Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

Санкт-Петербургский Государственный Морской Технический Университет

На правах рукописи

Хватов Александр Александрович

Методы теории Флоке для анализа распространения упругих волн в твёрдых телах с периодической структурой

Специальность 01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.т.н., профессор, Сорокин С.В.

Санкт-Петербург - 2020

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет» на кафедре физики.

Научный руководитель:	**Сорокин Сергей Владиславович** д.т.н., профессор, профессор кафедры Теоретической механики и сопротивления материалов СПбГМТУ
Официальные оппоненты:	**Ерофеев Владимир Иванович** д.ф.-м.н., профессор директор Института проблем машиностроения РАН - филиала ФГБНУ "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук" **Андронов Иван Викторович** д.ф.-м.н., доцент профессор кафедры вычислительной физики Санкт-Петербургского Государственного Университета
Ведущая организация:	ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта (МИИТ)»

Защита диссертации состоится 21 мая 2020 года в 16:00 ч. на заседании диссертационного совета Д 002.075.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН) по адресу: 199178, Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой проспект, д. 61, аудитория 14.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ ИПМаш РАН и на сайте института по адресу http://www.ipme.ru.

Автореферат разослан «____» ___________ 2020 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 002.075.01 В.В. Дубаренко
д.т.н., профессор

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность задачи

Одна из основных задач механики твёрдого тела – определение поля напряжений. Последнее затем используется для оценки прочности различных конструкций. Для однородных структур задача определения поля напряжений решена и описана для многочисленных случаев. Для периодических структур эта задача решена лишь для частных случаев. Как правило такие задачи рассматриваются с точки зрения распространения волн в периодической структуре.

Анализ распространения волн в периодических структурах – это классический предмет исследования в теории направленных волн, который изучается в различных областях физики. С помощью теоремы Флоке можно аналитически определить поле перемещений, а затем и напряжений для моделей упругих твёрдых тел.

Задачей, определившей направление исследований в акустике периодических структур, является задача определения вида волновой функции частицы, находящейся в периодическом потенциале. Первыми работами в этой области считаются работы Ф. Блоха. В его работах используется обобщение математического аппарата на трёхмерных случай, который был разработан в конце XIX века Г. Флоке и А.М. Ляпуновым. В работах Г. Флоке рассматривалось решение дифференциальных уравнений с периодическим оператором, а в силу периодичности кристаллической решётки, периодичность оператора движения в такой среде очевидна. Блох показал, что электрон, движущийся в периодической кристаллической решётке, имеет особый вид волновой функции, которая определяет наличие полос пропускания и полос запирания, такие диапазоны частот стали называть блоховскими зонами.

В середине XX века встал вопрос о применимости данной теории в акустике и в теории упругости. Одной из первых фундаментальных работ по распространению волн в периодических структурах является работа Л. Бриллюэна, в которой показана связь между акустическими фильтрами, которые могут быть представлены в виде периодического набора масс, соединённых пружинами, и задачами электродинамики.

Виброизоляционные эффекты, порождаемые периодичностью хорошо изучены в декартовых координатах для любого числа измерений. В механике обычно используется терминология масс и пружин. В настоящей работе задачи сформулированы в не менее популярных терминах строительной механики: для одномерных структур – задача о стержне, балке, для двумерных структур – задача о пластине или оболочке.

При этом используемый математический аппарат называют теорией Флоке (или теоремой Флоке), для её применения важным является условие симметрии относительно переноса для оператора, описывающего колебания бесконечной периодической структуры.

В дальнейшем идеи заложенные Л. Бриллюэном, нашли своё продолжение в работах Ю.И. Бобровницкого, С.В. Будрина, В.П. Маслова, В.Т. Ляпунова, D.J. Mead. Так же теория Флоке продолжала развиваться в области распространения волн в кристаллических решётках и в дальнейшем в акустике развилась теория фононных кристаллов.

В последние десятилетия периодические структуры нашли своё широкое применение в задачах виброизоляции. В настоящее время существует множество работ, посвящённых моделированию периодических структур с помощью теории Флоке, статьи содержат как классический анализ различных структур так и анализ изменения спектра, вносимого неточностями стыковки или погрешностями в исполнении самой периодической структуры (например неточное соответствие частей периодической структуры).

По сравнению с другими методами виброгашения и виброизоляции, периодические структуры дают, как правило, больший коэффициент виброгашения (вплоть до полной виброизоляции в случае бесконечного числа периодических вставок), однако, являются более сложными в практической реализации ввиду как сложной формы, так и необходимости точной стыковки между компонентами.

Наиболее широко периодические структуры используются в качестве акустических фильтров, которые обладают максимальным коэффициентом виброгашения для данной полосы частот.

Применение теории периодичности имеет ряд преимуществ по сравнению с “классическим” подходом к решению главной задачи виброакустики - задаче виброгашения. Под этим понимается то, что вместо использования различных устройств (демпферы, абсорберы, барьеры) предполагается использовать способность периодических конструкций значительно снижать влияние негативных эффектов воздействия динамических нагрузок на конструкции.

Практически во всех областях техники (судостроение, авиационная промышленность, вагоностроение и пр.) использование периодических структур так же широко распространено ввиду того, что существенные части корпусов судна, самолёта или вагона обладают свойством периодичности, иначе говоря, их геометрическая конфигурация повторяется в пространстве. Таким образом, применение периодических конструкций целесообразно как из соображений функциональности и технологичности, так и с точки зрения решения задачи борьбы с негативными проявлениями вибрации.

Теория расчета таких конструкций, подверженных влиянию динамических нагрузок основательно проработана и продолжает развиваться в настоящее время.

Практические задачи сформировали новый раздел численного анализа, основанный на вычислительных методах теории Флоке - метод волновых конечных элементов, который используется как для анализа периодических, так и для анализа непериодических структур, имеющих достаточную протяжённость.

Однако в литературе не обсуждается вопрос о вызванной периодичностью виброизоляции в высокочастотной области. Кроме того, существует целый класс моделей, которые не обладают свойством трансляционной симметрии и для которых не существует математического аппарата, позволяющего оценить положение полос запирания, возникающих за счёт периодичности.

Отсюда, можно сформулировать несколько направлений актуальных исследований:

1. Установление особенностей применения теории Флоке для модели бесконечного деформируемого твёрдого тела с периодической структурой и его конечных частей в высокочастотном диапазоне, где существует несколько распространяющихся мод;
2. Установление связи между дисперсионными диаграммами для однородного упругого слоя и зонами запирания/пропускания, получаемыми в рамках теории Флоке для модели периодического упругого слоя;
3. Поиск инструментов для определения границ полос запирания для моделей в системах координат, где теорема Флоке не справедлива из-за отсутствия трансляционной симметрии (например, в полярной системе координат).

Цель настоящей работы

На основе рассмотрения частных случаев, установить общие свойства решений задач о распространении волн в деформируемых твердых телах с периодической структурой в рамках теории Флоке, а также задач нахождения собственных частот конечных частей периодических волноводов.

Научная новизна представленных в диссертации результатов

В рамках исследований впервые:

1. Установлены общие закономерности связи между зонами Флоке для модели деформируемого твёрдого тела с периодической структурой и спектром собственных частот его конечной части;
2. Построены уточнения теории типа «брэгговских волокон» для случая радиально периодической мембраны и пластины в полярных координатах;
3. Проанализированы особенности применения теории Флоке для задач с дифференциальными операторами, которые воспроизводят несколько распространяющихся мод;
4. Рассмотрена связь между дисперсионными диаграммами для однородного слоя и зонами запирания, получаемыми в рамках теории Флоке для периодического упругого слоя.

Практическая значимость выполненных исследований

Разработанные в работе методы позволяют использовать теорию Флоке для анализа виброизоляционных свойств в широком диапазоне частот для различных моделей деформируемых твёрдых тел с периодической структурой, а также использовать современные системы автоматического проектирования для анализа виброизоляционных свойств.

Методы исследования

Решение поставленных задач осуществлялось в рамках классических моделей периодических упругих твёрдых тел и численного анализа их свойств.

Научные результаты, выносимые на защиту

1. Метод определения границ полос запирания на основе решения задачи о собственных частотах симметричной ячейки периодичности с симметричными граничными условиями и сопутствующий метод определения симметричных граничных условий.

2. Методы, позволяющие анализировать полосы запирания в полярных координатах. Уточнение теории типа «брэгговских волокон» в полярных координатах в виде полинома и дифференциального уравнения. Метод численного решения данного дифференциального уравнения в полярных координатах.

3. Метод идентификации мод Флоке для многомодовых волноводов, который позволяет получить детальную характеристику виброизоляционных свойств периодических конструкций за пределами применимости элементарных теорий.

Достоверность представленных результатов подтверждается соответствием между решениями, полученными с помощью классических аналитических методов теории дифференциальных уравнений, и результатами численных экспериментов. Полученные результаты так же совпадают с известными в литературе решениями простейших частных задач.

Апробация работы

Полученные результаты были отражены в докладах:

На международных конференциях:

- 20th International Congress on Sound and Vibration (2014)
- 6th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (2017),
- Acoustic Black Holes and Structured Plates for Vibration Control (2018)

На всероссийских конференциях:

- ВНКСФ-23 (23я Всероссийская Научная Конференция Студентов Физиков) (2017)
- II ВАК, XXX сессия РАО (2я Всероссийская Акустическая Конференция, совмещённая с 30ой сессией Российского Акустического Общества) (2017)

На семинарах:

- На городском Семинаре по механике в ИПМаш РАН (Институт Проблем Машиноведения Российской Академии Наук), г. Санкт-Петербург 12 января 2017 и 24 октября 2019
- На городском Семинаре по вычислительной и теоретической акустике им. Д.П. Коузова, ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург 4 декабря 2018

Публикации

Материалы диссертации отражены в 9 печатных работах, из них 1 опубликована в рецензируемых журналах, входящих в перечень журналов, рекомендованных ВАК и 5 в журналах, входящих в международные базы WoS и Scopus.

Личный вклад автора

Все представленные в диссертации результаты получены автором лично. Автор участвовал в выборе направления исследований и постановке конкретных задач. Программное обеспечение для проведения численных экспериментов полностью разработано автором диссертации. Автор внёс значительный вклад (50% и более) в подготовку текстов публикаций и докладов.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, заключения и 4 глав. Работа содержит 130 страниц, 90 рисунков, 4 таблицы и библиографию из 63 наименований. Начало каждой главы представляет собой введение в круг рассматриваемых вопросов и постановку задачи. Каждая из глав завершается сводкой основных полученных результатов в виде кратких выводов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении проведено обоснование выбора направления исследований, продемонстрирована актуальность решаемых задач, сформулированы основные цели диссертационной работы, положения, выносимые на защиту, описана научная новизна и практическая значимость полученных результатов, а также представлены структура и краткое содержание работы.

Под бикомпонентной бесконечной структурой в этой работе понимается структура с осью x, направленной вдоль распространения волн, показанная на рисунке 1.

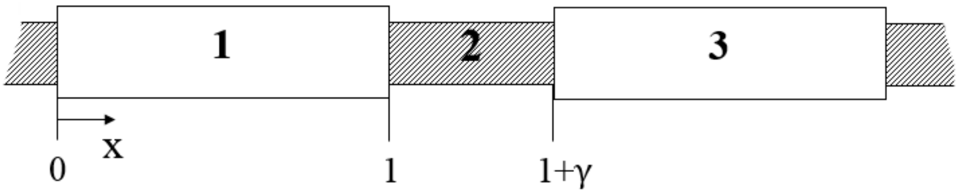

Рисунок 1 - Схема бикомпонентной периодической структуры

Сегменты 1,3,5,… и 2,4,6,… обладают разными параметрами геометрии и материалов, но, если не сказано иначе, перемещения всех сегментов описываются одним и тем же дифференциальным оператором. Если не сказано иначе, длина нормируется на длину «белой» части. Между сегментами ставятся условия стыковки, которые представляют собой равенство всех одноимённых перемещений и обобщённых сил для того, чтобы рассматривать структуру как единое целое.

В первой главе описана последовательность моделей бикомпонентных деформируемых твёрдых тел с периодической структурой, поддерживающих одну пару распространяющихся мод на рассматриваемом частотном диапазоне. Все модели в последовательности подобраны таким образом, чтобы показать те или иные аспекты эффектов виброизоляции, возникающих из-за периодичности. Основные результаты этой главы отражены в [1-3].

В параграфе 1.1 рассмотрена простейшая модель распространения продольных волн в периодическом стержне с постоянным сечением. Для этой модели проведён полный анализ виброизоляционных свойств с помощью теории Флоке. В результате, уже на примере этого простого оператора видны все свойства, которые в дальнейшем распространяются на достаточно широкий круг задач о периодических структурах.

Помимо условий стыковки теория Флоке в декартовых координатах предполагает постановку собственно условий Флоке в виде

$$\begin{aligned} u_i(0) &= \Lambda u_j(T) \\ u'_i(0) &= \Lambda u'_j(T) \end{aligned} \qquad (1)$$

В (1) u_i - перемещение сегмента любого, содержащего координату $x = 0$, u_j - перемещение любого сегмента, содержащего координату $x = T$, где T –

период структуры (для рисунка 1 $T = 1+\gamma$), Λ - константа распространения или коэффициент периодичности.

Виброизоляционные свойства деформируемых твёрдых тел с периодической структурой полностью определяются полиномом степени n - максимальное число распространяющихся мод для данного дифференциального оператора. Из (1) для случая продольных колебаний следует, что $n = 2$ и виброизоляционные свойства определяются квадратным уравнением $D(\Lambda, \Omega) = 0$. Корни уравнения можно изобразить как показано на рисунке 2.

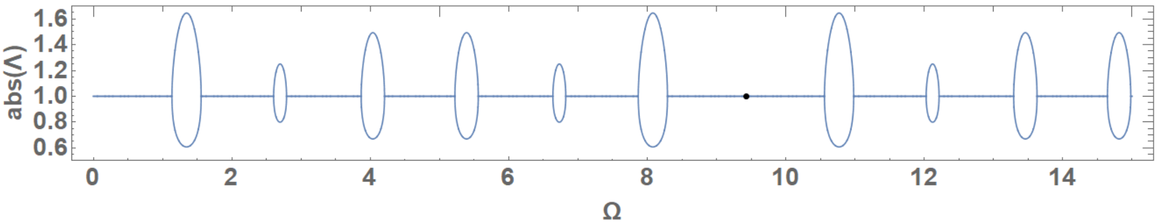

Рисунок 2 - Корни полинома $D(\Lambda, \Omega)$, показывающие полосы запирания при $\mathrm{abs}(\Lambda) \neq 1$

На диаграмме показана зависимость значения абсолютной величины константы Флоке от частоты Ω. При этом константа распространения Λ связана с параметром Блоха соотношением $\Lambda = \exp(iK_B)$, где K_B - параметр Блоха. Зоны $\mathrm{abs}(\Lambda) = 1$ соответствуют блоховским полосам пропускания, а зоны $\mathrm{abs}(\Lambda) \neq 1$ - полосам запирания.

В полосе запирания форма собственных колебаний бесконечного периодического твёрдого тела представляет собой пару экспоненциально затухающей-возрастающей волн.

В полосе пропускания форма собственных колебаний представляет собой пару волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

Дискриминант полинома определяет уравнение границ частот полос запирания соотношением $\mathrm{discr}(D(\Lambda, \Omega)) = \mathrm{discr}(\Omega) = 0$.

В этом параграфе рассматриваются так же свойства собственных частот конечных структур, при этом вводится понятие ячейки периодичности (рисунок 3) – конечной структуры длиной в один период периодической структуры и близкое к нему понятие симметричной ячейки периодичности – ячейки периодичности с симметрией относительно геометрического центра.

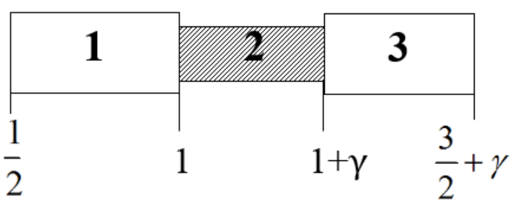

Рисунок 3 - Схема симметричной ячейки периодичности

Для граничной задачи о симметричной ячейке периодичности вводится понятие симметричных граничных условий типа A (обобщённо-запертые) и B (обобщённо-свободные). На этом этапе симметричные условия можно просто определить как совпадающие функции, то есть условиями типа A является равенство нулю перемещений на границах, а условиями типа B – их производных, то есть в данном случае они соответствуют каноническим краевым задачам Дирихле и Неймана.

Собственные частоты симметричной ячейки с симметричными граничными условиями обладают уникальным свойством – они в точности заполняют все границы полос запирания, при этом собственные частоты для граничных условий типа A и B совпадают лишь в случае, когда отношение $\frac{\gamma}{\sigma} \in Q$ рационально.

Более подробно понять различие волновых свойств в полосах запирания и пропускания помогает анализ собственных колебаний. Собственные колебания одной ячейки периодичности с симметричными граничными условиями представляют собой часть формы стоячей волны бесконечного волновода на границе полосы запирания.

В параграфе 1.2 рассмотрена модель балки Бернулли-Эйлера. Анализ распространения изгибных волн в упругой балке с периодической структурой повторяет анализ предыдущего параграфа. В дальнейшем мы будем останавливаться лишь на различиях анализа различных моделей в рамках теории Флоке, предполагая, что остальные части анализа повторяются.

Оператор четвёртого порядка требует пару граничных условий на концах симметричной ячейки периодичности, поэтому по сравнению с предыдущим параграфом требуется нетривиальное обобщение условий типа A и B. На этом этапе они вводятся как функции с одинаковой чётностью относительно волнового числа.

В параграфе 1.3 рассмотрена модель балки Тимошенко. Полином Флоке, который имеет четвёртый порядок, отражает в том числе и волновые свойства однородной структуры, то есть картины полос запирания бесконечной периодической структуры для балок Тимошенко и Бернулли-Эйлера совпадают на низких частотах.

Установлен факт, что симметричные граничные условия для теории Тимошенко соответствуют условиям для балки Бернулли-Эйлера.

В параграфе 1.4 рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях цилиндрической оболочки, рассмотрена трёхмодовая модель, которая даёт полином Флоке шестого порядка. Эта задача выбрана как пример, подтверждающий, что все свойства, определённые для моделей упругих тел с периодической структурой справедливы и для более сложных случаев.

Кроме того, задача об оболочке представляет собой следующий шаг в идентификации закономерностей в формулировке граничных условий типов A и B.

В параграфе 1.5 проанализированы потери энергии на вставку для волноводов, рассмотренных в предыдущих главах, с использованием оценки в виде (2).

$$\mathrm{IL_n}(\Omega) = 10\lg(\mathrm{E_0}(\Omega) / \mathrm{E_n}(\Omega)) \tag{2}$$

где $E_n(\Omega)$ - поток энергии в волноводе с n периодическими вставками, $E_0(\Omega)$ - поток энергии через однородный волновод.

При этом максимумы оценки (2) соответствуют максимумам коэффициентов периодичности (1), то есть $\max_{\Omega}(IL_n(\Omega)) = \max_{\Omega}(abs(\Lambda))$ внутри данной полосы запирания как изображено на рисунке 4.

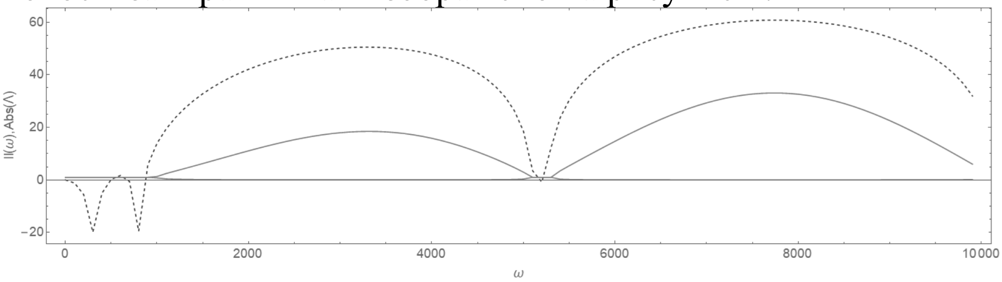

Рисунок 4 - Зоны Флоке (сплошная линия) и потери на вставку (штрихованная линия)

При рассмотрении периодических бикомпонентных упругих волноводов из различных материалов можно сделать вывод, что увеличение контраста импедансов (при прочих равных параметрах) даёт полосы запирания в более низкочастотном диапазоне, а также более высокий уровень виброизоляции.

Во второй главе рассмотрена более сложная периодическая структура, которая составлена из четырёх фрагментов (рисунок 5). Методы, применённые в Главе 1 (теория Флоке) имеют более широкую область применения, чем представленные там примеры. В связи с этим, цель данной главы показать применение теории Флоке для пространственной структуры, имеющей более сложную структуру периодичности. Прототипом конструкции, показанной на рисунке 5, является виброизолятор ветряной турбины. Основные результаты этой главы отражены в [7,8].

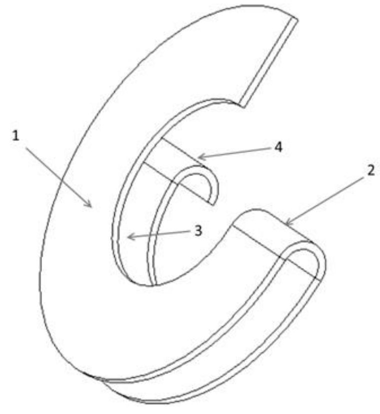

Рисунок 5 - Схема ячейки периодичности виброизолятора

В параграфе 2.1 в рамках теории Флоке проведён полный анализ виброизоляционных свойств конструкции, показанной на рисунке 5.

Дифференциальный оператор этой задачи для каждой из компонент факторизуется на две части. Это позволяет факторизовать и всю задачу в целом. Полином Флоке имеет двенадцатый порядок и так же факторизуется на две части, которые можно назвать изгибно-продольной и изгибно-крутильной.

Модель виброизолятора, рассмотренная в этой главе, поддерживает 4 пары распространяющихся волн, при этом 2 пары в изгибно-продольной части и 2 пары изгибно-крутильной. В этом случае каждая пара волн определяет свою картину полос запирания, и итоговая картина определяется их наложением.

На рисунке 6 показаны полосы пропускания и запирания для каждой из пар волн.

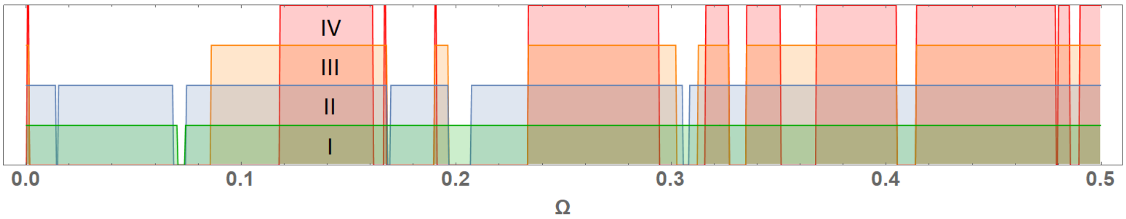

Рисунок 6 – Диаграмма полос запирания. Различные моды Флоке пронумерованы. Белый цвет соответствует полосе запирания для данной моды.

При этом можно ввести определение полной полосы запирания, в которой все 4 пары волн представляют собой экспоненциально затухающую-возрастающую стоячие волны и частичной полосы запирания.

В параграфе 2.2 Рассмотрена спектральная задача для конечной структуры. Симметричная ячейка периодичности является конечной структурой симметричной относительно геометрического центра, в случае виброизолятора, она имеет вид, показанный на рисунке 7. При этом половина части с номером 1 (рисунок 5) присоединяется как часть 5 для соблюдения симметрии.

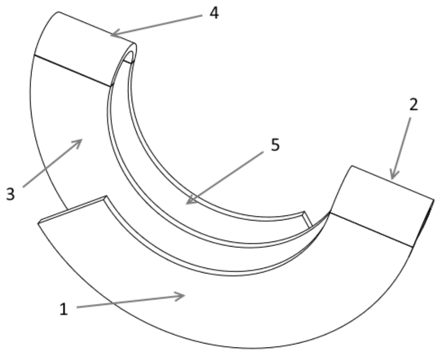

Рисунок 7 - Схема симметричной ячейки периодичности виброизолятора

При этом, независимо от числа компонент, для этой и более сложных моделей деформируемых твёрдых тел так же требуется строгое определение симметричных граничных условий, которые вводятся с помощью условий биортогональности, так как определение чётности и нечётности относительно волнового числа для этого случая уже становится недостаточным. Условия биортогональности в этом случае имеют вид (3).

$$\begin{aligned} M_y^A(s)\beta^B(s)+N_z^A(s)w^B(s)-u^A(s)Q_x^B(s)=0 \\ T_z^A(s)\gamma^B(s)+Q_y^A(s)v^B(s)-\alpha^A(s)M_x^B(s)=0 \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнении (3), u, v, w - смещения по осям, соответствующим главным осям инерции, α, β, γ - соответствующие повороты, Q_x, Q_y, N_z - силы, M_x, M_y, T_z - моменты, s - координата, вдоль линии, проходящей, через центры масс каждого из поперечных сечений структуры.

Верхние индексы A и B представляют собой две различные свободные волны. При этом моды A и B обладают разной чётностью. Поэтому выделяя только моду A или только моду B можно получить два типа граничных условий, первое выделяет чётные моды, а второе – нечётные. Таким образом граничные условия типа A будут иметь вид (для одной симметричной ячейки s принимает значения координат каждой из границ):

$$A(s) = \{u(s), N_z(s), M_y(s), \alpha(s), Q_y(s), T_z(s)\} = 0$$

и граничные условия типа B:

$$B(s) = \{w(s), \beta(s), Q_x(s), v(s), \gamma(s), M_x(s)\} = 0$$

После введения условий типа A и B можно заметить, что уравнение для собственных частот одной симметричной ячейки периодичности так же факторизуется на две части - изгибно-продольную и изгибно-крутильную, при этом они занимают в точности все границы частичных полос запирания.

В параграфе 2.3 демонстрируются особенности анализа потока энергии для случаев сложных моделей деформируемых твёрдых тел с периодической структурой. Отмечено, что из-за условий стыковки происходит смешение мод и вид силового воздействия (продольное, поперечное, крутильное, смешанное) для периодической структуры незначительно влияет на расположение максимумов оценки потерь на вставку, то есть полос запирания. Чем меньше ячеек включено в структуру, тем сильнее влияние условий нагружения.

В третьей главе рассмотрены уточнения теории типа брэгговских волокон для случая радиально периодической мембраны и пластины в полярных координатах. Симметрия относительно параллельного переноса является одним из необходимых условий теоремы Флоке, поэтому её нельзя напрямую использовать в такой задаче. В главе рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях бикомпонентной радиально-периодической мембраны и пластины, в которых эта симметрия отсутствует. Основные результаты этой главы отражены в [4-5,9].

В параграфе 3.1 приведена постановка задачи о радиально-периодической мембране. Под радиально-периодической структурой понимается структура на плоскости, показанная на рисунке 8.

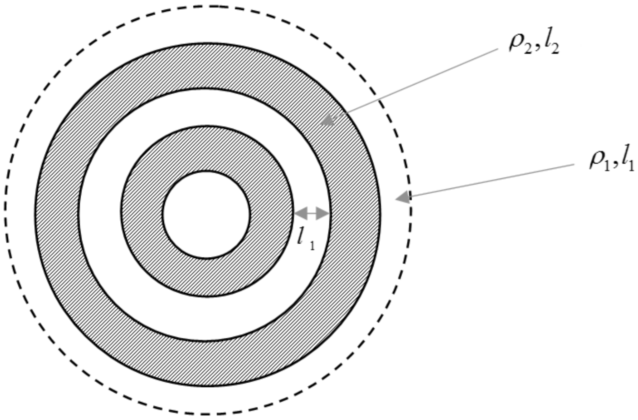

Рисунок 8 - Схема радиально-периодической мембраны

Зависимость волновых свойств от близости к центру периодической структуры учтена введения зависимости коэффициента периодичности от координаты r.

В параграфе 3.2 с помощью оценки потока энергии, проходящего через бесконечную однородную мембрану с радиально-периодической вставкой, проведено обоснование того, что в радиально-периодической структуре возникают полосы запирания. Это соответствует теории брэгговских волосок. Численный эксперимент показывает, что периодическая вставка даёт частотные зоны затухания, совпадающие в дальнем поле с задачей в декартовых координатах, что является формулировкой теории брэгговских волокон.

Однако, при анализе окрестности начала координат, видно, что полосы запирания смещаются. Таким образом, естественно поставить вопрос, можно ли модифицировать теорию брэгговских волокон с учётом зависимости параметра распространения от радиуса r.

В параграфе 3.3 рассмотрена конечная периодическая мембрана. Как и в случае декартовых координат, вводится понятие симметричной ячейки периодичности, которая повторяет рисунок 3, но теперь является мембраной с круговым вырезом. Граничные условия в этой задаче можно ввести различным образом. В работе условия формулируются относительно функций одинаковой чётности относительно волнового числа.

При такой формулировке асимптотически, с ростом радиуса r (или частоты Ω), выполняется свойство собственных частот симметричной ячейки периодичности попадать на границы полос запирания, Собственные частоты конечных структур, состоящих из нескольких последовательных ячеек периодичности, также лежат в полосах пропускания.

В параграфе 3.4 рассмотрен возможный вид условий периодичности, который позволяет сформулировать теорию аналогичную волоконной брэгговских волокон.

Для учёта отсутствия трансляционной симметрии оператора задачи в полярных координатах, учитывается зависимость константы распространения от радиальной координаты r, то есть условия (1) будут иметь вид (4).

$$u_i(r) = \Lambda(r) u_j(r+T)$$
$$u'_i(r) = \frac{d}{dr}(\Lambda(r) u_j(r+T)) \qquad (4)$$

С помощью приближений функций Бесселя для большого аргумента, можно получить условия периодичности в виде (5).

$$u_1(r) = \sqrt{\frac{1+\gamma+r}{r}} \Lambda_{const} u_3((1+\gamma)+r)$$
$$u_1'(r) = \frac{d}{dr}\left(\sqrt{\frac{1+\gamma+r}{r}} \Lambda_{const} u_3((1+\gamma)+r)\right) \qquad (5)$$

С помощью приближения (5) можно получить полином Флоке второго порядка со свободным членом равным единице, что соответствует задаче о продольных колебаниях стержня в декартовых координатах. При этом коэффициенты определителя системы (5) стремятся к коэффициентам задачи (1) для стержня при отдалении от начала полярных координат.

В параграфе 3.5 проанализированы условия периодичности в виде (4) без ограничения на вид функции $\Lambda(r)$, в этом случае, вместо полинома требуется рассмотреть дифференциальное уравнение, которое имеет вид (6).

$$D(\Lambda(r), \Omega) = \Lambda'(r) + \alpha_2(r)\Lambda^2(r) + \alpha_1(r)\Lambda(r) + \alpha_0(r) = 0 \qquad (6)$$

Дифференциальное уравнение (6) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с граничными условиями убывания на бесконечности $\Lambda'(r) \to 0$, $r \to \infty$, которое вводится для того, чтобы теория Флоке при удалении от начала координат давала результаты, получаемые в случае декартовых координат.

Общее уравнение теории Флоке (6) имеет вид канонического уравнения Риккати, и его аналитическое решение в общем виде найти не удалось даже после приведения его к линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Тем не менее, его можно решить аналитически для частного случая при достаточно большом r и использовании приближений функций Бесселя для большого аргумента, которое в свою очередь даёт те же решения, что и полученные при введении условии (5).

Так как условия на убывание имеют вид, не подходящий для численных методов, предложена замена $\Lambda(r^{(\lim)}) = \Lambda_{cart}$, где $r^{(\lim)}$ - достаточно большое расстояние от центра (полярный радиус) r, а Λ_{cart} - решение задачи для продольных колебаний стержня в декартовых координатах. При такой замене граничного условия возможно численное решение, но в таком случае полосы запирания приближаются к полосам в декартовых координатах.

В параграфе 3.6 проведён анализ виброизоляционных свойств радиально-периодической пластины, который повторяет анализ мембраны.

В четвёртой главе рассматривается виброизоляционный эффект, возникающий при рассмотрении моделей конечного и бесконечного упругих слоёв с постоянной толщиной. Главной целью этой главы является решение задачи Рэлея-Лэмба для периодического упругого слоя. Основные результаты этой главы отражены в [6].

В параграфе 4.1 рассмотрена последовательность моделей для симметричных (относительно срединного слоя) волн, каждая из которых допускает существование одной, трёх или пяти мод соответственно. Соответствующие дисперсионные диаграммы показаны на рисунке 9.

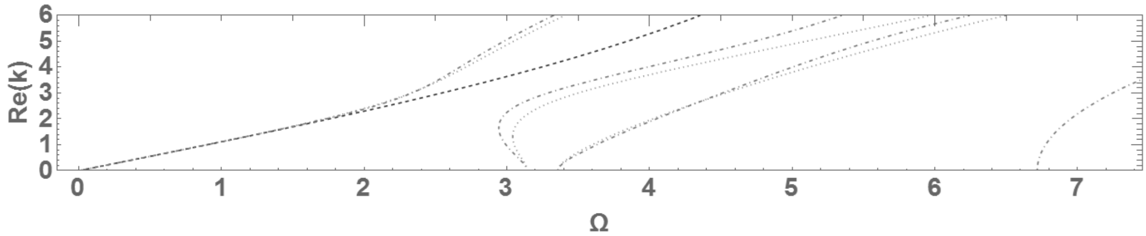

Рисунок 9 - Дисперсионные диаграммы для 1,3,5-модовой модели (штрихованная,пунктирная, штрихпунктирная линии соответственно)

При этом, так как рассматривается бикомпонентный периодический упругий слой, необходимо, помимо стандартного понятия частоты отсечки однородного слоя, ввести понятие структурной частоты отсечки, т. е. частоты, на которой вся периодическая структура в целом допускает распространение ещё одной распространяющейся волны.

В параграфе 4.2 проведён анализ виброизоляции в рамках теории Флоке для 3- и 5-модовой аппроксимации, при этом вводится понятие моды Флоке – пары волн, либо распространяющихся в противоположных направлениях с одинаковой амплитудой, либо экспоненциально затухающих-возрастающих с показателями $\mathrm{abs}(\Lambda)$ и $\mathrm{abs}(\frac{1}{\Lambda})$ соответственно. При этом частота появления новой моды Флоке (то есть структурная частота отсечки) совпадает с частотой отсечки сегмента с наименьшей скоростью распространения продольной волны.

Полиномы Флоке для 3- и 5-модовой аппроксимации являются полиномами 6 и 10 порядка соответственно. При этом они факторизуются на 3 и 5 полиномов второго порядка соответственно. Каждый сомножитель при этом определяет свою моду Флоке. На рисунке 10 показаны моды Флоке для 5-модовой теории.

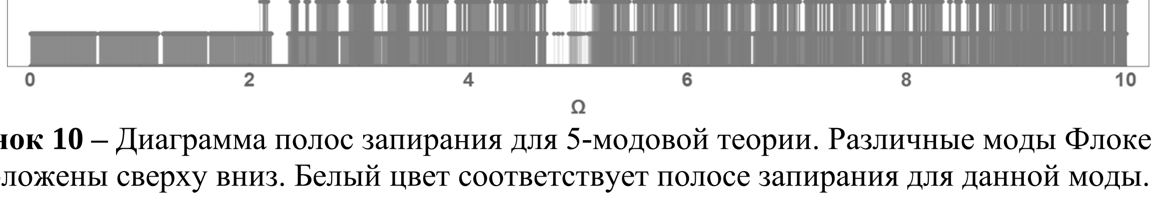

Рисунок 10 – Диаграмма полос запирания для 5-модовой теории. Различные моды Флоке расположены сверху вниз. Белый цвет соответствует полосе запирания для данной моды.

В параграфе 4.3 проанализирован поток энергии через полубесконечный периодический упругий слой. Анализ потока энергии, во-первых, подтверждает наличие полос запирания, предсказанных теорией Флоке, а во-вторых, показывает разницу в картине полос запирания, которая появляется при переходе через частоту отсечки мод Флоке.

Имеет смысл различать полные полосы запирания, где все моды Флоке имеют свойство $\mathrm{abs}(\Lambda) \neq 1$, и частичные полосы запирания, где существует хотя бы одна константа $\mathrm{abs}(\Lambda) = 1$.

При этом отмечается, что из-за присутствия условий стыковки, в отличие от однородного слоя, поток энергии слабо зависит от условий нагружения.

В параграфе 4.4 рассмотрена спектральная задача для конечного периодического упругого слоя при граничных условиях A и B в рамках 3- и 5-модовой аппроксимаций. В этой задаче удобно ещё раз показать, что формулировка граничных условия типов A и B однозначно следует из условий биортогональности.

Помимо того, что собственные частоты одной ячейки периодичности занимают все границы полос запирания, частотное уравнение для граничных задач типа A и B так же может быть факторизовано на уравнения, каждое из которых определяет собственные частоты, находящиеся на границах полос запирания лишь одной моды Флоке. Собственные частоты, соответствующие частным уравнениям показаны на рисунке 11.

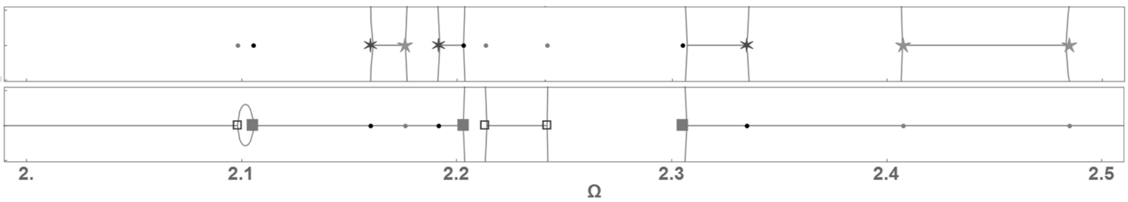

Рисунок 11 - Собственные частоты, соответствующие первой (снизу, квадраты) и второй (сверху, звёздочки) модам Флоке на фоне собственных частот полного уравнения (точки)

Можно заключить, что спектральное уравнение задачи для одной ячейки периодичности с симметричными граничными условиями для обоих типов A и B является двойственной задачей. Можно рассматривать две задачи – задачу о распространении волн в упругом теле с периодической структурой и задачу об одной симметричной ячейке периодичности, каждая из которых дает возможность предсказывать виброизоляционные свойства бесконечной периодической структуры.

В параграфе 4.5 рассмотрено качественное различие между задачами о распространении волн в однородном и периодическом упругом слое и, соответственно, задачами о свободных колебаниях их конечных частей при граничных условиях типов A и B.

До первой частоты отсечки форма собственных колебаний однородного конечного слоя длиной в одну ячейку периодичности является суперпозицией одной пары распространяющихся волн, которые характеризуются первой (низшей) ветвью дисперсионной диаграммы, при этом другие волны в формировании форм собственных колебаний не участвуют.

Форма колебаний конечного периодического слоя в виде одной ячейки периодичности из-за наличия условий стыковки является суперпозицией волн, соответствующих всем ветвям дисперсионной диаграммы. При этом с ростом частоты, вклад первой моды убывает, а вклад остальных – растёт.

Таким образом, высокая точность любой многомодовой модели в предсказании волновых свойств однородного слоя не обязательно влечёт за собой такую же точность в предсказании полос запирания в периодическом слое.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Теорема Флоке, используемая в анализе виброизоляции, имеет сопряжённую спектральную задачу – задачу о спектре симметричной ячейке периодичности с двумя наборами граничных условий. Спектры ячейки периодичности для двух задач в точности представляют собой границы полос запирания;
2. Симметричные граничные условия соответствуют условиям би-ортогональности. Любые другие граничные условия для конечного сегмента периодического волновода не обеспечивают выполнение свойства, сформулированного в п.1;
3. В полярных координатах можно использовать теорию типа брэгговских волокон. А именно, можно ввести условия периодичности, которые дают схожий результат с моделью в декартовых координатах и позволяют говорить о полосах запирания и пропускания. Такие условия периодичности можно обобщить, тем самым заменив полином дифференциальным уравнением, форма записи которого при удалении от начала полярных координат стремится к канонической форме полинома Флоке для задачи в декартовых координатах;
4. Упрощённые модели, аппроксимирующие формулировку и решение обобщённой задачи Рэлея-Лэмба, дают возможность говорить о композитных модах Флоке. Каждой композитной моде соответствует свой сомножитель второго порядка при факторизации полинома Флоке. Полосы запирания каждой из мод определяются дискриминантом квадратного уравнения, которое определяется этими сомножителями. Таким образом можно выделить полные полосы запирания, которые соответствуют случаю, когда полосы запирания всех мод в некотором диапазоне частот перекрывают друг друга;
5. Спектральную задачу для симметричной ячейки упругого периодического слоя можно так же разложить на частные спектральные подзадачи, которые соответствуют каждой из композитных мод. Собственные частоты, полученные из решения каждой подзадачи, соответствуют нулям

дискриминанта, определяющего границы полос запирания каждой из композитных мод бесконечного периодического волновода.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

I. Публикации в изданиях, рекомендованных Перечнем ВАК РФ

[1] Хватов А.А. Теория Флоке в анализе виброизоляции // Ученые записки Физического Факультета Московского Университета. – 2017. – Т. 5. – С. 1751413.

II. Публикации в изданиях, входящих в международные базы Scopus и Web of Science

[2] Hvatov A., Sorokin S. Analysis of eigenfrequencies of finite periodic structures in view of location of frequency pas-and stop-bands //Proceedings of 20th International Congress on Sound and Vibration. – 2013.
[3] Hvatov A., Sorokin S. Free vibrations of finite periodic structures in pass-and stop-bands of the counterpart infinite waveguides //Journal of Sound and Vibration. – 2015. – Т. 347. – С. 200-217
[4] Hvatov A., Sorokin S.V. Cylindrical waves in structures periodic in polar coordinates //Eccomas Proceedia. – 2017. – С. 509-517.
[5] Hvatov A., Sorokin S. On application of the Floquet theory for radially periodic membranes and plates //Journal of Sound and Vibration. – 2018. – Т. 414. – С. 15-30.
[6] Hvatov A., Sorokin S. Assessment of reduced-order models in analysis of Floquet modes in an infinite periodic elastic layer //Journal of Sound and Vibration, 2019. – Т. 440 – С. 332-345

III. Прочие публикации

[7] Hvatov A. Torque Vibration Isolator // Aalborg University. – 2016.
[8] Хватов А.А. Модель гасителя вибраций в рамках теории Флоке//Тезисы ВНКСФ-23. – 2017.
[9] Хватов А.А. Теория Флоке в анализе виброизоляции // Сборник II ВАК, XXX сессии РАО. – 2017.