{42}a_{55}b_1 & + \\
a_{21}a_{33}a_{45}a_{52}b_1 & + & a_{21}a_{35}a_{42}a_{53}b_1 & - & a_{21}a_{35}a_{43}a_{52}b_1 & - \\
a_{22}a_{31}a_{43}a_{55}b_1 & + & a_{22}a_{31}a_{45}a_{53}b_1 & + & a_{22}a_{33}a_{41}a_{55}b_1 & - \\
a_{22}a_{33}a_{45}a_{51}b_1 & - & a_{22}a_{35}a_{41}a_{53}b_1 & + & a_{22}a_{35}a_{43}a_{51}b_1 & + \\
a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}b_1 & - & a_{23}a_{31}a_{45}a_{52}b_1 & - & a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}b_1 & + \\
a_{23}a_{32}a_{45}a_{51}b_1 & + & a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}b_1 & - & a_{23}a_{35}a_{42}a_{51}b_1 & - \\
a_{25}a_{31}a_{42}a_{53}b_1 & + & a_{25}a_{31}a_{43}a_{52}b_1 & + & a_{25}a_{32}a_{41}a_{53}b_1 & -
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}b_1 - a_{25}a_{33}a_{41}a_{52}b_1 + a_{25}a_{33}a_{42}a_{51}b_1) / \\
& (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} - a_{11}a_{22}a_{33}a_{45}a_{54} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}a_{55} + \\
& a_{11}a_{22}a_{34}a_{45}a_{53} + a_{11}a_{22}a_{35}a_{43}a_{54} - a_{11}a_{22}a_{35}a_{44}a_{53} - \\
& a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55} + a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}a_{55} - \\
& a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{52} - a_{11}a_{23}a_{35}a_{42}a_{54} + a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{52} + \\
& a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}a_{55} - a_{11}a_{24}a_{32}a_{45}a_{53} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}a_{55} + \\
& a_{11}a_{24}a_{33}a_{45}a_{52} + a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53} - a_{11}a_{24}a_{35}a_{43}a_{52} - \\
& a_{11}a_{25}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{11}a_{25}a_{32}a_{44}a_{53} + a_{11}a_{25}a_{33}a_{42}a_{54} - \\
& a_{11}a_{25}a_{33}a_{44}a_{52} - a_{11}a_{25}a_{34}a_{42}a_{53} + a_{11}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52} - \\
& a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{12}a_{21}a_{33}a_{45}a_{54} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}a_{55} - \\
& a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53} - a_{12}a_{21}a_{35}a_{43}a_{54} + a_{12}a_{21}a_{35}a_{44}a_{53} + \\
& a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}a_{55} - a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{55} + \\
& a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51} + a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54} - a_{12}a_{23}a_{35}a_{44}a_{51} - \\
& a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}a_{55} + a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}a_{55} - \\
& a_{12}a_{24}a_{33}a_{45}a_{51} - a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53} + a_{12}a_{24}a_{35}a_{43}a_{51} + \\
& a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54} - a_{12}a_{25}a_{31}a_{44}a_{53} - a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}a_{54} + \\
& a_{12}a_{25}a_{33}a_{44}a_{51} + a_{12}a_{25}a_{34}a_{41}a_{53} - a_{12}a_{25}a_{34}a_{43}a_{51} + \\
& a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55} - a_{13}a_{21}a_{32}a_{45}a_{54} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55} + \\
& a_{13}a_{21}a_{34}a_{45}a_{52} + a_{13}a_{21}a_{35}a_{42}a_{54} - a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52} - \\
& a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55} + a_{13}a_{22}a_{31}a_{45}a_{54} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}a_{55} - \\
& a_{13}a_{22}a_{34}a_{45}a_{51} - a_{13}a_{22}a_{35}a_{41}a_{54} + a_{13}a_{22}a_{35}a_{44}a_{51} + \\
& a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}a_{55} - a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55} + \\
& a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51} + a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}a_{52} - a_{13}a_{24}a_{35}a_{42}a_{51} - \\
& a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52} + a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54} - \\
& a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51} - a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52} + a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51} - \\
& a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{14}a_{21}a_{32}a_{45}a_{53} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}a_{55} - \\
& a_{14}a_{21}a_{33}a_{45}a_{52} - a_{14}a_{21}a_{35}a_{42}a_{53} + a_{14}a_{21}a_{35}a_{43}a_{52} + \\
& a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55} - a_{14}a_{22}a_{31}a_{45}a_{53} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}a_{55} + \\
& a_{14}a_{22}a_{33}a_{45}a_{51} + a_{14}a_{22}a_{35}a_{41}a_{53} - a_{14}a_{22}a_{35}a_{43}a_{51} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55} + a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}a_{52} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55} - \\
& a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51} - a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52} + a_{14}a_{23}a_{35}a_{42}a_{51} + \\
& a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53} - a_{14}a_{25}a_{31}a_{43}a_{52} - a_{14}a_{25}a_{32}a_{41}a_{53} + \\
& a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51} + a_{14}a_{25}a_{33}a_{41}a_{52} - a_{14}a_{25}a_{33}a_{42}a_{51} + \\
& a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{54} - a_{15}a_{21}a_{32}a_{44}a_{53} - a_{15}a_{21}a_{33}a_{42}a_{54} + \\
& a_{15}a_{21}a_{33}a_{44}a_{52} + a_{15}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53} - a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52} - \\
& a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54} + a_{15}a_{22}a_{31}a_{44}a_{53} + a_{15}a_{22}a_{33}a_{41}a_{54} - \\
& a_{15}a_{22}a_{33}a_{44}a_{51} - a_{15}a_{22}a_{34}a_{41}a_{53} + a_{15}a_{22}a_{34}a_{43}a_{51} + \\
& a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54} - a_{15}a_{23}a_{31}a_{44}a_{52} - a_{15}a_{23}a_{32}a_{41}a_{54} + \\
& a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51} + a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52} - a_{15}a_{23}a_{34}a_{42}a_{51} - \\
& a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53} + a_{15}a_{24}a_{31}a_{43}a_{52} + a_{15}a_{24}a_{32}a_{41}a_{53} - \\
& a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}a_{51} - a_{15}a_{24}a_{33}a_{41}a_{52} + a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51})
\end{aligned}$$

x<sub>dot10</sub> =

$$\begin{aligned}
& -(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}b_5 - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}b_5 - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}b_5 + \\
& a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}b_5 + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}b_5 - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}b_5 - \\
& a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}b_5 + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}b_5 + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}b_5 - \\
& a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}b_5 - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}b_5 + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}b_5 + \\
& a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}b_5 - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}b_5 - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}b_5 + \\
& a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}b_5 + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}b_5 - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}b_5 - \\
& a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}b_5 + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}b_5 + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}b_5 - \\
& a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}b_5 - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}b_5 + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}b_5 - \\
& a_{11}a_{22}a_{33}a_{54}b_4 + a_{11}a_{22}a_{34}a_{53}b_4 + a_{11}a_{23}a_{32}a_{54}b_4 - \\
& a_{11}a_{23}a_{34}a_{52}b_4 - a_{11}a_{24}a_{32}a_{53}b_4 + a_{11}a_{24}a_{33}a_{52}b_4 + \\
& a_{12}a_{21}a_{33}a_{54}b_4 - a_{12}a_{21}a_{34}a_{53}b_4 - a_{12}a_{23}a_{31}a_{54}b_4 + \\
& a_{12}a_{23}a_{34}a_{51}b_4 + a_{12}a_{24}a_{31}a_{53}b_4 - a_{12}a_{24}a_{33}a_{51}b_4 - \\
& a_{13}a_{21}a_{32}a_{54}b_4 + a_{13}a_{21}a_{34}a_{52}b_4 + a_{13}a_{22}a_{31}a_{54}b_4 - \\
& a_{13}a_{22}a_{34}a_{51}b_4 - a_{13}a_{24}a_{31}a_{52}b_4 + a_{13}a_{24}a_{32}a_{51}b_4 + \\
& a_{14}a_{21}a_{32}a_{53}b_4 - a_{14}a_{21}a_{33}a_{52}b_4 - a_{14}a_{22}a_{31}a_{53}b_4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{14}a_{22}a_{33}a_{51}b_4 + a_{14}a_{23}a_{31}a_{52}b_4 - a_{14}a_{23}a_{32}a_{51}b_4 + \\
& a_{11}a_{22}a_{43}a_{54}b_3 - a_{11}a_{22}a_{44}a_{53}b_3 - a_{11}a_{23}a_{42}a_{54}b_3 + \\
& a_{11}a_{23}a_{44}a_{52}b_3 + a_{11}a_{24}a_{42}a_{53}b_3 - a_{11}a_{24}a_{43}a_{52}b_3 - \\
& a_{12}a_{21}a_{43}a_{54}b_3 + a_{12}a_{21}a_{44}a_{53}b_3 + a_{12}a_{23}a_{41}a_{54}b_3 - \\
& a_{12}a_{23}a_{44}a_{51}b_3 - a_{12}a_{24}a_{41}a_{53}b_3 + a_{12}a_{24}a_{43}a_{51}b_3 + \\
& a_{13}a_{21}a_{42}a_{54}b_3 - a_{13}a_{21}a_{44}a_{52}b_3 - a_{13}a_{22}a_{41}a_{54}b_3 + \\
& a_{13}a_{22}a_{44}a_{51}b_3 + a_{13}a_{24}a_{41}a_{52}b_3 - a_{13}a_{24}a_{42}a_{51}b_3 - \\
& a_{14}a_{21}a_{42}a_{53}b_3 + a_{14}a_{21}a_{43}a_{52}b_3 + a_{14}a_{22}a_{41}a_{53}b_3 - \\
& a_{14}a_{22}a_{43}a_{51}b_3 - a_{14}a_{23}a_{41}a_{52}b_3 + a_{14}a_{23}a_{42}a_{51}b_3 - \\
& a_{11}a_{32}a_{43}a_{54}b_2 + a_{11}a_{32}a_{44}a_{53}b_2 + a_{11}a_{33}a_{42}a_{54}b_2 - \\
& a_{11}a_{33}a_{44}a_{52}b_2 - a_{11}a_{34}a_{42}a_{53}b_2 + a_{11}a_{34}a_{43}a_{52}b_2 + \\
& a_{12}a_{31}a_{43}a_{54}b_2 - a_{12}a_{31}a_{44}a_{53}b_2 - a_{12}a_{33}a_{41}a_{54}b_2 + \\
& a_{12}a_{33}a_{44}a_{51}b_2 + a_{12}a_{34}a_{41}a_{53}b_2 - a_{12}a_{34}a_{43}a_{51}b_2 - \\
& a_{13}a_{31}a_{42}a_{54}b_2 + a_{13}a_{31}a_{44}a_{52}b_2 + a_{13}a_{32}a_{41}a_{54}b_2 - \\
& a_{13}a_{32}a_{44}a_{51}b_2 - a_{13}a_{34}a_{41}a_{52}b_2 + a_{13}a_{34}a_{42}a_{51}b_2 + \\
& a_{14}a_{31}a_{42}a_{53}b_2 - a_{14}a_{31}a_{43}a_{52}b_2 - a_{14}a_{32}a_{41}a_{53}b_2 + \\
& a_{14}a_{32}a_{43}a_{51}b_2 + a_{14}a_{33}a_{41}a_{52}b_2 - a_{14}a_{33}a_{42}a_{51}b_2 + \\
& a_{21}a_{32}a_{43}a_{54}b_1 - a_{21}a_{32}a_{44}a_{53}b_1 - a_{21}a_{33}a_{42}a_{54}b_1 + \\
& a_{21}a_{33}a_{44}a_{52}b_1 + a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}b_1 - a_{21}a_{34}a_{43}a_{52}b_1 - \\
& a_{22}a_{31}a_{43}a_{54}b_1 + a_{22}a_{31}a_{44}a_{53}b_1 + a_{22}a_{33}a_{41}a_{54}b_1 - \\
& a_{22}a_{33}a_{44}a_{51}b_1 - a_{22}a_{34}a_{41}a_{53}b_1 + a_{22}a_{34}a_{43}a_{51}b_1 + \\
& a_{23}a_{31}a_{42}a_{54}b_1 - a_{23}a_{31}a_{44}a_{52}b_1 - a_{23}a_{32}a_{41}a_{54}b_1 + \\
& a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}b_1 + a_{23}a_{34}a_{41}a_{52}b_1 - a_{23}a_{34}a_{42}a_{51}b_1 - \\
& a_{24}a_{31}a_{42}a_{53}b_1 + a_{24}a_{31}a_{43}a_{52}b_1 + a_{24}a_{32}a_{41}a_{53}b_1 - \\
& a_{24}a_{32}a_{43}a_{51}b_1 - a_{24}a_{33}a_{41}a_{52}b_1 + a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}b_1) / \\
& (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} - a_{11}a_{22}a_{33}a_{45}a_{54} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}a_{55} + \\
& a_{11}a_{22}a_{34}a_{45}a_{53} + a_{11}a_{22}a_{35}a_{43}a_{54} - a_{11}a_{22}a_{35}a_{44}a_{53} - \\
& a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55} + a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}a_{55} - \\
& a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{52} - a_{11}a_{23}a_{35}a_{42}a_{54} + a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{52} +
\end{aligned}$$

$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}a_{55} - a_{11}a_{24}a_{32}a_{45}a_{53} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}a_{55} +$   
 $a_{11}a_{24}a_{33}a_{45}a_{52} + a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53} - a_{11}a_{24}a_{35}a_{43}a_{52} -$   
 $a_{11}a_{25}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{11}a_{25}a_{32}a_{44}a_{53} + a_{11}a_{25}a_{33}a_{42}a_{54} -$   
 $a_{11}a_{25}a_{33}a_{44}a_{52} - a_{11}a_{25}a_{34}a_{42}a_{53} + a_{11}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52} -$   
 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{12}a_{21}a_{33}a_{45}a_{54} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}a_{55} -$   
 $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53} - a_{12}a_{21}a_{35}a_{43}a_{54} + a_{12}a_{21}a_{35}a_{44}a_{53} +$   
 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}a_{55} - a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{55} +$   
 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51} + a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54} - a_{12}a_{23}a_{35}a_{44}a_{51} -$   
 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}a_{55} + a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}a_{55} -$   
 $a_{12}a_{24}a_{33}a_{45}a_{51} - a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53} + a_{12}a_{24}a_{35}a_{43}a_{51} +$   
 $a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54} - a_{12}a_{25}a_{31}a_{44}a_{53} - a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}a_{54} +$   
 $a_{12}a_{25}a_{33}a_{44}a_{51} + a_{12}a_{25}a_{34}a_{41}a_{53} - a_{12}a_{25}a_{34}a_{43}a_{51} +$   
 $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55} - a_{13}a_{21}a_{32}a_{45}a_{54} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55} +$   
 $a_{13}a_{21}a_{34}a_{45}a_{52} + a_{13}a_{21}a_{35}a_{42}a_{54} - a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52} -$   
 $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55} + a_{13}a_{22}a_{31}a_{45}a_{54} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}a_{55} -$   
 $a_{13}a_{22}a_{34}a_{45}a_{51} - a_{13}a_{22}a_{35}a_{41}a_{54} + a_{13}a_{22}a_{35}a_{44}a_{51} +$   
 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}a_{55} - a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55} +$   
 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51} + a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}a_{52} - a_{13}a_{24}a_{35}a_{42}a_{51} -$   
 $a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52} + a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54} -$   
 $a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51} - a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52} + a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51} -$   
 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{14}a_{21}a_{32}a_{45}a_{53} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}a_{55} -$   
 $a_{14}a_{21}a_{33}a_{45}a_{52} - a_{14}a_{21}a_{35}a_{42}a_{53} + a_{14}a_{21}a_{35}a_{43}a_{52} +$   
 $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55} - a_{14}a_{22}a_{31}a_{45}a_{53} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}a_{55} +$   
 $a_{14}a_{22}a_{33}a_{45}a_{51} + a_{14}a_{22}a_{35}a_{41}a_{53} - a_{14}a_{22}a_{35}a_{43}a_{51} -$   
 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55} + a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}a_{52} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55} -$   
 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51} - a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52} + a_{14}a_{23}a_{35}a_{42}a_{51} +$   
 $a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53} - a_{14}a_{25}a_{31}a_{43}a_{52} - a_{14}a_{25}a_{32}a_{41}a_{53} +$   
 $a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51} + a_{14}a_{25}a_{33}a_{41}a_{52} - a_{14}a_{25}a_{33}a_{42}a_{51} +$   
 $a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{54} - a_{15}a_{21}a_{32}a_{44}a_{53} - a_{15}a_{21}a_{33}a_{42}a_{54} +$



$$\begin{aligned}
& a_{15}a_{21}a_{33}a_{44}a_{52} + a_{15}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53} - a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52} - \\
& a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54} + a_{15}a_{22}a_{31}a_{44}a_{53} + a_{15}a_{22}a_{33}a_{41}a_{54} - \\
& a_{15}a_{22}a_{33}a_{44}a_{51} - a_{15}a_{22}a_{34}a_{41}a_{53} + a_{15}a_{22}a_{34}a_{43}a_{51} + \\
& a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54} - a_{15}a_{23}a_{31}a_{44}a_{52} - a_{15}a_{23}a_{32}a_{41}a_{54} + \\
& a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51} + a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52} - a_{15}a_{23}a_{34}a_{42}a_{51} - \\
& a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53} + a_{15}a_{24}a_{31}a_{43}a_{52} + a_{15}a_{24}a_{32}a_{41}a_{53} - \\
& a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}a_{51} - a_{15}a_{24}a_{33}a_{41}a_{52} + a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51})
\end{aligned}$$

## Приложение 2

Программа MATLAB для исследования эффективности разработанного нестационарного наблюдателя и алгоритма прохождения резонанса

```
close all
clear
format compact
format short e
global J J_1 m_0 m rho k_c U1 g beta c_2 c_1 c_3 delta h8 hoh ener T Tprrr Tps;
global u u1 k_1 k_2 delta1 gamma H HG;
mpd=10.5; m=1.5; m_0=mpd+m; J_1=0.014; rho=0.04; g=9.81;
c_1=2650; c_2=2650; c_3=164; k_c=0.01; beta=5; k_1=1; k_2=100; U1=0.85;
T=1.2; gamma=0.5; h8=20; ener=0; Tprrr=0; Tps=0; hoh=0; u=0; t0=0; tfin=15;
ph10=-0.17;
x0=[0 0 0 0 0 0 ph10 0 0 0.001 0];
[t,x]=ode45('pp',[t0,tfin],x0);
for k=1:length(t);
uu1(k)=U1;
end;
clear J_1 m_0 m k_c U1 g beta
figure
subplot(521),plot(t,x(:,8),t,x(:,9)),grid
title('d\phi/dt(t), \psi(t)')
xlabel('t , s')
ylabel('d\phi/dt, \psi, s^-^1')
figure
subplot(521),plot(t,x(:,3)-x(:,10)),grid
title('en1')
xlabel('t , s')
ylabel('en1, J')
```

### Приложение 3

Подпрограмма MATLAB для исследования эффективности разработанного нестационарного наблюдателя и алгоритма прохождения резонанса

```
function xdot= pp(t,x)
global J J_1 m_0 m rho k_c U1 g beta c_2 c_1 c_3 delta h8 hoh ener T Tpr r Tps;
global u u1 k_1 k_2 delta1 gamma H HG;
xdot=zeros(size(x));
x1=x(1); x2=x(2); x3=x(3); x4=x(4); x5=x(5); x6=x(6); x7=x(7); x8=x(8);
x9=x(9); x10=x(10); x11=x(11);
hoh=0.5*J_1*(x8)^2+m*g*rho*sin(x7)+...
0.5*c_2*(x3)^2+m_0*g*x3+x11*(m*rho*x8*cos(x7))+0.5*m_0*(x11)^2;
a1=m_0; a3=-m*rho*sin(x5+x7); a4=-m*rho*sin(x5+x7); a6=m_0;
a7=m*rho*cos(x5+x7); a8=m*rho*cos(x5+x7); a9=-m*rho*sin(x5+x7);
a10=m*rho*cos(x5+x7); a11=m*rho*rho; a12=m*rho*rho; a13=a4;
a14=m*rho*cos(x5+x7); a15=m*rho*rho; a16=J_1;
b1=-x6^2*m*rho*cos(x5+x7)-x8^2*m*rho*cos(x5+x7)-...
2*x6*x8*m*rho*cos(x5+x7)+2*c_1*x1+beta*x2;
b2=-x6^2*m*rho*sin(x5+x7)-x8^2*m*rho*sin(x5+x7)-...
2*x6*x8*m*rho*sin(x5+x7)+m_0*g+2*c_2*x3+beta*x4;
b3=m*rho*g*cos(x5+x7)+c_3*x5+beta*x6;
b4=m*rho*g*cos(x5+x7)+k_c*x8-u;
A1=m_0; A2=m*rho*cos(x7); A3=A2; A4=J_1;
B11=x8^2*m*rho*sin(x7)-m_0*g-2*c_2*x3; B2=u-m*rho*g*cos(x7)-k_c*x8;
delta=(a13*a3*a10*a8-a13*a3*a6*a12+a7*a14*a9*a4-a7*a1*a14*a12-a15*...
a6*a9*a4-a15*a1*a10*a8+a15*a1*a6*a12-a13*a4*a7*a10+a13*a4*a6*a11-...
a14*a8*a9*a3+a14*a1*a8*a11+a16*a6*a9*a3+a16*a1*a7*a10-a16*a1*a6*a11);
delta1=A1*A4-A2*A3;
xdot(2)=(a3*a6*a12*b4-a3*a6*b3*a16+a3*a10*b2*a16-a3*a12*a14*b2-a3*...
a10*a8*b4+a3*b3*a14*a8+a4*a15*a6*b3-a4*b4*a6*a11-a4*a7*a14*b3-...
```

```

a4*a15*a10*b2+a4*a14*b2*a11+a4*b4*a7*a10+b1*a7*a14*a12+b1*a15*...
a10*a8-b1*a15*a6*a12-b1*a14*a8*a11-b1*a16*a7*a10+b1*a16*a6*a11)/delta;
x_dot(4)=(a7*a9*b1*a16-a7*a9*a4*b4+a7*a12*a1*b4+a7*a4*a13*b3-a7*b1*...
a13*a12-a7*b3*a1*a16+a8*a15*a1*b3-a8*b4*a1*a11-a8*a13*a3*b3-a8*a15*...
a9*b1+a8*a13*b1*a11+a8*b4*a9*a3+b2*a13*a3*a12+b2*a15*a9*a4-b2*a15*...
a1*a12-b2*a13*a4*a11-b2*a16*a9*a3+b2*a16*a1*a11)/delta;
x_dot(6)=(-a6*a9*b1*a16+a6*a9*a4*b4-a6*a12*a1*b4-a6*a4*a13*b3+a6*b1*...
a13*a12+a6*b3*a1*a16+a9*b1*a14*a8-a9*a4*a14*b2+a4*a13*a10*b2-a10*...
a1*b2*a16+a12*a1*a14*b2-b1*a13*a10*a8+a10*a1*a8*b4-b3*a1*a14*a8)/delta;
x_dot(8)=- (a15*a1*a6*b3-b4*a1*a6*a11+a13*a3*a10*b2-a13*a3*a6*b3+a7*...
a14*a9*b1-a7*a1*a14*b3-a15*a6*a9*b1-a15*a1*a10*b2-a13*b1*a7*a10+a13*...
b1*a6*a11-a14*b2*a9*a3+a14*a1*b2*a11+b4*a6*a9*a3+b4*a1*a7*a10)/delta;
x_dot(1)=x(2); x_dot(3)=x(4); x_dot(5)=x(6); x_dot(7)=x(8); x_dot(9)=(-x(9)+x(8))/T;
x_dot(10)=x(11)+k_1*(x(3)-x(10));
x_dot(11)=-2*c_2*x10/m_0-beta*(1+A2/delta1)*x11/m_0+((-A1*B2+...
A3*B11)*A2/delta1+x8^2*m*rho*sin(x7)-m_0*g)/m_0+k_2*(x(3)-x(10));
w=x(8)-x(9);
w1=h8-hoh;
if w1 < 0
    ener=1;
end;
if ener<1
    if w<0
        u=0;
        u1=1;
    else
        u=gamma;
    end;
    if w>0

```

```
        u=gamma;
    else
        u=0;
    end;
else
    if w1>0
        u=gamma;
    else
        u=0;
    end;
end;
    if x(8)<20
        Tpr=t;
    end;
    if ener<1
        Tps=t;
    end;
    ener=ener;
    u1=u1;
    if t>10
        hoh=hoh
    end;
```

t=t

## Приложение 4

Программа MATLAB для исследования эффективности алгоритма взаимной кратной синхронизации для трехроторной ВУ

```
close all
clear
format compact
format short e
global J J_1 J_2 J_3 m_0 m rho k_c U1 U2 U3 g beta c_2 c_1 r c_3 delta...
c_4 c_5 m_g V t_1 t_2 V1 alfa1 alfa2 alfa3 gamma1 gamma2 gamma3 H HG
mpd=9; m=1.5; m_0=mpd+3*m; m_g=0; J_1=0.014; J_2=0.014; J_3=0.014;
rho=0.04; J=0.3; r=0.2; g=9.81; c_1=5300; c_2=5300; c_3=164; c_4=2000;
c_5=2650; k_c=0.01; beta=5; V=0.6; t_1=5; t_2=9;
gamma1=0.02; gamma2=0.02; gamma3=0.02; alfa1=0.25; alfa2=0.25; alfa3=0.25;
HG=70; t0=0; tfin=35; ph10=-0.1; ph20=0.1; ph30=-0.11;
x0=[0 0 0 0 0 0 ph10 0 ph20 0 ph30 0];
[t,x]=ode45('pp',[t0,tfin],x0);
for k=1:length(t);
H=0.5*J_1*(x(k,8))^2+m*g*rho*sin(x(k,7))+0.5*J_2*(x(k,10))^2+m*g*rho*...
sin(x(k,9))+0.5*J_3*(x(k,12))^2+m*g*rho*sin(x(k,11))+ 0.5*c_2*(x(k,3))^2+...
m_0*g*x(k,3)+x(k,4)*(m*rho*x(k,8)*cos(x(k,7))+m*rho*x(k,10)*cos(x(k,9))+...
m*rho*x(k,12)*cos(x(k,11)))-x(k,2)*(m*rho*x(k,8)*sin(x(k,7))-m*rho*x(k,10)*...
sin(x(k,9))-m*rho*x(k,12)*sin(x(k,11)))+0.5*m_0*(x(k,2))^2+0.5*m_0*...
(x(k,4))^2+0.5*c_2*(x(k,1))^2;
U1=gamma1*((1-alfa1)*(H-HG)*x(k,8)+(alfa1/J_1)*((x(k,8)/J_1)-
(x(k,10)/J_2)+(alfa2/J_1)*((x(k,8)/J_1)-(x(k,12)/J_3)));
U2=gamma2*((1-alfa2)*(H-HG)*x(k,10)+(alfa2/J_2)*((x(k,8)/J_1)-
(x(k,10)/J_2)+(alfa3/J_2)*((x(k,10)/J_2)-(x(k,12)/J_3)));
U3=gamma3*((1-alfa2)*(H-HG)*x(k,12)+(alfa2/J_3)*((x(k,8)/J_1)-
(x(k,12)/J_3)+(alfa3/J_3)*((x(k,10)/J_2)-(x(k,12)/J_3)));
```

```
uu1(k)=U1;
uu2(k)=U2;
uu3(k)=U3;
HH(k)=H;
end;
clear J_1 J_2 J_3 m_0 m_k_c U1 U2 U3 g beta
```

```
figure
subplot(321),plot(t,x(:,7)-x(:,9)),grid
title('phi_1-phi_2')
subplot(322),plot(t,x(:,7)-x(:,11)/2),grid
title('phi_1-phi_3/2')
subplot(323),plot(t,x(:,9)-x(:,11)/2),grid
title('phi_2-phi_3/2')
```

## Приложение 5

Подпрограмма MATLAB для исследования эффективности алгоритма  
взаимной кратной синхронизации для трехроторной ВУ

```
function xdot=pp(t,x)
global J J_1 J_2 J_3 m_0 m rho k_c U1 U2 U3 g beta c_2 c_1 r c_3 delta c_4...
c_5 m_g V t_1 t_2 V1 alfa1 alfa2 alfa3 gamma1 gamma2 gamma3 H HG ras...
rasa FF newan1 newan2 flag ta pogra1 pogra2 pogr1 pogr2 rasp rasap R ts fa tv
xdot=zeros(size(x));
R=rand(1,20); pogr1=5*(R(4)-0.5)*2*0;
x1=x(1); x2=x(2); x3=x(3); x4=x(4); x5=x(5); x6=x(6); x7=x(7); x8=x(8);
x9=x(9); x10=x(10); x11=x(11); x12=x(12);
H=0.5*J_1*(x8)^2+m*g*rho*sin(x7)+0.5*J_2*(x10)^2+m*g*rho*sin(x9)+...
0.5*J_3*(x12)^2+m*g*rho*sin(x11)+ 0.5*c_2*(x3)^2+m_0*g*x3+x4*...
(m*rho*x8*cos(x7)+m*rho*x10*cos(x9)+m*rho*x12*cos(x11))-...
x2*(m*rho*x8*sin(x7)+m*rho*x10*sin(x9)+m*rho*x12*sin(x11))+...
0.5*m_0*(x2)^2+0.5*m_0*(x4)^2+0.5*c_1*(x1)^2;
U1=-gamma1*((1-alfa1)*(H-HG)*x8+(alfa1/J_1)*(x8-x10)+(alfa1/J_1)*...
(x8-x12/2)+(alfa1/J_1)*(x7-x9)+(alfa1/J_1)*(x7-x11/2));
U2=-gamma2*((1-alfa2)*(H-HG)*x10-(alfa2/J_2)*(x8-x10)-(alfa2/J_2)*...
(x7-x9)+(alfa2/J_2)*(x10-x12)+(alfa2/J_2)*(x9-x11));
U3=-gamma3*((1-alfa3)*(H-HG)*x12-(alfa3/J_3/2)*(x8-x12/2)-(alfa3/J_3/2)*...
(x7-x11/2))-(alfa3/J_3)*(x10-x12)-(alfa3/J_3)*(x9-x11));
if abs(rasa)>=0
    if abs(rasa)<=0.3
        if flag==0
            ts=t;
            flag=1;
        else
            ts=ts;
```



```

end;
else
flag=0;
ts=t;
end;
else
flag=0;
ts=t;
end;
rasfaz=abs(x7-2*x9);
rasa=rasfaz-(fix(rasfaz/6.28)*6.28);
rasa=abs(x7-2*x9);
rasa=rasfaz-(fix(rasfaz/6.28)*6.28);
a1=m_0; a3=-m*rho*(sin(x5+x7)+sin(x5+x9)+sin(x5+x11));
a4=-m*rho*sin(x5+x7); a5=-m*rho*sin(x5+x9); a6=-m*rho*sin(x5+x11);
a8=m_0; a9=m*rho*(cos(x5+x7)+cos(x5+x9)+cos(x5+x11));
a10=m*rho*cos(x5+x7); a11=m*rho*cos(x5+x9); a12=m*rho*cos(x5+x11);
a13=a3; a14=a9; a15=J+J_1+J_2+J_3-2*r*m*rho*(cos(x7)-cos(x9));
a16=J_1-r*m*rho*cos(x7); a17=J_2+r*m*rho*cos(x9); a18=J_3;
a19=a4; a20=a10; a21=a16; a22=J_1; a25=a5; a26=a11; a27=a17; a29=J_2;
a31=a6; a32=a12; a33=J_3; a36=J_3;
b1=-x6^2*m*rho*(cos(x5+x7)+cos(x5+x9)+cos(x5+x11))-...
x8^2*m*rho*cos(x5+x7)-x10^2*m*rho*cos(x5+x9)-...
x12^2*m*rho*cos(x5+x11)-2*x6*x8*m*rho*cos(x5+x7)-...
2*x6*x10*m*rho*cos(x5+x9)-2*x6*x12*m*rho*cos(x5+x11)+...
2*c_1*x1+beta*x2;
b2=-x6^2*m*rho*(sin(x5+x7)+sin(x5+x9)+sin(x5+x11))-...
x8^2*m*rho*sin(x5+x7)-x10^2*m*rho*sin(x5+x9)-...
x12^2*m*rho*sin(x5+x11)-2*x6*x8*m*rho*sin(x5+x7)-...

```

$$\begin{aligned}
& 2*x6*x10*m*rho*sin(x5+x9)-2*x6*x12*m*rho*cos(x5+x11)+... \\
& m_0*g+2*c_2*x3+beta*x4; \\
b3 &= x8^2*r*m*rho*sin(x7)-x10^2*r*m*rho*sin(x9)+... \\
& 2*r*m*rho*x6*x8*sin(x7)-2*r*m*rho*x6*x10*sin(x9)+... \\
& m*rho*g*(cos(x5+x7)+cos(x5+x9)+cos(x5+x11))+c_3*x5+beta*x6; \\
b4 &= -x6^2*r*m*rho*sin(x7)+m*rho*g*cos(x5+x7)+k_c*x8-U1; \\
b5 &= x6^2*r*m*rho*sin(x9)+m*rho*g*cos(x5+x9)+k_c*x10-U2; \\
b6 &= m*rho*g*cos(x5+x11)+k_c*x12-U3; \\
\text{delta} &= (a1*a10*a14*a21*a29*a36 - a1*a10*a15*a20*a29*a36 + a1*a10*a17*... \\
& a20*a27*a36 - a1*a10*a17*a21*a26*a36 + a1*a10*a18*a20*a29*a33 - a1*... \\
& a10*a18*a21*a29*a32 + a1*a11*a14*a22*a27*a36 - a1*a11*a15*a22*a26*... \\
& a36 - a1*a11*a16*a20*a27*a36 + a1*a11*a16*a21*a26*a36 + a1*a11*a18*... \\
& a22*a26*a33 - a1*a11*a18*a22*a27*a32 + a1*a12*a14*a22*a29*a33 - a1*... \\
& a12*a15*a22*a29*a32 - a1*a12*a16*a20*a29*a33 + a1*a12*a16*a21*a29*... \\
& a32 - a1*a12*a17*a22*a26*a33 + a1*a12*a17*a22*a27*a32 - a10*a14*a19*... \\
& a29*a3*a36 + a10*a17*a19*a26*a3*a36 + a10*a18*a19*a29*a3*a32 - a11*... \\
& a16*a19*a26*a3*a36 - a12*a16*a19*a29*a3*a32 + a10*a13*a20*a29*a3*... \\
& a36 - a10*a17*a20*a25*a3*a36 - a10*a18*a20*a29*a3*a31 + a11*a13*a22*... \\
& a26*a3*a36 - a11*a14*a22*a25*a3*a36 + a11*a16*a20*a25*a3*a36 + a11*... \\
& a18*a22*a25*a3*a32 - a11*a18*a22*a26*a3*a31 + a12*a13*a22*a29*a3*... \\
& a32 - a12*a14*a22*a29*a3*a31 + a12*a16*a20*a29*a3*a31 - a12*a17*a22*... \\
& a25*a3*a32 + a12*a17*a22*a26*a3*a31 - a11*a14*a19*a27*a36*a4 + a11*... \\
& a15*a19*a26*a36*a4 - a11*a18*a19*a26*a33*a4 + a11*a18*a19*a27*a32*... \\
& a4 - a12*a14*a19*a29*a33*a4 + a12*a15*a19*a29*a32*a4 + a12*a17*a19*... \\
& a26*a33*a4 - a12*a17*a19*a27*a32*a4 + a11*a13*a20*a27*a36*a4 - a11*... \\
& a13*a21*a26*a36*a4 + a11*a14*a21*a25*a36*a4 - a11*a15*a20*a25*a36*... \\
& a4 + a11*a18*a20*a25*a33*a4 - a11*a18*a20*a27*a31*a4 - a11*a18*a21*... \\
& a25*a32*a4 + a11*a18*a21*a26*a31*a4 + a12*a13*a20*a29*a33*a4 - a12*... \\
& a13*a21*a29*a32*a4 + a12*a14*a21*a29*a31*a4 - a12*a15*a20*a29*a31*...
\end{aligned}$$

$a_4 - a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_4 + a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_4 + a_{12} * a_{17} * a_{21} * \dots$   
 $a_{25} * a_{32} * a_4 - a_{12} * a_{17} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_4 + a_{10} * a_{14} * a_{19} * a_{27} * a_{36} * a_5 - a_{10} * \dots$   
 $a_{15} * a_{19} * a_{26} * a_{36} * a_5 + a_{10} * a_{18} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_5 - a_{10} * a_{18} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * \dots$   
 $a_5 - a_{12} * a_{16} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_5 + a_{12} * a_{16} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_5 - a_{10} * a_{13} * a_{20} * \dots$   
 $a_{27} * a_{36} * a_5 + a_{10} * a_{13} * a_{21} * a_{26} * a_{36} * a_5 - a_{10} * a_{14} * a_{21} * a_{25} * a_{36} * a_5 + a_{10} * \dots$   
 $a_{15} * a_{20} * a_{25} * a_{36} * a_5 - a_{10} * a_{18} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_5 + a_{10} * a_{18} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * \dots$   
 $a_5 + a_{10} * a_{18} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_5 - a_{10} * a_{18} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_5 + a_{12} * a_{13} * a_{22} * \dots$   
 $a_{26} * a_{33} * a_5 - a_{12} * a_{13} * a_{22} * a_{27} * a_{32} * a_5 - a_{12} * a_{14} * a_{22} * a_{25} * a_{33} * a_5 + a_{12} * \dots$   
 $a_{14} * a_{22} * a_{27} * a_{31} * a_5 + a_{12} * a_{15} * a_{22} * a_{25} * a_{32} * a_5 - a_{12} * a_{15} * a_{22} * a_{26} * a_{31} * \dots$   
 $a_5 + a_{12} * a_{16} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_5 - a_{12} * a_{16} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_5 - a_{12} * a_{16} * a_{21} * \dots$   
 $a_{25} * a_{32} * a_5 + a_{12} * a_{16} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_5 + a_{10} * a_{14} * a_{19} * a_{29} * a_{33} * a_6 - a_{10} * \dots$   
 $a_{15} * a_{19} * a_{29} * a_{32} * a_6 - a_{10} * a_{17} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_6 + a_{10} * a_{17} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * \dots$   
 $a_6 + a_{11} * a_{16} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_6 - a_{11} * a_{16} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_6 - a_{10} * a_{13} * a_{20} * \dots$   
 $a_{29} * a_{33} * a_6 + a_{10} * a_{13} * a_{21} * a_{29} * a_{32} * a_6 - a_{10} * a_{14} * a_{21} * a_{29} * a_{31} * a_6 + a_{10} * \dots$   
 $a_{15} * a_{20} * a_{29} * a_{31} * a_6 + a_{10} * a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_6 - a_{10} * a_{17} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * \dots$   
 $a_6 - a_{10} * a_{17} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_6 + a_{10} * a_{17} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_6 - a_{11} * a_{13} * a_{22} * \dots$   
 $a_{26} * a_{33} * a_6 + a_{11} * a_{13} * a_{22} * a_{27} * a_{32} * a_6 + a_{11} * a_{14} * a_{22} * a_{25} * a_{33} * a_6 - a_{11} * \dots$   
 $a_{14} * a_{22} * a_{27} * a_{31} * a_6 - a_{11} * a_{15} * a_{22} * a_{25} * a_{32} * a_6 + a_{11} * a_{15} * a_{22} * a_{26} * a_{31} * \dots$   
 $a_6 - a_{11} * a_{16} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_6 + a_{11} * a_{16} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_6 + a_{11} * a_{16} * a_{21} * \dots$   
 $a_{25} * a_{32} * a_6 - a_{11} * a_{16} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_6 + a_{11} * a_{15} * a_{22} * a_{29} * a_{36} * a_8 - a_{11} * a_{16} * \dots$   
 $a_{21} * a_{29} * a_{36} * a_8 - a_{11} * a_{17} * a_{22} * a_{27} * a_{36} * a_8 - a_{11} * a_{18} * a_{22} * a_{29} * a_{33} * a_8 - a_{11} * \dots$   
 $a_{14} * a_{22} * a_{29} * a_{36} * a_9 + a_{11} * a_{16} * a_{20} * a_{29} * a_{36} * a_9 + a_{11} * a_{17} * a_{22} * a_{26} * a_{36} * a_9 + \dots$   
 $a_{11} * a_{18} * a_{22} * a_{29} * a_{32} * a_9 + a_{16} * a_{19} * a_{29} * a_{33} * a_{36} * a_8 - a_{13} * a_{22} * a_{29} * a_{33} * a_{36} * \dots$   
 $a_8 + a_{17} * a_{22} * a_{25} * a_{33} * a_{36} * a_8 + a_{18} * a_{22} * a_{29} * a_{33} * a_{31} * a_8 - a_{15} * a_{19} * a_{29} * a_{36} * \dots$   
 $a_4 * a_8 + a_{17} * a_{19} * a_{27} * a_{36} * a_4 * a_8 + a_{18} * a_{19} * a_{29} * a_{33} * a_4 * a_8 + a_{13} * a_{21} * a_{29} * \dots$   
 $a_{36} * a_4 * a_8 - a_{17} * a_{21} * a_{25} * a_{36} * a_4 * a_8 - a_{18} * a_{21} * a_{29} * a_{31} * a_4 * a_8 + a_{14} * a_{19} * \dots$   
 $a_{29} * a_{36} * a_4 * a_9 - a_{16} * a_{19} * a_{27} * a_{36} * a_5 * a_8 - a_{17} * a_{19} * a_{26} * a_{36} * a_4 * a_9 - a_{18} * \dots$   
 $a_{19} * a_{29} * a_{32} * a_4 * a_9 - a_{13} * a_{20} * a_{29} * a_{36} * a_4 * a_9 + a_{13} * a_{22} * a_{27} * a_{36} * a_5 * a_8 - \dots$   
 $a_{15} * a_{22} * a_{25} * a_{36} * a_5 * a_8 + a_{16} * a_{21} * a_{25} * a_{36} * a_5 * a_8 + a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_{36} * a_4 * \dots$

$$\begin{aligned}
& a_9 + a_{18} \cdot a_{20} \cdot a_{29} \cdot a_{31} \cdot a_4 \cdot a_9 + a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_{33} \cdot a_5 \cdot a_8 - a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{27} \cdot a_{31} \cdot \dots \\
& a_5 \cdot a_8 + a_{16} \cdot a_{19} \cdot a_{26} \cdot a_{36} \cdot a_5 \cdot a_9 - a_{16} \cdot a_{19} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot a_6 \cdot a_8 - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{26} \cdot \dots \\
& a_{36} \cdot a_5 \cdot a_9 + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot a_6 \cdot a_8 + a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_{36} \cdot a_5 \cdot a_9 - a_{15} \cdot a_{22} \cdot \dots \\
& a_{29} \cdot a_{31} \cdot a_6 \cdot a_8 - a_{16} \cdot a_{20} \cdot a_{25} \cdot a_{36} \cdot a_5 \cdot a_9 + a_{16} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot a_{31} \cdot a_6 \cdot a_8 - a_{17} \cdot \dots \\
& a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_{33} \cdot a_6 \cdot a_8 + a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{27} \cdot a_{31} \cdot a_6 \cdot a_8 - a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_{32} \cdot a_5 \cdot a_9 + \dots \\
& a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{26} \cdot a_{31} \cdot a_5 \cdot a_9 + a_{16} \cdot a_{19} \cdot a_{29} \cdot a_{32} \cdot a_6 \cdot a_9 - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_{32} \cdot a_6 \cdot \dots \\
& a_9 + a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_{31} \cdot a_6 \cdot a_9 - a_{16} \cdot a_{20} \cdot a_{29} \cdot a_{31} \cdot a_6 \cdot a_9 + a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_{32} \cdot \dots \\
& a_6 \cdot a_9 - a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{26} \cdot a_{31} \cdot a_6 \cdot a_9);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{xdot}(2) = & -(a_{10} \cdot a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot a_{36} \cdot b_1 - a_{10} \cdot a_{15} \cdot a_{20} \cdot a_{29} \cdot a_{36} \cdot b_1 + a_{10} \cdot a_{17} \cdot \dots \\
& a_{20} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot b_1 - a_{10} \cdot a_{17} \cdot a_{21} \cdot a_{26} \cdot a_{36} \cdot b_1 + a_{10} \cdot a_{18} \cdot a_{20} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot b_1 - \dots \\
& a_{10} \cdot a_{18} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot a_{32} \cdot b_1 + a_{11} \cdot a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot b_1 - a_{11} \cdot a_{15} \cdot a_{22} \cdot a_{26} \cdot \dots \\
& a_{36} \cdot b_1 - a_{11} \cdot a_{16} \cdot a_{20} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot b_1 + a_{11} \cdot a_{16} \cdot a_{21} \cdot a_{26} \cdot a_{36} \cdot b_1 + a_{11} \cdot a_{18} \cdot \dots \\
& a_{22} \cdot a_{26} \cdot a_{33} \cdot b_1 - a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{27} \cdot a_{32} \cdot b_1 + a_{12} \cdot a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot b_1 - \dots \\
& a_{12} \cdot a_{15} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_{32} \cdot b_1 - a_{12} \cdot a_{16} \cdot a_{20} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot b_1 + a_{12} \cdot a_{16} \cdot a_{21} \cdot \dots \\
& a_{29} \cdot a_{32} \cdot b_1 - a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{26} \cdot a_{33} \cdot b_1 + a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{27} \cdot a_{32} \cdot b_1 + \dots \\
& a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_2 - a_{16} \cdot a_{20} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_2 - a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{26} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot \dots \\
& b_2 - a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{32} \cdot b_2 + a_{10} \cdot a_{20} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_3 + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{26} \cdot a_3 \cdot \dots \\
& a_{36} \cdot b_3 + a_{12} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{32} \cdot b_3 - a_{10} \cdot a_{14} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_4 + a_{10} \cdot a_{17} \cdot a_{26} \cdot \dots \\
& a_3 \cdot a_{36} \cdot b_4 + a_{10} \cdot a_{18} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{32} \cdot b_4 - a_{11} \cdot a_{16} \cdot a_{26} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_4 - a_{12} \cdot a_{16} \cdot \dots \\
& a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{32} \cdot b_4 - a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_2 + a_{15} \cdot a_{20} \cdot a_{29} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_2 - a_{17} \cdot \dots \\
& a_{20} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_2 + a_{17} \cdot a_{21} \cdot a_{26} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_2 - a_{18} \cdot a_{20} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot a_4 \cdot b_2 + \dots \\
& a_{18} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot a_{32} \cdot a_4 \cdot b_2 - a_{10} \cdot a_{17} \cdot a_{20} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_5 - a_{11} \cdot a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot \dots \\
& b_5 + a_{11} \cdot a_{16} \cdot a_{20} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_5 + a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_3 \cdot a_{32} \cdot b_5 - a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{22} \cdot \dots \\
& a_3 \cdot a_{32} \cdot b_5 + a_{11} \cdot a_{20} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_3 - a_{11} \cdot a_{21} \cdot a_{26} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_3 + a_{12} \cdot a_{20} \cdot \dots \\
& a_{29} \cdot a_{33} \cdot a_4 \cdot b_3 - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot a_{32} \cdot a_4 \cdot b_3 - a_{10} \cdot a_{18} \cdot a_{20} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot b_6 - a_{11} \cdot \dots \\
& a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{26} \cdot a_3 \cdot b_6 - a_{12} \cdot a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot b_6 + a_{12} \cdot a_{16} \cdot a_{20} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot b_6 + \dots \\
& a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{26} \cdot a_3 \cdot b_6 - a_{11} \cdot a_{14} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_4 + a_{11} \cdot a_{15} \cdot a_{26} \cdot a_{36} \cdot \dots \\
& a_4 \cdot b_4 - a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{26} \cdot a_{33} \cdot a_4 \cdot b_4 + a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{27} \cdot a_{32} \cdot a_4 \cdot b_4 - a_{12} \cdot a_{14} \cdot a_{29} \cdot \dots \\
& a_{33} \cdot a_4 \cdot b_4 + a_{12} \cdot a_{15} \cdot a_{29} \cdot a_{32} \cdot a_4 \cdot b_4 + a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{26} \cdot a_{33} \cdot a_4 \cdot b_4 - a_{12} \cdot a_{17} \cdot \dots
\end{aligned}$$

$a_{27}a_{32}a_4b_4 - a_{14}a_{22}a_{27}a_{36}a_5b_2 + a_{15}a_{22}a_{26}a_{36}a_5b_2 + a_{16}a_{20}a_{27}a_{36}a_5b_2 - a_{16}a_{21}a_{26}a_{36}a_5b_2 - a_{18}a_{22}a_{26}a_{33}a_5b_2 + \dots$   
 $a_{18}a_{22}a_{27}a_{32}a_5b_2 + a_{11}a_{14}a_{21}a_{36}a_4b_5 - a_{11}a_{15}a_{20}a_{36}a_4b_5 + a_{11}a_{18}a_{20}a_{33}a_4b_5 - a_{11}a_{18}a_{21}a_{32}a_4b_5 - a_{12}a_{17}a_{20}a_{33}a_4b_5 + a_{12}a_{17}a_{21}a_{32}a_4b_5 - a_{10}a_{20}a_{27}a_{36}a_5b_3 + a_{10}a_{21}a_{26}a_{36}a_5b_3 + a_{12}a_{22}a_{26}a_{33}a_5b_3 - a_{12}a_{22}a_{27}a_{32}a_5b_3 - a_{11}a_{18}a_{20}a_{27}a_4b_6 + a_{11}a_{18}a_{21}a_{26}a_4b_6 + a_{12}a_{14}a_{21}a_{29}a_4b_6 - a_{12}a_{15}a_{20}a_{29}a_4b_6 + a_{12}a_{17}a_{20}a_{27}a_4b_6 - a_{12}a_{17}a_{21}a_{26}a_4b_6 + \dots$   
 $a_{10}a_{14}a_{27}a_{36}a_5b_4 - a_{10}a_{15}a_{26}a_{36}a_5b_4 + a_{10}a_{18}a_{26}a_{33}a_5b_4 - a_{10}a_{18}a_{27}a_{32}a_5b_4 - a_{12}a_{16}a_{26}a_{33}a_5b_4 + a_{12}a_{16}a_{27}a_{32}a_5b_4 - a_{14}a_{22}a_{29}a_{33}a_6b_2 + a_{15}a_{22}a_{29}a_{32}a_6b_2 + a_{16}a_{20}a_{29}a_{33}a_6b_2 - a_{16}a_{21}a_{29}a_{32}a_6b_2 + a_{17}a_{22}a_{26}a_{33}a_6b_2 - a_{17}a_{22}a_{27}a_{32}a_6b_2 - a_{10}a_{14}a_{21}a_{36}a_5b_5 + a_{10}a_{15}a_{20}a_{36}a_5b_5 - a_{10}a_{18}a_{20}a_{33}a_5b_5 + a_{10}a_{18}a_{21}a_{32}a_5b_5 - a_{12}a_{14}a_{22}a_{33}a_5b_5 + \dots$   
 $a_{12}a_{15}a_{22}a_{32}a_5b_5 + a_{12}a_{16}a_{20}a_{33}a_5b_5 - a_{12}a_{16}a_{21}a_{32}a_5b_5 - a_{10}a_{20}a_{29}a_{33}a_6b_3 + a_{10}a_{21}a_{29}a_{32}a_6b_3 - a_{11}a_{22}a_{26}a_{33}a_6b_3 + a_{11}a_{22}a_{27}a_{32}a_6b_3 + a_{10}a_{18}a_{20}a_{27}a_5b_6 - a_{10}a_{18}a_{21}a_{26}a_5b_6 + a_{12}a_{14}a_{22}a_{27}a_5b_6 - a_{12}a_{15}a_{22}a_{26}a_5b_6 - a_{12}a_{16}a_{20}a_{27}a_5b_6 + a_{12}a_{16}a_{21}a_{26}a_5b_6 + a_{10}a_{14}a_{29}a_{33}a_6b_4 - a_{10}a_{15}a_{29}a_{32}a_6b_4 - a_{10}a_{17}a_{26}a_{33}a_6b_4 + a_{10}a_{17}a_{27}a_{32}a_6b_4 + \dots$   
 $a_{11}a_{16}a_{26}a_{33}a_6b_4 - a_{11}a_{16}a_{27}a_{32}a_6b_4 + a_{15}a_{22}a_{29}a_{36}a_8b_1 - a_{16}a_{21}a_{29}a_{36}a_8b_1 - a_{17}a_{22}a_{27}a_{36}a_8b_1 - a_{18}a_{22}a_{29}a_{33}a_8b_1 + a_{10}a_{17}a_{20}a_{33}a_6b_5 - a_{10}a_{17}a_{21}a_{32}a_6b_5 + a_{11}a_{14}a_{22}a_{33}a_6b_5 - a_{11}a_{15}a_{22}a_{32}a_6b_5 - a_{11}a_{16}a_{20}a_{33}a_6b_5 + a_{11}a_{16}a_{21}a_{32}a_6b_5 - a_{10}a_{14}a_{21}a_{29}a_6b_6 + a_{10}a_{15}a_{20}a_{29}a_6b_6 - a_{10}a_{17}a_{20}a_{27}a_6b_6 + a_{10}a_{17}a_{21}a_{26}a_6b_6 - a_{11}a_{14}a_{22}a_{27}a_6b_6 + \dots$   
 $a_{11}a_{15}a_{22}a_{26}a_6b_6 + a_{11}a_{16}a_{20}a_{27}a_6b_6 - a_{11}a_{16}a_{21}a_{26}a_6b_6 - a_{14}a_{22}a_{29}a_{36}a_9b_1 + a_{16}a_{20}a_{29}a_{36}a_9b_1 + a_{17}a_{22}a_{26}a_{36}a_9b_1 + a_{18}a_{22}a_{29}a_{32}a_9b_1 - \dots$

$$\begin{aligned}
& a_{22}a_{29}a_3a_{36}a_8b_3 + a_{16}a_{29}a_3a_{36}a_8b_4 + a_{17}a_{22}a_3a_{36}a_8b_5 + \dots \\
& a_{21}a_{29}a_{36}a_4a_8b_3 + a_{18}a_{22}a_{29}a_3a_8b_6 - a_{15}a_{29}a_{36}a_4a_8b_4 + \dots \\
& a_{17}a_{27}a_{36}a_4a_8b_4 + a_{18}a_{29}a_{33}a_4a_8b_4 - a_{17}a_{21}a_{36}a_4a_8b_5 - \dots \\
& a_{20}a_{29}a_{36}a_4a_9b_3 + a_{22}a_{27}a_{36}a_5a_8b_3 - a_{18}a_{21}a_{29}a_4a_8b_6 + \dots \\
& a_{14}a_{29}a_{36}a_4a_9b_4 - a_{16}a_{27}a_{36}a_5a_8b_4 - a_{17}a_{26}a_{36}a_4a_9b_4 - \dots \\
& a_{18}a_{29}a_{32}a_4a_9b_4 - a_{15}a_{22}a_{36}a_5a_8b_5 + a_{16}a_{21}a_{36}a_5a_8b_5 + \dots \\
& a_{17}a_{20}a_{36}a_4a_9b_5 + a_{18}a_{22}a_{33}a_5a_8b_5 - a_{22}a_{26}a_{36}a_5a_9b_3 + \dots \\
& a_{22}a_{29}a_{33}a_6a_8b_3 + a_{18}a_{20}a_{29}a_4a_9b_6 - a_{18}a_{22}a_{27}a_5a_8b_6 + \dots \\
& a_{16}a_{26}a_{36}a_5a_9b_4 - a_{16}a_{29}a_{33}a_6a_8b_4 + a_{14}a_{22}a_{36}a_5a_9b_5 - \dots \\
& a_{16}a_{20}a_{36}a_5a_9b_5 - a_{17}a_{22}a_{33}a_6a_8b_5 - a_{18}a_{22}a_{32}a_5a_9b_5 - \dots \\
& a_{22}a_{29}a_{32}a_6a_9b_3 - a_{15}a_{22}a_{29}a_6a_8b_6 + a_{16}a_{21}a_{29}a_6a_8b_6 + \dots \\
& a_{17}a_{22}a_{27}a_6a_8b_6 + a_{18}a_{22}a_{26}a_5a_9b_6 + a_{16}a_{29}a_{32}a_6a_9b_4 + \dots \\
& a_{17}a_{22}a_{32}a_6a_9b_5 + a_{14}a_{22}a_{29}a_6a_9b_6 - a_{16}a_{20}a_{29}a_6a_9b_6 - \dots \\
& a_{17}a_{22}a_{26}a_6a_9b_6)/\delta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(4) = & (a_{10}a_{17}a_{19}a_{27}a_{36}b_1 - a_{10}a_{15}a_{19}a_{29}a_{36}b_1 + a_{10}a_{18}a_{19}a_{29}a_{33}b_1 - a_{11}a_{16}a_{19}a_{27}a_{36}b_1 - a_{12}a_{16}a_{19}a_{29}a_{33}b_1 + \dots \\
& a_{10}a_{13}a_{21}a_{29}a_{36}b_1 - a_{10}a_{17}a_{21}a_{25}a_{36}b_1 - a_{10}a_{18}a_{21}a_{29}a_{31}b_1 + a_{11}a_{13}a_{22}a_{27}a_{36}b_1 - a_{11}a_{15}a_{22}a_{25}a_{36}b_1 + a_{11}a_{16}a_{21}a_{25}a_{36}b_1 + a_{11}a_{18}a_{22}a_{25}a_{33}b_1 - a_{11}a_{18}a_{22}a_{27}a_{31}b_1 + \dots \\
& a_{12}a_{13}a_{22}a_{29}a_{33}b_1 - a_{12}a_{15}a_{22}a_{29}a_{31}b_1 + a_{12}a_{16}a_{21}a_{29}a_{31}b_1 - a_{12}a_{17}a_{22}a_{25}a_{33}b_1 + a_{12}a_{17}a_{22}a_{27}a_{31}b_1 - a_{15}a_{22}a_{29}a_{36}b_2 + a_{16}a_{21}a_{29}a_{36}b_2 + a_{17}a_{22}a_{27}a_{36}b_2 + \dots \\
& a_{18}a_{22}a_{29}a_{33}b_2 - a_{10}a_{21}a_{29}a_{36}b_3 - a_{11}a_{22}a_{27}a_{36}b_3 - a_{12}a_{22}a_{29}a_{33}b_3 + a_{10}a_{15}a_{29}a_{36}b_4 - a_{10}a_{17}a_{27}a_{36}b_4 - a_{10}a_{18}a_{29}a_{33}b_4 + a_{11}a_{16}a_{27}a_{36}b_4 + a_{12}a_{16}a_{29}a_{33}b_4 - a_{16}a_{19}a_{29}a_3a_{36}b_2 + a_{10}a_{17}a_{21}a_{36}b_5 + a_{11}a_{15}a_{22}a_{36}b_5 - a_{11}a_{16}a_{21}a_{36}b_5 - a_{11}a_{18}a_{22}a_{33}b_5 + a_{12}a_{17}a_{22}a_{33}b_5 + a_{10}a_{18}a_{21}a_{29}b_6 + a_{11}a_{18}a_{22}a_{27}b_6 + \dots)
\end{aligned}$$

$a_1 a_{12} a_{15} a_{22} a_{29} b_6 - a_1 a_{12} a_{16} a_{21} a_{29} b_6 - a_1 a_{12} a_{17} a_{22} a_{27} \dots$   
 $b_6 + a_{13} a_{22} a_{29} a_3 a_{36} b_2 - a_{17} a_{22} a_{25} a_3 a_{36} b_2 - a_{18} a_{22} a_{29} \dots$   
 $a_3 a_{31} b_2 + a_{10} a_{19} a_{29} a_3 a_{36} b_3 + a_{15} a_{19} a_{29} a_3 a_{36} a_4 b_2 - a_{17} a_{19} \dots$   
 $a_{27} a_{36} a_4 b_2 - a_{18} a_{19} a_{29} a_{33} a_4 b_2 + a_{11} a_{22} a_{25} a_3 a_{36} b_3 + a_{12} \dots$   
 $a_{22} a_{29} a_3 a_{31} b_3 - a_{10} a_{13} a_{29} a_3 a_{36} b_4 + a_{10} a_{17} a_{25} a_3 a_{36} b_4 + \dots$   
 $a_{10} a_{18} a_{29} a_3 a_{31} b_4 - a_{11} a_{16} a_{25} a_3 a_{36} b_4 - a_{12} a_{16} a_{29} a_3 a_{31} \dots$   
 $b_4 - a_{13} a_{21} a_{29} a_3 a_{36} a_4 b_2 + a_{17} a_{21} a_{25} a_3 a_{36} a_4 b_2 + a_{18} a_{21} a_{29} \dots$   
 $a_{31} a_4 b_2 - a_{10} a_{17} a_{19} a_3 a_{36} b_5 + a_{11} a_{16} a_{19} a_3 a_{36} b_5 + a_{11} a_{19} \dots$   
 $a_{27} a_{36} a_4 b_3 + a_{12} a_{19} a_{29} a_{33} a_4 b_3 - a_{10} a_{18} a_{19} a_{29} a_3 b_6 + a_{12} \dots$   
 $a_{16} a_{19} a_{29} a_3 b_6 + a_{16} a_{19} a_{27} a_{36} a_5 b_2 - a_{11} a_{13} a_{22} a_3 a_{36} b_5 + \dots$   
 $a_{11} a_{18} a_{22} a_3 a_{31} b_5 - a_{12} a_{17} a_{22} a_3 a_{31} b_5 - a_{11} a_{21} a_{25} a_3 a_{36} a_4 \dots$   
 $b_3 - a_{12} a_{21} a_{29} a_{31} a_4 b_3 - a_{11} a_{18} a_{22} a_{25} a_3 b_6 - a_{12} a_{13} a_{22} a_{29} \dots$   
 $a_3 b_6 + a_{12} a_{17} a_{22} a_{25} a_3 b_6 - a_{11} a_{13} a_{27} a_{36} a_4 b_4 + a_{11} a_{15} a_{25} \dots$   
 $a_{36} a_4 b_4 - a_{11} a_{18} a_{25} a_{33} a_4 b_4 + a_{11} a_{18} a_{27} a_{31} a_4 b_4 - a_{12} a_{13} \dots$   
 $a_{29} a_{33} a_4 b_4 + a_{12} a_{15} a_{29} a_{31} a_4 b_4 + a_{12} a_{17} a_{25} a_{33} a_4 b_4 - a_{12} \dots$   
 $a_{17} a_{27} a_{31} a_4 b_4 - a_{13} a_{22} a_{27} a_{36} a_5 b_2 + a_{15} a_{22} a_{25} a_{36} a_5 b_2 - \dots$   
 $a_{16} a_{21} a_{25} a_{36} a_5 b_2 - a_{18} a_{22} a_{25} a_{33} a_5 b_2 + a_{18} a_{22} a_{27} a_{31} a_5 \dots$   
 $b_2 - a_{11} a_{15} a_{19} a_{36} a_4 b_5 + a_{11} a_{18} a_{19} a_{33} a_4 b_5 - a_{12} a_{17} a_{19} a_{33} \dots$   
 $a_4 b_5 - a_{10} a_{19} a_{27} a_{36} a_5 b_3 - a_{11} a_{18} a_{19} a_{27} a_4 b_6 - a_{12} a_{15} a_{19} \dots$   
 $a_{29} a_4 b_6 + a_{12} a_{17} a_{19} a_{27} a_4 b_6 + a_{16} a_{19} a_{29} a_{33} a_6 b_2 + a_{11} a_{13} \dots$   
 $a_{21} a_{36} a_4 b_5 - a_{11} a_{18} a_{21} a_{31} a_4 b_5 + a_{12} a_{17} a_{21} a_{31} a_4 b_5 + a_{10} \dots$   
 $a_{21} a_{25} a_{36} a_5 b_3 + a_{12} a_{22} a_{25} a_{33} a_5 b_3 - a_{12} a_{22} a_{27} a_{31} a_5 b_3 + \dots$   
 $a_{11} a_{18} a_{21} a_{25} a_4 b_6 + a_{12} a_{13} a_{21} a_{29} a_4 b_6 - a_{12} a_{17} a_{21} a_{25} a_4 \dots$   
 $b_6 + a_{10} a_{13} a_{27} a_{36} a_5 b_4 - a_{10} a_{15} a_{25} a_{36} a_5 b_4 + a_{10} a_{18} a_{25} a_{33} \dots$   
 $a_5 b_4 - a_{10} a_{18} a_{27} a_{31} a_5 b_4 - a_{12} a_{16} a_{25} a_{33} a_5 b_4 + a_{12} a_{16} a_{27} \dots$   
 $a_{31} a_5 b_4 - a_{13} a_{22} a_{29} a_{33} a_6 b_2 + a_{15} a_{22} a_{29} a_{31} a_6 b_2 - a_{16} a_{21} \dots$   
 $a_{29} a_{31} a_6 b_2 + a_{17} a_{22} a_{25} a_{33} a_6 b_2 - a_{17} a_{22} a_{27} a_{31} a_6 b_2 + a_{10} \dots$   
 $a_{15} a_{19} a_{36} a_5 b_5 - a_{10} a_{18} a_{19} a_{33} a_5 b_5 + a_{12} a_{16} a_{19} a_{33} a_5 b_5 - \dots$   
 $a_{10} a_{19} a_{29} a_{33} a_6 b_3 + a_{10} a_{18} a_{19} a_{27} a_5 b_6 - a_{12} a_{16} a_{19} a_{27} a_5 b_6 - \dots$

$$\begin{aligned}
& a_{10}a_{13}a_{21}a_{36}a_5^5b_5 + a_{10}a_{18}a_{21}a_{31}a_5^5b_5 - a_{12}a_{13}a_{22}a_{33}a_5^5b_5 + \dots \\
& a_{12}a_{15}a_{22}a_{31}a_5^5b_5 - a_{12}a_{16}a_{21}a_{31}a_5^5b_5 + a_{10}a_{21}a_{29}a_{31}a_6^6b_3 - \dots \\
& a_{11}a_{22}a_{25}a_{33}a_6^6b_3 + a_{11}a_{22}a_{27}a_{31}a_6^6b_3 - a_{10}a_{18}a_{21}a_{25}a_5^5b_6 + \dots \\
& a_{12}a_{13}a_{22}a_{27}a_5^5b_6 - a_{12}a_{15}a_{22}a_{25}a_5^5b_6 + a_{12}a_{16}a_{21}a_{25}a_5^5b_6 + \dots \\
& a_{10}a_{13}a_{29}a_{33}a_6^6b_4 - a_{10}a_{15}a_{29}a_{31}a_6^6b_4 - a_{10}a_{17}a_{25}a_{33}a_6^6b_4 + \dots \\
& a_{10}a_{17}a_{27}a_{31}a_6^6b_4 + a_{11}a_{16}a_{25}a_{33}a_6^6b_4 - a_{11}a_{16}a_{27}a_{31}a_6^6b_4 + \dots \\
& a_{10}a_{17}a_{19}a_{33}a_6^6b_5 - a_{11}a_{16}a_{19}a_{33}a_6^6b_5 + a_{10}a_{15}a_{19}a_{29}a_6^6b_6 - \dots \\
& a_{10}a_{17}a_{19}a_{27}a_6^6b_6 + a_{11}a_{16}a_{19}a_{27}a_6^6b_6 + a_{16}a_{19}a_{29}a_{36}a_9^9b_1 - \dots \\
& a_{10}a_{17}a_{21}a_{31}a_6^6b_5 + a_{11}a_{13}a_{22}a_{33}a_6^6b_5 - a_{11}a_{15}a_{22}a_{31}a_6^6b_5 + \dots \\
& a_{11}a_{16}a_{21}a_{31}a_6^6b_5 - a_{10}a_{13}a_{21}a_{29}a_6^6b_6 + a_{10}a_{17}a_{21}a_{25}a_6^6b_6 - \dots \\
& a_{11}a_{13}a_{22}a_{27}a_6^6b_6 + a_{11}a_{15}a_{22}a_{25}a_6^6b_6 - a_{11}a_{16}a_{21}a_{25}a_6^6b_6 - \dots \\
& a_{13}a_{22}a_{29}a_{36}a_9^9b_1 + a_{17}a_{22}a_{25}a_{36}a_9^9b_1 + a_{18}a_{22}a_{29}a_{31}a_9^9b_1 + \dots \\
& a_{17}a_{22}a_{29}a_{36}a_9^9b_3 - a_{17}a_{16}a_{29}a_{36}a_9^9b_4 - a_{17}a_{17}a_{22}a_{36}a_9^9b_5 - \dots \\
& a_{17}a_{18}a_{22}a_{29}a_9^9b_6 - a_{19}a_{29}a_{36}a_4^4a_9^9b_3 + a_{13}a_{29}a_{36}a_4^4a_9^9b_4 - \dots \\
& a_{17}a_{25}a_{36}a_4^4a_9^9b_4 - a_{18}a_{29}a_{31}a_4^4a_9^9b_4 + a_{17}a_{19}a_{36}a_4^4a_9^9b_5 + \dots \\
& a_{18}a_{19}a_{29}a_4^4a_9^9b_6 - a_{22}a_{25}a_{36}a_5^5a_9^9b_3 + a_{16}a_{25}a_{36}a_5^5a_9^9b_4 - \dots \\
& a_{16}a_{19}a_{36}a_5^5a_9^9b_5 + a_{13}a_{22}a_{36}a_5^5a_9^9b_5 - a_{18}a_{22}a_{31}a_5^5a_9^9b_5 - \dots \\
& a_{22}a_{29}a_{31}a_6^6a_9^9b_3 + a_{18}a_{22}a_{25}a_5^5a_9^9b_6 + a_{16}a_{29}a_{31}a_6^6a_9^9b_4 - \dots \\
& a_{16}a_{19}a_{29}a_6^6a_9^9b_6 + a_{17}a_{22}a_{31}a_6^6a_9^9b_5 + a_{13}a_{22}a_{29}a_6^6a_9^9b_6 - \dots \\
& a_{17}a_{22}a_{25}a_6^6a_9^9b_6)/\delta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(6) = & (a_{10}a_{14}a_{19}a_{29}a_{36}b_1 - a_{10}a_{17}a_{19}a_{26}a_{36}b_1 - a_{10}a_{18}a_{19}a_{29}a_{32}b_1 + a_{11}a_{16}a_{19}a_{26}a_{36}b_1 + a_{12}a_{16}a_{19}a_{29}a_{32}b_1 - \dots \\
& a_{10}a_{13}a_{20}a_{29}a_{36}b_1 + a_{10}a_{17}a_{20}a_{25}a_{36}b_1 + a_{10}a_{18}a_{20}a_{29}a_{31}b_1 - a_{11}a_{13}a_{22}a_{26}a_{36}b_1 + a_{11}a_{14}a_{22}a_{25}a_{36}b_1 - a_{11}a_{16}a_{20}a_{25}a_{36}b_1 - a_{11}a_{18}a_{22}a_{25}a_{32}b_1 + a_{11}a_{18}a_{22}a_{26}a_{31}b_1 - \dots \\
& a_{12}a_{13}a_{22}a_{29}a_{32}b_1 + a_{12}a_{14}a_{22}a_{29}a_{31}b_1 - a_{12}a_{16}a_{20}a_{29}a_{31}b_1 + a_{12}a_{17}a_{22}a_{25}a_{32}b_1 - a_{12}a_{17}a_{22}a_{26}a_{31}b_1 + \dots \\
& a_{17}a_{14}a_{22}a_{29}a_{36}b_2 - a_{17}a_{16}a_{20}a_{29}a_{36}b_2 - a_{17}a_{17}a_{22}a_{26}a_{36}b_2 - \dots
\end{aligned}$$



$a_1 * a_{18} * a_{22} * a_{29} * a_{32} * b_2 + a_1 * a_{10} * a_{20} * a_{29} * a_{36} * b_3 + a_1 * a_{11} * a_{22} * a_{26} * a_{36} * b_3 + \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{22} * a_{29} * a_{32} * b_3 - a_1 * a_{10} * a_{14} * a_{29} * a_{36} * b_4 + a_1 * a_{10} * a_{17} * a_{26} * a_{36} * b_4 + \dots$   
 $a_1 * a_{10} * a_{18} * a_{29} * a_{32} * b_4 - a_1 * a_{11} * a_{16} * a_{26} * a_{36} * b_4 - a_1 * a_{12} * a_{16} * a_{29} * a_{32} * b_4 - \dots$   
 $a_1 * a_{10} * a_{17} * a_{20} * a_{36} * b_5 - a_1 * a_{11} * a_{14} * a_{22} * a_{36} * b_5 + a_1 * a_{11} * a_{16} * a_{20} * a_{36} * b_5 + \dots$   
 $a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{22} * a_{32} * b_5 - a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{22} * a_{32} * b_5 - a_1 * a_{10} * a_{18} * a_{20} * a_{29} * b_6 - \dots$   
 $a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{22} * a_{26} * b_6 - a_1 * a_{12} * a_{14} * a_{22} * a_{29} * b_6 + a_1 * a_{12} * a_{16} * a_{20} * a_{29} * b_6 + \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{22} * a_{26} * b_6 - a_{14} * a_{19} * a_{29} * a_{36} * a_4 * b_2 + a_{17} * a_{19} * a_{26} * a_{36} * a_4 * b_2 + \dots$   
 $a_{18} * a_{19} * a_{29} * a_{32} * a_4 * b_2 + a_{13} * a_{20} * a_{29} * a_{36} * a_4 * b_2 - a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_{36} * a_4 * b_2 - \dots$   
 $a_{18} * a_{20} * a_{29} * a_{31} * a_4 * b_2 - a_{11} * a_{19} * a_{26} * a_{36} * a_4 * b_3 - a_{12} * a_{19} * a_{29} * a_{32} * a_4 * b_3 - \dots$   
 $a_{16} * a_{19} * a_{26} * a_{36} * a_5 * b_2 + a_{11} * a_{20} * a_{25} * a_{36} * a_4 * b_3 + a_{12} * a_{20} * a_{29} * a_{31} * a_4 * b_3 + \dots$   
 $a_{11} * a_{13} * a_{26} * a_{36} * a_4 * b_4 - a_{11} * a_{14} * a_{25} * a_{36} * a_4 * b_4 + a_{11} * a_{18} * a_{25} * a_{32} * a_4 * b_4 - \dots$   
 $a_{11} * a_{18} * a_{26} * a_{31} * a_4 * b_4 + a_{12} * a_{13} * a_{29} * a_{32} * a_4 * b_4 - a_{12} * a_{14} * a_{29} * a_{31} * a_4 * b_4 - \dots$   
 $a_{12} * a_{17} * a_{25} * a_{32} * a_4 * b_4 + a_{12} * a_{17} * a_{26} * a_{31} * a_4 * b_4 + a_{13} * a_{22} * a_{26} * a_{36} * a_5 * b_2 - \dots$   
 $a_{14} * a_{22} * a_{25} * a_{36} * a_5 * b_2 + a_{16} * a_{20} * a_{25} * a_{36} * a_5 * b_2 + a_{18} * a_{22} * a_{25} * a_{32} * a_5 * b_2 - \dots$   
 $a_{18} * a_{22} * a_{26} * a_{31} * a_5 * b_2 + a_{11} * a_{14} * a_{19} * a_{36} * a_4 * b_5 - a_{11} * a_{18} * a_{19} * a_{32} * a_4 * b_5 + \dots$   
 $a_{12} * a_{17} * a_{19} * a_{32} * a_4 * b_5 + a_{10} * a_{19} * a_{26} * a_{36} * a_5 * b_3 + a_{11} * a_{18} * a_{19} * a_{26} * a_4 * b_6 + \dots$   
 $a_{12} * a_{14} * a_{19} * a_{29} * a_4 * b_6 - a_{12} * a_{17} * a_{19} * a_{26} * a_4 * b_6 - a_{16} * a_{19} * a_{29} * a_{32} * a_6 * b_2 - \dots$   
 $a_{11} * a_{13} * a_{20} * a_{36} * a_4 * b_5 + a_{11} * a_{18} * a_{20} * a_{31} * a_4 * b_5 - a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_{31} * a_4 * b_5 - \dots$   
 $a_{10} * a_{20} * a_{25} * a_{36} * a_5 * b_3 - a_{12} * a_{22} * a_{25} * a_{32} * a_5 * b_3 + a_{12} * a_{22} * a_{26} * a_{31} * a_5 * b_3 - \dots$   
 $a_{11} * a_{18} * a_{20} * a_{25} * a_4 * b_6 - a_{12} * a_{13} * a_{20} * a_{29} * a_4 * b_6 + a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_4 * b_6 - \dots$   
 $a_{10} * a_{13} * a_{26} * a_{36} * a_5 * b_4 + a_{10} * a_{14} * a_{25} * a_{36} * a_5 * b_4 - a_{10} * a_{18} * a_{25} * a_{32} * a_5 * b_4 + \dots$   
 $a_{10} * a_{18} * a_{26} * a_{31} * a_5 * b_4 + a_{12} * a_{16} * a_{25} * a_{32} * a_5 * b_4 - a_{12} * a_{16} * a_{26} * a_{31} * a_5 * b_4 + \dots$   
 $a_{13} * a_{22} * a_{29} * a_{32} * a_6 * b_2 - a_{14} * a_{22} * a_{29} * a_{31} * a_6 * b_2 + a_{16} * a_{20} * a_{29} * a_{31} * a_6 * b_2 - \dots$   
 $a_{17} * a_{22} * a_{25} * a_{32} * a_6 * b_2 + a_{17} * a_{22} * a_{26} * a_{31} * a_6 * b_2 - a_{10} * a_{14} * a_{19} * a_{36} * a_5 * b_5 + \dots$   
 $a_{10} * a_{18} * a_{19} * a_{32} * a_5 * b_5 - a_{12} * a_{16} * a_{19} * a_{32} * a_5 * b_5 + a_{10} * a_{19} * a_{29} * a_{32} * a_6 * b_3 - \dots$   
 $a_{10} * a_{18} * a_{19} * a_{26} * a_5 * b_6 + a_{12} * a_{16} * a_{19} * a_{26} * a_5 * b_6 - a_{16} * a_{19} * a_{29} * a_{36} * a_8 * b_1 + \dots$   
 $a_{10} * a_{13} * a_{20} * a_{36} * a_5 * b_5 - a_{10} * a_{18} * a_{20} * a_{31} * a_5 * b_5 + a_{12} * a_{13} * a_{22} * a_{32} * a_5 * b_5 - \dots$   
 $a_{12} * a_{14} * a_{22} * a_{31} * a_5 * b_5 + a_{12} * a_{16} * a_{20} * a_{31} * a_5 * b_5 - a_{10} * a_{20} * a_{29} * a_{31} * a_6 * b_3 + \dots$   
 $a_{11} * a_{22} * a_{25} * a_{32} * a_6 * b_3 - a_{11} * a_{22} * a_{26} * a_{31} * a_6 * b_3 + a_{10} * a_{18} * a_{20} * a_{25} * a_5 * b_6 - \dots$

$$\begin{aligned}
& a_{12}a_{13}a_{22}a_{26}a_5b_6 + a_{12}a_{14}a_{22}a_{25}a_5b_6 - a_{12}a_{16}a_{20}a_{25}a_5b_6 - \dots \\
& a_{10}a_{13}a_{29}a_{32}a_6b_4 + a_{10}a_{14}a_{29}a_{31}a_6b_4 + a_{10}a_{17}a_{25}a_{32}a_6b_4 - \dots \\
& a_{10}a_{17}a_{26}a_{31}a_6b_4 - a_{11}a_{16}a_{25}a_{32}a_6b_4 + a_{11}a_{16}a_{26}a_{31}a_6b_4 - \dots \\
& a_{10}a_{17}a_{19}a_{32}a_6b_5 + a_{11}a_{16}a_{19}a_{32}a_6b_5 + a_{13}a_{22}a_{29}a_{36}a_8b_1 - \dots \\
& a_{17}a_{22}a_{25}a_{36}a_8b_1 - a_{18}a_{22}a_{29}a_{31}a_8b_1 - a_{10}a_{14}a_{19}a_{29}a_6b_6 + \dots \\
& a_{10}a_{17}a_{19}a_{26}a_6b_6 - a_{11}a_{16}a_{19}a_{26}a_6b_6 + a_{10}a_{17}a_{20}a_{31}a_6b_5 - \dots \\
& a_{11}a_{13}a_{22}a_{32}a_6b_5 + a_{11}a_{14}a_{22}a_{31}a_6b_5 - a_{11}a_{16}a_{20}a_{31}a_6b_5 + \dots \\
& a_{10}a_{13}a_{20}a_{29}a_6b_6 - a_{10}a_{17}a_{20}a_{25}a_6b_6 + a_{11}a_{13}a_{22}a_{26}a_6b_6 - \dots \\
& a_{11}a_{14}a_{22}a_{25}a_6b_6 + a_{11}a_{16}a_{20}a_{25}a_6b_6 - a_1a_{22}a_{29}a_{36}a_8b_3 + \dots \\
& a_1a_{16}a_{29}a_{36}a_8b_4 + a_1a_{17}a_{22}a_{36}a_8b_5 + a_1a_{18}a_{22}a_{29}a_8b_6 + \dots \\
& a_{19}a_{29}a_{36}a_4a_8b_3 - a_{13}a_{29}a_{36}a_4a_8b_4 + a_{17}a_{25}a_{36}a_4a_8b_4 + \dots \\
& a_{18}a_{29}a_{31}a_4a_8b_4 - a_{17}a_{19}a_{36}a_4a_8b_5 - a_{18}a_{19}a_{29}a_4a_8b_6 + \dots \\
& a_{22}a_{25}a_{36}a_5a_8b_3 - a_{16}a_{25}a_{36}a_5a_8b_4 + a_{16}a_{19}a_{36}a_5a_8b_5 - \dots \\
& a_{13}a_{22}a_{36}a_5a_8b_5 + a_{18}a_{22}a_{31}a_5a_8b_5 + a_{22}a_{29}a_{31}a_6a_8b_3 - \dots \\
& a_{18}a_{22}a_{25}a_5a_8b_6 - a_{16}a_{29}a_{31}a_6a_8b_4 + a_{16}a_{19}a_{29}a_6a_8b_6 - \dots \\
& a_{17}a_{22}a_{31}a_6a_8b_5 - a_{13}a_{22}a_{29}a_6a_8b_6 + a_{17}a_{22}a_{25}a_6a_8b_6) / \delta;
\end{aligned}$$

$$x_{\text{dot}}(8) = \dots$$

$$\begin{aligned}
& (a_{11}a_{14}a_{19}a_{27}a_{36}b_1 - a_{11}a_{15}a_{19}a_{26}a_{36}b_1 + a_{11}a_{18}a_{19}a_{26}a_{33}b_1 - \dots \\
& b_1 - a_{11}a_{18}a_{19}a_{27}a_{32}b_1 + a_{12}a_{14}a_{19}a_{29}a_{33}b_1 - a_{12}a_{15}a_{19}a_{29}a_{32}b_1 - \dots \\
& a_{12}a_{17}a_{19}a_{26}a_{33}b_1 + a_{12}a_{17}a_{19}a_{27}a_{32}b_1 - a_{11}a_{13}a_{20}a_{27}a_{36}b_1 + \dots \\
& a_{11}a_{13}a_{21}a_{26}a_{36}b_1 - a_{11}a_{14}a_{21}a_{25}a_{36}b_1 + a_{11}a_{15}a_{20}a_{25}a_{36}b_1 - \dots \\
& a_{11}a_{18}a_{20}a_{25}a_{33}b_1 + a_{11}a_{18}a_{20}a_{27}a_{31}b_1 + a_{11}a_{18}a_{21}a_{25}a_{32}b_1 - \dots \\
& a_{11}a_{18}a_{21}a_{26}a_{31}b_1 - a_{12}a_{13}a_{20}a_{29}a_{33}b_1 + \dots \\
& a_{12}a_{13}a_{21}a_{29}a_{32}b_1 - a_{12}a_{14}a_{21}a_{29}a_{31}b_1 + a_{12}a_{15}a_{20}a_{29}a_{31}b_1 + \dots \\
& b_1 + a_{12}a_{17}a_{20}a_{25}a_{33}b_1 - a_{12}a_{17}a_{20}a_{27}a_{31}b_1 - a_{12}a_{17}a_{21}a_{25}a_{32}b_1 + \dots \\
& a_{12}a_{17}a_{21}a_{26}a_{31}b_1 - a_1a_{14}a_{21}a_{29}a_{36}b_2 + a_1a_{15}a_{20}a_{29}a_{36}b_2 - \dots \\
& a_1a_{17}a_{20}a_{27}a_{36}b_2 + \dots \\
& a_1a_{17}a_{21}a_{26}a_{36}b_2 - a_1a_{18}a_{20}a_{29}a_{33}b_2 + a_1a_{18}a_{21}a_{29}a_{32}b_2 + \dots
\end{aligned}$$

$a_1 * a_{11} * a_{20} * a_{27} * a_{36} * b_3 - a_1 * a_{11} * a_{21} * a_{26} * a_{36} * b_3 + a_1 * a_{12} * a_{20} * a_{29} * a_{33} * b_3 - \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{21} * a_{29} * a_{32} * b_3 - a_1 * a_{11} * a_{14} * a_{27} * a_{36} * b_4 + a_1 * a_{11} * a_{15} * a_{26} * a_{36} * b_4 - \dots$   
 $a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{26} * a_{33} * b_4 + a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{27} * a_{32} * b_4 - a_1 * a_{12} * a_{14} * a_{29} * a_{33} * b_4 + \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{15} * a_{29} * a_{32} * b_4 + a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{26} * a_{33} * b_4 - a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{27} * a_{32} * b_4 + \dots$   
 $a_{14} * a_{19} * a_{29} * a_3 * a_{36} * b_2 - a_{17} * a_{19} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_2 - a_{18} * a_{19} * a_{29} * a_3 * a_{32} * b_2 + \dots$   
 $a_1 * a_{11} * a_{14} * a_{21} * a_{36} * b_5 - a_1 * a_{11} * a_{15} * a_{20} * a_{36} * b_5 + a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{20} * a_{33} * b_5 - \dots$   
 $a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{21} * a_{32} * b_5 - a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_{33} * b_5 + a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{21} * a_{32} * b_5 - \dots$   
 $a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{20} * a_{27} * b_6 + a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{21} * a_{26} * b_6 + a_1 * a_{12} * a_{14} * a_{21} * a_{29} * b_6 - \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{15} * a_{20} * a_{29} * b_6 + a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_{27} * b_6 - a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{21} * a_{26} * b_6 - \dots$   
 $a_{13} * a_{20} * a_{29} * a_3 * a_{36} * b_2 + a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_2 + a_{18} * a_{20} * a_{29} * a_3 * a_{31} * b_2 + \dots$   
 $a_{11} * a_{19} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_3 + a_{12} * a_{19} * a_{29} * a_3 * a_{32} * b_3 - a_{11} * a_{20} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_3 - \dots$   
 $a_{12} * a_{20} * a_{29} * a_3 * a_{31} * b_3 - a_{11} * a_{13} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_4 + a_{11} * a_{14} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_4 - \dots$   
 $a_{11} * a_{18} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_4 + a_{11} * a_{18} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_4 - a_{12} * a_{13} * a_{29} * a_3 * a_{32} * b_4 + \dots$   
 $a_{12} * a_{14} * a_{29} * a_3 * a_{31} * b_4 + a_{12} * a_{17} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_4 - a_{12} * a_{17} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_4 - \dots$   
 $a_{11} * a_{14} * a_{19} * a_3 * a_{36} * b_5 + a_{11} * a_{18} * a_{19} * a_3 * a_{32} * b_5 - a_{12} * a_{17} * a_{19} * a_3 * a_{32} * b_5 - \dots$   
 $a_{11} * a_{18} * a_{19} * a_{26} * a_3 * b_6 - a_{12} * a_{14} * a_{19} * a_{29} * a_3 * b_6 + a_{12} * a_{17} * a_{19} * a_{26} * a_3 * b_6 - \dots$   
 $a_{14} * a_{19} * a_{27} * a_{36} * a_5 * b_2 + a_{15} * a_{19} * a_{26} * a_{36} * a_5 * b_2 - a_{18} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_5 * b_2 + \dots$   
 $a_{18} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_5 * b_2 + a_{11} * a_{13} * a_{20} * a_3 * a_{36} * b_5 - a_{11} * a_{18} * a_{20} * a_3 * a_{31} * b_5 + \dots$   
 $a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_3 * a_{31} * b_5 + a_{11} * a_{18} * a_{20} * a_{25} * a_3 * b_6 + a_{12} * a_{13} * a_{20} * a_{29} * a_3 * b_6 - \dots$   
 $a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_3 * b_6 + a_{13} * a_{20} * a_{27} * a_{36} * a_5 * b_2 - a_{13} * a_{21} * a_{26} * a_{36} * a_5 * b_2 + \dots$   
 $a_{14} * a_{21} * a_{25} * a_{36} * a_5 * b_2 - a_{15} * a_{20} * a_{25} * a_{36} * a_5 * b_2 + a_{18} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_5 * b_2 - \dots$   
 $a_{18} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_5 * b_2 - a_{18} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_5 * b_2 + a_{18} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_5 * b_2 + \dots$   
 $a_{12} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_5 * b_3 - a_{12} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_5 * b_3 - a_{14} * a_{19} * a_{29} * a_{33} * a_6 * b_2 + \dots$   
 $a_{15} * a_{19} * a_{29} * a_{32} * a_6 * b_2 + a_{17} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_6 * b_2 - a_{17} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_6 * b_2 - \dots$   
 $a_{12} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_5 * b_3 + a_{12} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_5 * b_3 + a_{12} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_5 * b_3 - \dots$   
 $a_{12} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_5 * b_3 - a_{12} * a_{13} * a_{26} * a_{33} * a_5 * b_4 + a_{12} * a_{13} * a_{27} * a_{32} * a_5 * b_4 + \dots$   
 $a_{12} * a_{14} * a_{25} * a_{33} * a_5 * b_4 - a_{12} * a_{14} * a_{27} * a_{31} * a_5 * b_4 - a_{12} * a_{15} * a_{25} * a_{32} * a_5 * b_4 + \dots$   
 $a_{12} * a_{15} * a_{26} * a_{31} * a_5 * b_4 + a_{13} * a_{20} * a_{29} * a_{33} * a_6 * b_2 - a_{13} * a_{21} * a_{29} * a_{32} * a_6 * b_2 + \dots$   
 $a_{14} * a_{21} * a_{29} * a_{31} * a_6 * b_2 - a_{15} * a_{20} * a_{29} * a_{31} * a_6 * b_2 - a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_6 * b_2 + \dots$

$a_{17}a_{20}a_{27}a_{31}a_6b_2+a_{17}a_{21}a_{25}a_{32}a_6b_2-a_{17}a_{21}a_{26}a_{31}a_6b_2-...$   
 $a_{12}a_{14}a_{19}a_{33}a_5b_5+a_{12}a_{15}a_{19}a_{32}a_5b_5-a_{11}a_{19}a_{26}a_{33}a_6b_3+...$   
 $a_{11}a_{19}a_{27}a_{32}a_6b_3+a_{12}a_{14}a_{19}a_{27}a_5b_6-a_{12}a_{15}a_{19}a_{26}a_5b_6+...$   
 $a_{15}a_{19}a_{29}a_{36}a_8b_1-a_{17}a_{19}a_{27}a_{36}a_8b_1-a_{18}a_{19}a_{29}a_{33}a_8b_1+...$   
 $a_{12}a_{13}a_{20}a_{33}a_5b_5-a_{12}a_{13}a_{21}a_{32}a_5b_5+a_{12}a_{14}a_{21}a_{31}a_5b_5-...$   
 $a_{12}a_{15}a_{20}a_{31}a_5b_5+a_{11}a_{20}a_{25}a_{33}a_6b_3-a_{11}a_{20}a_{27}a_{31}a_6b_3-...$   
 $a_{11}a_{21}a_{25}a_{32}a_6b_3+a_{11}a_{21}a_{26}a_{31}a_6b_3-a_{12}a_{13}a_{20}a_{27}a_5b_6+...$   
 $a_{12}a_{13}a_{21}a_{26}a_5b_6-a_{12}a_{14}a_{21}a_{25}a_5b_6+a_{12}a_{15}a_{20}a_{25}a_5b_6+...$   
 $a_{11}a_{13}a_{26}a_{33}a_6b_4-a_{11}a_{13}a_{27}a_{32}a_6b_4-a_{11}a_{14}a_{25}a_{33}a_6b_4+...$   
 $a_{11}a_{14}a_{27}a_{31}a_6b_4+a_{11}a_{15}a_{25}a_{32}a_6b_4-a_{11}a_{15}a_{26}a_{31}a_6b_4+...$   
 $a_{11}a_{14}a_{19}a_{33}a_6b_5-a_{11}a_{15}a_{19}a_{32}a_6b_5-a_{13}a_{21}a_{29}a_{36}a_8b_1+...$   
 $a_{17}a_{21}a_{25}a_{36}a_8b_1+a_{18}a_{21}a_{29}a_{31}a_8b_1-a_{11}a_{14}a_{19}a_{27}a_6b_6+...$   
 $a_{11}a_{15}a_{19}a_{26}a_6b_6-a_{14}a_{19}a_{29}a_{36}a_9b_1+a_{17}a_{19}a_{26}a_{36}a_9b_1+...$   
 $a_{18}a_{19}a_{29}a_{32}a_9b_1-a_{11}a_{13}a_{20}a_{33}a_6b_5+a_{11}a_{13}a_{21}a_{32}a_6b_5-...$   
 $a_{11}a_{14}a_{21}a_{31}a_6b_5+a_{11}a_{15}a_{20}a_{31}a_6b_5+a_{11}a_{13}a_{20}a_{27}a_6b_6-...$   
 $a_{11}a_{13}a_{21}a_{26}a_6b_6+a_{11}a_{14}a_{21}a_{25}a_6b_6-a_{11}a_{15}a_{20}a_{25}a_6b_6+...$   
 $a_{13}a_{20}a_{29}a_{36}a_9b_1-a_{17}a_{20}a_{25}a_{36}a_9b_1-a_{18}a_{20}a_{29}a_{31}a_9b_1+...$   
 $a_1a_{21}a_{29}a_{36}a_8b_3-a_1a_{15}a_{29}a_{36}a_8b_4+a_1a_{17}a_{27}a_{36}a_8b_4+...$   
 $a_1a_{18}a_{29}a_{33}a_8b_4-a_1a_{17}a_{21}a_{36}a_8b_5-a_1a_{20}a_{29}a_{36}a_9b_3-...$   
 $a_1a_{18}a_{21}a_{29}a_8b_6+a_1a_{14}a_{29}a_{36}a_9b_4-a_1a_{17}a_{26}a_{36}a_9b_4-...$   
 $a_1a_{18}a_{29}a_{32}a_9b_4-a_{19}a_{29}a_3a_{36}a_8b_3+a_1a_{17}a_{20}a_{36}a_9b_5+...$   
 $a_1a_{18}a_{20}a_{29}a_9b_6+a_{13}a_{29}a_3a_{36}a_8b_4-a_{17}a_{25}a_3a_{36}a_8b_4-...$   
 $a_{18}a_{29}a_3a_{31}a_8b_4+a_{17}a_{19}a_3a_{36}a_8b_5+a_{18}a_{19}a_{29}a_3a_8b_6+...$   
 $a_{19}a_{27}a_{36}a_5a_8b_3-a_{21}a_{25}a_{36}a_5a_8b_3-a_{13}a_{27}a_{36}a_5a_8b_4+...$   
 $a_{15}a_{25}a_{36}a_5a_8b_4-a_{18}a_{25}a_{33}a_5a_8b_4+a_{18}a_{27}a_{31}a_5a_8b_4-...$   
 $a_{15}a_{19}a_{36}a_5a_8b_5+a_{18}a_{19}a_{33}a_5a_8b_5-a_{19}a_{26}a_{36}a_5a_9b_3+...$   
 $a_{19}a_{29}a_{33}a_6a_8b_3-a_{18}a_{19}a_{27}a_5a_8b_6+a_{13}a_{21}a_{36}a_5a_8b_5-...$   
 $a_{18}a_{21}a_{31}a_5a_8b_5+a_{20}a_{25}a_{36}a_5a_9b_3-a_{21}a_{29}a_{31}a_6a_8b_3+...$   
 $a_{18}a_{21}a_{25}a_5a_8b_6+a_{13}a_{26}a_{36}a_5a_9b_4-a_{13}a_{29}a_{33}a_6a_8b_4-...$

$$\begin{aligned}
& a_{14}a_{25}a_{36}a_5a_9b_4+a_{15}a_{29}a_{31}a_6a_8b_4+a_{17}a_{25}a_{33}a_6a_8b_4-... \\
& a_{17}a_{27}a_{31}a_6a_8b_4+a_{18}a_{25}a_{32}a_5a_9b_4-a_{18}a_{26}a_{31}a_5a_9b_4+... \\
& a_{14}a_{19}a_{36}a_5a_9b_5-a_{17}a_{19}a_{33}a_6a_8b_5-a_{18}a_{19}a_{32}a_5a_9b_5-... \\
& a_{19}a_{29}a_{32}a_6a_9b_3-a_{15}a_{19}a_{29}a_6a_8b_6+a_{17}a_{19}a_{27}a_6a_8b_6+... \\
& a_{18}a_{19}a_{26}a_5a_9b_6-a_{13}a_{20}a_{36}a_5a_9b_5+a_{17}a_{21}a_{31}a_6a_8b_5+... \\
& a_{18}a_{20}a_{31}a_5a_9b_5+a_{20}a_{29}a_{31}a_6a_9b_3+a_{13}a_{21}a_{29}a_6a_8b_6-... \\
& a_{17}a_{21}a_{25}a_6a_8b_6-a_{18}a_{20}a_{25}a_5a_9b_6+a_{13}a_{29}a_{32}a_6a_9b_4-... \\
& a_{14}a_{29}a_{31}a_6a_9b_4-a_{17}a_{25}a_{32}a_6a_9b_4+a_{17}a_{26}a_{31}a_6a_9b_4+... \\
& a_{17}a_{19}a_{32}a_6a_9b_5+a_{14}a_{19}a_{29}a_6a_9b_6-a_{17}a_{19}a_{26}a_6a_9b_6-... \\
& a_{17}a_{20}a_{31}a_6a_9b_5-a_{13}a_{20}a_{29}a_6a_9b_6+a_{17}a_{20}a_{25}a_6a_9b_6)/\delta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(10)= & -(a_{10}a_{14}a_{19}a_{27}a_{36}b_1-a_{10}a_{15}a_{19}a_{26}a_{36}b_1+a_{10}a_{18}... \\
& a_{19}a_{26}a_{33}b_1-a_{10}a_{18}a_{19}a_{27}a_{32}b_1-a_{12}a_{16}a_{19}a_{26}a_{33}b_1+a_{12}... \\
& a_{16}a_{19}a_{27}a_{32}b_1-a_{10}a_{13}a_{20}a_{27}a_{36}b_1+a_{10}a_{13}a_{21}a_{26}a_{36}b_1-... \\
& a_{10}a_{14}a_{21}a_{25}a_{36}b_1+a_{10}a_{15}a_{20}a_{25}a_{36}b_1-a_{10}a_{18}a_{20}a_{25}a_{33}... \\
& b_1+a_{10}a_{18}a_{20}a_{27}a_{31}b_1+a_{10}a_{18}a_{21}a_{25}a_{32}b_1-a_{10}a_{18}a_{21}a_{26}... \\
& a_{31}b_1+a_{12}a_{13}a_{22}a_{26}a_{33}b_1-a_{12}a_{13}a_{22}a_{27}a_{32}b_1-a_{12}a_{14}a_{22}... \\
& a_{25}a_{33}b_1+a_{12}a_{14}a_{22}a_{27}a_{31}b_1+a_{12}a_{15}a_{22}a_{25}a_{32}b_1-a_{12}a_{15}... \\
& a_{22}a_{26}a_{31}b_1+a_{12}a_{16}a_{20}a_{25}a_{33}b_1-a_{12}a_{16}a_{20}a_{27}a_{31}b_1-a_{12}... \\
& a_{16}a_{21}a_{25}a_{32}b_1+a_{12}a_{16}a_{21}a_{26}a_{31}b_1+... \\
& a_1a_{14}a_{22}a_{27}a_{36}b_2-a_1a_{15}a_{22}a_{26}a_{36}b_2-a_1a_{16}a_{20}a_{27}a_{36}b_2+... \\
& a_1a_{16}a_{21}a_{26}a_{36}b_2+a_1a_{18}a_{22}a_{26}a_{33}b_2-a_1a_{18}a_{22}a_{27}a_{32}b_2+... \\
& a_1a_{10}a_{20}a_{27}a_{36}b_3-a_1a_{10}a_{21}a_{26}a_{36}b_3-a_1a_{12}a_{22}a_{26}a_{33}b_3+... \\
& a_1a_{12}a_{22}a_{27}a_{32}b_3-a_1a_{10}a_{14}a_{27}a_{36}b_4+a_1a_{10}a_{15}a_{26}a_{36}b_4-... \\
& a_1a_{10}a_{18}a_{26}a_{33}b_4+a_1a_{10}a_{18}a_{27}a_{32}b_4+a_1a_{12}a_{16}a_{26}a_{33}b_4-... \\
& a_1a_{12}a_{16}a_{27}a_{32}b_4-a_{16}a_{19}a_{26}a_3a_{36}b_2+a_1a_{10}a_{14}a_{21}a_{36}b_5-... \\
& a_1a_{10}a_{15}a_{20}a_{36}b_5+a_1a_{10}a_{18}a_{20}a_{33}b_5-a_1a_{10}a_{18}a_{21}a_{32}b_5+... \\
& a_1a_{12}a_{14}a_{22}a_{33}b_5-a_1a_{12}a_{15}a_{22}a_{32}b_5-a_1a_{12}a_{16}a_{20}a_{33}b_5+... \\
& a_1a_{12}a_{16}a_{21}a_{32}b_5-a_1a_{10}a_{18}a_{20}a_{27}b_6+a_1a_{10}a_{18}a_{21}a_{26}b_6-...
\end{aligned}$$

$a_1 * a_{12} * a_{14} * a_{22} * a_{27} * b_6 + a_1 * a_{12} * a_{15} * a_{22} * a_{26} * b_6 + a_1 * a_{12} * a_{16} * a_{20} * a_{27} * b_6 - \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{16} * a_{21} * a_{26} * b_6 + a_{13} * a_{22} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_2 - a_{14} * a_{22} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_2 + \dots$   
 $a_{16} * a_{20} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_2 + a_{18} * a_{22} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_2 - a_{18} * a_{22} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_2 + \dots$   
 $a_{10} * a_{19} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_3 - a_{14} * a_{19} * a_{27} * a_{36} * a_4 * b_2 + a_{15} * a_{19} * a_{26} * a_{36} * a_4 * b_2 - \dots$   
 $a_{18} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_4 * b_2 + a_{18} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_4 * b_2 - a_{10} * a_{20} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_3 - \dots$   
 $a_{12} * a_{22} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_3 + a_{12} * a_{22} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_3 - a_{10} * a_{13} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_4 + \dots$   
 $a_{10} * a_{14} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_4 - a_{10} * a_{18} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_4 + a_{10} * a_{18} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_4 + \dots$   
 $a_{12} * a_{16} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_4 - a_{12} * a_{16} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_4 + a_{13} * a_{20} * a_{27} * a_{36} * a_4 * b_2 - \dots$   
 $a_{13} * a_{21} * a_{26} * a_{36} * a_4 * b_2 + a_{14} * a_{21} * a_{25} * a_{36} * a_4 * b_2 - a_{15} * a_{20} * a_{25} * a_{36} * a_4 * b_2 + \dots$   
 $a_{18} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_4 * b_2 - a_{18} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_4 * b_2 - a_{18} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_4 * b_2 + \dots$   
 $a_{18} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_4 * b_2 - a_{10} * a_{14} * a_{19} * a_3 * a_{36} * b_5 + a_{10} * a_{18} * a_{19} * a_3 * a_{32} * b_5 - \dots$   
 $a_{12} * a_{16} * a_{19} * a_3 * a_{32} * b_5 + a_{12} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_4 * b_3 - a_{12} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_4 * b_3 - \dots$   
 $a_{10} * a_{18} * a_{19} * a_{26} * a_3 * b_6 + a_{12} * a_{16} * a_{19} * a_{26} * a_3 * b_6 + a_{10} * a_{13} * a_{20} * a_3 * a_{36} * b_5 - \dots$   
 $a_{10} * a_{18} * a_{20} * a_3 * a_{31} * b_5 + a_{12} * a_{13} * a_{22} * a_3 * a_{32} * b_5 - a_{12} * a_{14} * a_{22} * a_3 * a_{31} * b_5 + \dots$   
 $a_{12} * a_{16} * a_{20} * a_3 * a_{31} * b_5 - a_{12} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_4 * b_3 + a_{12} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_4 * b_3 + \dots$   
 $a_{12} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_4 * b_3 - a_{12} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_4 * b_3 + a_{10} * a_{18} * a_{20} * a_{25} * a_3 * b_6 - \dots$   
 $a_{12} * a_{13} * a_{22} * a_{26} * a_3 * b_6 + a_{12} * a_{14} * a_{22} * a_{25} * a_3 * b_6 - a_{12} * a_{16} * a_{20} * a_{25} * a_3 * b_6 - \dots$   
 $a_{12} * a_{13} * a_{26} * a_{33} * a_4 * b_4 + a_{12} * a_{13} * a_{27} * a_{32} * a_4 * b_4 + a_{12} * a_{14} * a_{25} * a_{33} * a_4 * b_4 - \dots$   
 $a_{12} * a_{14} * a_{27} * a_{31} * a_4 * b_4 - a_{12} * a_{15} * a_{25} * a_{32} * a_4 * b_4 + a_{12} * a_{15} * a_{26} * a_{31} * a_4 * b_4 - \dots$   
 $a_{12} * a_{14} * a_{19} * a_{33} * a_4 * b_5 + a_{12} * a_{15} * a_{19} * a_{32} * a_4 * b_5 + a_{12} * a_{14} * a_{19} * a_{27} * a_4 * b_6 - \dots$   
 $a_{12} * a_{15} * a_{19} * a_{26} * a_4 * b_6 + a_{16} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_6 * b_2 - a_{16} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_6 * b_2 + \dots$   
 $a_{12} * a_{13} * a_{20} * a_{33} * a_4 * b_5 - a_{12} * a_{13} * a_{21} * a_{32} * a_4 * b_5 + a_{12} * a_{14} * a_{21} * a_{31} * a_4 * b_5 - \dots$   
 $a_{12} * a_{15} * a_{20} * a_{31} * a_4 * b_5 - a_{12} * a_{13} * a_{20} * a_{27} * a_4 * b_6 + a_{12} * a_{13} * a_{21} * a_{26} * a_4 * b_6 - \dots$   
 $a_{12} * a_{14} * a_{21} * a_{25} * a_4 * b_6 + a_{12} * a_{15} * a_{20} * a_{25} * a_4 * b_6 - a_{13} * a_{22} * a_{26} * a_{33} * a_6 * b_2 + \dots$   
 $a_{13} * a_{22} * a_{27} * a_{32} * a_6 * b_2 + a_{14} * a_{22} * a_{25} * a_{33} * a_6 * b_2 - a_{14} * a_{22} * a_{27} * a_{31} * a_6 * b_2 - \dots$   
 $a_{15} * a_{22} * a_{25} * a_{32} * a_6 * b_2 + a_{15} * a_{22} * a_{26} * a_{31} * a_6 * b_2 - a_{16} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_6 * b_2 + \dots$   
 $a_{16} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_6 * b_2 + a_{16} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_6 * b_2 - a_{16} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_6 * b_2 - \dots$   
 $a_{10} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_6 * b_3 + a_{10} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_6 * b_3 - a_{16} * a_{19} * a_{27} * a_{36} * a_8 * b_1 + \dots$   
 $a_{10} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_6 * b_3 - a_{10} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_6 * b_3 - a_{10} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_6 * b_3 + \dots$

$a_{10}a_{21}a_{26}a_{31}a_6b_3+a_{10}a_{13}a_{26}a_{33}a_6b_4-a_{10}a_{13}a_{27}a_{32}a_6b_4-...$   
 $a_{10}a_{14}a_{25}a_{33}a_6b_4+a_{10}a_{14}a_{27}a_{31}a_6b_4+a_{10}a_{15}a_{25}a_{32}a_6b_4-...$   
 $a_{10}a_{15}a_{26}a_{31}a_6b_4+a_{10}a_{14}a_{19}a_{33}a_6b_5-a_{10}a_{15}a_{19}a_{32}a_6b_5+...$   
 $a_{13}a_{22}a_{27}a_{36}a_8b_1-a_{15}a_{22}a_{25}a_{36}a_8b_1+a_{16}a_{21}a_{25}a_{36}a_8b_1+...$   
 $a_{18}a_{22}a_{25}a_{33}a_8b_1-a_{18}a_{22}a_{27}a_{31}a_8b_1-a_{10}a_{14}a_{19}a_{27}a_6b_6+...$   
 $a_{10}a_{15}a_{19}a_{26}a_6b_6+a_{16}a_{19}a_{26}a_{36}a_9b_1-a_{10}a_{13}a_{20}a_{33}a_6b_5+...$   
 $a_{10}a_{13}a_{21}a_{32}a_6b_5-a_{10}a_{14}a_{21}a_{31}a_6b_5+a_{10}a_{15}a_{20}a_{31}a_6b_5+...$   
 $a_{10}a_{13}a_{20}a_{27}a_6b_6-a_{10}a_{13}a_{21}a_{26}a_6b_6+a_{10}a_{14}a_{21}a_{25}a_6b_6-...$   
 $a_{10}a_{15}a_{20}a_{25}a_6b_6-a_{13}a_{22}a_{26}a_{36}a_9b_1+a_{14}a_{22}a_{25}a_{36}a_9b_1-...$   
 $a_{16}a_{20}a_{25}a_{36}a_9b_1-a_{18}a_{22}a_{25}a_{32}a_9b_1+a_{18}a_{22}a_{26}a_{31}a_9b_1-...$   
 $a_1a_{22}a_{27}a_{36}a_8b_3+a_1a_{16}a_{27}a_{36}a_8b_4+a_1a_{15}a_{22}a_{36}a_8b_5-...$   
 $a_1a_{16}a_{21}a_{36}a_8b_5-a_1a_{18}a_{22}a_{33}a_8b_5+a_1a_{22}a_{26}a_{36}a_9b_3+...$   
 $a_1a_{18}a_{22}a_{27}a_8b_6-a_1a_{16}a_{26}a_{36}a_9b_4-a_1a_{14}a_{22}a_{36}a_9b_5+...$   
 $a_1a_{16}a_{20}a_{36}a_9b_5+a_1a_{18}a_{22}a_{32}a_9b_5+a_{22}a_{25}a_3a_{36}a_8b_3-...$   
 $a_1a_{18}a_{22}a_{26}a_9b_6-a_{16}a_{25}a_3a_{36}a_8b_4+a_{16}a_{19}a_3a_{36}a_8b_5+...$   
 $a_{19}a_{27}a_{36}a_4a_8b_3-a_{13}a_{22}a_3a_{36}a_8b_5+a_{18}a_{22}a_3a_{31}a_8b_5-...$   
 $a_{21}a_{25}a_{36}a_4a_8b_3-a_{18}a_{22}a_{25}a_3a_8b_6-a_{13}a_{27}a_{36}a_4a_8b_4+...$   
 $a_{15}a_{25}a_{36}a_4a_8b_4-a_{18}a_{25}a_{33}a_4a_8b_4+a_{18}a_{27}a_{31}a_4a_8b_4-...$   
 $a_{15}a_{19}a_{36}a_4a_8b_5+a_{18}a_{19}a_{33}a_4a_8b_5-a_{19}a_{26}a_{36}a_4a_9b_3-...$   
 $a_{18}a_{19}a_{27}a_4a_8b_6+a_{13}a_{21}a_{36}a_4a_8b_5-a_{18}a_{21}a_{31}a_4a_8b_5+...$   
 $a_{20}a_{25}a_{36}a_4a_9b_3+a_{18}a_{21}a_{25}a_4a_8b_6+a_{13}a_{26}a_{36}a_4a_9b_4-...$   
 $a_{14}a_{25}a_{36}a_4a_9b_4+a_{18}a_{25}a_{32}a_4a_9b_4-a_{18}a_{26}a_{31}a_4a_9b_4+...$   
 $a_{14}a_{19}a_{36}a_4a_9b_5-a_{18}a_{19}a_{32}a_4a_9b_5+a_{18}a_{19}a_{26}a_4a_9b_6-...$   
 $a_{13}a_{20}a_{36}a_4a_9b_5+a_{18}a_{20}a_{31}a_4a_9b_5-a_{22}a_{25}a_{33}a_6a_8b_3+...$   
 $a_{22}a_{27}a_{31}a_6a_8b_3-a_{18}a_{20}a_{25}a_4a_9b_6+a_{16}a_{25}a_{33}a_6a_8b_4-...$   
 $a_{16}a_{27}a_{31}a_6a_8b_4-a_{16}a_{19}a_{33}a_6a_8b_5+a_{16}a_{19}a_{27}a_6a_8b_6+...$   
 $a_{13}a_{22}a_{33}a_6a_8b_5-a_{15}a_{22}a_{31}a_6a_8b_5+a_{16}a_{21}a_{31}a_6a_8b_5+...$   
 $a_{22}a_{25}a_{32}a_6a_9b_3-a_{22}a_{26}a_{31}a_6a_9b_3-a_{13}a_{22}a_{27}a_6a_8b_6+...$   
 $a_{15}a_{22}a_{25}a_6a_8b_6-a_{16}a_{21}a_{25}a_6a_8b_6-a_{16}a_{25}a_{32}a_6a_9b_4+...$

$$\begin{aligned}
 & a_{16}^2 a_{26} a_{31} a_6 a_9 b_4 + a_{16} a_{19} a_{32} a_6 a_9 b_5 - a_{16} a_{19} a_{26} a_6 a_9 b_6 - \dots \\
 & a_{13} a_{22} a_{32} a_6 a_9 b_5 + a_{14} a_{22} a_{31} a_6 a_9 b_5 - a_{16} a_{20} a_{31} a_6 a_9 b_5 + \dots \\
 & a_{13} a_{22} a_{26} a_6 a_9 b_6 - a_{14} a_{22} a_{25} a_6 a_9 b_6 + a_{16} a_{20} a_{25} a_6 a_9 b_6) / \delta;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(12) = & -(a_{10} a_{14} a_{19} a_{29} a_{33} b_1 - a_{10} a_{15} a_{19} a_{29} a_{32} b_1 - a_{10} a_{17} a_{19} a_{26} a_{33} b_1 + a_{10} a_{17} a_{19} a_{27} a_{32} b_1 + a_{11} a_{16} a_{19} a_{26} a_{33} b_1 - a_{11} a_{16} a_{19} a_{27} a_{32} b_1 - a_{10} a_{13} a_{20} a_{29} a_{33} b_1 + a_{10} a_{13} a_{21} a_{29} a_{32} b_1 - a_{10} a_{14} a_{21} a_{29} a_{31} b_1 + a_{10} a_{15} a_{20} a_{29} a_{31} b_1 + a_{10} a_{17} a_{20} a_{25} a_{33} b_1 - a_{10} a_{17} a_{20} a_{27} a_{31} b_1 - a_{10} a_{17} a_{21} a_{25} a_{32} b_1 + a_{10} a_{17} a_{21} a_{26} a_{31} b_1 - a_{11} a_{13} a_{22} a_{26} a_{33} b_1 + a_{11} a_{13} a_{22} a_{27} a_{32} b_1 + a_{11} a_{14} a_{22} a_{25} a_{33} b_1 - a_{11} a_{14} a_{22} a_{27} a_{31} b_1 - a_{11} a_{15} a_{22} a_{25} a_{32} b_1 + a_{11} a_{15} a_{22} a_{26} a_{31} b_1 - a_{11} a_{16} a_{20} a_{25} a_{33} b_1 + a_{11} a_{16} a_{20} a_{27} a_{31} b_1 + a_{11} a_{16} a_{21} a_{25} a_{32} b_1 - a_{11} a_{16} a_{21} a_{26} a_{31} b_1 + \dots \\
 & a_1 a_{14} a_{22} a_{29} a_{33} b_2 - a_1 a_{15} a_{22} a_{29} a_{32} b_2 - a_1 a_{16} a_{20} a_{29} a_{33} b_2 + a_1 a_{16} a_{21} a_{29} a_{32} b_2 - a_1 a_{17} a_{22} a_{26} a_{33} b_2 + a_1 a_{17} a_{22} a_{27} a_{32} b_2 + a_1 a_{10} a_{20} a_{29} a_{33} b_3 - a_1 a_{10} a_{21} a_{29} a_{32} b_3 + a_1 a_{11} a_{22} a_{26} a_{33} b_3 - a_1 a_{11} a_{22} a_{27} a_{32} b_3 - a_1 a_{10} a_{14} a_{29} a_{33} b_4 + a_1 a_{10} a_{15} a_{29} a_{32} b_4 + a_1 a_{10} a_{17} a_{26} a_{33} b_4 - a_1 a_{10} a_{17} a_{27} a_{32} b_4 - a_1 a_{11} a_{16} a_{26} a_{33} b_4 + a_1 a_{11} a_{16} a_{27} a_{32} b_4 - a_{16} a_{19} a_{29} a_3 a_{32} b_2 - a_{10} a_{17} a_{20} a_{33} b_5 + a_{10} a_{17} a_{21} a_{32} b_5 - a_{11} a_{14} a_{22} a_{33} b_5 + a_{11} a_{15} a_{22} a_{32} b_5 + a_{11} a_{16} a_{20} a_{33} b_5 - a_{11} a_{16} a_{21} a_{32} b_5 + a_{10} a_{14} a_{21} a_{29} b_6 - a_{10} a_{15} a_{20} a_{29} b_6 + a_{10} a_{17} a_{20} a_{27} b_6 - a_{10} a_{17} a_{21} a_{26} b_6 + a_{11} a_{14} a_{22} a_{27} b_6 - a_{11} a_{15} a_{22} a_{26} b_6 - a_{11} a_{16} a_{20} a_{27} b_6 + a_{11} a_{16} a_{21} a_{26} b_6 + a_{13} a_{22} a_{29} a_3 a_{32} b_2 - a_{14} a_{22} a_{29} a_3 a_{31} b_2 + a_{16} a_{20} a_{29} a_3 a_{31} b_2 - a_{17} a_{22} a_{25} a_3 a_{32} b_2 + a_{17} a_{22} a_{26} a_3 a_{31} b_2 + a_{10} a_{19} a_{29} a_3 a_{32} b_3 - a_{14} a_{19} a_{29} a_{33} a_4 b_2 + a_{15} a_{19} a_{29} a_{32} a_4 b_2 + a_{17} a_{19} a_{26} a_{33} a_4 b_2 - a_{17} a_{19} a_{27} a_{32} a_4 b_2 - a_{10} a_{20} a_{29} a_3 a_{31} b_3 + a_{11} a_{22} a_{25} a_3 a_{32} b_3 - a_{11} a_{22} a_{26} a_3 a_{31} b_3 - a_{10} a_{13} a_{29} a_3 a_{32} b_4 + \dots
 \end{aligned}$$



$a_{10}a_{14}a_{29}a_3a_{31}b_4+a_{10}a_{17}a_{25}a_3a_{32}b_4-a_{10}a_{17}a_{26}a_3a_{31}b_4-...$   
 $a_{11}a_{16}a_{25}a_3a_{32}b_4+a_{11}a_{16}a_{26}a_3a_{31}b_4+a_{13}a_{20}a_{29}a_{33}a_4b_2-...$   
 $a_{13}a_{21}a_{29}a_{32}a_4b_2+a_{14}a_{21}a_{29}a_{31}a_4b_2-a_{15}a_{20}a_{29}a_{31}a_4b_2-...$   
 $a_{17}a_{20}a_{25}a_{33}a_4b_2+a_{17}a_{20}a_{27}a_{31}a_4b_2+a_{17}a_{21}a_{25}a_{32}a_4b_2-...$   
 $a_{17}a_{21}a_{26}a_{31}a_4b_2-a_{10}a_{17}a_{19}a_3a_{32}b_5+a_{11}a_{16}a_{19}a_3a_{32}b_5-...$   
 $a_{11}a_{19}a_{26}a_{33}a_4b_3+a_{11}a_{19}a_{27}a_{32}a_4b_3-a_{10}a_{14}a_{19}a_{29}a_3b_6+...$   
 $a_{10}a_{17}a_{19}a_{26}a_3b_6-a_{11}a_{16}a_{19}a_{26}a_3b_6-a_{16}a_{19}a_{26}a_{33}a_5b_2+...$   
 $a_{16}a_{19}a_{27}a_{32}a_5b_2+a_{10}a_{17}a_{20}a_3a_{31}b_5-a_{11}a_{13}a_{22}a_3a_{32}b_5+...$   
 $a_{11}a_{14}a_{22}a_3a_{31}b_5-a_{11}a_{16}a_{20}a_3a_{31}b_5+a_{11}a_{20}a_{25}a_{33}a_4b_3-...$   
 $a_{11}a_{20}a_{27}a_{31}a_4b_3-a_{11}a_{21}a_{25}a_{32}a_4b_3+a_{11}a_{21}a_{26}a_{31}a_4b_3+...$   
 $a_{10}a_{13}a_{20}a_{29}a_3b_6-a_{10}a_{17}a_{20}a_{25}a_3b_6+a_{11}a_{13}a_{22}a_{26}a_3b_6-...$   
 $a_{11}a_{14}a_{22}a_{25}a_3b_6+a_{11}a_{16}a_{20}a_{25}a_3b_6+a_{11}a_{13}a_{26}a_{33}a_4b_4-...$   
 $a_{11}a_{13}a_{27}a_{32}a_4b_4-a_{11}a_{14}a_{25}a_{33}a_4b_4+a_{11}a_{14}a_{27}a_{31}a_4b_4+...$   
 $a_{11}a_{15}a_{25}a_{32}a_4b_4-a_{11}a_{15}a_{26}a_{31}a_4b_4+a_{13}a_{22}a_{26}a_{33}a_5b_2-...$   
 $a_{13}a_{22}a_{27}a_{32}a_5b_2-a_{14}a_{22}a_{25}a_{33}a_5b_2+a_{14}a_{22}a_{27}a_{31}a_5b_2+...$   
 $a_{15}a_{22}a_{25}a_{32}a_5b_2-a_{15}a_{22}a_{26}a_{31}a_5b_2+a_{16}a_{20}a_{25}a_{33}a_5b_2-...$   
 $a_{16}a_{20}a_{27}a_{31}a_5b_2-a_{16}a_{21}a_{25}a_{32}a_5b_2+a_{16}a_{21}a_{26}a_{31}a_5b_2+...$   
 $a_{11}a_{14}a_{19}a_{33}a_4b_5-a_{11}a_{15}a_{19}a_{32}a_4b_5+a_{10}a_{19}a_{26}a_{33}a_5b_3-...$   
 $a_{10}a_{19}a_{27}a_{32}a_5b_3-a_{11}a_{14}a_{19}a_{27}a_4b_6+a_{11}a_{15}a_{19}a_{26}a_4b_6-...$   
 $a_{11}a_{13}a_{20}a_{33}a_4b_5+a_{11}a_{13}a_{21}a_{32}a_4b_5-a_{11}a_{14}a_{21}a_{31}a_4b_5+...$   
 $a_{11}a_{15}a_{20}a_{31}a_4b_5-a_{10}a_{20}a_{25}a_{33}a_5b_3+a_{10}a_{20}a_{27}a_{31}a_5b_3+...$   
 $a_{10}a_{21}a_{25}a_{32}a_5b_3-a_{10}a_{21}a_{26}a_{31}a_5b_3+a_{11}a_{13}a_{20}a_{27}a_4b_6-...$   
 $a_{11}a_{13}a_{21}a_{26}a_4b_6+a_{11}a_{14}a_{21}a_{25}a_4b_6-a_{11}a_{15}a_{20}a_{25}a_4b_6-...$   
 $a_{10}a_{13}a_{26}a_{33}a_5b_4+a_{10}a_{13}a_{27}a_{32}a_5b_4+a_{10}a_{14}a_{25}a_{33}a_5b_4-...$   
 $a_{10}a_{14}a_{27}a_{31}a_5b_4-a_{10}a_{15}a_{25}a_{32}a_5b_4+a_{10}a_{15}a_{26}a_{31}a_5b_4-...$   
 $a_{10}a_{14}a_{19}a_{33}a_5b_5+a_{10}a_{15}a_{19}a_{32}a_5b_5+a_{10}a_{14}a_{19}a_{27}a_5b_6-...$   
 $a_{10}a_{15}a_{19}a_{26}a_5b_6-a_{16}a_{19}a_{29}a_{33}a_8b_1+a_{10}a_{13}a_{20}a_{33}a_5b_5-...$   
 $a_{10}a_{13}a_{21}a_{32}a_5b_5+a_{10}a_{14}a_{21}a_{31}a_5b_5-a_{10}a_{15}a_{20}a_{31}a_5b_5-...$   
 $a_{10}a_{13}a_{20}a_{27}a_5b_6+a_{10}a_{13}a_{21}a_{26}a_5b_6-a_{10}a_{14}a_{21}a_{25}a_5b_6+...$

$$\begin{aligned}
& a_{10} * a_{15} * a_{20} * a_{25} * a_5 * b_6 + a_{13} * a_{22} * a_{29} * a_{33} * a_8 * b_1 - a_{15} * a_{22} * a_{29} * a_{31} * a_8 * b_1 + \dots \\
& a_{16} * a_{21} * a_{29} * a_{31} * a_8 * b_1 - a_{17} * a_{22} * a_{25} * a_{33} * a_8 * b_1 + a_{17} * a_{22} * a_{27} * a_{31} * a_8 * b_1 + \dots \\
& a_{16} * a_{19} * a_{29} * a_{32} * a_9 * b_1 - a_{13} * a_{22} * a_{29} * a_{32} * a_9 * b_1 + a_{14} * a_{22} * a_{29} * a_{31} * a_9 * b_1 - \dots \\
& a_{16} * a_{20} * a_{29} * a_{31} * a_9 * b_1 + a_{17} * a_{22} * a_{25} * a_{32} * a_9 * b_1 - a_{17} * a_{22} * a_{26} * a_{31} * a_9 * b_1 - \dots \\
& a_1 * a_{22} * a_{29} * a_{33} * a_8 * b_3 + a_1 * a_{16} * a_{29} * a_{33} * a_8 * b_4 + a_1 * a_{17} * a_{22} * a_{33} * a_8 * b_5 + \dots \\
& a_1 * a_{22} * a_{29} * a_{32} * a_9 * b_3 + a_1 * a_{15} * a_{22} * a_{29} * a_8 * b_6 - a_1 * a_{16} * a_{21} * a_{29} * a_8 * b_6 - \dots \\
& a_1 * a_{17} * a_{22} * a_{27} * a_8 * b_6 - a_1 * a_{16} * a_{29} * a_{32} * a_9 * b_4 - a_1 * a_{17} * a_{22} * a_{32} * a_9 * b_5 + \dots \\
& a_{22} * a_{29} * a_3 * a_{31} * a_8 * b_3 - a_1 * a_{14} * a_{22} * a_{29} * a_9 * b_6 + a_1 * a_{16} * a_{20} * a_{29} * a_9 * b_6 + \dots \\
& a_1 * a_{17} * a_{22} * a_{26} * a_9 * b_6 - a_{16} * a_{29} * a_3 * a_{31} * a_8 * b_4 + a_{19} * a_{29} * a_{33} * a_4 * a_8 * b_3 + \dots \\
& a_{16} * a_{19} * a_{29} * a_3 * a_8 * b_6 - a_{17} * a_{22} * a_3 * a_{31} * a_8 * b_5 - a_{21} * a_{29} * a_{31} * a_4 * a_8 * b_3 - \dots \\
& a_{13} * a_{22} * a_{29} * a_3 * a_8 * b_6 + a_{17} * a_{22} * a_{25} * a_3 * a_8 * b_6 - a_{13} * a_{29} * a_{33} * a_4 * a_8 * b_4 + \dots \\
& a_{15} * a_{29} * a_{31} * a_4 * a_8 * b_4 + a_{17} * a_{25} * a_{33} * a_4 * a_8 * b_4 - a_{17} * a_{27} * a_{31} * a_4 * a_8 * b_4 - \dots \\
& a_{17} * a_{19} * a_{33} * a_4 * a_8 * b_5 - a_{19} * a_{29} * a_{32} * a_4 * a_9 * b_3 - a_{15} * a_{19} * a_{29} * a_4 * a_8 * b_6 + \dots \\
& a_{17} * a_{19} * a_{27} * a_4 * a_8 * b_6 + a_{17} * a_{21} * a_{31} * a_4 * a_8 * b_5 + a_{20} * a_{29} * a_{31} * a_4 * a_9 * b_3 + \dots \\
& a_{22} * a_{25} * a_{33} * a_5 * a_8 * b_3 - a_{22} * a_{27} * a_{31} * a_5 * a_8 * b_3 + a_{13} * a_{21} * a_{29} * a_4 * a_8 * b_6 - \dots \\
& a_{17} * a_{21} * a_{25} * a_4 * a_8 * b_6 + a_{13} * a_{29} * a_{32} * a_4 * a_9 * b_4 - a_{14} * a_{29} * a_{31} * a_4 * a_9 * b_4 - \dots \\
& a_{16} * a_{25} * a_{33} * a_5 * a_8 * b_4 + a_{16} * a_{27} * a_{31} * a_5 * a_8 * b_4 - a_{17} * a_{25} * a_{32} * a_4 * a_9 * b_4 + \dots \\
& a_{17} * a_{26} * a_{31} * a_4 * a_9 * b_4 + a_{16} * a_{19} * a_{33} * a_5 * a_8 * b_5 + a_{17} * a_{19} * a_{32} * a_4 * a_9 * b_5 + \dots \\
& a_{14} * a_{19} * a_{29} * a_4 * a_9 * b_6 - a_{16} * a_{19} * a_{27} * a_5 * a_8 * b_6 - a_{17} * a_{19} * a_{26} * a_4 * a_9 * b_6 - \dots \\
& a_{13} * a_{22} * a_{33} * a_5 * a_8 * b_5 + a_{15} * a_{22} * a_{31} * a_5 * a_8 * b_5 - a_{16} * a_{21} * a_{31} * a_5 * a_8 * b_5 - \dots \\
& a_{17} * a_{20} * a_{31} * a_4 * a_9 * b_5 - a_{22} * a_{25} * a_{32} * a_5 * a_9 * b_3 + a_{22} * a_{26} * a_{31} * a_5 * a_9 * b_3 - \dots \\
& a_{13} * a_{20} * a_{29} * a_4 * a_9 * b_6 + a_{13} * a_{22} * a_{27} * a_5 * a_8 * b_6 - a_{15} * a_{22} * a_{25} * a_5 * a_8 * b_6 + \dots \\
& a_{16} * a_{21} * a_{25} * a_5 * a_8 * b_6 + a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_4 * a_9 * b_6 + a_{16} * a_{25} * a_{32} * a_5 * a_9 * b_4 - \dots \\
& a_{16} * a_{26} * a_{31} * a_5 * a_9 * b_4 - a_{16} * a_{19} * a_{32} * a_5 * a_9 * b_5 + a_{16} * a_{19} * a_{26} * a_5 * a_9 * b_6 + \dots \\
& a_{13} * a_{22} * a_{32} * a_5 * a_9 * b_5 - a_{14} * a_{22} * a_{31} * a_5 * a_9 * b_5 + a_{16} * a_{20} * a_{31} * a_5 * a_9 * b_5 - \dots \\
& a_{13} * a_{22} * a_{26} * a_5 * a_9 * b_6 + a_{14} * a_{22} * a_{25} * a_5 * a_9 * b_6 - a_{16} * a_{20} * a_{25} * a_5 * a_9 * b_6) / \delta;
\end{aligned}$$

$$x_{\dot{1}} = x_{(2)};$$

$$x_{\dot{3}} = x_{(4)};$$

$$x_{\dot{5}} = x_{(6)};$$

$$\dot{x}(7)=x(8);$$

$$\dot{x}(9)=x(10);$$

$$\dot{x}(11)=x(12);$$

$$t=t$$

## Приложение 6

Программа MATLAB для исследования эффективности алгоритма кратной синхронизации с одним ведущим ротором для трехроторной ВУ

```
close all
```

```
clear
```

```
format compact
```

```
format short e
```

```
global J J_1 J_2 J_3 m_0 m mpd rho k_c U1 U2 U3...
```

```
g beta c_2 c_1 r c_3 delta c_4 c_5 m_g V t_1 t_2 V1
```

```
global alfa1 alfa2 alfa3 gamma1 gamma2 gamma3 H HG
```

```
mpd=9; m=1.5; m_0=mpd+3*m; m_g=0; J_1=0.014; J_2=0.014; J_3=0.014;
```

```
J=0.3; rho=0.04; r=0.2; g=9.81; c_1=5300; c_2=5300; c_3=164; c_4=2000;
```

```
c_5=2650; k_c=0.01; beta=5; V=0.6; t_1=5; t_2=9;
```

```
gamma1=0.02; gamma2=0.02; gamma3=0.02; alfa1=0.25; alfa2=0.25; alfa3=0.25;
```

```
HG=1865; t0=0; tfin=20; ph10=-0.1; ph20=0.1; ph30=-0.11;
```

```
x0=[0 0 0 0 0 0 ph10 0 ph20 0 ph30 0];
```

```
[t,x]=ode45('pp',[t0,tfin],x0);
```

```
for k=1:length(t);
```

```
H=0.5*J_1*(x(k,8))^2+m*g*rho*sin(x(k,7))+0.5*J_2*(x(k,10))^2+m*g*rho*...  
sin(x(k,9))+0.5*J_3*(x(k,12))^2+m*g*rho*sin(x(k,11))+ 0.5*c_2*(x(k,3))^2+...  
m_0*g*x(k,3)+x(k,4)*(m*rho*x(k,8)*cos(x(k,7))+m*rho*x(k,10)*cos(x(k,9))+...  
m*rho*x(k,12)*cos(x(k,11)))-x(k,2)*(m*rho*x(k,8)*sin(x(k,7))-m*rho*...  
x(k,10)*sin(x(k,9))-m*rho*x(k,12)*sin(x(k,11)))+0.5*m_0*(x(k,2))^2+...  
0.5*m_0*(x(k,4))^2+0.5*c_2*(x(k,1))^2;
```

```

U1=gamma1*((1-alfa1)*(H-HG)*x(k,8)+(alfa1/J_1)*((x(k,8)/J_1)-...
(x(k,10)/J_2)))+(alfa2/J_1)*((x(k,8)/J_1)-(x(k,12)/J_3/2)));
U2=gamma2*((1-alfa2)*(H-HG)*x(k,10)+(alfa2/J_2)*((x(k,8)/J_1)-...
(x(k,10)/J_2)));
U3=gamma3*((1-alfa3)*(H-HG)*x(k,12)+(alfa3/J_3/2)*((x(k,8)/J_1)-...
(x(k,12)/J_3/2)));

```

```

uu1(k)=U1; uu2(k)=U2; uu3(k)=U3; HH(k)=H;
end;

```

```

clear J_1 J_2 J_3 m_0 m k_c U1 U2 U3 g beta

```

## Приложение 7

Подпрограмма MATLAB для исследования эффективности алгоритма кратной синхронизации с одним ведущим ротором для трехроторной ВУ

```
function xdot= pp(t,x)
global J J_1 J_2 J_3 m_0 m rho k_c U1 U2 U3 g beta c_2 c_1 r c_3 delta c_4...
c_5 m_g V t_1 t_2 V1 alfa1 alfa2 alfa3 gamma1 gamma2 gamma3 H HG
global ras rasa FF newan1 newan2
global flag ta pogra1 pogra2 pogr1 pogr2 rasp rasap R ts fa tv

xdot=zeros(size(x));
R=rand(1,20);
pogr1=5*(R(4)-0.5)*2*0;
x1=x(1); x2=x(2); x3=x(3); x4=x(4); x5=x(5); x6=x(6); x7=x(7); x8=x(8);
x9=x(9); x10=x(10); x11=x(11); x12=x(12);

H=0.5*J_1*(x8)^2+m*g*rho*sin(x7)+0.5*J_2*(x10)^2+m*g*rho*sin(x9)+...
0.5*J_3*(x12)^2+m*g*rho*sin(x11)+ 0.5*c_2*(x3)^2+m_0*g*x3+x4*...
(m*rho*x8*cos(x7)+m*rho*x10*cos(x9)+m*rho*x12*cos(x11))-...
x2*(m*rho*x8*sin(x7)+m*rho*x10*sin(x9)+m*rho*x12*sin(x11))+...
0.5*m_0*(x2)^2+0.5*m_0*(x4)^2+0.5*c_1*(x1)^2;

U1=-gamma1*((1-alfa1)*(H-HG)*x8+(alfa1/J_1)*(x8-x10)+(alfa1/J_1)*(x8-...
x12/2)+(alfa1/J_1)*(x7-x9)+(alfa1/J_1)*(x7-x11/2));
U2=-gamma2*((1-alfa2)*(H-HG)*x10-(alfa2/J_2)*(x8-x10)-(alfa2/J_2)*(x7-x9));
U3=-gamma3*((1-alfa3)*(H-HG)*x12-(alfa3/J_3/2)*(x8-x12/2)-(alfa3/J_3/2)* ...
(x7-x11/2));
if abs(rasa)>=0
    if abs(rasa)<=0.3
        if flag==0
```

```

ts=t;
flag=1;
else
ts=ts;
end;
else
flag=0;
ts=t;
end;
else
flag=0;
ts=t;
end;

```

```

rasfaz=abs(x7-2*x9);
rasa=rasfaz-(fix(rasfaz/6.28)*6.28);
rasa=abs(x7-2*x9);
rasa=rasfaz-(fix(rasfaz/6.28)*6.28);

```

```

a1=m_0; a3=-m*rho*(sin(x5+x7)+sin(x5+x9)+sin(x5+x11));
a4=-m*rho*sin(x5+x7); a5=-m*rho*sin(x5+x9); a6=-m*rho*sin(x5+x11);
a8=m_0; a9=m*rho*(cos(x5+x7)+cos(x5+x9)+cos(x5+x11));
a10=m*rho*cos(x5+x7); a11=m*rho*cos(x5+x9); a12=m*rho*cos(x5+x11);
a13=a3; a14=a9; a15=J+J_1+J_2+J_3-2*r*m*rho*(cos(x7)-cos(x9));
a16=J_1-r*m*rho*cos(x7); a17=J_2+r*m*rho*cos(x9); a18=J_3; a19=a4;
a20=a10; a21=a16; a22=J_1; a25=a5; a26=a11; a27=a17; a29=J_2; a31=a6;
a32=a12; a33=J_3; a36=J_3;

```

```

b1=-x6^2*m*rho*(cos(x5+x7)+cos(x5+x9)+cos(x5+x11))-...

```

$$\begin{aligned}
& x8^2 * m * \rho * \cos(x5+x7) - x10^2 * m * \rho * \cos(x5+x9) - \dots \\
& x12^2 * m * \rho * \cos(x5+x11) - 2 * x6 * x8 * m * \rho * \cos(x5+x7) - \dots \\
& 2 * x6 * x10 * m * \rho * \cos(x5+x9) - 2 * x6 * x12 * m * \rho * \cos(x5+x11) + \dots \\
& 2 * c_1 * x1 + \beta * x2; \\
b2 = & -x6^2 * m * \rho * (\sin(x5+x7) + \sin(x5+x9) + \sin(x5+x11)) - \dots \\
& x8^2 * m * \rho * \sin(x5+x7) - x10^2 * m * \rho * \sin(x5+x9) - \dots \\
& x12^2 * m * \rho * \sin(x5+x11) - 2 * x6 * x8 * m * \rho * \sin(x5+x7) - \dots \\
& 2 * x6 * x10 * m * \rho * \sin(x5+x9) - 2 * x6 * x12 * m * \rho * \cos(x5+x11) + \dots \\
& m_0 * g + 2 * c_2 * x3 + \beta * x4; \\
b3 = & x8^2 * r * m * \rho * \sin(x7) - x10^2 * r * m * \rho * \sin(x9) + \dots \\
& 2 * r * m * \rho * x6 * x8 * \sin(x7) - 2 * r * m * \rho * x6 * x10 * \sin(x9) + \dots \\
& m * \rho * g * (\cos(x5+x7) + \cos(x5+x9) + \cos(x5+x11)) + c_3 * x5 + \beta * x6; \\
b4 = & -x6^2 * r * m * \rho * \sin(x7) + m * \rho * g * \cos(x5+x7) + k_c * x8 - U1; \\
b5 = & x6^2 * r * m * \rho * \sin(x9) + m * \rho * g * \cos(x5+x9) + k_c * x10 - U2; \\
b6 = & m * \rho * g * \cos(x5+x11) + k_c * x12 - U3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{delta} = & (a1 * a10 * a14 * a21 * a29 * a36 - a1 * a10 * a15 * a20 * a29 * a36 + a1 * a10 * a17 * a20 * \dots \\
& a27 * a36 - a1 * a10 * a17 * a21 * a26 * a36 + a1 * a10 * a18 * a20 * a29 * a33 - a1 * a10 * a18 * \dots \\
& a21 * a29 * a32 + a1 * a11 * a14 * a22 * a27 * a36 - a1 * a11 * a15 * a22 * a26 * a36 - a1 * a11 * \dots \\
& a16 * a20 * a27 * a36 + a1 * a11 * a16 * a21 * a26 * a36 + a1 * a11 * a18 * a22 * a26 * a33 - a1 * \dots \\
& a11 * a18 * a22 * a27 * a32 + a1 * a12 * a14 * a22 * a29 * a33 - a1 * a12 * a15 * a22 * a29 * a32 - \dots \\
& a1 * a12 * a16 * a20 * a29 * a33 + a1 * a12 * a16 * a21 * a29 * a32 - a1 * a12 * a17 * a22 * a26 * \dots \\
& a33 + a1 * a12 * a17 * a22 * a27 * a32 - a10 * a14 * a19 * a29 * a3 * a36 + a10 * a17 * a19 * a26 * \dots \\
& a3 * a36 + a10 * a18 * a19 * a29 * a3 * a32 - a11 * a16 * a19 * a26 * a3 * a36 - a12 * a16 * a19 * \dots \\
& a29 * a3 * a32 + a10 * a13 * a20 * a29 * a3 * a36 - a10 * a17 * a20 * a25 * a3 * a36 - a10 * a18 * \dots \\
& a20 * a29 * a3 * a31 + a11 * a13 * a22 * a26 * a3 * a36 - a11 * a14 * a22 * a25 * a3 * a36 + a11 * \dots \\
& a16 * a20 * a25 * a3 * a36 + a11 * a18 * a22 * a25 * a3 * a32 - a11 * a18 * a22 * a26 * a3 * a31 + \dots \\
& a12 * a13 * a22 * a29 * a3 * a32 - a12 * a14 * a22 * a29 * a3 * a31 + a12 * a16 * a20 * a29 * a3 * \dots \\
& a31 - a12 * a17 * a22 * a25 * a3 * a32 + a12 * a17 * a22 * a26 * a3 * a31 - \dots
\end{aligned}$$



$a_{11}a_{14}a_{19}a_{27}a_{36}a_4+a_{11}a_{15}a_{19}a_{26}a_{36}a_4-a_{11}a_{18}a_{19}a_{26}a_{33}...$   
 $a_4+a_{11}a_{18}a_{19}a_{27}a_{32}a_4-a_{12}a_{14}a_{19}a_{29}a_{33}a_4+a_{12}a_{15}a_{19}a_{29}...$   
 $a_{32}a_4+a_{12}a_{17}a_{19}a_{26}a_{33}a_4-a_{12}a_{17}a_{19}a_{27}a_{32}a_4+a_{11}a_{13}a_{20}...$   
 $a_{27}a_{36}a_4-a_{11}a_{13}a_{21}a_{26}a_{36}a_4+a_{11}a_{14}a_{21}a_{25}a_{36}a_4-a_{11}a_{15}...$   
 $a_{20}a_{25}a_{36}a_4+a_{11}a_{18}a_{20}a_{25}a_{33}a_4-a_{11}a_{18}a_{20}a_{27}a_{31}a_4-a_{11}...$   
 $a_{18}a_{21}a_{25}a_{32}a_4+a_{11}a_{18}a_{21}a_{26}a_{31}a_4+a_{12}a_{13}a_{20}a_{29}a_{33}a_4-...$   
 $a_{12}a_{13}a_{21}a_{29}a_{32}a_4+a_{12}a_{14}a_{21}a_{29}a_{31}a_4-a_{12}a_{15}a_{20}a_{29}a_{31}...$   
 $a_4-a_{12}a_{17}a_{20}a_{25}a_{33}a_4+a_{12}a_{17}a_{20}a_{27}a_{31}a_4+a_{12}a_{17}a_{21}a_{25}...$   
 $a_{32}a_4-a_{12}a_{17}a_{21}a_{26}a_{31}a_4+a_{10}a_{14}a_{19}a_{27}a_{36}a_5-a_{10}a_{15}a_{19}...$   
 $a_{26}a_{36}a_5+a_{10}a_{18}a_{19}a_{26}a_{33}a_5-a_{10}a_{18}a_{19}a_{27}a_{32}a_5-a_{12}a_{16}...$   
 $a_{19}a_{26}a_{33}a_5+a_{12}a_{16}a_{19}a_{27}a_{32}a_5-a_{10}a_{13}a_{20}a_{27}a_{36}a_5+a_{10}...$   
 $a_{13}a_{21}a_{26}a_{36}a_5-a_{10}a_{14}a_{21}a_{25}a_{36}a_5+a_{10}a_{15}a_{20}a_{25}a_{36}a_5-...$   
 $a_{10}a_{18}a_{20}a_{25}a_{33}a_5+a_{10}a_{18}a_{20}a_{27}a_{31}a_5+a_{10}a_{18}a_{21}a_{25}a_{32}...$   
 $a_5-a_{10}a_{18}a_{21}a_{26}a_{31}a_5+a_{12}a_{13}a_{22}a_{26}a_{33}a_5-a_{12}a_{13}a_{22}a_{27}...$   
 $a_{32}a_5-a_{12}a_{14}a_{22}a_{25}a_{33}a_5+a_{12}a_{14}a_{22}a_{27}a_{31}a_5+a_{12}a_{15}a_{22}...$   
 $a_{25}a_{32}a_5-a_{12}a_{15}a_{22}a_{26}a_{31}a_5+a_{12}a_{16}a_{20}a_{25}a_{33}a_5-a_{12}a_{16}...$   
 $a_{20}a_{27}a_{31}a_5-a_{12}a_{16}a_{21}a_{25}a_{32}a_5+a_{12}a_{16}a_{21}a_{26}a_{31}a_5+a_{10}...$   
 $a_{14}a_{19}a_{29}a_{33}a_6-a_{10}a_{15}a_{19}a_{29}a_{32}a_6-a_{10}a_{17}a_{19}a_{26}a_{33}a_6+...$   
 $a_{10}a_{17}a_{19}a_{27}a_{32}a_6+a_{11}a_{16}a_{19}a_{26}a_{33}a_6-a_{11}a_{16}a_{19}a_{27}a_{32}...$   
 $a_6-a_{10}a_{13}a_{20}a_{29}a_{33}a_6+a_{10}a_{13}a_{21}a_{29}a_{32}a_6-a_{10}a_{14}a_{21}a_{29}...$   
 $a_{31}a_6+a_{10}a_{15}a_{20}a_{29}a_{31}a_6+a_{10}a_{17}a_{20}a_{25}a_{33}a_6-a_{10}a_{17}a_{20}...$   
 $a_{27}a_{31}a_6-a_{10}a_{17}a_{21}a_{25}a_{32}a_6+a_{10}a_{17}a_{21}a_{26}a_{31}a_6-a_{11}a_{13}...$   
 $a_{22}a_{26}a_{33}a_6+a_{11}a_{13}a_{22}a_{27}a_{32}a_6+a_{11}a_{14}a_{22}a_{25}a_{33}a_6-a_{11}...$   
 $a_{14}a_{22}a_{27}a_{31}a_6-a_{11}a_{15}a_{22}a_{25}a_{32}a_6+a_{11}a_{15}a_{22}a_{26}a_{31}a_6-...$   
 $a_{11}a_{16}a_{20}a_{25}a_{33}a_6+a_{11}a_{16}a_{20}a_{27}a_{31}a_6+a_{11}a_{16}a_{21}a_{25}a_{32}...$   
 $a_6-a_{11}a_{16}a_{21}a_{26}a_{31}a_6+...$   
 $a_1a_{15}a_{22}a_{29}a_{36}a_8-a_1a_{16}a_{21}a_{29}a_{36}a_8-a_1a_{17}a_{22}a_{27}a_{36}a_8-...$   
 $a_1a_{18}a_{22}a_{29}a_{33}a_8-a_1a_{14}a_{22}a_{29}a_{36}a_9+a_1a_{16}a_{20}a_{29}a_{36}a_9+...$   
 $a_1a_{17}a_{22}a_{26}a_{36}a_9+a_1a_{18}a_{22}a_{29}a_{32}a_9+a_{16}a_{19}a_{29}a_3a_{36}a_8-...$

$$\begin{aligned}
& a_{13}a_{22}a_{29}a_3a_{36}a_8+a_{17}a_{22}a_{25}a_3a_{36}a_8+a_{18}a_{22}a_{29}a_3a_{31}a_8-... \\
& a_{15}a_{19}a_{29}a_{36}a_4a_8+a_{17}a_{19}a_{27}a_{36}a_4a_8+a_{18}a_{19}a_{29}a_{33}a_4a_8+... \\
& a_{13}a_{21}a_{29}a_{36}a_4a_8-a_{17}a_{21}a_{25}a_{36}a_4a_8-a_{18}a_{21}a_{29}a_{31}a_4a_8+... \\
& a_{14}a_{19}a_{29}a_{36}a_4a_9-a_{16}a_{19}a_{27}a_{36}a_5a_8-a_{17}a_{19}a_{26}a_{36}a_4a_9-... \\
& a_{18}a_{19}a_{29}a_{32}a_4a_9-a_{13}a_{20}a_{29}a_{36}a_4a_9+a_{13}a_{22}a_{27}a_{36}a_5a_8-... \\
& a_{15}a_{22}a_{25}a_{36}a_5a_8+a_{16}a_{21}a_{25}a_{36}a_5a_8+a_{17}a_{20}a_{25}a_{36}a_4a_9+... \\
& a_{18}a_{20}a_{29}a_{31}a_4a_9+a_{18}a_{22}a_{25}a_{33}a_5a_8-a_{18}a_{22}a_{27}a_{31}a_5a_8+... \\
& a_{16}a_{19}a_{26}a_{36}a_5a_9-a_{16}a_{19}a_{29}a_{33}a_6a_8-a_{13}a_{22}a_{26}a_{36}a_5a_9+... \\
& a_{13}a_{22}a_{29}a_{33}a_6a_8+a_{14}a_{22}a_{25}a_{36}a_5a_9-a_{15}a_{22}a_{29}a_{31}a_6a_8-... \\
& a_{16}a_{20}a_{25}a_{36}a_5a_9+a_{16}a_{21}a_{29}a_{31}a_6a_8-a_{17}a_{22}a_{25}a_{33}a_6a_8+... \\
& a_{17}a_{22}a_{27}a_{31}a_6a_8-a_{18}a_{22}a_{25}a_{32}a_5a_9+a_{18}a_{22}a_{26}a_{31}a_5a_9+... \\
& a_{16}a_{19}a_{29}a_{32}a_6a_9-a_{13}a_{22}a_{29}a_{32}a_6a_9+a_{14}a_{22}a_{29}a_{31}a_6a_9-... \\
& a_{16}a_{20}a_{29}a_{31}a_6a_9+a_{17}a_{22}a_{25}a_{32}a_6a_9-a_{17}a_{22}a_{26}a_{31}a_6a_9);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{xdot}(2)= & -(a_{10}a_{14}a_{21}a_{29}a_{36}b_1-a_{10}a_{15}a_{20}a_{29}a_{36}b_1+a_{10}a_{17}a_{20}a_{27}a_{36}b_1- \\
& a_{10}a_{17}a_{21}a_{26}a_{36}b_1+a_{10}a_{18}a_{20}a_{29}a_{33}b_1-a_{10}a_{18}a_{21}a_{29}a_{32}b_1+ \\
& a_{11}a_{14}a_{22}a_{27}a_{36}b_1-a_{11}a_{15}a_{22}a_{26}a_{36}b_1-a_{11}a_{16}a_{20}a_{27}a_{36}b_1+ \\
& a_{11}a_{16}a_{21}a_{26}a_{36}b_1+a_{11}a_{18}a_{22}a_{26}a_{33}b_1- \\
& a_{11}a_{18}a_{22}a_{27}a_{32}b_1+a_{12}a_{14}a_{22}a_{29}a_{33}b_1-a_{12}a_{15}a_{22}a_{29}a_{32}b_1- \\
& a_{12}a_{16}a_{20}a_{29}a_{33}b_1+a_{12}a_{16}a_{21}a_{29}a_{32}b_1-a_{12}a_{17}a_{22}a_{26}a_{33}b_1+ \\
& a_{12}a_{17}a_{22}a_{27}a_{32}b_1+a_{14}a_{22}a_{29}a_3a_{36}b_2-a_{16}a_{20}a_{29}a_3a_{36}b_2- \\
& a_{17}a_{22}a_{26}a_3a_{36}b_2-a_{18}a_{22}a_{29}a_3a_{32}b_2+a_{10}a_{20}a_{29}a_3a_{36}b_3+ \\
& a_{11}a_{22}a_{26}a_3a_{36}b_3+a_{12}a_{22}a_{29}a_3a_{32}b_3-a_{10}a_{14}a_{29}a_3a_{36}b_4+ \\
& a_{10}a_{17}a_{26}a_3a_{36}b_4+...
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{10}a_{18}a_{29}a_3a_{32}b_4-a_{11}a_{16}a_{26}a_3a_{36}b_4-a_{12}a_{16}a_{29}a_3a_{32}b_4-... \\
& a_{14}a_{21}a_{29}a_{36}a_4b_2+a_{15}a_{20}a_{29}a_{36}a_4b_2-a_{17}a_{20}a_{27}a_{36}a_4b_2+... \\
& a_{17}a_{21}a_{26}a_{36}a_4b_2-a_{18}a_{20}a_{29}a_{33}a_4b_2+a_{18}a_{21}a_{29}a_{32}a_4b_2-... \\
& a_{10}a_{17}a_{20}a_3a_{36}b_5-a_{11}a_{14}a_{22}a_3a_{36}b_5+a_{11}a_{16}a_{20}a_3a_{36}b_5+... \\
& a_{11}a_{18}a_{22}a_3a_{32}b_5-a_{12}a_{17}a_{22}a_3a_{32}b_5+a_{11}a_{20}a_{27}a_{36}a_4b_3-...
\end{aligned}$$



$a_{10}a_{17}a_{21}a_{26}a_6b_6 - a_{11}a_{14}a_{22}a_{27}a_6b_6 + a_{11}a_{15}a_{22}a_{26}a_6b_6 + \dots$   
 $a_{11}a_{16}a_{20}a_{27}a_6b_6 - a_{11}a_{16}a_{21}a_{26}a_6b_6 - a_{14}a_{22}a_{29}a_{36}a_9b_1 + \dots$   
 $a_{16}a_{20}a_{29}a_{36}a_9b_1 + a_{17}a_{22}a_{26}a_{36}a_9b_1 + a_{18}a_{22}a_{29}a_{32}a_9b_1 - \dots$   
 $a_{22}a_{29}a_3a_{36}a_8b_3 + a_{16}a_{29}a_3a_{36}a_8b_4 + a_{17}a_{22}a_3a_{36}a_8b_5 + \dots$   
 $a_{21}a_{29}a_{36}a_4a_8b_3 + a_{18}a_{22}a_{29}a_3a_8b_6 - a_{15}a_{29}a_{36}a_4a_8b_4 + \dots$   
 $a_{17}a_{27}a_{36}a_4a_8b_4 + a_{18}a_{29}a_{33}a_4a_8b_4 - a_{17}a_{21}a_{36}a_4a_8b_5 - \dots$   
 $a_{20}a_{29}a_{36}a_4a_9b_3 + a_{22}a_{27}a_{36}a_5a_8b_3 - a_{18}a_{21}a_{29}a_4a_8b_6 + \dots$   
 $a_{14}a_{29}a_{36}a_4a_9b_4 - a_{16}a_{27}a_{36}a_5a_8b_4 - a_{17}a_{26}a_{36}a_4a_9b_4 - \dots$   
 $a_{18}a_{29}a_{32}a_4a_9b_4 - a_{15}a_{22}a_{36}a_5a_8b_5 + a_{16}a_{21}a_{36}a_5a_8b_5 + \dots$   
 $a_{17}a_{20}a_{36}a_4a_9b_5 + a_{18}a_{22}a_{33}a_5a_8b_5 - a_{22}a_{26}a_{36}a_5a_9b_3 + \dots$   
 $a_{22}a_{29}a_{33}a_6a_8b_3 + a_{18}a_{20}a_{29}a_4a_9b_6 - a_{18}a_{22}a_{27}a_5a_8b_6 + \dots$   
 $a_{16}a_{26}a_{36}a_5a_9b_4 - a_{16}a_{29}a_{33}a_6a_8b_4 + a_{14}a_{22}a_{36}a_5a_9b_5 - \dots$   
 $a_{16}a_{20}a_{36}a_5a_9b_5 - a_{17}a_{22}a_{33}a_6a_8b_5 - a_{18}a_{22}a_{32}a_5a_9b_5 - \dots$   
 $a_{22}a_{29}a_{32}a_6a_9b_3 - a_{15}a_{22}a_{29}a_6a_8b_6 + a_{16}a_{21}a_{29}a_6a_8b_6 + \dots$   
 $a_{17}a_{22}a_{27}a_6a_8b_6 + a_{18}a_{22}a_{26}a_5a_9b_6 + a_{16}a_{29}a_{32}a_6a_9b_4 + \dots$   
 $a_{17}a_{22}a_{32}a_6a_9b_5 + a_{14}a_{22}a_{29}a_6a_9b_6 - a_{16}a_{20}a_{29}a_6a_9b_6 - \dots$   
 $a_{17}a_{22}a_{26}a_6a_9b_6)/\delta;$

$\dot{x}(4) = (a_{10}a_{17}a_{19}a_{27}a_{36}b_1 - a_{10}a_{15}a_{19}a_{29}a_{36}b_1 + a_{10}a_{18}a_{19}a_{29}a_{33}b_1 - a_{11}a_{16}a_{19}a_{27}a_{36}b_1 - a_{12}a_{16}a_{19}a_{29}a_{33}b_1 + a_{10}a_{13}a_{21}a_{29}a_{36}b_1 - a_{10}a_{17}a_{21}a_{25}a_{36}b_1 - a_{10}a_{18}a_{21}a_{29}a_{31}b_1 + \dots$   
 $a_{11}a_{13}a_{22}a_{27}a_{36}b_1 - \dots$   
 $a_{11}a_{15}a_{22}a_{25} \dots$   
 $a_{36} \dots$   
 $b_1 + \dots$   
 $a_{11}a_{16}a_{21}a_{25}a_{36}b_1 + a_{11}a_{18}a_{22}a_{25}a_{33}b_1 - \dots$   
 $a_{11}a_{18}a_{22}a_{27}a_{31}b_1 + a_{12}a_{13}a_{22}a_{29}a_{33}b_1 -$   
 $a_{12}a_{15}a_{22}a_{29}a_{31}b_1 + \dots$

$a_{12} \cdot a_{16} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot a_{31} \cdot b_1 - a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_{33} \cdot b_1 + a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{27} \cdot a_{31} \cdot b_1 -$   
 $\dots$   
 $a_1 \cdot a_{15} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_{36} \cdot b_2 + a_1 \cdot a_{16} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot a_{36} \cdot b_2 + a_1 \cdot a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot b_2 + \dots$   
 $a_1 \cdot a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot b_2 - a_1 \cdot a_{10} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot a_{36} \cdot b_3 - a_1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot b_3 - \dots$   
 $a_1 \cdot a_{12} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot b_3 + a_1 \cdot a_{10} \cdot a_{15} \cdot a_{29} \cdot a_{36} \cdot b_4 - a_1 \cdot a_{10} \cdot a_{17} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot b_4 - \dots$   
 $a_1 \cdot a_{10} \cdot a_{18} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot b_4 + a_1 \cdot a_{11} \cdot a_{16} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot b_4 + a_1 \cdot a_{12} \cdot a_{16} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot b_4 - \dots$   
 $a_{16} \cdot a_{19} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_2 + a_1 \cdot a_{10} \cdot a_{17} \cdot a_{21} \cdot a_{36} \cdot b_5 + a_1 \cdot a_{11} \cdot a_{15} \cdot a_{22} \cdot a_{36} \cdot b_5 - \dots$   
 $a_1 \cdot a_{11} \cdot a_{16} \cdot a_{21} \cdot a_{36} \cdot b_5 - a_1 \cdot a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot b_5 + a_1 \cdot a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot b_5 + \dots$   
 $a_1 \cdot a_{10} \cdot a_{18} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot b_6 + a_1 \cdot a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{27} \cdot b_6 + a_1 \cdot a_{12} \cdot a_{15} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot b_6 - \dots$   
 $a_1 \cdot a_{12} \cdot a_{16} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot b_6 - a_1 \cdot a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{27} \cdot b_6 + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_2 - \dots$   
 $a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_2 - a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{31} \cdot b_2 + a_{10} \cdot a_{19} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_3 + \dots$   
 $a_{15} \cdot a_{19} \cdot a_{29} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_2 - a_{17} \cdot a_{19} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_2 - a_{18} \cdot a_{19} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot a_4 \cdot b_2 + \dots$   
 $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_3 + a_{12} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{31} \cdot b_3 - a_{10} \cdot a_{13} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_4 + \dots$   
 $a_{10} \cdot a_{17} \cdot a_{25} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_4 + a_{10} \cdot a_{18} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{31} \cdot b_4 - a_{11} \cdot a_{16} \cdot a_{25} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_4 - \dots$   
 $a_{12} \cdot a_{16} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot a_{31} \cdot b_4 - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_2 + a_{17} \cdot a_{21} \cdot a_{25} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_2 + \dots$   
 $a_{18} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot a_{31} \cdot a_4 \cdot b_2 - a_{10} \cdot a_{17} \cdot a_{19} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_5 + a_{11} \cdot a_{16} \cdot a_{19} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_5 + \dots$   
 $a_{11} \cdot a_{19} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_3 + a_{12} \cdot a_{19} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot a_4 \cdot b_3 - a_{10} \cdot a_{18} \cdot a_{19} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot b_6 + \dots$   
 $a_{12} \cdot a_{16} \cdot a_{19} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot b_6 + a_{16} \cdot a_{19} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_5 \cdot b_2 - a_{11} \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_3 \cdot a_{36} \cdot b_5 + \dots$   
 $a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_3 \cdot a_{31} \cdot b_5 - a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_3 \cdot a_{31} \cdot b_5 - a_{11} \cdot a_{21} \cdot a_{25} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_3 - \dots$   
 $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{29} \cdot a_{31} \cdot a_4 \cdot b_3 - a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_3 \cdot b_6 - a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{29} \cdot a_3 \cdot b_6 + \dots$   
 $a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_3 \cdot b_6 - a_{11} \cdot a_{13} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_4 + a_{11} \cdot a_{15} \cdot a_{25} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_4 - \dots$   
 $a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{25} \cdot a_{33} \cdot a_4 \cdot b_4 + a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{27} \cdot a_{31} \cdot a_4 \cdot b_4 - a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot a_4 \cdot b_4 + \dots$   
 $a_{12} \cdot a_{15} \cdot a_{29} \cdot a_{31} \cdot a_4 \cdot b_4 + a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{25} \cdot a_{33} \cdot a_4 \cdot b_4 - a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{27} \cdot a_{31} \cdot a_4 \cdot b_4 - \dots$   
 $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_5 \cdot b_2 + a_{15} \cdot a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_{36} \cdot a_5 \cdot b_2 - a_{16} \cdot a_{21} \cdot a_{25} \cdot a_{36} \cdot a_5 \cdot b_2 - \dots$   
 $a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_{33} \cdot a_5 \cdot b_2 + a_{18} \cdot a_{22} \cdot a_{27} \cdot a_{31} \cdot a_5 \cdot b_2 - a_{11} \cdot a_{15} \cdot a_{19} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_5 + \dots$   
 $a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{19} \cdot a_{33} \cdot a_4 \cdot b_5 - a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{19} \cdot a_{33} \cdot a_4 \cdot b_5 - a_{10} \cdot a_{19} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_5 \cdot b_3 - \dots$   
 $a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{19} \cdot a_{27} \cdot a_4 \cdot b_6 - a_{12} \cdot a_{15} \cdot a_{19} \cdot a_{29} \cdot a_4 \cdot b_6 + a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{19} \cdot a_{27} \cdot a_4 \cdot b_6 + \dots$   
 $a_{16} \cdot a_{19} \cdot a_{29} \cdot a_{33} \cdot a_6 \cdot b_2 + a_{11} \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{36} \cdot a_4 \cdot b_5 - a_{11} \cdot a_{18} \cdot a_{21} \cdot a_{31} \cdot a_4 \cdot b_5 + \dots$   
 $a_{12} \cdot a_{17} \cdot a_{21} \cdot a_{31} \cdot a_4 \cdot b_5 + a_{10} \cdot a_{21} \cdot a_{25} \cdot a_{36} \cdot a_5 \cdot b_3 + a_{12} \cdot a_{22} \cdot a_{25} \cdot a_{33} \cdot a_5 \cdot b_3 - \dots$

$a_{12}a_{22}a_{27}a_{31}a_5b_3+a_{11}a_{18}a_{21}a_{25}a_4b_6+a_{12}a_{13}a_{21}a_{29}a_4b_6-...$   
 $a_{12}a_{17}a_{21}a_{25}a_4b_6+a_{10}a_{13}a_{27}a_{36}a_5b_4-a_{10}a_{15}a_{25}a_{36}a_5b_4+...$   
 $a_{10}a_{18}a_{25}a_{33}a_5b_4-a_{10}a_{18}a_{27}a_{31}a_5b_4-a_{12}a_{16}a_{25}a_{33}a_5b_4+...$   
 $a_{12}a_{16}a_{27}a_{31}a_5b_4-a_{13}a_{22}a_{29}a_{33}a_6b_2+a_{15}a_{22}a_{29}a_{31}a_6b_2-...$   
 $a_{16}a_{21}a_{29}a_{31}a_6b_2+a_{17}a_{22}a_{25}a_{33}a_6b_2-a_{17}a_{22}a_{27}a_{31}a_6b_2+...$   
 $a_{10}a_{15}a_{19}a_{36}a_5b_5-a_{10}a_{18}a_{19}a_{33}a_5b_5+a_{12}a_{16}a_{19}a_{33}a_5b_5-...$   
 $a_{10}a_{19}a_{29}a_{33}a_6b_3+a_{10}a_{18}a_{19}a_{27}a_5b_6-a_{12}a_{16}a_{19}a_{27}a_5b_6-...$   
 $a_{10}a_{13}a_{21}a_{36}a_5b_5+a_{10}a_{18}a_{21}a_{31}a_5b_5-a_{12}a_{13}a_{22}a_{33}a_5b_5+...$   
 $a_{12}a_{15}a_{22}a_{31}a_5b_5-a_{12}a_{16}a_{21}a_{31}a_5b_5+a_{10}a_{21}a_{29}a_{31}a_6b_3-...$   
 $a_{11}a_{22}a_{25}a_{33}a_6b_3+a_{11}a_{22}a_{27}a_{31}a_6b_3-a_{10}a_{18}a_{21}a_{25}a_5b_6+...$   
 $a_{12}a_{13}a_{22}a_{27}a_5b_6-a_{12}a_{15}a_{22}a_{25}a_5b_6+a_{12}a_{16}a_{21}a_{25}a_5b_6+...$   
 $a_{10}a_{13}a_{29}a_{33}a_6b_4-a_{10}a_{15}a_{29}a_{31}a_6b_4-a_{10}a_{17}a_{25}a_{33}a_6b_4+...$   
 $a_{10}a_{17}a_{27}a_{31}a_6b_4+a_{11}a_{16}a_{25}a_{33}a_6b_4-a_{11}a_{16}a_{27}a_{31}a_6b_4+...$   
 $a_{10}a_{17}a_{19}a_{33}a_6b_5-a_{11}a_{16}a_{19}a_{33}a_6b_5+a_{10}a_{15}a_{19}a_{29}a_6b_6-...$   
 $a_{10}a_{17}a_{19}a_{27}a_6b_6+a_{11}a_{16}a_{19}a_{27}a_6b_6+a_{16}a_{19}a_{29}a_{36}a_9b_1-...$   
 $a_{10}a_{17}a_{21}a_{31}a_6b_5+a_{11}a_{13}a_{22}a_{33}a_6b_5-a_{11}a_{15}a_{22}a_{31}a_6b_5+...$   
 $a_{11}a_{16}a_{21}a_{31}a_6b_5-a_{10}a_{13}a_{21}a_{29}a_6b_6+a_{10}a_{17}a_{21}a_{25}a_6b_6-...$   
 $a_{11}a_{13}a_{22}a_{27}a_6b_6+a_{11}a_{15}a_{22}a_{25}a_6b_6-a_{11}a_{16}a_{21}a_{25}a_6b_6-...$   
 $a_{13}a_{22}a_{29}a_{36}a_9b_1+a_{17}a_{22}a_{25}a_{36}a_9b_1+a_{18}a_{22}a_{29}a_{31}a_9b_1+...$   
 $a_{11}a_{22}a_{29}a_{36}a_9b_3-a_{11}a_{16}a_{29}a_{36}a_9b_4-a_{11}a_{17}a_{22}a_{36}a_9b_5-...$   
 $a_{11}a_{18}a_{22}a_{29}a_9b_6-a_{19}a_{29}a_{36}a_4a_9b_3+a_{13}a_{29}a_{36}a_4a_9b_4-...$   
 $a_{17}a_{25}a_{36}a_4a_9b_4-a_{18}a_{29}a_{31}a_4a_9b_4+a_{17}a_{19}a_{36}a_4a_9b_5+...$   
 $a_{18}a_{19}a_{29}a_4a_9b_6-a_{22}a_{25}a_{36}a_5a_9b_3+a_{16}a_{25}a_{36}a_5a_9b_4-...$   
 $a_{16}a_{19}a_{36}a_5a_9b_5+a_{13}a_{22}a_{36}a_5a_9b_5-a_{18}a_{22}a_{31}a_5a_9b_5-...$   
 $a_{22}a_{29}a_{31}a_6a_9b_3+a_{18}a_{22}a_{25}a_5a_9b_6+a_{16}a_{29}a_{31}a_6a_9b_4-...$   
 $a_{16}a_{19}a_{29}a_6a_9b_6+a_{17}a_{22}a_{31}a_6a_9b_5+a_{13}a_{22}a_{29}a_6a_9b_6-...$   
 $a_{17}a_{22}a_{25}a_6a_9b_6)/\delta;$

$x_{\dot{6}}=(a_{10}a_{14}a_{19}a_{29}a_{36}b_1-a_{10}a_{17}a_{19}a_{26}a_{36}b_1-a_{10}a_{18}a_{19}a_{26}a_{36}b_1-...$

$a_{29}a_{32}b_1+a_{11}a_{16}a_{19}a_{26}a_{36}b_1+a_{12}a_{16}a_{19}a_{29}a_{32}b_1-a_{10}a_{13}...$   
 $a_{20}a_{29}a_{36}b_1+a_{10}a_{17}a_{20}a_{25}a_{36}b_1+a_{10}a_{18}a_{20}a_{29}a_{31}b_1-a_{11}...$   
 $a_{13}a_{22}a_{26}a_{36}b_1+a_{11}a_{14}a_{22}a_{25}a_{36}b_1-a_{11}a_{16}a_{20}a_{25}a_{36}b_1-...$   
 $a_{11}a_{18}a_{22}a_{25}a_{32}b_1+a_{11}a_{18}a_{22}a_{26}a_{31}b_1-...$   
 $a_{12}a_{13}a_{22}a_{29}a_{32}b_1+a_{12}a_{14}a_{22}a_{29}a_{31}b_1-...$   
 $a_{12}a_{16}a_{20}a_{29}a_{31}b_1+a_{12}a_{17}a_{22}a_{25}a_{32}b_1-...$   
 $a_{12}a_{17}a_{22}a_{26}a_{31}b_1+...$   
 $a_1a_{14}a_{22}a_{29}a_{36}b_2-a_1a_{16}a_{20}a_{29}a_{36}b_2-a_1a_{17}a_{22}a_{26}a_{36}b_2-...$   
 $a_1a_{18}a_{22}a_{29}a_{32}b_2+a_1a_{10}a_{20}a_{29}a_{36}b_3+a_1a_{11}a_{22}a_{26}a_{36}b_3+...$   
 $a_1a_{12}a_{22}a_{29}a_{32}b_3-a_1a_{10}a_{14}a_{29}a_{36}b_4+a_1a_{10}a_{17}a_{26}a_{36}b_4+...$   
 $a_1a_{10}a_{18}a_{29}a_{32}b_4-a_1a_{11}a_{16}a_{26}a_{36}b_4-a_1a_{12}a_{16}a_{29}a_{32}b_4-...$   
 $a_1a_{10}a_{17}a_{20}a_{36}b_5-a_1a_{11}a_{14}a_{22}a_{36}b_5+a_1a_{11}a_{16}a_{20}a_{36}b_5+...$   
 $a_1a_{11}a_{18}a_{22}a_{32}b_5-a_1a_{12}a_{17}a_{22}a_{32}b_5-a_1a_{10}a_{18}a_{20}a_{29}b_6-...$   
 $a_1a_{11}a_{18}a_{22}a_{26}b_6-a_1a_{12}a_{14}a_{22}a_{29}b_6+a_1a_{12}a_{16}a_{20}a_{29}b_6+...$   
 $a_1a_{12}a_{17}a_{22}a_{26}b_6-a_{14}a_{19}a_{29}a_{36}a_4b_2+a_{17}a_{19}a_{26}a_{36}a_4b_2+...$   
 $a_{18}a_{19}a_{29}a_{32}a_4b_2+a_{13}a_{20}a_{29}a_{36}a_4b_2-a_{17}a_{20}a_{25}a_{36}a_4b_2-...$   
 $a_{18}a_{20}a_{29}a_{31}a_4b_2-a_{11}a_{19}a_{26}a_{36}a_4b_3-a_{12}a_{19}a_{29}a_{32}a_4b_3-...$   
 $a_{16}a_{19}a_{26}a_{36}a_5b_2+a_{11}a_{20}a_{25}a_{36}a_4b_3+a_{12}a_{20}a_{29}a_{31}a_4b_3+...$   
 $a_{11}a_{13}a_{26}a_{36}a_4b_4-a_{11}a_{14}a_{25}a_{36}a_4b_4+a_{11}a_{18}a_{25}a_{32}a_4b_4-...$   
 $a_{11}a_{18}a_{26}a_{31}a_4b_4+a_{12}a_{13}a_{29}a_{32}a_4b_4-a_{12}a_{14}a_{29}a_{31}a_4b_4-...$   
 $a_{12}a_{17}a_{25}a_{32}a_4b_4+a_{12}a_{17}a_{26}a_{31}a_4b_4+a_{13}a_{22}a_{26}a_{36}a_5b_2-...$   
 $a_{14}a_{22}a_{25}a_{36}a_5b_2+a_{16}a_{20}a_{25}a_{36}a_5b_2+a_{18}a_{22}a_{25}a_{32}a_5b_2-...$   
 $a_{18}a_{22}a_{26}a_{31}a_5b_2+a_{11}a_{14}a_{19}a_{36}a_4b_5-a_{11}a_{18}a_{19}a_{32}a_4b_5+...$   
 $a_{12}a_{17}a_{19}a_{32}a_4b_5+a_{10}a_{19}a_{26}a_{36}a_5b_3+a_{11}a_{18}a_{19}a_{26}a_4b_6+...$   
 $a_{12}a_{14}a_{19}a_{29}a_4b_6-a_{12}a_{17}a_{19}a_{26}a_4b_6-a_{16}a_{19}a_{29}a_{32}a_6b_2-...$   
 $a_{11}a_{13}a_{20}a_{36}a_4b_5+a_{11}a_{18}a_{20}a_{31}a_4b_5-a_{12}a_{17}a_{20}a_{31}a_4b_5-...$   
 $a_{10}a_{20}a_{25}a_{36}a_5b_3-a_{12}a_{22}a_{25}a_{32}a_5b_3+a_{12}a_{22}a_{26}a_{31}a_5b_3-...$   
 $a_{11}a_{18}a_{20}a_{25}a_4b_6-a_{12}a_{13}a_{20}a_{29}a_4b_6+a_{12}a_{17}a_{20}a_{25}a_4b_6-...$   
 $a_{10}a_{13}a_{26}a_{36}a_5b_4+a_{10}a_{14}a_{25}a_{36}a_5b_4-a_{10}a_{18}a_{25}a_{32}a_5b_4+...$

$$\begin{aligned}
& a_{10}a_{18}a_{26}a_{31}a_5^5b_4 + a_{12}a_{16}a_{25}a_{32}a_5^5b_4 - a_{12}a_{16}a_{26}a_{31}a_5^5b_4 + \dots \\
& a_{13}a_{22}a_{29}a_{32}a_6^6b_2 - a_{14}a_{22}a_{29}a_{31}a_6^6b_2 + a_{16}a_{20}a_{29}a_{31}a_6^6b_2 - \dots \\
& a_{17}a_{22}a_{25}a_{32}a_6^6b_2 + a_{17}a_{22}a_{26}a_{31}a_6^6b_2 - a_{10}a_{14}a_{19}a_{36}a_5^5b_5 + \dots \\
& a_{10}a_{18}a_{19}a_{32}a_5^5b_5 - a_{12}a_{16}a_{19}a_{32}a_5^5b_5 + a_{10}a_{19}a_{29}a_{32}a_6^6b_3 - \dots \\
& a_{10}a_{18}a_{19}a_{26}a_5^5b_6 + a_{12}a_{16}a_{19}a_{26}a_5^5b_6 - a_{16}a_{19}a_{29}a_{36}a_8^8b_1 + \dots \\
& a_{10}a_{13}a_{20}a_{36}a_5^5b_5 - a_{10}a_{18}a_{20}a_{31}a_5^5b_5 + a_{12}a_{13}a_{22}a_{32}a_5^5b_5 - \dots \\
& a_{12}a_{14}a_{22}a_{31}a_5^5b_5 + a_{12}a_{16}a_{20}a_{31}a_5^5b_5 - a_{10}a_{20}a_{29}a_{31}a_6^6b_3 + \dots \\
& a_{11}a_{22}a_{25}a_{32}a_6^6b_3 - a_{11}a_{22}a_{26}a_{31}a_6^6b_3 + a_{10}a_{18}a_{20}a_{25}a_5^5b_6 - \dots \\
& a_{12}a_{13}a_{22}a_{26}a_5^5b_6 + a_{12}a_{14}a_{22}a_{25}a_5^5b_6 - a_{12}a_{16}a_{20}a_{25}a_5^5b_6 - \dots \\
& a_{10}a_{13}a_{29}a_{32}a_6^6b_4 + a_{10}a_{14}a_{29}a_{31}a_6^6b_4 + a_{10}a_{17}a_{25}a_{32}a_6^6b_4 - \dots \\
& a_{10}a_{17}a_{26}a_{31}a_6^6b_4 - a_{11}a_{16}a_{25}a_{32}a_6^6b_4 + a_{11}a_{16}a_{26}a_{31}a_6^6b_4 - \dots \\
& a_{10}a_{17}a_{19}a_{32}a_6^6b_5 + a_{11}a_{16}a_{19}a_{32}a_6^6b_5 + a_{13}a_{22}a_{29}a_{36}a_8^8b_1 - \dots \\
& a_{17}a_{22}a_{25}a_{36}a_8^8b_1 - a_{18}a_{22}a_{29}a_{31}a_8^8b_1 - a_{10}a_{14}a_{19}a_{29}a_6^6b_6 + \dots \\
& a_{10}a_{17}a_{19}a_{26}a_6^6b_6 - a_{11}a_{16}a_{19}a_{26}a_6^6b_6 + a_{10}a_{17}a_{20}a_{31}a_6^6b_5 - \dots \\
& a_{11}a_{13}a_{22}a_{32}a_6^6b_5 + a_{11}a_{14}a_{22}a_{31}a_6^6b_5 - a_{11}a_{16}a_{20}a_{31}a_6^6b_5 + \dots \\
& a_{10}a_{13}a_{20}a_{29}a_6^6b_6 - a_{10}a_{17}a_{20}a_{25}a_6^6b_6 + a_{11}a_{13}a_{22}a_{26}a_6^6b_6 - \dots \\
& a_{11}a_{14}a_{22}a_{25}a_6^6b_6 + a_{11}a_{16}a_{20}a_{25}a_6^6b_6 - a_{11}a_{22}a_{29}a_{36}a_8^8b_3 + \dots \\
& a_{11}a_{16}a_{29}a_{36}a_8^8b_4 + a_{11}a_{17}a_{22}a_{36}a_8^8b_5 + a_{11}a_{18}a_{22}a_{29}a_8^8b_6 + \dots \\
& a_{19}a_{29}a_{36}a_4^4a_8^8b_3 - a_{13}a_{29}a_{36}a_4^4a_8^8b_4 + a_{17}a_{25}a_{36}a_4^4a_8^8b_4 + \dots \\
& a_{18}a_{29}a_{31}a_4^4a_8^8b_4 - a_{17}a_{19}a_{36}a_4^4a_8^8b_5 - a_{18}a_{19}a_{29}a_4^4a_8^8b_6 + \dots \\
& a_{22}a_{25}a_{36}a_5^5a_8^8b_3 - a_{16}a_{25}a_{36}a_5^5a_8^8b_4 + a_{16}a_{19}a_{36}a_5^5a_8^8b_5 - \dots \\
& a_{13}a_{22}a_{36}a_5^5a_8^8b_5 + a_{18}a_{22}a_{31}a_5^5a_8^8b_5 + a_{22}a_{29}a_{31}a_6^6a_8^8b_3 - \dots \\
& a_{18}a_{22}a_{25}a_5^5a_8^8b_6 - a_{16}a_{29}a_{31}a_6^6a_8^8b_4 + a_{16}a_{19}a_{29}a_6^6a_8^8b_6 - \dots \\
& a_{17}a_{22}a_{31}a_6^6a_8^8b_5 - a_{13}a_{22}a_{29}a_6^6a_8^8b_6 + a_{17}a_{22}a_{25}a_6^6a_8^8b_6) / \delta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(8) = & (a_{11}a_{14}a_{19}a_{27}a_{36}b_1 - a_{11}a_{15}a_{19}a_{26}a_{36}b_1 + a_{11}a_{18}a_{19}a_{26}a_{33}b_1 - a_{11}a_{18}a_{19}a_{27}a_{32}b_1 + a_{12}a_{14}a_{19}a_{29}a_{33}b_1 - a_{12}a_{15}a_{19}a_{29}a_{32}b_1 - a_{12}a_{17}a_{19}a_{26}a_{33}b_1 + a_{12}a_{17}a_{19}a_{27}a_{32}b_1 - a_{11}a_{13}a_{20}a_{27}a_{36}b_1 + a_{11}a_{13}a_{21}a_{26}a_{36}b_1 - a_{11}a_{14}a_{21}a_{25}a_{36}b_1 + \dots
\end{aligned}$$



$a_{11} * a_{15} * a_{20} * a_{25} * a_{36} * b_1 - a_{11} * a_{18} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * b_1 + a_{11} * a_{18} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * \dots$   
 $b_1 + a_{11} * a_{18} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * b_1 - a_{11} * a_{18} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * b_1 - a_{12} * a_{13} * a_{20} * a_{29} * \dots$   
 $a_{33} * b_1 + a_{12} * a_{13} * a_{21} * a_{29} * a_{32} * b_1 - a_{12} * a_{14} * a_{21} * a_{29} * a_{31} * b_1 + a_{12} * a_{15} * a_{20} * \dots$   
 $a_{29} * a_{31} * b_1 + a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * b_1 - a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * b_1 - \dots$   
 $a_{12} * a_{17} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * b_1 + a_{12} * a_{17} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * b_1 - \dots$   
 $a_1 * a_{14} * a_{21} * a_{29} * a_{36} * b_2 + a_1 * a_{15} * a_{20} * a_{29} * a_{36} * b_2 - a_1 * a_{17} * a_{20} * a_{27} * a_{36} * b_2 + \dots$   
 $a_1 * a_{17} * a_{21} * a_{26} * a_{36} * b_2 - a_1 * a_{18} * a_{20} * a_{29} * a_{33} * b_2 + a_1 * a_{18} * a_{21} * a_{29} * a_{32} * b_2 + \dots$   
 $a_1 * a_{11} * a_{20} * a_{27} * a_{36} * b_3 - a_1 * a_{11} * a_{21} * a_{26} * a_{36} * b_3 + a_1 * a_{12} * a_{20} * a_{29} * a_{33} * b_3 - \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{21} * a_{29} * a_{32} * b_3 - a_1 * a_{11} * a_{14} * a_{27} * a_{36} * b_4 + a_1 * a_{11} * a_{15} * a_{26} * a_{36} * b_4 - \dots$   
 $a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{26} * a_{33} * b_4 + a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{27} * a_{32} * b_4 - a_1 * a_{12} * a_{14} * a_{29} * a_{33} * b_4 + \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{15} * a_{29} * a_{32} * b_4 + a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{26} * a_{33} * b_4 - a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{27} * a_{32} * b_4 + \dots$   
 $a_{14} * a_{19} * a_{29} * a_3 * a_{36} * b_2 - a_{17} * a_{19} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_2 - a_{18} * a_{19} * a_{29} * a_3 * a_{32} * b_2 + \dots$   
 $a_1 * a_{11} * a_{14} * a_{21} * a_{36} * b_5 - a_1 * a_{11} * a_{15} * a_{20} * a_{36} * b_5 + a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{20} * a_{33} * b_5 - \dots$   
 $a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{21} * a_{32} * b_5 - a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_{33} * b_5 + a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{21} * a_{32} * b_5 - \dots$   
 $a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{20} * a_{27} * b_6 + a_1 * a_{11} * a_{18} * a_{21} * a_{26} * b_6 + a_1 * a_{12} * a_{14} * a_{21} * a_{29} * b_6 - \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{15} * a_{20} * a_{29} * b_6 + a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_{27} * b_6 - a_1 * a_{12} * a_{17} * a_{21} * a_{26} * b_6 - \dots$   
 $a_{13} * a_{20} * a_{29} * a_3 * a_{36} * b_2 + a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_2 + a_{18} * a_{20} * a_{29} * a_3 * a_{31} * b_2 + \dots$   
 $a_{11} * a_{19} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_3 + a_{12} * a_{19} * a_{29} * a_3 * a_{32} * b_3 - a_{11} * a_{20} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_3 - \dots$   
 $a_{12} * a_{20} * a_{29} * a_3 * a_{31} * b_3 - a_{11} * a_{13} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_4 + a_{11} * a_{14} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_4 - \dots$   
 $a_{11} * a_{18} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_4 + a_{11} * a_{18} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_4 - a_{12} * a_{13} * a_{29} * a_3 * a_{32} * b_4 + \dots$   
 $a_{12} * a_{14} * a_{29} * a_3 * a_{31} * b_4 + a_{12} * a_{17} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_4 - a_{12} * a_{17} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_4 - \dots$   
 $a_{11} * a_{14} * a_{19} * a_3 * a_{36} * b_5 + a_{11} * a_{18} * a_{19} * a_3 * a_{32} * b_5 - a_{12} * a_{17} * a_{19} * a_3 * a_{32} * b_5 - \dots$   
 $a_{11} * a_{18} * a_{19} * a_{26} * a_3 * b_6 - a_{12} * a_{14} * a_{19} * a_{29} * a_3 * b_6 + a_{12} * a_{17} * a_{19} * a_{26} * a_3 * b_6 - \dots$   
 $a_{14} * a_{19} * a_{27} * a_{36} * a_5 * b_2 + a_{15} * a_{19} * a_{26} * a_{36} * a_5 * b_2 - a_{18} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_5 * b_2 + \dots$   
 $a_{18} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_5 * b_2 + a_{11} * a_{13} * a_{20} * a_3 * a_{36} * b_5 - a_{11} * a_{18} * a_{20} * a_3 * a_{31} * b_5 + \dots$   
 $a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_3 * a_{31} * b_5 + a_{11} * a_{18} * a_{20} * a_{25} * a_3 * b_6 + a_{12} * a_{13} * a_{20} * a_{29} * a_3 * b_6 - \dots$   
 $a_{12} * a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_3 * b_6 + a_{13} * a_{20} * a_{27} * a_{36} * a_5 * b_2 - a_{13} * a_{21} * a_{26} * a_{36} * a_5 * b_2 + \dots$   
 $a_{14} * a_{21} * a_{25} * a_{36} * a_5 * b_2 - a_{15} * a_{20} * a_{25} * a_{36} * a_5 * b_2 + a_{18} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_5 * b_2 - \dots$   
 $a_{18} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_5 * b_2 - a_{18} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_5 * b_2 + a_{18} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_5 * b_2 + \dots$

$a_{12}a_{19}a_{26}a_{33}a_5b_3 - a_{12}a_{19}a_{27}a_{32}a_5b_3 - a_{14}a_{19}a_{29}a_{33}a_6b_2 + \dots$   
 $a_{15}a_{19}a_{29}a_{32}a_6b_2 + a_{17}a_{19}a_{26}a_{33}a_6b_2 - a_{17}a_{19}a_{27}a_{32}a_6b_2 - \dots$   
 $a_{12}a_{20}a_{25}a_{33}a_5b_3 + a_{12}a_{20}a_{27}a_{31}a_5b_3 + a_{12}a_{21}a_{25}a_{32}a_5b_3 - \dots$   
 $a_{12}a_{21}a_{26}a_{31}a_5b_3 - a_{12}a_{13}a_{26}a_{33}a_5b_4 + a_{12}a_{13}a_{27}a_{32}a_5b_4 + \dots$   
 $a_{12}a_{14}a_{25}a_{33}a_5b_4 - a_{12}a_{14}a_{27}a_{31}a_5b_4 - a_{12}a_{15}a_{25}a_{32}a_5b_4 + \dots$   
 $a_{12}a_{15}a_{26}a_{31}a_5b_4 + a_{13}a_{20}a_{29}a_{33}a_6b_2 - a_{13}a_{21}a_{29}a_{32}a_6b_2 + \dots$   
 $a_{14}a_{21}a_{29}a_{31}a_6b_2 - a_{15}a_{20}a_{29}a_{31}a_6b_2 - a_{17}a_{20}a_{25}a_{33}a_6b_2 + \dots$   
 $a_{17}a_{20}a_{27}a_{31}a_6b_2 + a_{17}a_{21}a_{25}a_{32}a_6b_2 - a_{17}a_{21}a_{26}a_{31}a_6b_2 - \dots$   
 $a_{12}a_{14}a_{19}a_{33}a_5b_5 + a_{12}a_{15}a_{19}a_{32}a_5b_5 - a_{11}a_{19}a_{26}a_{33}a_6b_3 + \dots$   
 $a_{11}a_{19}a_{27}a_{32}a_6b_3 + a_{12}a_{14}a_{19}a_{27}a_5b_6 - a_{12}a_{15}a_{19}a_{26}a_5b_6 + \dots$   
 $a_{15}a_{19}a_{29}a_{36}a_8b_1 - a_{17}a_{19}a_{27}a_{36}a_8b_1 - a_{18}a_{19}a_{29}a_{33}a_8b_1 + \dots$   
 $a_{12}a_{13}a_{20}a_{33}a_5b_5 - a_{12}a_{13}a_{21}a_{32}a_5b_5 + a_{12}a_{14}a_{21}a_{31}a_5b_5 - \dots$   
 $a_{12}a_{15}a_{20}a_{31}a_5b_5 + a_{11}a_{20}a_{25}a_{33}a_6b_3 - a_{11}a_{20}a_{27}a_{31}a_6b_3 - \dots$   
 $a_{11}a_{21}a_{25}a_{32}a_6b_3 + a_{11}a_{21}a_{26}a_{31}a_6b_3 - a_{12}a_{13}a_{20}a_{27}a_5b_6 + \dots$   
 $a_{12}a_{13}a_{21}a_{26}a_5b_6 - a_{12}a_{14}a_{21}a_{25}a_5b_6 + a_{12}a_{15}a_{20}a_{25}a_5b_6 + \dots$   
 $a_{11}a_{13}a_{26}a_{33}a_6b_4 - a_{11}a_{13}a_{27}a_{32}a_6b_4 - a_{11}a_{14}a_{25}a_{33}a_6b_4 + \dots$   
 $a_{11}a_{14}a_{27}a_{31}a_6b_4 + a_{11}a_{15}a_{25}a_{32}a_6b_4 - a_{11}a_{15}a_{26}a_{31}a_6b_4 + \dots$   
 $a_{11}a_{14}a_{19}a_{33}a_6b_5 - a_{11}a_{15}a_{19}a_{32}a_6b_5 - a_{13}a_{21}a_{29}a_{36}a_8b_1 + \dots$   
 $a_{17}a_{21}a_{25}a_{36}a_8b_1 + a_{18}a_{21}a_{29}a_{31}a_8b_1 - a_{11}a_{14}a_{19}a_{27}a_6b_6 + \dots$   
 $a_{11}a_{15}a_{19}a_{26}a_6b_6 - a_{14}a_{19}a_{29}a_{36}a_9b_1 + a_{17}a_{19}a_{26}a_{36}a_9b_1 + \dots$   
 $a_{18}a_{19}a_{29}a_{32}a_9b_1 - a_{11}a_{13}a_{20}a_{33}a_6b_5 + a_{11}a_{13}a_{21}a_{32}a_6b_5 - \dots$   
 $a_{11}a_{14}a_{21}a_{31}a_6b_5 + a_{11}a_{15}a_{20}a_{31}a_6b_5 + a_{11}a_{13}a_{20}a_{27}a_6b_6 - \dots$   
 $a_{11}a_{13}a_{21}a_{26}a_6b_6 + a_{11}a_{14}a_{21}a_{25}a_6b_6 - a_{11}a_{15}a_{20}a_{25}a_6b_6 + \dots$   
 $a_{13}a_{20}a_{29}a_{36}a_9b_1 - a_{17}a_{20}a_{25}a_{36}a_9b_1 - a_{18}a_{20}a_{29}a_{31}a_9b_1 + \dots$   
 $a_1a_{21}a_{29}a_{36}a_8b_3 - a_1a_{15}a_{29}a_{36}a_8b_4 + a_1a_{17}a_{27}a_{36}a_8b_4 + \dots$   
 $a_1a_{18}a_{29}a_{33}a_8b_4 - a_1a_{17}a_{21}a_{36}a_8b_5 - a_1a_{20}a_{29}a_{36}a_9b_3 - \dots$   
 $a_1a_{18}a_{21}a_{29}a_8b_6 + a_1a_{14}a_{29}a_{36}a_9b_4 - a_1a_{17}a_{26}a_{36}a_9b_4 - \dots$   
 $a_1a_{18}a_{29}a_{32}a_9b_4 - a_{19}a_{29}a_3a_{36}a_8b_3 + a_1a_{17}a_{20}a_{36}a_9b_5 + \dots$   
 $a_1a_{18}a_{20}a_{29}a_9b_6 + a_{13}a_{29}a_3a_{36}a_8b_4 - a_{17}a_{25}a_3a_{36}a_8b_4 - \dots$

$$\begin{aligned}
& a_{18}a_{29}a_3a_{31}a_8b_4+a_{17}a_{19}a_3a_{36}a_8b_5+a_{18}a_{19}a_{29}a_3a_8b_6+\dots \\
& a_{19}a_{27}a_{36}a_5a_8b_3-a_{21}a_{25}a_{36}a_5a_8b_3-a_{13}a_{27}a_{36}a_5a_8b_4+\dots \\
& a_{15}a_{25}a_{36}a_5a_8b_4-a_{18}a_{25}a_{33}a_5a_8b_4+a_{18}a_{27}a_{31}a_5a_8b_4-\dots \\
& a_{15}a_{19}a_{36}a_5a_8b_5+a_{18}a_{19}a_{33}a_5a_8b_5-a_{19}a_{26}a_{36}a_5a_9b_3+\dots \\
& a_{19}a_{29}a_{33}a_6a_8b_3-a_{18}a_{19}a_{27}a_5a_8b_6+a_{13}a_{21}a_{36}a_5a_8b_5-\dots \\
& a_{18}a_{21}a_{31}a_5a_8b_5+a_{20}a_{25}a_{36}a_5a_9b_3-a_{21}a_{29}a_{31}a_6a_8b_3+\dots \\
& a_{18}a_{21}a_{25}a_5a_8b_6+a_{13}a_{26}a_{36}a_5a_9b_4-a_{13}a_{29}a_{33}a_6a_8b_4-\dots \\
& a_{14}a_{25}a_{36}a_5a_9b_4+a_{15}a_{29}a_{31}a_6a_8b_4+a_{17}a_{25}a_{33}a_6a_8b_4-\dots \\
& a_{17}a_{27}a_{31}a_6a_8b_4+a_{18}a_{25}a_{32}a_5a_9b_4-a_{18}a_{26}a_{31}a_5a_9b_4+\dots \\
& a_{14}a_{19}a_{36}a_5a_9b_5-a_{17}a_{19}a_{33}a_6a_8b_5-a_{18}a_{19}a_{32}a_5a_9b_5-\dots \\
& a_{19}a_{29}a_{32}a_6a_9b_3-a_{15}a_{19}a_{29}a_6a_8b_6+a_{17}a_{19}a_{27}a_6a_8b_6+\dots \\
& a_{18}a_{19}a_{26}a_5a_9b_6-a_{13}a_{20}a_{36}a_5a_9b_5+a_{17}a_{21}a_{31}a_6a_8b_5+\dots \\
& a_{18}a_{20}a_{31}a_5a_9b_5+a_{20}a_{29}a_{31}a_6a_9b_3+a_{13}a_{21}a_{29}a_6a_8b_6-\dots \\
& a_{17}a_{21}a_{25}a_6a_8b_6-a_{18}a_{20}a_{25}a_5a_9b_6+a_{13}a_{29}a_{32}a_6a_9b_4-\dots \\
& a_{14}a_{29}a_{31}a_6a_9b_4-a_{17}a_{25}a_{32}a_6a_9b_4+a_{17}a_{26}a_{31}a_6a_9b_4+\dots \\
& a_{17}a_{19}a_{32}a_6a_9b_5+a_{14}a_{19}a_{29}a_6a_9b_6-a_{17}a_{19}a_{26}a_6a_9b_6-\dots \\
& a_{17}a_{20}a_{31}a_6a_9b_5-a_{13}a_{20}a_{29}a_6a_9b_6+a_{17}a_{20}a_{25}a_6a_9b_6)/\delta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(10) = & -(a_{10}a_{14}a_{19}a_{27}a_{36}b_1-a_{10}a_{15}a_{19}a_{26}a_{36}b_1+a_{10}a_{18}a_{19}a_{26}a_{33}b_1- \\
& a_{10}a_{18}a_{19}a_{27}a_{32}b_1-a_{12}a_{16}a_{19}a_{26}a_{33}b_1+a_{12}a_{16}a_{19}a_{27}a_{32}b_1- \\
& a_{10}a_{13}a_{20}a_{27}a_{36}b_1+a_{10}a_{13}a_{21}a_{26}a_{36}b_1-\dots \\
& a_{10}a_{14}a_{21}a_{25}a_{36}b_1+a_{10}a_{15}a_{20}a_{25}a_{36}b_1-a_{10}a_{18}a_{20}a_{25}a_{33}b_1+ \\
& a_{10}a_{18}a_{20}a_{27}a_{31}b_1+a_{10}a_{18}a_{21}a_{25}a_{32}b_1-a_{10}a_{18}a_{21}a_{26}a_{31}b_1+ \\
& a_{12}a_{13}a_{22}a_{26}a_{33}b_1-a_{12}a_{13}a_{22}a_{27}a_{32}b_1-a_{12}a_{14}a_{22}a_{25}a_{33}b_1+ \\
& a_{12}a_{14}a_{22}a_{27}a_{31}b_1+a_{12}a_{15}a_{22}a_{25}a_{32}b_1-a_{12}a_{15}a_{22}a_{26}a_{31}b_1+ \\
& a_{12}a_{16}a_{20}a_{25}a_{33}b_1-a_{12}a_{16}a_{20}a_{27}a_{31}b_1-\dots \\
& a_{12}a_{16}a_{21}a_{25}a_{32}b_1+a_{12}a_{16}a_{21}a_{26}a_{31}b_1+\dots \\
& a_1a_{14}a_{22}a_{27}a_{36}b_2-a_1a_{15}a_{22}a_{26}a_{36}b_2-a_1a_{16}a_{20}a_{27}a_{36}b_2+\dots \\
& a_1a_{16}a_{21}a_{26}a_{36}b_2+a_1a_{18}a_{22}a_{26}a_{33}b_2-a_1a_{18}a_{22}a_{27}a_{32}b_2+\dots
\end{aligned}$$

$a_1 * a_{10} * a_{20} * a_{27} * a_{36} * b_3 - a_1 * a_{10} * a_{21} * a_{26} * a_{36} * b_3 - a_1 * a_{12} * a_{22} * a_{26} * a_{33} * b_3 + \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{22} * a_{27} * a_{32} * b_3 - a_1 * a_{10} * a_{14} * a_{27} * a_{36} * b_4 + a_1 * a_{10} * a_{15} * a_{26} * a_{36} * b_4 - \dots$   
 $a_1 * a_{10} * a_{18} * a_{26} * a_{33} * b_4 + a_1 * a_{10} * a_{18} * a_{27} * a_{32} * b_4 + a_1 * a_{12} * a_{16} * a_{26} * a_{33} * b_4 - \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{16} * a_{27} * a_{32} * b_4 - a_{16} * a_{19} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_2 + a_1 * a_{10} * a_{14} * a_{21} * a_{36} * b_5 - \dots$   
 $a_1 * a_{10} * a_{15} * a_{20} * a_{36} * b_5 + a_1 * a_{10} * a_{18} * a_{20} * a_{33} * b_5 - a_1 * a_{10} * a_{18} * a_{21} * a_{32} * b_5 + \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{14} * a_{22} * a_{33} * b_5 - a_1 * a_{12} * a_{15} * a_{22} * a_{32} * b_5 - a_1 * a_{12} * a_{16} * a_{20} * a_{33} * b_5 + \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{16} * a_{21} * a_{32} * b_5 - a_1 * a_{10} * a_{18} * a_{20} * a_{27} * b_6 + a_1 * a_{10} * a_{18} * a_{21} * a_{26} * b_6 - \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{14} * a_{22} * a_{27} * b_6 + a_1 * a_{12} * a_{15} * a_{22} * a_{26} * b_6 + a_1 * a_{12} * a_{16} * a_{20} * a_{27} * b_6 - \dots$   
 $a_1 * a_{12} * a_{16} * a_{21} * a_{26} * b_6 + a_{13} * a_{22} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_2 - a_{14} * a_{22} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_2 + \dots$   
 $a_{16} * a_{20} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_2 + a_{18} * a_{22} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_2 - a_{18} * a_{22} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_2 + \dots$   
 $a_{10} * a_{19} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_3 - a_{14} * a_{19} * a_{27} * a_{36} * a_4 * b_2 + a_{15} * a_{19} * a_{26} * a_{36} * a_4 * b_2 - \dots$   
 $a_{18} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_4 * b_2 + a_{18} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_4 * b_2 - a_{10} * a_{20} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_3 - \dots$   
 $a_{12} * a_{22} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_3 + a_{12} * a_{22} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_3 - a_{10} * a_{13} * a_{26} * a_3 * a_{36} * b_4 + \dots$   
 $a_{10} * a_{14} * a_{25} * a_3 * a_{36} * b_4 - a_{10} * a_{18} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_4 + a_{10} * a_{18} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_4 + \dots$   
 $a_{12} * a_{16} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_4 - a_{12} * a_{16} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_4 + a_{13} * a_{20} * a_{27} * a_{36} * a_4 * b_2 - \dots$   
 $a_{13} * a_{21} * a_{26} * a_{36} * a_4 * b_2 + a_{14} * a_{21} * a_{25} * a_{36} * a_4 * b_2 - a_{15} * a_{20} * a_{25} * a_{36} * a_4 * b_2 + \dots$   
 $a_{18} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_4 * b_2 - a_{18} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_4 * b_2 - a_{18} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_4 * b_2 + \dots$   
 $a_{18} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_4 * b_2 - a_{10} * a_{14} * a_{19} * a_3 * a_{36} * b_5 + a_{10} * a_{18} * a_{19} * a_3 * a_{32} * b_5 - \dots$   
 $a_{12} * a_{16} * a_{19} * a_3 * a_{32} * b_5 + a_{12} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_4 * b_3 - a_{12} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_4 * b_3 - \dots$   
 $a_{10} * a_{18} * a_{19} * a_{26} * a_3 * b_6 + a_{12} * a_{16} * a_{19} * a_{26} * a_3 * b_6 + a_{10} * a_{13} * a_{20} * a_3 * a_{36} * b_5 - \dots$   
 $a_{10} * a_{18} * a_{20} * a_3 * a_{31} * b_5 + a_{12} * a_{13} * a_{22} * a_3 * a_{32} * b_5 - a_{12} * a_{14} * a_{22} * a_3 * a_{31} * b_5 + \dots$   
 $a_{12} * a_{16} * a_{20} * a_3 * a_{31} * b_5 - a_{12} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_4 * b_3 + a_{12} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_4 * b_3 + \dots$   
 $a_{12} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_4 * b_3 - a_{12} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_4 * b_3 + a_{10} * a_{18} * a_{20} * a_{25} * a_3 * b_6 - \dots$   
 $a_{12} * a_{13} * a_{22} * a_{26} * a_3 * b_6 + a_{12} * a_{14} * a_{22} * a_{25} * a_3 * b_6 - a_{12} * a_{16} * a_{20} * a_{25} * a_3 * b_6 - \dots$   
 $a_{12} * a_{13} * a_{26} * a_{33} * a_4 * b_4 + a_{12} * a_{13} * a_{27} * a_{32} * a_4 * b_4 + a_{12} * a_{14} * a_{25} * a_{33} * a_4 * b_4 - \dots$   
 $a_{12} * a_{14} * a_{27} * a_{31} * a_4 * b_4 - a_{12} * a_{15} * a_{25} * a_{32} * a_4 * b_4 + a_{12} * a_{15} * a_{26} * a_{31} * a_4 * b_4 - \dots$   
 $a_{12} * a_{14} * a_{19} * a_{33} * a_4 * b_5 + a_{12} * a_{15} * a_{19} * a_{32} * a_4 * b_5 + a_{12} * a_{14} * a_{19} * a_{27} * a_4 * b_6 - \dots$   
 $a_{12} * a_{15} * a_{19} * a_{26} * a_4 * b_6 + a_{16} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_6 * b_2 - a_{16} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_6 * b_2 + \dots$   
 $a_{12} * a_{13} * a_{20} * a_{33} * a_4 * b_5 - a_{12} * a_{13} * a_{21} * a_{32} * a_4 * b_5 + a_{12} * a_{14} * a_{21} * a_{31} * a_4 * b_5 - \dots$

$a_{12}a_{15}a_{20}a_{31}a_4b_5 - a_{12}a_{13}a_{20}a_{27}a_4b_6 + a_{12}a_{13}a_{21}a_{26}a_4b_6 - \dots$   
 $a_{12}a_{14}a_{21}a_{25}a_4b_6 + a_{12}a_{15}a_{20}a_{25}a_4b_6 - a_{13}a_{22}a_{26}a_{33}a_6b_2 + \dots$   
 $a_{13}a_{22}a_{27}a_{32}a_6b_2 + a_{14}a_{22}a_{25}a_{33}a_6b_2 - a_{14}a_{22}a_{27}a_{31}a_6b_2 - \dots$   
 $a_{15}a_{22}a_{25}a_{32}a_6b_2 + a_{15}a_{22}a_{26}a_{31}a_6b_2 - a_{16}a_{20}a_{25}a_{33}a_6b_2 + \dots$   
 $a_{16}a_{20}a_{27}a_{31}a_6b_2 + a_{16}a_{21}a_{25}a_{32}a_6b_2 - a_{16}a_{21}a_{26}a_{31}a_6b_2 - \dots$   
 $a_{10}a_{19}a_{26}a_{33}a_6b_3 + a_{10}a_{19}a_{27}a_{32}a_6b_3 - a_{16}a_{19}a_{27}a_{36}a_8b_1 + \dots$   
 $a_{10}a_{20}a_{25}a_{33}a_6b_3 - a_{10}a_{20}a_{27}a_{31}a_6b_3 - a_{10}a_{21}a_{25}a_{32}a_6b_3 + \dots$   
 $a_{10}a_{21}a_{26}a_{31}a_6b_3 + a_{10}a_{13}a_{26}a_{33}a_6b_4 - a_{10}a_{13}a_{27}a_{32}a_6b_4 - \dots$   
 $a_{10}a_{14}a_{25}a_{33}a_6b_4 + a_{10}a_{14}a_{27}a_{31}a_6b_4 + a_{10}a_{15}a_{25}a_{32}a_6b_4 - \dots$   
 $a_{10}a_{15}a_{26}a_{31}a_6b_4 + a_{10}a_{14}a_{19}a_{33}a_6b_5 - a_{10}a_{15}a_{19}a_{32}a_6b_5 + \dots$   
 $a_{13}a_{22}a_{27}a_{36}a_8b_1 - a_{15}a_{22}a_{25}a_{36}a_8b_1 + a_{16}a_{21}a_{25}a_{36}a_8b_1 + \dots$   
 $a_{18}a_{22}a_{25}a_{33}a_8b_1 - a_{18}a_{22}a_{27}a_{31}a_8b_1 - a_{10}a_{14}a_{19}a_{27}a_6b_6 + \dots$   
 $a_{10}a_{15}a_{19}a_{26}a_6b_6 + a_{16}a_{19}a_{26}a_{36}a_9b_1 - a_{10}a_{13}a_{20}a_{33}a_6b_5 + \dots$   
 $a_{10}a_{13}a_{21}a_{32}a_6b_5 - a_{10}a_{14}a_{21}a_{31}a_6b_5 + a_{10}a_{15}a_{20}a_{31}a_6b_5 + \dots$   
 $a_{10}a_{13}a_{20}a_{27}a_6b_6 - a_{10}a_{13}a_{21}a_{26}a_6b_6 + a_{10}a_{14}a_{21}a_{25}a_6b_6 - \dots$   
 $a_{10}a_{15}a_{20}a_{25}a_6b_6 - a_{13}a_{22}a_{26}a_{36}a_9b_1 + a_{14}a_{22}a_{25}a_{36}a_9b_1 - \dots$   
 $a_{16}a_{20}a_{25}a_{36}a_9b_1 - a_{18}a_{22}a_{25}a_{32}a_9b_1 + a_{18}a_{22}a_{26}a_{31}a_9b_1 - \dots$   
 $a_1a_{22}a_{27}a_{36}a_8b_3 + a_1a_{16}a_{27}a_{36}a_8b_4 + a_1a_{15}a_{22}a_{36}a_8b_5 - \dots$   
 $a_1a_{16}a_{21}a_{36}a_8b_5 - a_1a_{18}a_{22}a_{33}a_8b_5 + a_1a_{22}a_{26}a_{36}a_9b_3 + \dots$   
 $a_1a_{18}a_{22}a_{27}a_8b_6 - a_1a_{16}a_{26}a_{36}a_9b_4 - a_1a_{14}a_{22}a_{36}a_9b_5 + \dots$   
 $a_1a_{16}a_{20}a_{36}a_9b_5 + a_1a_{18}a_{22}a_{32}a_9b_5 + a_{22}a_{25}a_3a_{36}a_8b_3 - \dots$   
 $a_1a_{18}a_{22}a_{26}a_9b_6 - a_{16}a_{25}a_3a_{36}a_8b_4 + a_{16}a_{19}a_3a_{36}a_8b_5 + \dots$   
 $a_{19}a_{27}a_{36}a_4a_8b_3 - a_{13}a_{22}a_3a_{36}a_8b_5 + a_{18}a_{22}a_3a_{31}a_8b_5 - \dots$   
 $a_{21}a_{25}a_{36}a_4a_8b_3 - a_{18}a_{22}a_{25}a_3a_8b_6 - a_{13}a_{27}a_{36}a_4a_8b_4 + \dots$   
 $a_{15}a_{25}a_{36}a_4a_8b_4 - a_{18}a_{25}a_{33}a_4a_8b_4 + a_{18}a_{27}a_{31}a_4a_8b_4 - \dots$   
 $a_{15}a_{19}a_{36}a_4a_8b_5 + a_{18}a_{19}a_{33}a_4a_8b_5 - a_{19}a_{26}a_{36}a_4a_9b_3 - \dots$   
 $a_{18}a_{19}a_{27}a_4a_8b_6 + a_{13}a_{21}a_{36}a_4a_8b_5 - a_{18}a_{21}a_{31}a_4a_8b_5 + \dots$   
 $a_{20}a_{25}a_{36}a_4a_9b_3 + a_{18}a_{21}a_{25}a_4a_8b_6 + a_{13}a_{26}a_{36}a_4a_9b_4 - \dots$   
 $a_{14}a_{25}a_{36}a_4a_9b_4 + a_{18}a_{25}a_{32}a_4a_9b_4 - a_{18}a_{26}a_{31}a_4a_9b_4 + \dots$

$$\begin{aligned}
& a_{14}a_{19}a_{36}a_4a_9b_5 - a_{18}a_{19}a_{32}a_4a_9b_5 + a_{18}a_{19}a_{26}a_4a_9b_6 - \dots \\
& a_{13}a_{20}a_{36}a_4a_9b_5 + a_{18}a_{20}a_{31}a_4a_9b_5 - a_{22}a_{25}a_{33}a_6a_8b_3 + \dots \\
& a_{22}a_{27}a_{31}a_6a_8b_3 - a_{18}a_{20}a_{25}a_4a_9b_6 + a_{16}a_{25}a_{33}a_6a_8b_4 - \dots \\
& a_{16}a_{27}a_{31}a_6a_8b_4 - a_{16}a_{19}a_{33}a_6a_8b_5 + a_{16}a_{19}a_{27}a_6a_8b_6 + \dots \\
& a_{13}a_{22}a_{33}a_6a_8b_5 - a_{15}a_{22}a_{31}a_6a_8b_5 + a_{16}a_{21}a_{31}a_6a_8b_5 + \dots \\
& a_{22}a_{25}a_{32}a_6a_9b_3 - a_{22}a_{26}a_{31}a_6a_9b_3 - a_{13}a_{22}a_{27}a_6a_8b_6 + \dots \\
& a_{15}a_{22}a_{25}a_6a_8b_6 - a_{16}a_{21}a_{25}a_6a_8b_6 - a_{16}a_{25}a_{32}a_6a_9b_4 + \dots \\
& a_{16}a_{26}a_{31}a_6a_9b_4 + a_{16}a_{19}a_{32}a_6a_9b_5 - a_{16}a_{19}a_{26}a_6a_9b_6 - \dots \\
& a_{13}a_{22}a_{32}a_6a_9b_5 + a_{14}a_{22}a_{31}a_6a_9b_5 - a_{16}a_{20}a_{31}a_6a_9b_5 + \dots \\
& a_{13}a_{22}a_{26}a_6a_9b_6 - a_{14}a_{22}a_{25}a_6a_9b_6 + a_{16}a_{20}a_{25}a_6a_9b_6) / \delta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(12) = & -(a_{10}a_{14}a_{19}a_{29}a_{33}b_1 - a_{10}a_{15}a_{19}a_{29}a_{32}b_1 - a_{10}a_{17}a_{19}a_{29}a_{33}b_1 + a_{10}a_{17}a_{19}a_{27}a_{32}b_1 + a_{11}a_{16}a_{19}a_{26}a_{33}b_1 - a_{11}a_{16}a_{19}a_{27}a_{32}b_1 - a_{10}a_{13}a_{20}a_{29}a_{33}b_1 + a_{10}a_{13}a_{21}a_{29}a_{32}b_1 - a_{10}a_{14}a_{21}a_{29}a_{31}b_1 + a_{10}a_{15}a_{20}a_{29}a_{31}b_1 + a_{10}a_{17}a_{20}a_{25}a_{33}b_1 - a_{10}a_{17}a_{20}a_{27}a_{31}b_1 - a_{10}a_{17}a_{21}a_{25}a_{32}b_1 + a_{10}a_{17}a_{21}a_{26}a_{31}b_1 - a_{11}a_{13}a_{22}a_{26}a_{33}b_1 + a_{11}a_{13}a_{22}a_{27}a_{32}b_1 + a_{11}a_{14}a_{22}a_{25}a_{33}b_1 - a_{11}a_{14}a_{22}a_{27}a_{31}b_1 - a_{11}a_{15}a_{22}a_{25}a_{32}b_1 + a_{11}a_{15}a_{22}a_{26}a_{31}b_1 - a_{11}a_{16}a_{20}a_{25}a_{33}b_1 + a_{11}a_{16}a_{20}a_{27}a_{31}b_1 + a_{11}a_{16}a_{21}a_{25}a_{32}b_1 - a_{11}a_{16}a_{21}a_{26}a_{31}b_1 + \dots \\
& a_1a_{14}a_{22}a_{29}a_{33}b_2 - a_1a_{15}a_{22}a_{29}a_{32}b_2 - a_1a_{16}a_{20}a_{29}a_{33}b_2 + a_1a_{16}a_{21}a_{29}a_{32}b_2 - a_1a_{17}a_{22}a_{26}a_{33}b_2 + a_1a_{17}a_{22}a_{27}a_{32}b_2 + \dots \\
& a_1a_{10}a_{20}a_{29}a_{33}b_3 - a_1a_{10}a_{21}a_{29}a_{32}b_3 + a_1a_{11}a_{22}a_{26}a_{33}b_3 - a_1a_{11}a_{22}a_{27}a_{32}b_3 - a_1a_{10}a_{14}a_{29}a_{33}b_4 + a_1a_{10}a_{15}a_{29}a_{32}b_4 + \dots \\
& a_1a_{10}a_{17}a_{26}a_{33}b_4 - a_1a_{10}a_{17}a_{27}a_{32}b_4 - a_1a_{11}a_{16}a_{26}a_{33}b_4 + a_1a_{11}a_{16}a_{27}a_{32}b_4 - a_{16}a_{19}a_{29}a_3a_{32}b_2 - a_1a_{10}a_{17}a_{20}a_{33}b_5 + \dots \\
& a_1a_{10}a_{17}a_{21}a_{32}b_5 - a_1a_{11}a_{14}a_{22}a_{33}b_5 + a_1a_{11}a_{15}a_{22}a_{32}b_5 + \dots \\
& a_1a_{11}a_{16}a_{20}a_{33}b_5 - a_1a_{11}a_{16}a_{21}a_{32}b_5 + a_1a_{10}a_{14}a_{21}a_{29}b_6 - a_1a_{10}a_{15}a_{20}a_{29}b_6 + a_1a_{10}a_{17}a_{20}a_{27}b_6 - a_1a_{10}a_{17}a_{21}a_{26}b_6 + \dots
\end{aligned}$$

$a_1 * a_{11} * a_{14} * a_{22} * a_{27} * b_6 - a_1 * a_{11} * a_{15} * a_{22} * a_{26} * b_6 - a_1 * a_{11} * a_{16} * a_{20} * a_{27} * b_6 + \dots$   
 $a_1 * a_{11} * a_{16} * a_{21} * a_{26} * b_6 + a_{13} * a_{22} * a_{29} * a_3 * a_{32} * b_2 - a_{14} * a_{22} * a_{29} * a_3 * a_{31} * b_2 + \dots$   
 $a_{16} * a_{20} * a_{29} * a_3 * a_{31} * b_2 - a_{17} * a_{22} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_2 + a_{17} * a_{22} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_2 + \dots$   
 $a_{10} * a_{19} * a_{29} * a_3 * a_{32} * b_3 - a_{14} * a_{19} * a_{29} * a_{33} * a_4 * b_2 + a_{15} * a_{19} * a_{29} * a_{32} * a_4 * b_2 + \dots$   
 $a_{17} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_4 * b_2 - a_{17} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_4 * b_2 - a_{10} * a_{20} * a_{29} * a_3 * a_{31} * b_3 + \dots$   
 $a_{11} * a_{22} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_3 - a_{11} * a_{22} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_3 - a_{10} * a_{13} * a_{29} * a_3 * a_{32} * b_4 + \dots$   
 $a_{10} * a_{14} * a_{29} * a_3 * a_{31} * b_4 + a_{10} * a_{17} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_4 - a_{10} * a_{17} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_4 - \dots$   
 $a_{11} * a_{16} * a_{25} * a_3 * a_{32} * b_4 + a_{11} * a_{16} * a_{26} * a_3 * a_{31} * b_4 + a_{13} * a_{20} * a_{29} * a_{33} * a_4 * b_2 - \dots$   
 $a_{13} * a_{21} * a_{29} * a_{32} * a_4 * b_2 + a_{14} * a_{21} * a_{29} * a_{31} * a_4 * b_2 - a_{15} * a_{20} * a_{29} * a_{31} * a_4 * b_2 - \dots$   
 $a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_4 * b_2 + a_{17} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_4 * b_2 + a_{17} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_4 * b_2 - \dots$   
 $a_{17} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_4 * b_2 - a_{10} * a_{17} * a_{19} * a_3 * a_{32} * b_5 + a_{11} * a_{16} * a_{19} * a_3 * a_{32} * b_5 - \dots$   
 $a_{11} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_4 * b_3 + a_{11} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_4 * b_3 - a_{10} * a_{14} * a_{19} * a_{29} * a_3 * b_6 + \dots$   
 $a_{10} * a_{17} * a_{19} * a_{26} * a_3 * b_6 - a_{11} * a_{16} * a_{19} * a_{26} * a_3 * b_6 - a_{16} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_5 * b_2 + \dots$   
 $a_{16} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_5 * b_2 + a_{10} * a_{17} * a_{20} * a_3 * a_{31} * b_5 - a_{11} * a_{13} * a_{22} * a_3 * a_{32} * b_5 + \dots$   
 $a_{11} * a_{14} * a_{22} * a_3 * a_{31} * b_5 - a_{11} * a_{16} * a_{20} * a_3 * a_{31} * b_5 + a_{11} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_4 * b_3 - \dots$   
 $a_{11} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_4 * b_3 - a_{11} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_4 * b_3 + a_{11} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_4 * b_3 + \dots$   
 $a_{10} * a_{13} * a_{20} * a_{29} * a_3 * b_6 - a_{10} * a_{17} * a_{20} * a_{25} * a_3 * b_6 + a_{11} * a_{13} * a_{22} * a_{26} * a_3 * b_6 - \dots$   
 $a_{11} * a_{14} * a_{22} * a_{25} * a_3 * b_6 + a_{11} * a_{16} * a_{20} * a_{25} * a_3 * b_6 + a_{11} * a_{13} * a_{26} * a_{33} * a_4 * b_4 - \dots$   
 $a_{11} * a_{13} * a_{27} * a_{32} * a_4 * b_4 - a_{11} * a_{14} * a_{25} * a_{33} * a_4 * b_4 + a_{11} * a_{14} * a_{27} * a_{31} * a_4 * b_4 + \dots$   
 $a_{11} * a_{15} * a_{25} * a_{32} * a_4 * b_4 - a_{11} * a_{15} * a_{26} * a_{31} * a_4 * b_4 + a_{13} * a_{22} * a_{26} * a_{33} * a_5 * b_2 - \dots$   
 $a_{13} * a_{22} * a_{27} * a_{32} * a_5 * b_2 - a_{14} * a_{22} * a_{25} * a_{33} * a_5 * b_2 + a_{14} * a_{22} * a_{27} * a_{31} * a_5 * b_2 + \dots$   
 $a_{15} * a_{22} * a_{25} * a_{32} * a_5 * b_2 - a_{15} * a_{22} * a_{26} * a_{31} * a_5 * b_2 + a_{16} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_5 * b_2 - \dots$   
 $a_{16} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_5 * b_2 - a_{16} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_5 * b_2 + a_{16} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_5 * b_2 + \dots$   
 $a_{11} * a_{14} * a_{19} * a_{33} * a_4 * b_5 - a_{11} * a_{15} * a_{19} * a_{32} * a_4 * b_5 + a_{10} * a_{19} * a_{26} * a_{33} * a_5 * b_3 - \dots$   
 $a_{10} * a_{19} * a_{27} * a_{32} * a_5 * b_3 - a_{11} * a_{14} * a_{19} * a_{27} * a_4 * b_6 + a_{11} * a_{15} * a_{19} * a_{26} * a_4 * b_6 - \dots$   
 $a_{11} * a_{13} * a_{20} * a_{33} * a_4 * b_5 + a_{11} * a_{13} * a_{21} * a_{32} * a_4 * b_5 - a_{11} * a_{14} * a_{21} * a_{31} * a_4 * b_5 + \dots$   
 $a_{11} * a_{15} * a_{20} * a_{31} * a_4 * b_5 - a_{10} * a_{20} * a_{25} * a_{33} * a_5 * b_3 + a_{10} * a_{20} * a_{27} * a_{31} * a_5 * b_3 + \dots$   
 $a_{10} * a_{21} * a_{25} * a_{32} * a_5 * b_3 - a_{10} * a_{21} * a_{26} * a_{31} * a_5 * b_3 + a_{11} * a_{13} * a_{20} * a_{27} * a_4 * b_6 - \dots$   
 $a_{11} * a_{13} * a_{21} * a_{26} * a_4 * b_6 + a_{11} * a_{14} * a_{21} * a_{25} * a_4 * b_6 - a_{11} * a_{15} * a_{20} * a_{25} * a_4 * b_6 - \dots$

$a_{10}a_{13}a_{26}a_{33}a_5b_4+a_{10}a_{13}a_{27}a_{32}a_5b_4+a_{10}a_{14}a_{25}a_{33}a_5b_4-...$   
 $a_{10}a_{14}a_{27}a_{31}a_5b_4-a_{10}a_{15}a_{25}a_{32}a_5b_4+a_{10}a_{15}a_{26}a_{31}a_5b_4-...$   
 $a_{10}a_{14}a_{19}a_{33}a_5b_5+a_{10}a_{15}a_{19}a_{32}a_5b_5+a_{10}a_{14}a_{19}a_{27}a_5b_6-...$   
 $a_{10}a_{15}a_{19}a_{26}a_5b_6-a_{16}a_{19}a_{29}a_{33}a_8b_1+a_{10}a_{13}a_{20}a_{33}a_5b_5-...$   
 $a_{10}a_{13}a_{21}a_{32}a_5b_5+a_{10}a_{14}a_{21}a_{31}a_5b_5-a_{10}a_{15}a_{20}a_{31}a_5b_5-...$   
 $a_{10}a_{13}a_{20}a_{27}a_5b_6+a_{10}a_{13}a_{21}a_{26}a_5b_6-a_{10}a_{14}a_{21}a_{25}a_5b_6+...$   
 $a_{10}a_{15}a_{20}a_{25}a_5b_6+a_{13}a_{22}a_{29}a_{33}a_8b_1-a_{15}a_{22}a_{29}a_{31}a_8b_1+...$   
 $a_{16}a_{21}a_{29}a_{31}a_8b_1-a_{17}a_{22}a_{25}a_{33}a_8b_1+a_{17}a_{22}a_{27}a_{31}a_8b_1+...$   
 $a_{16}a_{19}a_{29}a_{32}a_9b_1-a_{13}a_{22}a_{29}a_{32}a_9b_1+a_{14}a_{22}a_{29}a_{31}a_9b_1-...$   
 $a_{16}a_{20}a_{29}a_{31}a_9b_1+a_{17}a_{22}a_{25}a_{32}a_9b_1-a_{17}a_{22}a_{26}a_{31}a_9b_1-...$   
 $a_1a_{22}a_{29}a_{33}a_8b_3+a_1a_{16}a_{29}a_{33}a_8b_4+a_1a_{17}a_{22}a_{33}a_8b_5+...$   
 $a_1a_{22}a_{29}a_{32}a_9b_3+a_1a_{15}a_{22}a_{29}a_8b_6-a_1a_{16}a_{21}a_{29}a_8b_6-...$   
 $a_1a_{17}a_{22}a_{27}a_8b_6-a_1a_{16}a_{29}a_{32}a_9b_4-a_1a_{17}a_{22}a_{32}a_9b_5+...$   
 $a_{22}a_{29}a_3a_{31}a_8b_3-a_1a_{14}a_{22}a_{29}a_9b_6+a_1a_{16}a_{20}a_{29}a_9b_6+...$   
 $a_1a_{17}a_{22}a_{26}a_9b_6-a_{16}a_{29}a_3a_{31}a_8b_4+a_{19}a_{29}a_{33}a_4a_8b_3+...$   
 $a_{16}a_{19}a_{29}a_3a_8b_6-a_{17}a_{22}a_3a_{31}a_8b_5-a_{21}a_{29}a_{31}a_4a_8b_3-...$   
 $a_{13}a_{22}a_{29}a_3a_8b_6+a_{17}a_{22}a_{25}a_3a_8b_6-a_{13}a_{29}a_{33}a_4a_8b_4+...$   
 $a_{15}a_{29}a_{31}a_4a_8b_4+a_{17}a_{25}a_{33}a_4a_8b_4-a_{17}a_{27}a_{31}a_4a_8b_4-...$   
 $a_{17}a_{19}a_{33}a_4a_8b_5-a_{19}a_{29}a_{32}a_4a_9b_3-a_{15}a_{19}a_{29}a_4a_8b_6+...$   
 $a_{17}a_{19}a_{27}a_4a_8b_6+a_{17}a_{21}a_{31}a_4a_8b_5+a_{20}a_{29}a_{31}a_4a_9b_3+...$   
 $a_{22}a_{25}a_{33}a_5a_8b_3-a_{22}a_{27}a_{31}a_5a_8b_3+a_{13}a_{21}a_{29}a_4a_8b_6-...$   
 $a_{17}a_{21}a_{25}a_4a_8b_6+a_{13}a_{29}a_{32}a_4a_9b_4-a_{14}a_{29}a_{31}a_4a_9b_4-...$   
 $a_{16}a_{25}a_{33}a_5a_8b_4+a_{16}a_{27}a_{31}a_5a_8b_4-a_{17}a_{25}a_{32}a_4a_9b_4+...$   
 $a_{17}a_{26}a_{31}a_4a_9b_4+a_{16}a_{19}a_{33}a_5a_8b_5+a_{17}a_{19}a_{32}a_4a_9b_5+...$   
 $a_{14}a_{19}a_{29}a_4a_9b_6-a_{16}a_{19}a_{27}a_5a_8b_6-a_{17}a_{19}a_{26}a_4a_9b_6-...$   
 $a_{13}a_{22}a_{33}a_5a_8b_5+a_{15}a_{22}a_{31}a_5a_8b_5-a_{16}a_{21}a_{31}a_5a_8b_5-...$   
 $a_{17}a_{20}a_{31}a_4a_9b_5-a_{22}a_{25}a_{32}a_5a_9b_3+a_{22}a_{26}a_{31}a_5a_9b_3-...$   
 $a_{13}a_{20}a_{29}a_4a_9b_6+a_{13}a_{22}a_{27}a_5a_8b_6-a_{15}a_{22}a_{25}a_5a_8b_6+...$   
 $a_{16}a_{21}a_{25}a_5a_8b_6+a_{17}a_{20}a_{25}a_4a_9b_6+a_{16}a_{25}a_{32}a_5a_9b_4-...$



$$\begin{aligned} & a_{16}a_{26}a_{31}a_5a_9b_4 - a_{16}a_{19}a_{32}a_5a_9b_5 + a_{16}a_{19}a_{26}a_5a_9b_6 + \dots \\ & a_{13}a_{22}a_{32}a_5a_9b_5 - a_{14}a_{22}a_{31}a_5a_9b_5 + a_{16}a_{20}a_{31}a_5a_9b_5 - \dots \\ & a_{13}a_{22}a_{26}a_5a_9b_6 + a_{14}a_{22}a_{25}a_5a_9b_6 - a_{16}a_{20}a_{25}a_5a_9b_6) / \delta; \end{aligned}$$

$$\dot{x}(1) = x(2);$$

$$\dot{x}(3) = x(4);$$

$$\dot{x}(5) = x(6);$$

$$\dot{x}(7) = x(8);$$

$$\dot{x}(9) = x(10);$$

$$\dot{x}(11) = x(12);$$

$$t = t$$

## Приложение 8

26.12.2013

Информационная карта АИП. Лист 1.

**50201351239** Page 1 of 1

<b>И131204215202</b>			
<b>ИКАП</b>			
5013 Информационная карта АИП	5418 Исходящий номер, дата	7992 Инвентарный номер ФАП	5436 Инвентарный номер ВНТИЦ
50		нет	
7839 Тип ЭВМ	7902 Тип и версия ОС	5715 Инструментальное ПО	7848 Оперативная память
ПК	Windows XP	Matlab	100000
7965 Разновидность ПС	73 Библиотека программ	5679 Код программы по ЕСПД	
46 Программный модуль	82 Программная система	нет	
<b>55 Программа</b>	91 Программный комплекс		
64 Пакет программ	28 Информационная структура		
19 Комплект программ	37 Прочее		
7884 Объем программы	50	7362 Срок окончания разработки	2014.12.31
7947 Описание программы	Модель динамики трехроторной гироскопической системы		4511 Сертификация
7956 Описание применения	Разработка алгоритмов управления		34 Сертифицирована
7974 РГО			<b>43 Не сертифицирована</b>

### Сведения об организации, предоставляющей АИП во ВНТИЦ

2457 Код ОКПО	2934 Телефон	2394 Телефакс	2754 Город
02068574	297-20-95	5526080	Санкт-Петербург
1332 Сокращенное название министерства (ведомства)		2403 Код ВНТИЦ	
Минобнауки России		0203022310321	
2151 Полное наименование организации			
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный политехнический университет"			
2358 Сокращенное наименование организации		ФГБОУ ВПО "СПбГПУ"	
2655 Адрес организации			
195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29			

### Сведения об организации-разработчике

2988 Телефон	3087 Телефакс	2781 Город
297-20-95	5526080	Санкт-Петербург
2187 Наименование организации		
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный политехнический университет"		
2385 Сокращенное наименование организации		ФГБОУ ВПО "СПбГПУ"
2682 Адрес организации		
195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29		

6183 Авторы (разработчики ПС)

Томчина О.П., Горлатов Д.В.

9045 Наименование программы

Модель динамики трехроторной виброустановки

9117 Реферат

Программа предназначена для разработки алгоритмов управления различными видами синхронизации для многороторных виброустановок



	Фамилия, инициалы	Должность	Уч. степень	Подпись МП
Руководитель организации	Райчук Д.Ю.	проректор по научной работе	канд. техн. наук	
Руководит. разр. (ФАП)	Томчина О.П.	доцент	канд. техн. наук	

5634 Индексы УДК

001.891.57:519.711

7434 Дата

7506 Входящий номер

И131204215202

5616 Коды тематических рубрик

28.17.31 . 50.03.03

5643 Ключевое слово

виброустановка  
 модель  
 алгоритм управления  
 синхронизация

## Приложение 9

02.06.2014

Информационная карта АИП. Лист 1.

# 50201450401

<b>И14052522609</b>		5013 Информационная карта АИП	5418 Исходящий номер, дата	7992 Инвентарный номер ФАП	5436 Инвентарный номер ВНТИЦ
<b>ИКАП</b>		50		нет	
7839 Тип ЭВМ	7902 Тип и версия ОС	5715 Инструментальное ПО	7848 Оперативная память		
ПК	Windows XP	MATLAB	100000		
7965 Разновидность ПС	73 Библиотека программ	5679 Код программы по ЕСПД			
46 Программный модуль	82 Программная система	нет			
<b>55 Программа</b>	91 Программный комплекс				
64 Пакет программ	28 Информационная структура				
19 Комплект программ	37 Прочее				
7884 Объем программы	12	7362 Срок окончания разработки	2014.12.31		
7947 Описание программы	Модель динамики двухроторной системы		4511 Сертификация		
7956 Описание применения	Программа предназначена для моделирования		34 Сертифицирована		
7974 РГО	8		43 Не сертифицирована		
<b>Сведения об организации, предоставляющей АИП во ВНТИЦ</b>					
2457 Код ОКПО	2934 Телефон	2394 Телефакс	2754 Город		
02068574	297-20-95	5526080	Санкт-Петербург		
1332 Сокращенное название министерства (ведомства)	Минобрнауки России		2403 Код ВНТИЦ	0203022310321	
2151 Полное наименование организации					
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный политехнический университет"					
2358 Сокращенное наименование организации	ФГБОУ ВПО "СПбГПУ"				
2655 Адрес организации					
195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29					
<b>Сведения об организации-разработчике</b>					
2988 Телефон	3087 Телефакс	2781 Город			
297-20-95	5526080	Санкт-Петербург			
2187 Наименование организации					
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный политехнический университет"					
2385 Сокращенное наименование организации					
ФГБОУ ВПО "СПбГПУ"					
2682 Адрес организации					
195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29					

6183 Авторы (разработчики ПС)

Томчина О.П., Резниченко В.В., Горлатов Д.В.

9045 Наименование программы

Модель динамики двухроторной вибрационной установки с учетом динамики электроприводов

9117 Реферат

Программа предназначена для моделирования динамики движения двухроторного вибрационного стенда с учетом динамики электроприводов. В модели учитывается перемещение несущего тела (платформы) в вертикальной плоскости по горизонтальной и вертикальным осям и изменение угла поворота платформы в указанной плоскости. Структура электрической части привода реализована традиционно как одноконтурная система с контуром тока. Пропорционально-интегральный регулятор тока настроен на оптимум по модулю. Модель учитывает динамику тиристорного преобразователя и влияние связи по противо-ЭДС. Программа реализована в программной среде MATLAB. В результате моделирования выводятся графики изменения следующих переменных состояния: положения и скоростей роторов, положения и скоростей платформы по горизонтали и вертикали, угла поворота платформы в вертикальной плоскости, а также для обоих приводов выводятся ток якоря, ЭДС тиристорного преобразователя и напряжения датчиков тока.

	Фамилия, инициалы	Должность	Уч. степень	Подпись МП
Руководитель организации	Райчук Д.Ю.	проректор по научной работе	канд. техн. наук	
Руководит. разр. (ФАП)	Томчина О.П.	доцент	канд. техн. наук	

5634 Индексы УДК

7434 Дата

7506 Входящий номер

001.891.57:519.711

ИП14052522609

5616 Коды тематических рубрик «Центр информационных технологий

28.17.31 и систем органов исполнительной власти  
50.03.03 50.47.00  
Зарегистрировано в государственном

5643 Ключевое слово информационном фонде неопубликованных

модель динамики документов  
двухроторная вибрационная установка  
электропривод виброустановки