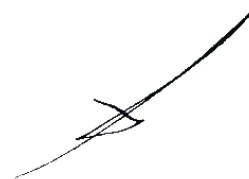


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
Санкт-Петербургский Государственный Морской Технический Университет

На правах рукописи



Хватов Александр Александрович

**Методы теории Флоке для анализа распространения упругих волн в твёрдых
телах с периодической структурой**

Специальность 01.02.04 - Механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.т.н, профессор, Сорокин С.В.

Санкт-Петербург - 2020

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Теория Флоке для одномерных моделей в декартовых координатах.	10
1.1 Продольные колебания стержня.....	11
1.2 Балка в рамках теории Бернулли-Эйлера.....	26
1.3 Балка в рамках теории Тимошенко.....	30
1.4 Колебания цилиндрической оболочки.....	33
1.5 Анализ потока энергии.....	37
1.6 Выводы по Главе 1.....	43
Глава 2. Аналитическое моделирование сложной периодической структуры.....	46
2.1 Бесконечный многокомпонентный периодический волновод.....	46
2.2 Конечные периодические структуры.....	58
2.3 Особенности анализа потока энергии сложной структуры.....	63
2.4 Выводы по Главе 2.....	67
Глава 3. Полосы запираения в полярных координатах.....	69
3.1 Постановка задачи о колебаниях радиально периодичной мембраны.....	70
3.2 Поток энергии в мембране с конечным числом периодических вставок.....	72
3.3 Модификация теории типа брэгговских волокон в полярных координатах.....	76
3.4 Конечные радиально периодические мембраны.....	82
3.5 Возможное обобщение теории типа брэгговских волокон с помощью дифференциального уравнения.	85
3.6 Расширение теории типа брэгговских волокон на периодическую пластину.....	92
3.7 Выводы к Главе 3.....	98
Глава 4. Теория Флоке в задаче Рэлея-Лэмба.....	100
4.1 Последовательность моделей усечённого порядка для упругого слоя.....	101
4.2 Периодический слой.....	107
4.3 Анализ потока энергии.....	112
4.4 Задача о собственных частотах конечного слоя.....	114
4.5 Сравнение моделей.....	118
4.6 Выводы по главе 4.....	122
Заключение.....	124
Список литературы.....	125

Введение

Актуальность задачи

Одна из основных задач механики твёрдого тела – определение поля напряжений. В основе такой задачи, как правило, лежит определение поля перемещений. Для однородных структур задача определения поля напряжений решена и описана для многочисленных случаев. Для периодических структур эта задача решена лишь для частных случаев. Как правило такие задачи рассматриваются с точки зрения распространения волн в периодической структуре.

Задачей, определившей направление исследований в акустике периодических структур, является задача определения вида волновой функции частицы, находящейся в периодическом потенциале. Первыми работами в этой области считаются [1] работы Ф. Блоха. В его работах используется обобщение математического аппарата на трёхмерных случай [2], который был разработан в конце XIX века Г. Флоке и А.М. Ляпуновым. В работах Г. Флоке рассматривалось решение дифференциальных уравнений с периодическим оператором, а в силу периодичности кристаллической решётки, периодичность оператора движения в такой среде очевидна. Блох показал, что электрон, движущийся в периодической кристаллической решётке, имеет особый вид волновой функции, которая определяет наличие полос пропускания и полос запираения, такие диапазоны частот стали называть блоховскими зонами.

В середине XX века встал вопрос о применимости данной теории в акустике. Одной из первых фундаментальных работ по распространению волн бесконечных периодических акустических волноводах является работа Л.Бриллюэна [3], в которой показана связь между акустическими волноводами и задачами электродинамики.

Виброизоляционные эффекты, порождаемые периодичностью хорошо изучены в декартовых координатах для любого числа измерений (в задачах структурной механики для стержней, балок, шахматных плоскостей, трёхмерных решёток). При этом используемый математический аппарат называют теорией Флоке (или теоремой Флоке), для её применения важным является условия

симметрии относительно переноса для оператора, описывающего колебания бесконечной периодической структуры.

В дальнейшем идеи, заложенные Л. Бриллюэном [3], нашли своё продолжение в работах Ю.И. Бобровницкого [4-5], С.В. Будрина [6], В.П. Маслова [7], В.Т. Ляпунова [8] D.J. Mead [9]. Так же теория Флоке-Блоха постепенно уточнялась и расширялась на различные задачи распространения волн в кристаллических решётках [10-11]. В современной акустике периодических структур продолжает развиваться теория фононных кристаллов [12].

По сравнению с другими методами виброизоляции, описанными, например, в [13]. Периодические структуры дают, как правило, больший коэффициент виброизоляции [14] (вплоть до полного виброгашения в случае бесконечного числа периодических вставок), однако, являются более сложными в практической реализации ввиду как сложной формы, так и необходимости точной стыковки между материалами.

Наиболее широко периодические структуры используются в качестве акустических фильтров, которые обладают максимальным коэффициентом виброизоляции для данной полосы частот.

В судостроении использование периодических структур так же широко распространено в виду того, что некоторые части корпуса судна обладают свойством периодичности, иначе говоря, их геометрическая конфигурация повторяется в пространстве. Теория расчета таких конструкций, подверженных влиянию динамических нагрузок основательно проработана и продолжает развиваться в настоящее время.

Применение теории периодичности позволяет говорить о ряде преимуществ по сравнению с “классическим” подходом к решению таких задач [15-19], являясь альтернативным подходом к решению главной задачи виброакустики - задаче виброгашения. Вместо использования различных устройств [13] (демпферы, абсорберы, барьеры) предполагается использовать способность периодических конструкций значительно снижать влияние эффектов, возникающих в результате воздействия динамических нагрузок на конструкции. Таким образом, применение

периодических конструкций целесообразно не только из соображений технологичности, но и с точки зрения решения задачи борьбы с негативными проявлениями вибрации.

В последние десятилетия периодические структуры нашли своё широкое применение в задачах виброизоляции и в других областях. В настоящее время существует множество работ, посвящённых моделированию периодических структур с помощью теории Флоке [20-29], статьи содержат как классический анализ различных структур [20-25] так и различные случаи, вносящие слабую нелинейность, такие как неточность стыковки [21-23] или погрешности в исполнении самой периодической структуры [24].

Численный анализ теории Флоке сформировал новый раздел численного анализа - метод волновых конечных элементов [26], который используется для численного анализа периодических структур [27-29]. Метод волновых конечных элементов так же используется и для анализа непериодических структур, имеющих достаточную протяжённость. Все результаты в данной работе получены аналитическими методами и поэтому более подробный обзор литературы по этому вопросу выходит за рамки данной работы.

Однако, подавляющее большинство работ по-прежнему игнорирует задачи о частотной области применимости теории Флоке, так же слабо освещены вопросы о связи решений, полученных с помощью теории Флоке и собственными частотами бесконечного волновода, для частного случая равномерно нагруженной струны она рассмотрена в [30].

Из вышесказанного можно сформулировать актуальные задачи в области анализа периодических структур:

1. Существовании общих закономерностей теории Флоке для бесконечного волновода и конечных частей;
2. Пределе применимости теории Флоке и связи решений задач акустики и теории Флоке;

3. О существовании решений для моделей, в которых решение системы уравнений не обладает свойством трансляционной симметрии (например, в полярной системе координат).

Цель настоящей работы

На основе аналитических решений для частных случаев, установить закономерности, возникающие при рассмотрении решений задач о распространении волн в однородных телах, задач о телах с периодической структурой в рамках теории Флоке, а также собственных частот конечных частей периодического твёрдого тела.

Научные результаты, выносимые на защиту

1. Метод определения границ полос запираания на основе решения задачи о собственных частотах симметричной ячейки периодичности с симметричными граничными условиями. Метод определения симметричных граничных условий на основе условий би-ортогональности.

2. Анализ полос запираания в полярных координатах. Приближения теории Флоке в полярных координатах в виде полинома и дифференциального уравнения. Метод численного решения дифференциального уравнения теории Флоке в полярных координатах.

3. Метод идентификации мод Флоке для многомодовых акустических волноводов, который позволяет получить детальную виброизоляционных свойств периодических конструкций.

Научная новизна представленных в диссертации результатов.

В рамках исследований впервые:

1. Установлены общие закономерности связи между зонами Флоке для модели деформируемого твёрдого тела с периодической структурой и спектром собственных частот его конечной части;

2. Построены уточнения теории типа брэгговских волокон для случая радиально периодической мембраны и пластины в полярных координатах;

3. Проанализированы особенности применения теории Флоке для задач с дифференциальными операторами, которые воспроизводят несколько распространяющихся мод;

4. Рассмотрена связь между дисперсионными диаграммами для однородного слоя и зонами запираения, получаемыми в рамках теории Флоке для периодического упругого слоя.

Практическая значимость выполненных исследований.

Исследованные и разработанные в работе методы позволяют использовать теорию Флоке для анализа виброизоляционной картины в широком диапазоне частот для различных моделей акустических волноводов, а также использовать современные системы автоматического проектирования для анализа виброизоляционных свойств.

Апробация работы.

На международных конференциях:

- 20th International Congress on Sound and Vibration (2014)
- 6th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (2017),
- Acoustic Black Holes and Structured Plates for Vibration Control (2018)

На всероссийских конференциях:

- ВНКСФ-23 (23я Всероссийская Научная Конференция Студентов Физиков) (2017)
- II ВАК, XXX сессия РАО (2я Всероссийская Акустическая Конференция, совмещённая с 30ой сессией Российского Акустического Общества) (2017)

На семинарах:

- На городском Семинаре по механике в ИПМаш РАН (Институт Проблем Машиноведения Российской Академии Наук), г. Санкт-Петербург 12 января 2017 и 24 октября 2019

- На городском Семинаре по вычислительной и теоретической акустике им. Д.П. Коузова, ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург 4 декабря 2018

Публикации.

Материалы диссертации отражены в 9 печатных работах, из них 1 опубликована в рецензируемых журналах, входящих в перечень журналов, рекомендованных ВАК и 5 в журналах, входящих в международные базы WoS и Scopus.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, заключения и 4 глав. Работа содержит 130 страниц, 90 рисунков, 4 таблицы и библиографию из 63 наименований. Первый параграф каждой главы представляет собой введение в круг рассматриваемых вопросов и постановку задачи. Каждая из глав завершается сводкой основных полученных результатов в виде кратких выводов. В диссертации принята сквозная нумерация формул, рисунков и таблиц внутри каждой главы. Например, ссылка (2.5) означает пятую формулу из второй главы, а рисунок 3.10 – десятый рисунок из третьей главы.

В первой главе описывается иерархия моделей бикомпонентных твёрдых тел с периодической структурой. Для каждой из моделей проведён анализ периодического волновода в рамках теории Флоке в декартовых координатах. Также проводится анализ собственных частот симметричных ячеек таких волноводов при симметричных граничных условиях и демонстрируется связь этой задачи с задачей поиска полос запираания для бесконечного волновода.

Для практических приложений рассматривается соответствие между анализом полос запираания и анализом коэффициента виброизоляции или оценки потерь на вставку.

Во второй главе описывается применение теории Флоке для анализа сложной периодической структуры, состоящей из комбинации бикомпонентных периодических частей. При этом применяются методы, разработанные в главе 1, и оценивается область их применимости. Так же рассматривается отличия анализа потерь на вставку для сложной структуры от анализа, приведённого в главе 1.

В третьей главе рассмотрен бикомпонентный периодический волновод в полярных координатах на примере круговой мембраны. Показано, что приближение теории Флоке в полярных координатах может иметь вид дифференциального уравнения, приведены методы численного решения и аппроксимация в виде полинома. Так же проанализирована задача о собственных частотах конечной периодической мембраны и поток энергии через круговую мембрану.

В четвёртой главе рассмотрены отличительные особенности распространения волн в периодических многомодовых акустических волноводах на примере задачи Рэлея-Лэмба. Разработан метод выделения мод Флоке, которые являются аналогами ветвей дисперсионной диаграммы для задачи об однородном упругом слое. Рассмотрена задача о собственных частотах конечного симметричного упругого слоя, которая также факторизуется на частные задачи о собственных частотах, каждая из которых соответствует своей моде Флоке при этом подчёркивается глубокая связь между задачами о полосах запираания бесконечного периодического волновода и собственных частотах его конечной симметричной периодической части.

Глава 1. Теория Флоке для одномерных моделей в декартовых координатах.

Полное отсутствие распространяющихся волн и, следовательно, распространения энергии предсказывается теорией Флоке для бесконечной периодической структуры. В приложениях тем не менее, может использоваться лишь конечный сегмент бесконечной структуры. Поэтому, на практике зачастую решается задача вычисления потери на периодической вставке, которая может быть достигнута с помощью введения небольшой периодической части в однородный акустический волновод. Подобные задачи рассматривались, например, для искривлённых балок, пластин, цилиндрических оболочек [31-33] с помощью аналитических решений и численных и лабораторных экспериментов. При рассмотрении конечных периодических структур анализ потока энергии нужно дополнить анализом граничных задач, что сводится к задаче вычисления собственных частот конечной периодической структуры с различными граничными условиями.

Связь между полосами запираения и пропускания бесконечной периодической структуры и собственных частот её существенно протяжённой конечной части рассмотрены в [31-36] для различных моделей. Результаты, полученные в этой главе, являются существенным расширением результатов, полученных в классических статьях [34-35]. Несмотря на то, что в статьях D. J. Mead рассмотрена лишь балка Бернулли-Эйлера на равномерно расположенных стойках, обобщения, предложенные [34] без доказательств, оказались справедливы для достаточно широкого набора операторов, рассмотренного в этой главе. В главе рассматривается обобщение результатов, полученных [34-35] в том числе с помощью аппарата условий би-ортогональности для мультимодального волновода [37]. Более того, возможность получения аналитических решений сильно ограничена сложностью алгебраических преобразований, которые в настоящее время упрощены использованием вычислительной техники. Поэтому общие свойства, указанные в [34-35] без доказательств в этой главе подкреплены математическими доказательствами для более сложных моделей.

1.1 Продольные колебания стержня

Материалы раздела основаны на статье автора диссертации [38]

Спектр бесконечного волновода

Рассмотрим установившиеся колебания, описываемые скалярным волновым уравнением ($c^2 = \frac{E}{\rho}$):

$$u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt} \quad (1.1)$$

Рассмотрим простейший пример одномерной структуры. На рисунке 1.1 показана структура, в которой периодически меняются параметры материала: длина l_i , модуль Юнга E_i и плотность ρ_i . Или же, что равносильно, коэффициент при старшей производной.

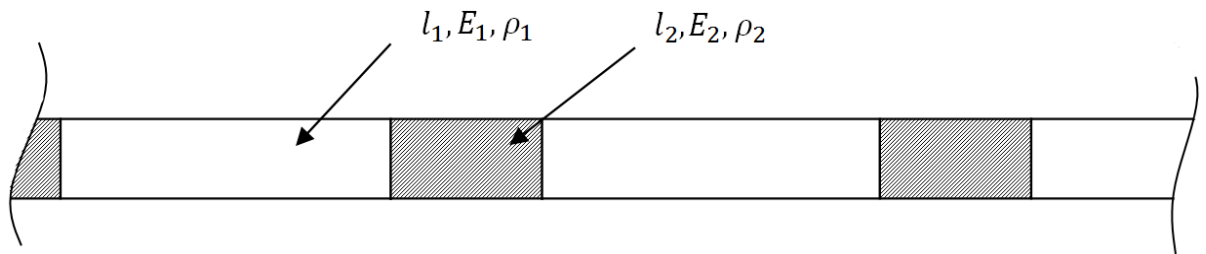


Рисунок 1.1 - Схема бесконечной балки

При предположении, что колебания установились (с зависимостью от времени в виде $u(x,t) = u(x) \exp(-i\omega t)$), дифференциальный оператор имеет вид

$$u'' + k_i^2(x)u = 0$$

Введём безразмерные параметры $\alpha = \frac{E_2}{E_1}$, $\gamma = \frac{l_2}{l_1}$, $\sigma = \frac{c_2}{c_1}$, $\Omega = k_1 l_1$, $\Omega' = k_2 l_2$,

тогда для каждого участка общее уравнения (1.1) решение имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(x) &= C_{11} \exp(i\Omega x) + C_{12} \exp(-i\Omega x) \\ u_2(x) &= C_{21} \exp(i\Omega' x) + C_{22} \exp(-i\Omega' x) \\ u_3(x) &= C_{31} \exp(i\Omega x) + C_{32} \exp(-i\Omega x) \end{aligned}$$

В этой главе, если не сказано иначе, используется следующий набор безразмерных параметров

$$\gamma = 2; \sigma = 1.5; \alpha = 2.5$$

Во всей диссертации считается, что, если не сказано иначе, длины измеряются в длинах «белой» ячейки, то есть $\bar{x} = x / l_1$, при этом для простоты черта над координатой опускается.

Для каждого блока мы ставим условия стыковки, однако, их недостаточно для того, чтобы замкнуть систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} u_1(1) &= u_2(1) & u_2(1 + \gamma) &= u_3(1 + \gamma) \\ u'_1(1) &= \alpha u'_2(1) & \alpha u'_2(1 + \gamma) &= u'_3(1 + \gamma) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для замыкания мы пользуемся теоремой Флоке, которая в этом случае имеет простую форму – колебания через период отличаются на постоянную, не зависящую от выбора блоков (здесь и далее Λ обозначает постоянную распространения)

$$\begin{aligned} u_1(0) &= \Lambda u_3(1 + \gamma) \\ u'_1(0) &= \Lambda u'_3(1 + \gamma) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь мы связываем первый и третий блок. В итоге спектральная задача сводится к решению квадратного уравнения

$$D(\Lambda, \Omega) = \Lambda^2 + a_1(\Omega)\Lambda + 1 \quad (1.4)$$

При этом коэффициент $a_1(\Omega)$ для этой задачи можно выписать в явном виде как:

$$a_1(\Omega) = \frac{(\alpha^2 + \sigma^2) \sin(\Omega) \sin\left(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}\right)}{\alpha\sigma} + 2 \cos(\Omega) \cos\left(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}\right)$$

Полином (1.4) определяет зависимость параметра Флоке Λ от частоты Ω , которая имеет вид, показанный на рисунке 1.2.

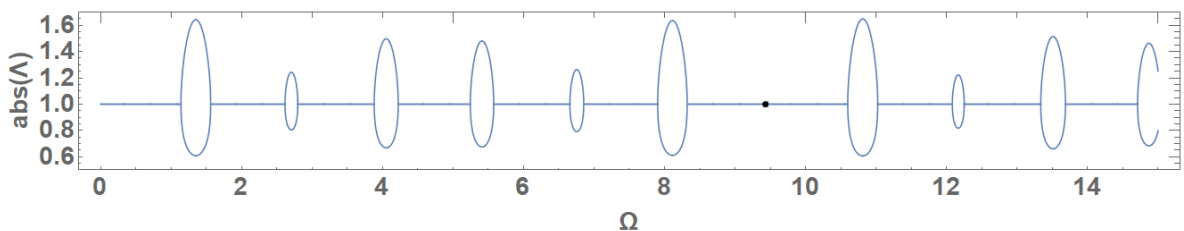


Рисунок 1.2 - Корни уравнения $D(\Lambda, \Omega) = 0$

На диаграмме показана зависимость значения абсолютной величины постоянной распространения $abs(\Lambda)$ от частоты Ω . При этом можно соотнести константу распространения Λ с параметром Блоха соотношением $\Lambda = \exp(iK_B)$, где K_B - параметр Блоха, от частоты. Зоны $abs(\Lambda) = 1$ соответствуют блоховским зонам пропускания, а зоны $abs(\Lambda) \neq 1$ - полосам запираия. Эта диаграмма определяет волноводные свойства системы.

Границы между полосами запираия и пропускания полностью определяются нулями дискриминанта квадратного уравнения $D(\Lambda, \Omega) = 0$ по Λ

$$\begin{aligned}
 Discr = a_1(\Omega)^2 - 4 = & \frac{(\alpha^2 + \sigma^2)^2 \sin^2(\Omega) \sin^2\left(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}\right)}{\alpha^2 \sigma^2} - \\
 & - \frac{\left((\alpha^2 + \sigma^2) \sin(2\Omega) \sin\left(\frac{2\gamma\Omega}{\sigma}\right) + 4\alpha\sigma\right)}{\alpha\sigma} + \\
 & + 4 \cos^2(\Omega) \cos^2\left(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}\right) = 0
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Положение нулей дискриминанта по отношению к полосам запираия показано на рисунке 1.3. Из рисунка видно, что они полностью совпадают с границами полос пропускания и запираия, показанными на рисунке 1.2

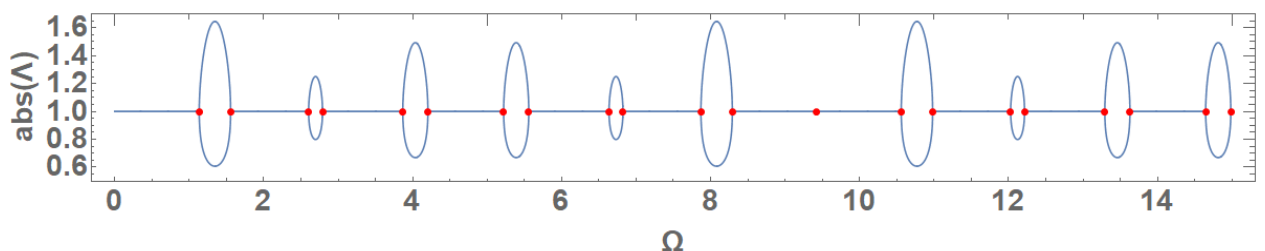


Рисунок 1.3 - Нули дискриминанта (1.5) (точки) на фоне полос запираия

Частота $\Omega_1^* = 3\pi$ показанная на рисунках 1.2 и 1.3 точкой соответствует полосе запираия нулевой ширины, и она так же является нулём дискриминанта. Данная частота является первой частотой из семейства Ω_k^* , которое появляется при определённом соотношении параметров, а именно когда отношение $\frac{\gamma}{\sigma} \in \mathbb{Q}$ рационально. При невыполнении условий, накладываемых на соотношение

безразмерных параметров, на месте этой частоты возникает обычная полоса запираания. Более подробно, это семейство и причины его появления описаны в следующем разделе.

Спектр конечной части

Самая простая конечная структура – ячейка периодичности, конечная часть длиной в один период. Она, вообще говоря, может быть вырезана бесконечным числом способов, но интерес представляют только два предельных случая. Рассмотрим первый случай - симметричную ячейку, показанную на рисунке 1.4:

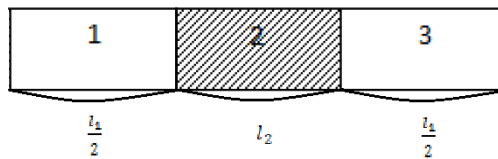


Рисунок 1.4 - Симметричная ячейка периодичности

Симметричная ячейка периодичности имеет длину $1 + \gamma$, что соответствует периоду бесконечной структуры. Общее решение дифференциального уравнения и условия стыковки имеют вид (1.2). В этом случае вместо условий Флоке (1.4) ставятся симметричные граничные условия, которые соответствуют запертым (типа А) и свободным (типа В) концам в терминологии [14].

В ведённых только что обозначениях, условия типа А имеют вид

$$\begin{aligned} u_1\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ u_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\right) &= 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Для случая свободных концов (тип В)

$$\begin{aligned} u_1'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ u_3'\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\right) &= 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Заметим, что условия (1.6) и (1.7) содержат функции одинаковой чётности, при этом чётность может быть определена произвольно, если функции в (1.6) –

чётные, то (1.7) – нечётные и наоборот. В дальнейшем условия (1.6) мы будем называть условиями типа А или обобщённо-запертыми, а условия (1.7) – условиями типа В или обобщённо-свободными.

Уравнения для нахождения собственных частот структуры, показанной на рисунке 1.4, могут быть получены путём прямой подстановки и имеют вид

$$D_{fix} = -\frac{2i\Omega^2}{\sigma^2} ((\sigma - \alpha)^2 \sin\left(\frac{\Omega(\sigma - \gamma)}{\sigma}\right) + 2(\alpha^2 - \sigma^2) \sin\left(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}\right) - (\alpha + \sigma)^2 \sin\left(\frac{\Omega(\gamma + \sigma)}{\sigma}\right)) = 0 \quad (1.8)$$

$$D_{free} = -\frac{2i\Omega^4}{\sigma^2} ((\sigma - \alpha)^2 \sin\left(\frac{\Omega(\sigma - \gamma)}{\sigma}\right) - 2(\alpha^2 - \sigma^2) \sin\left(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}\right) - (\alpha + \sigma)^2 \sin\left(\frac{\Omega(\gamma + \sigma)}{\sigma}\right)) = 0 \quad (1.9)$$

Заметим, что собственная частота $\Omega = 0$ соответствует движению структуры как твёрдого тела. В случае запертых концов (1.6), эта собственная частота соответствует тривиальному собственному вектору с нулевой амплитудой.

Произведение этих двух характеристических уравнений даёт в точности уравнение для границ полос запираения, как и дискриминант, и отличается от дискриминанта на константу

$$Discr = -4D_{fix} D_{free}$$

Характеристические уравнения (1.8) и (1.9) не имеют общих корней кроме семейства $\sin\left(\frac{\Omega(\gamma + \sigma)}{\sigma}\right) = \sin\left(\frac{\Omega(\sigma - \gamma)}{\sigma}\right) = \sin\left(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}\right) = 0$. При этом, первые два уравнения упрощаются до $\cos(\Omega) \sin\left(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}\right) = 0$. Что вместе с третьим уравнением сводится к $\sin\left(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}\right) = 0$.

Таким образом, общим корням соответствует семейство $\Omega_k^* = \frac{\pi\sigma}{\gamma} m, m \in \mathbb{Z}$.

Для набора параметров, использованных в рисунке 1.2, первый нетривиальный член семейства равен $\Omega_1^* = 3\pi$ (точка на рисунке). Из рисунка 1.2 видно, что на этой частоте появляется полоса запираания нулевой ширины. Более того, величина $\frac{\pi\sigma}{\gamma}$ является периодом повторения картины полос запираания и пропускания в этом случае. Распространение волн в периодическом твёрдом теле и его конечной части будет подробнее рассмотрено ниже.

Таким образом, все собственные частоты одной ячейки периодичности с граничными условиями (1.6) и (1.7) расположены на границах между полосами запираания и пропускания и только на них. На рис.1.5 разным цветом показаны решения характеристических уравнений (1.8)-(1.9) на фоне схематичного изображения полос пропускания и запираания (рисунок 1.2)

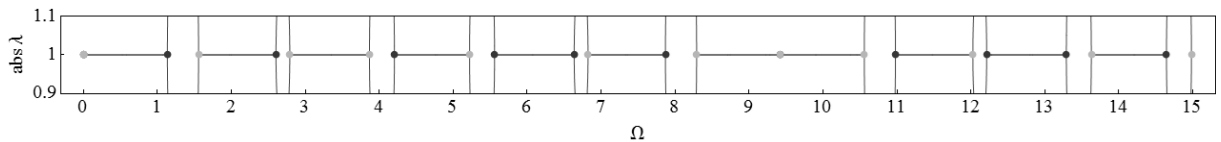


Рисунок 1.5 - Собственные частоты одной симметричной ячейки периодичности на фоне картины полос запираания, разные цвета – граничные условия типа А и В

Частота $\Omega_1^* = 3\pi$ удовлетворяет обоим характеристическим уравнениям и поэтому точки совпадают.

Можно доказать следующие свойства:

- 1) Если $\alpha > \sigma$, тогда первая нетривиальная собственная частота удовлетворяет (1.8), иначе она удовлетворяет уравнению (1.9).
- 2) В случае $\alpha = \sigma$, периодическая структура имеет полосы запираания только нулевой ширины.

Наличие полос нулевой ширины подразумевает, что в такой модели существуют только распространяющиеся волны. В этом случае частоты задач с запертыми и свободными концами полностью совпадают. В физических переменных для более общего случая балки (модуль упругости E , плотность ρ ,

длина ячейки l , высота поперечного сечения h) это условие записывается как (коэффициенты Пуассона считаются одинаковыми, то есть $\nu_1 = \nu_2$):

$$\frac{E_1}{l_1} \cdot h_1 \rho_1 l_1 = \frac{E_2}{l_2} \cdot h_2 \rho_2 l_2 \quad (1.10)$$

Для полного отсутствия полос запираения, произведение продольной жесткости и массы каждого сегмента симметричной ячейки должно быть постоянно. Стоит отметить, что длина (параметр γ) не влияет на наличие полос запираения, так как она очевидно сокращается в уравнении (1.10). Для стержня $h_1 = h_2$ и это условие превращается в классическое уравнение совпадения акустических импедансов: $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$.

Для доказательства вышеизложенных фактов рассмотрим разность

$$\frac{2\sigma^2}{i\Omega^2} D_{fix} - \frac{2\sigma^2}{i\Omega^4} D_{free} = -16(\alpha^2 - \sigma^2) \sin\left(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}\right) \quad (1.11)$$

В слагаемых $\frac{2\sigma^2}{i\Omega^2} D_{fix}$ и $\frac{2\sigma^2}{i\Omega^4} D_{free}$ с помощью множителей слева исключены нетривиальные нули.

Равенство (1.11) показывает, что оба варианта $\frac{2\sigma^2}{i\Omega^2} D_{fix} < \frac{2\sigma^2}{i\Omega^4} D_{free}$ и $\frac{2\sigma^2}{i\Omega^2} D_{fix} > \frac{2\sigma^2}{i\Omega^4} D_{free}$ возможны. Это означает, что собственные частоты для запертых концов и свободных концов равновероятно могут быть как в начале, так и в конце полосы запираения. Отношение безразмерных параметров $\frac{\gamma}{\sigma}$ в (1.11) показывает, что с уменьшением этого соотношения, частота смены порядка собственных частот снижается про.

Второй предельный случай конечной ячейки периодичности выглядит как показано на рисунке 1.6:

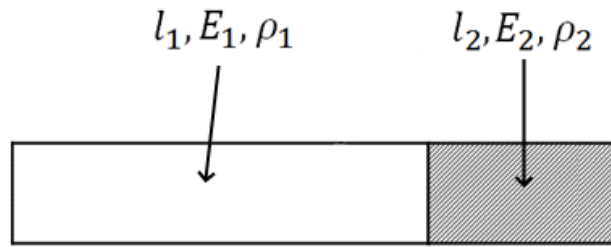


Рисунок 1.6 - Несимметричная ячейка периодичности

Для этой ячейки (она имеет так же, как и симметричная, длину в один период), мы используем те же граничные условия и вычисляем собственные частоты, которые показаны на рисунке 1.7. Очевидно, все собственные частоты (кроме семейства $\Omega_k^* = \frac{\pi\sigma}{\gamma}k$, $k=0,1,2,\dots$) в этом случае попадают в полосу

запирания

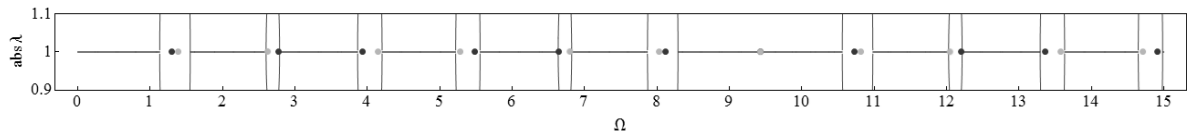


Рисунок 1.7 - Собственные частоты одной симметричной ячейки периодичности на фоне картины полос запирания, разные цвета – граничные условия типа А и В

Частота $\Omega_1^* = 3\pi$ и в этом случае удовлетворяет обоим характеристическим уравнение и поэтому точки совпадают.

Собственные колебания одной ячейки периодичности и форма распространяющейся волны в периодическом твёрдом теле

Анализ собственных колебаний направлен на сравнение форм волн вынужденных колебаний в конечной структуре и распространяющейся волны в периодическом упругом стержне. Так же интересно сравнить форму волн, на частотах, расположенных в полосе запирания и вне её.

Форма свободной волны, существующей в стержне на данной частоте, может быть найдена с помощью системы однородных алгебраических уравнений (1.2) - (1.3) с вырожденной матрицей. Для нахождения собственных колебаний, фиксируется один коэффициент из общего решения уравнения (1.1), например, $C_{11} = 1$, затем первое уравнение в системе (1.2) сокращается, и полученная система решается относительно неизвестных амплитуд форм колебаний C_{ij} . Если требуется

продолжить форму волны по координате в стержне, добавляются лишь новые уравнение в условия стыковки (1.2), но изменений в условия периодичности Флоке не вносится (1.3).

В полосе запираания, свободно распространяющиеся колебания имеют форму нераспространяющейся волны, в полосе пропускания – форму распространяющейся волны, на границе между зонами – форму стоячей волны. Внутри зон Блоха, в данном случае, существуют две волны, которые распространяются или затухают в противоположных направлениях. На границе между зонами, константа распространения – кратный корень уравнения (1.4), и существует лишь одна стоячая волна. Если $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$, то волна симметрична внутри одной ячейки периодичности, иначе, когда $\Lambda_1 = \Lambda_2 = -1$ - кососимметрична. Собственные колебания конечных структур ищутся аналогично. При этом условия периодичности меняются на граничные условия (1.6) или (1.7).

Во всех случаях собственные колебания конечной ячейки с запертыми или свободными концами повторяют форму свободно распространяющейся волны в периодическом стержне на данной частоте. В качестве примера, рассмотрим собственные колебания на частотах границ первой полосы запираания, показанной на рисунке 1.5. Левая граница, $\Omega \approx 1.13$ - собственная частота одной ячейки периодичности с запертыми концами, а правая граница, $\Omega \approx 1.56$ - со свободными. На рисунке 1.8, собственные колебания симметричной ячейки на частоте $\Omega \approx 1.13$ показаны красным на фоне формы собственных колебаний бесконечного волновода, которая показана синим. Как сказано выше, на частоте границ полос запираания существует лишь одна стоячая волна.

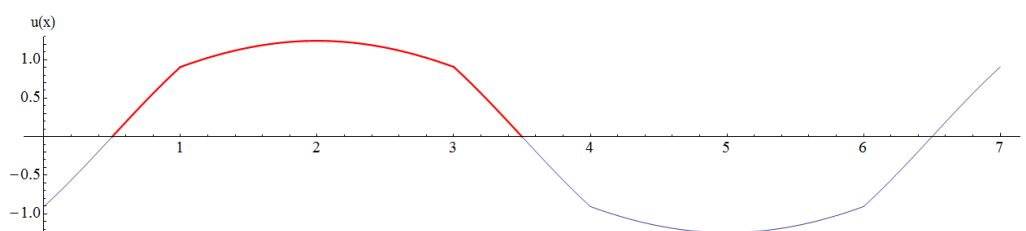


Рисунок 1.8 - Собственные колебания одной симметричной ячейки периодичности с граничными условиями типа А, выделенные на фоне формы собственных колебаний бесконечного волновода на частоте $\Omega \approx 1.13$

Собственные колебания ячейки со свободными концами (1.7) на частоте $\Omega \approx 1.56$ показаны на рисунке 1.9. Это вторая (кососимметричная) мода для этой задачи. Первая мода (симметричная) для этой задачи описывает движение симметричной ячейки периодичности, как твёрдого тела целиком.

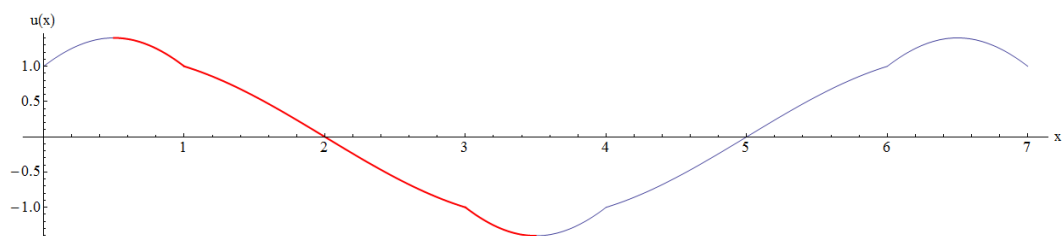


Рисунок 1.9 Собственные колебания одной симметричной ячейки периодичности с граничными условиями типа В, выделенные на фоне формы собственных колебаний бесконечного волновода на частоте $\Omega \approx 1.56$

Выше показано, что собственные частоты одной несимметричной ячейки расположены в полосе запираания. Собственные колебания на частоте $\Omega \approx 3.94$ выделены цветом на рисунке 1.10. Для любых констант Флоке справедливо свойство $\Lambda_1 \Lambda_2 = 1$. В случае полосы запираания это означает, что в стержне существуют две стоячие волны, бесконечно убывающие в противоположных направлениях. Как и в случае симметричной ячейки, собственные колебания конечной части совпадают с формой собственных колебаний бесконечного волновода.

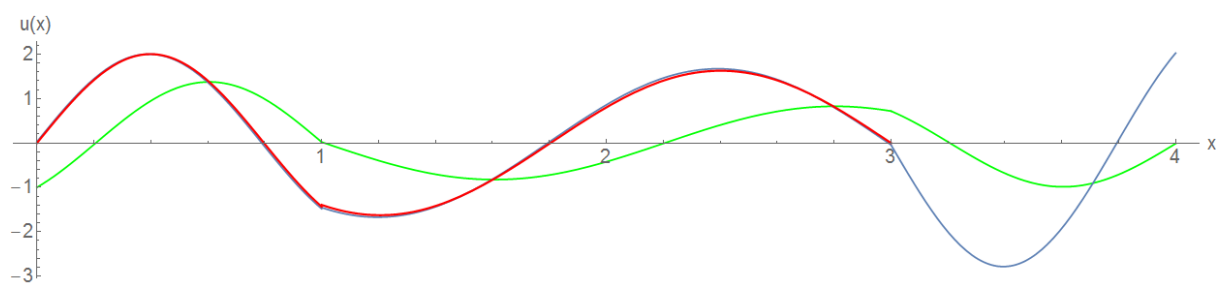


Рисунок 1.10 - Собственные колебания одной несимметричной ячейки периодичности с граничными условиями типа А, выделенные на фоне формы собственных колебаний бесконечного волновода на частоте $\Omega \approx 3.94$

Собственные колебания на частоте Ω_1^*

Как было сказано ранее, семейство собственных частот $\Omega_k^* = \frac{\pi\sigma}{\gamma} k$

соответствует полосе запираания нулевой ширины. Это семейство так же является собственной частотой для одной симметричной ячейки с запертыми и свободными концами. Первая частота семейства $\Omega_1^* = 3\pi$. Для симметричной ячейки с запертыми и свободными концами собственные колебания показаны на рисунке 1.11 и рисунке 1.12 соответственно. Для бесконечного волновода $\Lambda_1 = \Lambda_2 = -1$ на этом семействе частот. В этом случае, если мы попытаемся найти форму собственных колебаний обычным способом, мы увидим, что матрица вырождена, и требуется ещё одно условие, наложенное на константы. Заметим, что волны на границах стоячие, и поэтому искомое условие зависит от симметрии. В случае симметричной волны, вместо равенства константе ставятся два условия $C_{12} = C_{11}$ и $C_{32} = C_{31}$. Найденная таким образом форма собственных колебаний бесконечного волновода соответствует собственным колебаниям симметричной ячейки с запертыми концами (рисунок 1.11). Другой вариант условий $C_{12} = -C_{11}$ и $C_{32} = -C_{31}$ определяет кососимметричную стоячую волну, которая соответствует собственным колебаниям конечной симметричной ячейки со свободными концами (рисунок 1.12).

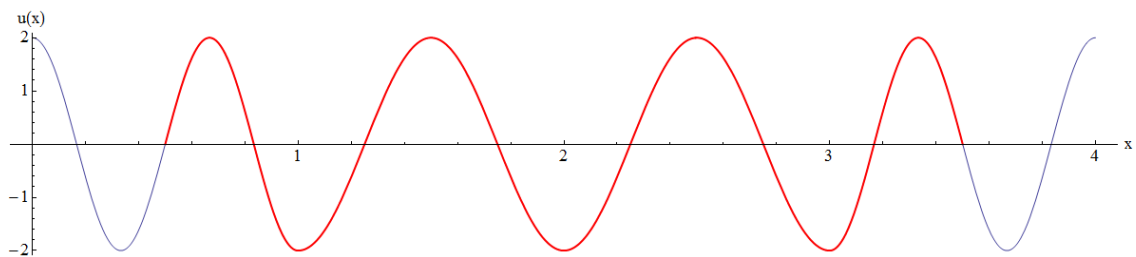


Рисунок 1.11 - Собственные колебания одной симметричной ячейки периодичности с граничными условиями типа А, выделенные на фоне формы собственных колебаний

бесконечного волновода на частоте $\Omega_1^* = 3\pi$

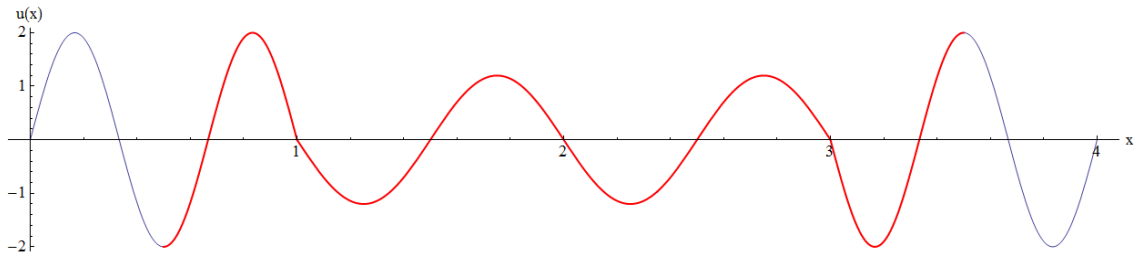


Рисунок 1.12 - Собственные колебания одной симметричной ячейки периодичности с граничными условиями типа В, выделенные на фоне формы собственных колебаний бесконечного волновода на частоте $\Omega_1^* = 3\pi$

Дополнительно, форма собственных колебаний, показанных на рисунке 1.11 может быть получена при малом возмущении $\Omega = 3\pi + \epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$, в этом случае мнимая часть обращается в нуль. Форма собственных колебаний, показанных на рисунке 1.12 может быть получена при малом возмущении $\Omega = 3\pi - \epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$, в этом случае вещественная часть обращается в нуль.

Таким образом, все собственные колебания одной ячейки периодичности имеют форму, совпадающую с частью распространяющейся волны на той же частоте в периодическом твёрдом теле. Эти результаты совпадают и частично расширяют результаты, полученные в [35].

Собственные частоты нескольких ячеек периодичности

Конечная структура может состоять из произвольного числа симметричных ячеек периодичности, при этом оно не обязательно может быть целым. Колебания в каждом сегменте описываются общим решением уравнения (1.1). Условия стыковки в этом случае продолжают (1.4), а граничные условия имеют вид (1.6) или (1.7). Поэтому, свободные колебания N симметричных ячеек (рис.1.4) описываются системой из $4N + 2$ алгебраических уравнений.

Собственные частоты составных структур ниже, чем у одной ячейки периодичности. Поэтому, собственный набор собственных частот растёт. Задача этого раздела, установить попадают ли «новые» собственные частоты (дополнительные по сравнению с собственными частотами одной ячейки) в полосу запираания. Вначале рассмотрим спектр собственных частот структуры, составленной из нескольких симметричных ячеек с запертыми и свободными концами. На рисунке 1.11 и показаны спектры собственных частот для пяти и

пятнадцати симметричных ячеек соответственно. Из рисунка видно, что собственные частоты одной симметричной ячейки по-прежнему присутствуют в спектре, а все остальные собственные частоты попадают в полосу пропускания.

Набор собственных частот для задач с запертыми и свободными концами отличается лишь на собственные частоты соответствующие одной ячейке с запертыми и свободными концами соответственно. На рисунке 1.13 и рисунке 1.14, чёрные точки обозначают собственные частоты общие для обоих типов граничных условий Красные (зелёные) точки обозначают собственные частоты, соответствующие запертым(свободным) концам.

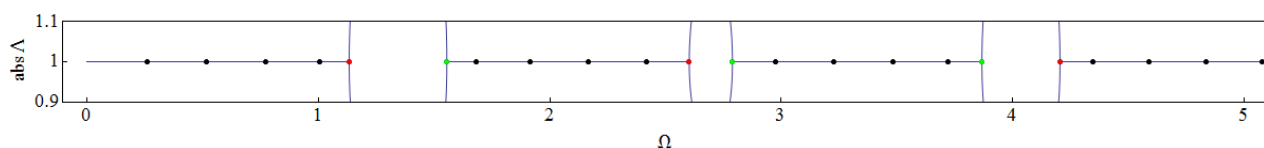


Рисунок 1.13 - Собственные частоты структуры, составленной из пяти симметричных ячеек периодичности, граничные условия типа А и В

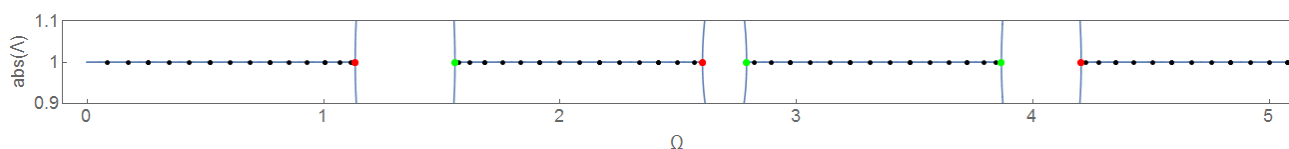


Рисунок 1.14 - Собственные частоты структуры, составленной из пятнадцати симметричных ячеек периодичности, граничные условия типа А и В

При сравнении рисунке 1.13 и рисунке 1.14 можно увидеть, что рост спектра собственных частот с увеличением числа ячеек подчиняется определённой закономерности. Это наблюдение можно проверить напрямую с помощью символического манипулятора, встроенного в Wolfram Mathematica. Пусть $D_{fix}(2)$, $D_{fix}(4)$, $D_{fix}(6)$ - уравнения для набора из 2- 6 симметричных ячеек периодичности с запертыми концами. Тогда, справедливо следующее рекурсивное соотношение ($D_{fix}(1)$ определяется как в (1.8))

$$\begin{aligned}
 D_{fix}(2) &= \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} D_{fix}(1) \left((\alpha^2 + \sigma^2) \sin(\Omega) \sin\left(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}\right) - 2\alpha\sigma \cos(\Omega) \cos\left(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}\right) \right) = \\
 &= D_{fix}(1) \overline{D_{fix}(2)}
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

$$D_{fix}(3) = D_{fix}(1) \frac{2\Omega^4}{\sigma^4} \left(\begin{array}{l} -2(\alpha^2 - \sigma^2)^2 \left(\cos\left(\frac{2\gamma\Omega}{\sigma}\right) + \cos(2\Omega) \right) + \\ + 2(\alpha^2 + \sigma^2)^2 + (\alpha - \sigma)^4 \cos\left(\Omega\left(2 - \frac{2\gamma}{\sigma}\right)\right) + \\ (\alpha + \sigma)^4 \cos\left(\frac{2\Omega(\gamma + \sigma)}{\sigma}\right) \end{array} \right)^2 = \quad (1.13)$$

$$= D_{fix}(1) \overline{D_{fix}(3)}$$

$$D_{fix}(4) = D_{fix}(2) \overline{D_{fix}(4)} = D_{fix}(1) \overline{D_{fix}(2)} \overline{D_{fix}(4)} \quad (1.14)$$

$$D_{fix}(5) = D_{fix}(1) \overline{D_{fix}(5)} \quad (1.15)$$

$$D_{fix}(6) = D_{fix}(1) \overline{D_{fix}(2)} \overline{D_{fix}(3)} \overline{D_{fix}(6)} \quad (1.16)$$

В уравнениях (1.12)-(1.16) с помощью черты обозначается дополнение выражения до полного, например, $\overline{D_{fix}(2)} = D_{fix}(2) / D_{fix}(1)$.

Как видно, спектр частот для любого числа ячеек периодичности содержит собственные частоты одной ячейки периодичности. Дальнейшая закономерность соответствует подобной для однородного волновода, а именно, спектр шести последовательных ячеек, например, содержит спектр двух и трёх, как простых сомножителей числа 6.

Для симметричных ячеек со свободными концами рекурсивные формулы имеют вид ($D_{free}(1)$ определён как в (1.9))

$$D_{free}(2) = D_{free}(1) \overline{D_{fix}(2)} \quad (1.17)$$

$$D_{free}(3) = D_{free}(1) \overline{D_{fix}(3)} \quad (1.18)$$

$$D_{free}(4) = D_{free}(2) \overline{D_{fix}(4)} = D_{free}(1) \overline{D_{fix}(2)} \overline{D_{fix}(4)} \quad (1.19)$$

$$D_{free}(5) = D_{free}(1) \overline{D_{fix}(5)} \quad (1.20)$$

Эти формулы имеют ту же структуру, что и (1.12) -(1.16). Более того, пары (1.12) и (1.17), (1.13) и (1.18) и т.д. отличаются лишь множителем $D_{fix}(1)$ и $D_{free}(1)$ соответственно. Это объясняет тот факт, что спектр набора из нескольких симметричных ячеек при разных граничных условиях отличается лишь на одно

значение, соответствующее одной ячейке с запертыми или свободными концами соответственно. Все остальные собственные частоты располагаются в полосе пропускания. Это соответствует результату, полученному в [30] для линейной системы с точечными массами двух типов.

Собственные колебания нескольких ячеек периодичности

Собственные колебания на частоте $\Omega \approx 1.13$ (запертые концы) структуры из пяти ячеек полностью повторяют собственные колебания одной ячейки, но пятикратно повторённые по направлению оси Ox (см.рис.1.8). То же самое верно и для частоты $\Omega \approx 1.56$ (свободные концы), см.рис.1.9, а также любой другой собственной частоты одной ячейки периодичности.

Распространяющейся волне в стержне соответствует собственная частота в полосе пропускания. Первая собственная частота, показанная на рисунке 1.13, $\Omega \approx 0.26$, доставляет симметричную моду для запертых концов, показанную на рисунке 1.15. В то же время для свободных концов частота $\Omega \approx 0.26$ доставляет кососимметричную моду, показанную на рисунке 1.16. В обоих случаях собственные колебания конечной структуры, составленной из нескольких ячеек, не являются частями форм собственных колебаний бесконечного волновода с той же ячейкой.

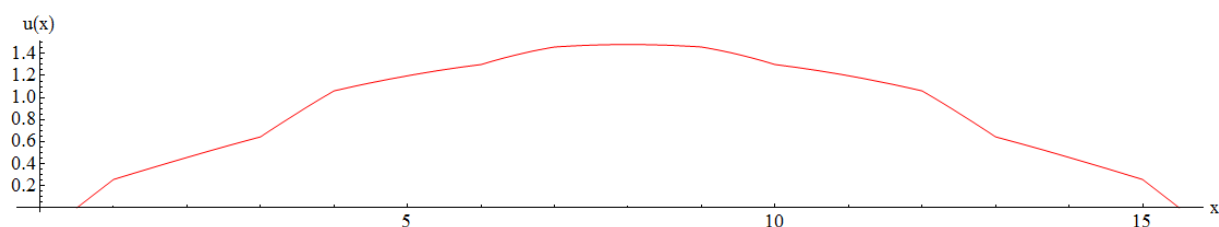


Рисунок 1.15 - Первая симметричная мода, граничные условия типа А, пять ячеек периодичности $\Omega \approx 0.26$

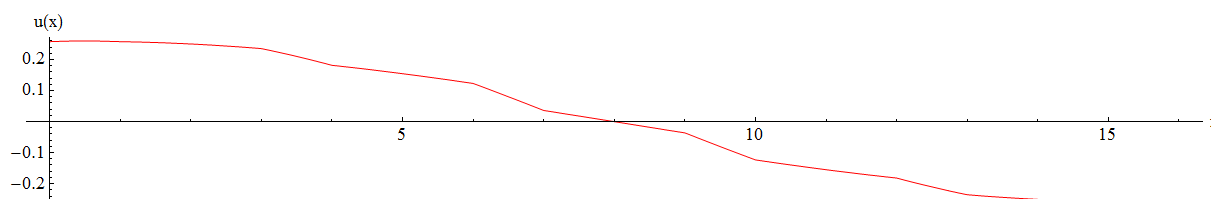


Рисунок 1.16 - Первая несимметричная мода, граничные условия типа В, пять ячеек периодичности $\Omega \approx 0.26$

Спектр структуры, состоящей из нескольких несимметричных ячеек показан на рисунке 1.17. Большие (маленькие) точки – собственные частоты для граничных условий типов А и В для структуры, состоящей из пяти (пятнадцати) ячеек. При этом собственные частоты в полосе запираения относятся к обоим случаям.

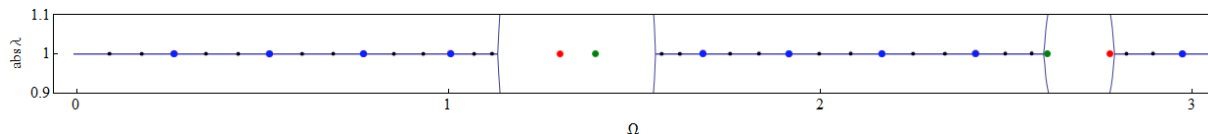


Рисунок 1.17 Собственные частоты структуры, состоящей из пяти (большие точки) и пятнадцати (маленькие точки) несимметричных ячеек периодичности

"Новые" собственные частоты появляются только в полосе пропускания. Собственные частоты в полосе запираения в точности частоты одной несимметричной ячейки. Поэтому, можно считать, что все собственные частоты таких структур, за исключением тех, что соответствуют одной ячейке, попадают в полосу пропускания. Другими словами, добавление ячеек периодичности генерирует собственные частоты только в полосе пропускания. Более того, частоты для запертых и свободных концов совпадают, опять же за исключением собственных частот, соответствующих одной ячейке.

Обобщая результат, можно сказать, что структура, состоящая из нескольких ячеек периодичности, имеет собственные частоты в полосах пропускания, при этом пара частот, которая попадает в полосу запираения в несимметричном случае, может быть найдена с помощью анализа собственных частот одной ячейки периодичности.

1.2 Балка в рамках теории Бернулли-Эйлера

Балка Бернулли-Эйлера является естественным шагом к расширению теории, рассмотренной в предыдущем разделе, с ростом числа поддерживаемых волн теория Флоке лишь увеличивает степень полинома. Однако, для конечной структуры требуются более точные определения симметричных условий, которые и будут рассмотрены в рамках этого раздела.

Перейдём к безразмерным параметрам (для балок, l - длина в продольном направлении, h - высота поперечного сечения, E - модуль упругости, ρ - плотность, ω - частота установившихся колебаний; индекс обозначает номер сегмента):

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho_1 h_1^2 \omega^2}{E_1}}$$

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{h_1}; \gamma = \frac{l_1}{l_2}; \beta = \frac{h_1}{h_2}; \alpha = \frac{E_1}{E_2}; \delta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Отсюда:

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{\rho_2 h_2^2 \omega^2}{E_2}} = \sqrt{\frac{\beta^2 \delta}{\alpha}} \Omega_1$$

В безразмерных параметрах мы получаем следующие уравнения для "белой" и "чёрной" частей соответственно ($w = \frac{w_{dim}}{h_1}$):

$$w_{2k-1}^{IV} - 12\Omega_1^2 w_{2k-1} = 0$$

$$w_{2k}^{IV} - 12 \frac{\beta^2 \delta}{\alpha} \Omega_1^2 w_{2k} = 0$$

, где $k = 1, 2, 3, \dots$ - порядковый номер ячейки, при этом считается, что отсчёт начинается с «белой» ячейки.

Общее решение будем искать в виде:

$$w_i(x) = \sum_{j=1}^4 b_{i,j} \exp(ik_{i,j}x),$$

где $k_{i,j}$ - j -ый корень соответствующего дисперсионного уравнения, соответствующий ячейке с порядковым номером i :

$$k_{2i+1}^4 = 12\Omega_1^2$$

$$k_{2i}^4 = 12 \sqrt{\frac{\beta^2 \delta}{\alpha}} \Omega_1$$

Условия непрерывности имеют вид:

$$\begin{aligned}
w_1(\lambda_1) &= w_2(\lambda_1) & w_2((1+\gamma)\lambda_1) &= w_3((1+\gamma)\lambda_1) \\
w_1'(\lambda_1) &= w_2'(\lambda_1) & w_2'((1+\gamma)\lambda_1) &= w_3'((1+\gamma)\lambda_1) \\
w_1''(\lambda_1) &= \alpha\beta^3 w_2''(\lambda_1) & \alpha\beta^3 w_2''((1+\gamma)\lambda_1) &= w_3''((1+\gamma)\lambda_1) \\
w_1'''(\lambda_1) &= \alpha\beta^3 w_2'''(\lambda_1) & \alpha\beta^3 w_2'''((1+\gamma)\lambda_1) &= w_3'''((1+\gamma)\lambda_1)
\end{aligned}$$

Условия периодичности имеют вид:

$$\begin{aligned}
w_1(0) &= e^{iK_B} w_3((1+\gamma)\lambda_1) \\
w_1'(0) &= e^{iK_B} w_3'((1+\gamma)\lambda_1) \\
w_1''(0) &= e^{iK_B} w_3''((1+\gamma)\lambda_1) \\
w_1'''(0) &= e^{iK_B} w_3'''((1+\gamma)\lambda_1)
\end{aligned}$$

Пусть $e^{iK_B} = \Lambda$. Как и для случая продольных колебаний, мы можем построить зависимость Λ от Ω пользуясь уравнением $D(\Lambda, \Omega) = 0$, но в случае изгибных колебаний $D(\Lambda, \Omega)$ - полином четвёртой степени по Λ . На рисунке 1.18 показана первая пара корней, удовлетворяющая условию $\Lambda_1 \Lambda_2 = 1$.

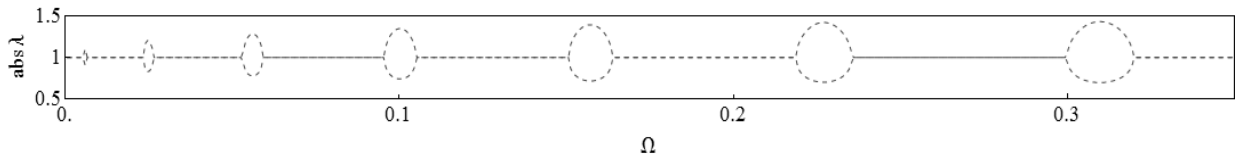


Рисунок 1.18 - Картина собственных частот для бесконечной периодической балки с безразмерными параметрами $\alpha = 0.8, \beta = 1, \gamma = 0.04, \delta = 1, \lambda_1 = 20$

Вторая пара корней, удовлетворяющая условию $\Lambda_1 \Lambda_2 = 1$ характеризует нераспространяющуюся волну во всём рассмотренном частотном диапазоне. Таким образом, полином четвёртого порядка в случае модели балки факторизуется на два полинома второго порядка. И границы полос запираания так же определяются нулями дискриминанта лишь одного из них, то есть нулями дискриминанта квадратного уравнения.

Подобное поведение не всегда характерно, и для более сложных моделей необходимо рассматривать композитные моды, каждая такая мода определяет свою картину полос запираания и вносит вклад в общую картину полос запираания. Более подробно, случай композитных мод в периодическом упругом слое рассмотрен в Главе 4.

Собственные частоты симметричной конечной структуры

Как и в предыдущем случае, для конечной балки мы заменяем условия периодичности на краевые условия. Пользуясь терминологией, введённой для осевых колебаний балки, в этом случае можно ввести симметричные граничные условия, которые представляют собой две группы граничных условий (1.21) и (1.22) с одинаковой чётностью.

$$w_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 \quad w_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\lambda_1\right) = 0 \quad (1.21)$$

$$w''_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 \quad w''_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\lambda_1\right) = 0$$

$$w'_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 \quad w'_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\lambda_1\right) = 0 \quad (1.22)$$

$$w'''_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 \quad w'''_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\lambda_1\right) = 0$$

Как и в предыдущем случае, граничные условия (1.21) мы будем называть условиями типа А, а (1.22) – условиями типа В.

С помощью пакета Wolfram Mathematica можно показать, что определители краевых задач (1.21) и (1.22) дают нам дискриминант $D(\Lambda, \Omega)$, как и в случае продольных колебаний. Но формулы для дискриминанта и определителей (1.21) и (1.22) очень сложны для проверки вручную, поэтому, выражение для них здесь не приводится. Однако, свойство совпадения нулей дискриминанта и собственных частот симметричной ячейки всё ещё выполняется. Иллюстрация к доказательству приведена на рисунке 1.19:

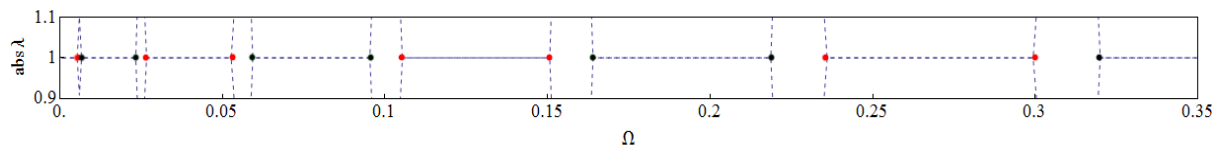


Рисунок 1.19 - Собственные частоты (1.21) (красный) и (1.22) (зелёный)

$$n = 1, \alpha = 0.8, \beta = 1, \gamma = 0.04, \delta = 1, \lambda_1 = 20$$

При добавлении в структуру большего числа ячеек, новые собственные частоты появляются в полосах пропускания:

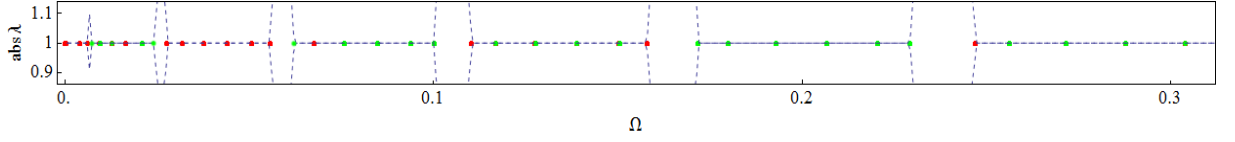


Рисунок 1.20 - Собственные частоты (1.21) и (1.22) $n = 5$, $\alpha = 0.8$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.04$, $\delta = 1$, $\lambda_1 = 20$

1.3 Балка в рамках теории Тимошенко

Балка Тимошенко используется в том числе и для высокочастотного моделирования из-за того, что дисперсионная диаграмма этой модели учитывает дополнительную частоту отсечки задачи упругого слоя. Однако, на низких частотах, дисперсионные диаграммы балок Бернулли-Эйлера и Тимошенко совпадают. Поэтому, интересно сравнить картины полос запираания обеих моделей на низких частотах.

Для сравнения с теорией Бернулли-Эйлера, мы используем те же безразмерные параметры (для балок, l - длина в продольном направлении, h - высота поперечного сечения, E - модуль упругости, ρ - плотность, ω - частота установившихся колебаний; индекс обозначает номер сегмента):

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho_1 h_1^2 \omega^2}{E_1}}$$

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{h_1}; \gamma = \frac{l_1}{l_2}; \beta = \frac{h_1}{h_2}; \alpha = \frac{E_1}{E_2}; \delta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{\rho_2 h_2^2 \omega^2}{E_2}} = \sqrt{\frac{\beta^2 \delta}{\alpha}} \Omega_1$$

С учётом этих параметров, уравнения Тимошенко примут вид ($w = \frac{w_{dim}}{h}$):

$$\begin{cases} w'_{2k-1} + \frac{2(1+\nu)}{\kappa} \Omega_1^2 w_{2k-1} - \psi_{2k-1} = 0 \\ \left(\frac{6\kappa}{(1+\nu)} w'_{2k} + \left(\Omega_1^2 - \frac{6\kappa}{(1+\nu)} \right) \psi_{2k} + \psi'_{2k} = 0 \right. \end{cases} \quad (1.23)$$

,где $k = 1, 2, 3, \dots$, - порядковый номер ячейки, w - смещение, ψ - поворот
(здесь и далее считается, что балка имеет прямоугольное сечение и $\kappa = \frac{\pi^2}{12}$, $\nu = 0.3$
).

Будем искать решения в виде:

$$w_i(x) = \sum_{j=1}^4 w_{i,j} \exp(ik_{i,j}x)$$

$$\psi_i(x) = \sum_{j=1}^4 \psi_{i,j} \exp(ik_{i,j}x),$$

где $k_{i,j}$ j-ый корень соответствующего дисперсионного уравнения:

$$k_i^4 - \left(1 + \frac{2(1+\nu)}{\kappa}\right) \Omega_1^2 k_i^2 - 12\Omega_1^2 + \frac{2(1+\nu)}{\kappa} \Omega_1^4 = 0$$

$$k_i^4 - \left(1 + \frac{2(1+\nu)}{\kappa}\right) \frac{\beta^2 \delta}{\alpha} \Omega_1^2 k_i^2 - 12 \frac{\beta^2 \delta}{\alpha} \Omega_1^2 + \frac{2(1+\nu)}{\kappa} \left(\frac{\beta^2 \delta}{\alpha}\right)^2 \Omega_1^4 = 0$$

Чтобы найти $w_{i,j}$ и $\psi_{i,j}$ нужно ввести модальный коэффициент $\beta_j = \frac{\psi_{i,j}}{w_{i,j}}$,

который легко получается из уравнений (1.23):

$$\beta_j = \frac{-k_j^2 + \frac{2(1+\nu)}{\kappa} \Omega_j^2}{k_j} \quad (1.24)$$

С учётом (1.24), общее решение примет вид:

$$w_i(x) = \sum_{j=1}^4 w_{i,j} \exp(ik_{i,j}x)$$

$$\psi_i(x) = \sum_{j=1}^4 \beta_j w_{i,j} \exp(ik_{i,j}x)$$

Так же, нужно поставить условия стыковки (здесь использованы обозначения для изгибного момента $M_i(x) = \psi'_i(x)$ и изгибающей силы $Q_i(x) = w'_i(x) - \psi_i(x)$):

$$\begin{aligned} w_1(\lambda_1) &= w_2(\lambda_1) & Q_1(\lambda_1) &= \alpha\beta^3 Q_2(\lambda_1) & \alpha\beta^3 M_2((1+\gamma)\lambda_1) &= M_3((1+\gamma)\lambda_1) \\ \psi_1(\lambda_1) &= \psi_2(\lambda_1) & w_2((1+\gamma)\lambda_1) &= w_3((1+\gamma)\lambda_1) & \alpha\beta^3 Q_2((1+\gamma)\lambda_1) &= Q_3((1+\gamma)\lambda_1) \\ M_1(\lambda_1) &= \alpha\beta^3 M_2(\lambda_1) & \psi_2((1+\gamma)\lambda_1) &= \psi_3((1+\gamma)\lambda_1) & & \end{aligned}$$

И условия периодичности:

$$\begin{aligned}
w_1(0) &= \Lambda w_3((1 + \gamma)\lambda_1) \\
\psi_1(0) &= \Lambda \psi_3((1 + \gamma)\lambda_1) \\
M_1(0) &= \Lambda M_3((1 + \gamma)\lambda_1) \\
Q_1(0) &= \Lambda Q_3((1 + \gamma)\lambda_1)
\end{aligned}$$

Как выше $\Lambda = e^{iK_B}$. И определитель системы - $D(\Lambda, \Omega)$ представляет собой полином четвёртой степени по Λ .

Результаты, получаемые исходя из теории Тимошенко часто сравниваются с результатами теории Бернулли-Эйлера:

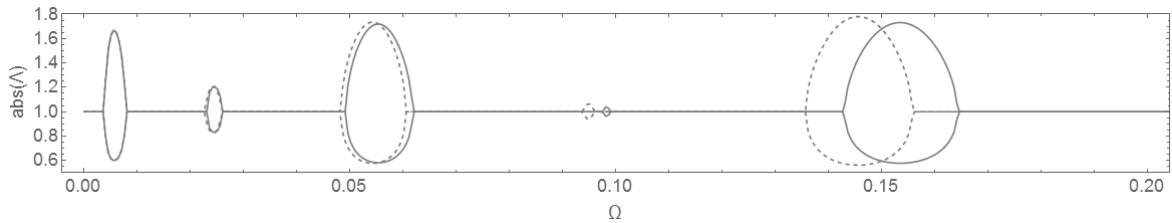


Рисунок 1.21 - Сравнение зон для теории Бернулли-Эйлера (пунктирные) и теории Тимошенко

Очевидно, что полосы записания, предсказываемые теорией Тимошенко отличаются от предсказанных теорией Бернулли-Эйлера, но на низких частотах ($\Omega \leq 0.1$), предсказание согласуется с теорией Тимошенко.

Собственные частоты конечной симметричной балки

Как и ранее для конечной структуры мы ставим граничные условия вместо условий периодичности. Для того, чтобы показать свойства собственных частот симметричной ячейки периодичности, среди всех возможных условий, мы выбираем две группы условий с одинаковой чётностью (здесь, $M_i(x) = \psi'_i(x)$ и $Q_i(x) = w'_i(x) - \psi_i(x)$) они примут вид:

$$\begin{aligned}
w_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 & \quad w_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\lambda_1\right) = 0 \\
M_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 & \quad M_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\lambda_1\right) = 0
\end{aligned} \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 & \quad \psi_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\lambda_1\right) = 0 \\
Q_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 & \quad Q_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\lambda_1\right) = 0
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Для условий граничных задач (1.25) и (1.26) расположение собственных частот имеет вид:

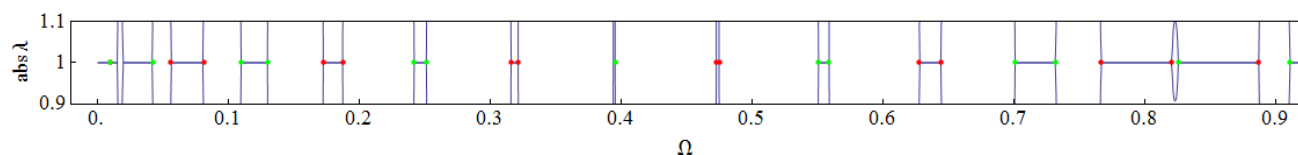


Рисунок 1.22 - Собственные частоты одной симметричной ячейки периодичности с граничными условиями типов А и В $n = 1, \alpha = 0.2, \beta = 1, \gamma = 0.04, \delta = 1, \lambda_1 = 20$

Вопрос соответствия собственных частот конечных ячеек и нулей дискриминанта модели твёрдого тела с периодической структурой остаётся открытым - уравнения сложны даже для машинной проверки. Однако мы можем проиллюстрировать закономерность:

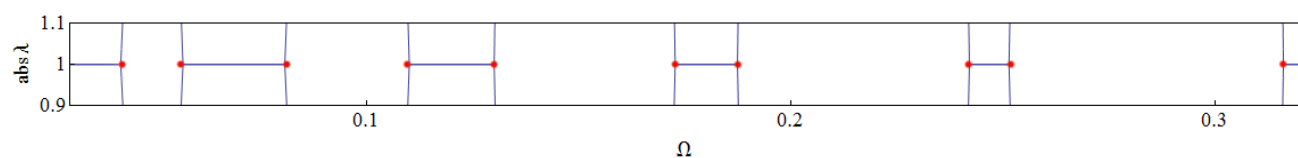


Рисунок 1.23 - Нули дискриминанта (теория Тимошенко) $\alpha = 0.2, \beta = 1, \gamma = 0.04, \delta = 1, \lambda_1 = 20$

Как и ранее для $n \geq 2$ собственные частоты симметричной структуры появляются только в полосах пропускания:

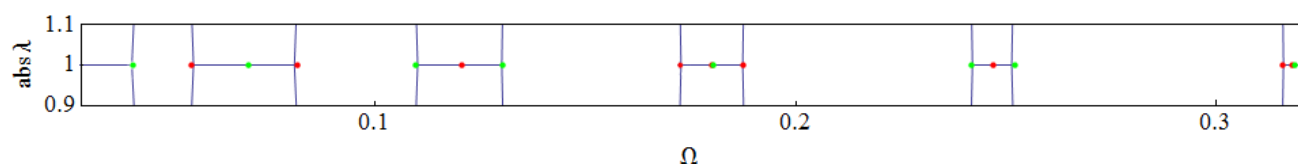


Рисунок 1.24 – Собственные частоты конечной балки (теория Тимошенко)
 $n = 2, \alpha = 0.2, \beta = 1, \gamma = 0.04, \delta = 1, \lambda_1 = 20$

1.4 Колебания цилиндрической оболочки

В этом разделе рассматривается лишь случай осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки, то есть $m = 0$ в терминологии [39]. Общие уравнения цилиндрической оболочки рассматриваются подробнее в Главе 2. Отметим, что свойства справедливые для осесимметричных колебаний справедливы и для остальных форм колебаний цилиндрической оболочки.

Колебания бесконечной цилиндрической оболочки

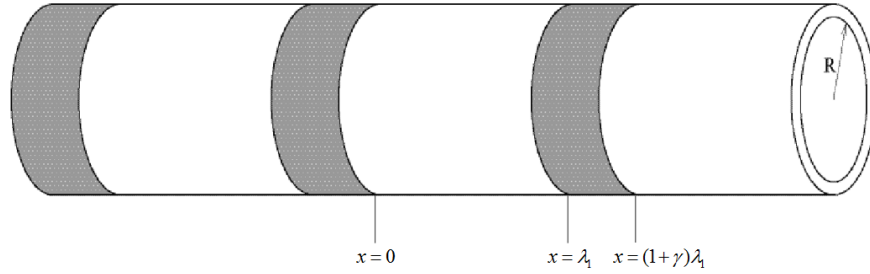


Рисунок 1.25 - Бикомпонентная цилиндрическая оболочка

Будем использовать следующие безразмерные параметры (для балок, l - длина в продольном направлении, h - толщина стенки, R - внутренний радиус, E - модуль упругости, ρ - плотность ω - частота установившихся колебаний; индекс обозначает номер сегмента):

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_1 R^2 \omega^2}{E_1}} \\ \lambda_1 &= \frac{l_1}{R}; \alpha = \frac{E_1}{E_2}; \beta = \frac{h_1}{h_2}; \gamma = \frac{l_1}{l_2}; \delta = \frac{\rho_1}{\rho_2} \\ \Omega_2 &= \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_2 R^2 \omega^2}{E_2}} = \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} \Omega_1\end{aligned}\quad (1.27)$$

С учётом (1.27) система уравнений для осесимметричного случая примет вид

$$(w = \frac{w_{dim}}{R}, u = \frac{u_{dim}}{R}):$$

$$\begin{aligned}u_1'' + \Omega_1^2 u_1 - \nu w_1' &= 0 \\ \nu u_1' + w_1 + \frac{h_1^2}{12R^2} w_1'' - \Omega_1^2 w_1 &= 0\end{aligned}\quad (1.28)$$

Будем искать решение в виде:

$$\begin{aligned}w_i(x) &= \sum_{j=1}^6 w_{i,j} \exp(ik_{i,j}x) \\ u_i(x) &= \sum_{j=1}^6 u_{i,j} \exp(ik_{i,j}x),\end{aligned}$$

где $k_{i,j}$ - j -ый корень соответствующего дисперсионного уравнения:

$$\begin{aligned}
(-k_{2i-1}^2 + \Omega_1^2) \left(1 + \frac{h_1^2}{12R^2} k_{2i-1}^4 - \Omega_1^2\right) + \nu^2 k_{2i-1}^2 &= 0 \\
(-k_{2i}^2 + \frac{\delta}{\alpha} \Omega_1^2) \left(1 + \frac{h_1^2}{12\beta^2 R^2} k_{2i}^4 - \frac{\delta}{\alpha} \Omega_1^2\right) + \nu^2 k_{2i}^2 &= 0
\end{aligned}
, i = 1, 2, 3, \dots$$

Введём модальный коэффициент $\beta_j = \frac{u_{i,j}}{w_{i,j}}$, его вид можно найти из уравнений (1.28) прямым вычислением

$$\beta_j = \frac{ivk_j}{k_j^2 - \Omega_j^2} \quad (1.29)$$

Тогда, общее решение с учётом (1.29) имеет вид:

$$\begin{aligned}
w_i(x) &= \sum_{j=1}^6 w_{i,j} \exp(ik_{i,j}x) \\
u_i(x) &= \sum_{j=1}^6 \beta_j w_{i,j} \exp(ik_{i,j}x)
\end{aligned}$$

Так же как и в предыдущих случаях, для решения задачи о колебаниях бесконечного волновода в рамках теории Флоке нужны условия стыковки (здесь $T_i(x) = u_i'(x) + \nu w_i(x)$):

$$\begin{aligned}
w_1(\lambda_1) &= w_2(\lambda_1) & T_1(\lambda_1) &= \alpha\beta T_2(\lambda_1) & u_2((1+\gamma)\lambda_1) &= u_3((1+\gamma)\lambda_1) \\
w_1'(\lambda_1) &= w_2'(\lambda_1) & w_2((1+\gamma)\lambda_1) &= w_3((1+\gamma)\lambda_1) & \alpha\beta T_2((1+\gamma)\lambda_1) &= T_3((1+\gamma)\lambda_1) \\
w_1''(\lambda_1) &= \alpha\beta^3 w_2''(\lambda_1) & w_2'((1+\gamma)\lambda_1) &= w_3'((1+\gamma)\lambda_1) & & \\
w_1'''(\lambda_1) &= \alpha\beta^3 w_2'''(\lambda_1) & \alpha\beta^3 w_2''((1+\gamma)\lambda_1) &= w_3''((1+\gamma)\lambda_1) & & \\
u_1(\lambda_1) &= u_2(\lambda_1) & \alpha\beta^3 w_2'''((1+\gamma)\lambda_1) &= w_3'''((1+\gamma)\lambda_1) & &
\end{aligned}
\quad (1.30)$$

И условия периодичности:

$$\begin{aligned}
w_1(0) &= e^{iK_B} w_3((1+\gamma)\lambda_1) & w_1'''(0) &= e^{iK_B} w_3'''((1+\gamma)\lambda_1) \\
w_1'(0) &= e^{iK_B} w_3'((1+\gamma)\lambda_1) & u_1(0) &= e^{iK_B} u_3((1+\gamma)\lambda_1) \\
w_1''(0) &= e^{iK_B} w_3''((1+\gamma)\lambda_1) & T_1(0) &= e^{iK_B} T_3((1+\gamma)\lambda_1)
\end{aligned}
\quad (1.31)$$

Пусть $e^{iK_B} = \Lambda$, тогда определитель системы (1.30)-(1.31) $D(\Lambda, \Omega)$ - полином шестой степени по Λ . Поэтому, корни полинома $D(\Lambda, \Omega)$ можно найти только численно, для каждого параметра Ω .

Как и в предыдущих случаях, мы можем найти корни дискриминанта $D(\Lambda, \Omega)$, в данном случае корни найдены численно, так как выражение для дискриминанта громоздко и потому поиск аналитического решения для его корней затруднён:

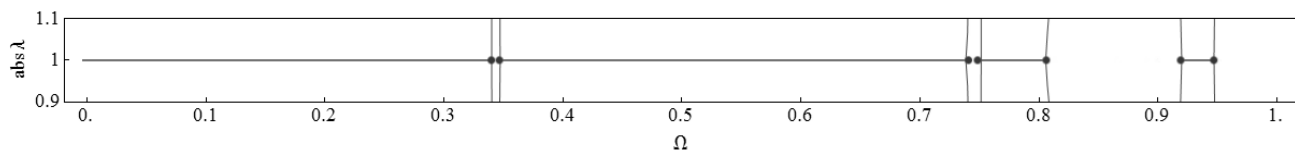


Рисунок 1.26 - Корни дискриминанта системы уравнений цилиндрической оболочки $\alpha = 0.09$,

$$\beta = 1, \gamma = 0.1, \delta = 1, \frac{h_1}{R} = 0.005, \lambda_1 = 20$$

Собственные частоты конечной цилиндрической оболочки

В случае цилиндрической оболочки, граничные условия типа А вводятся как функции одинаковой с перемещением $w(x)$ чётности, а граничные условия типа В – с $w'(x)$ (здесь $T_i(x) = u'_i(x) + \nu w_i(x)$):

$$\begin{aligned} w_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 & \quad w_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 \\ w''_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 & \quad w''_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 \\ u_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 & \quad u_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} w'_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 & \quad w'_1\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 \\ w'''_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 & \quad w'''_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 \\ T_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 & \quad T_3\left(\left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Для краевых задач (1.32) и (1.33) мы получаем следующую картину собственных частот:

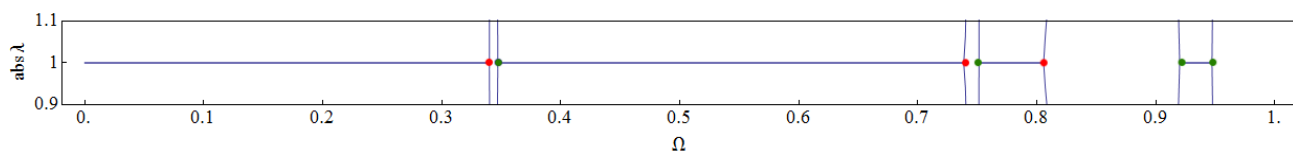


Рисунок 1.27 - Собственные частоты конечной симметричной цилиндрической оболочки

(граничные условия типов А и В) $n = 1$, $\alpha = 0.09$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.1$, $\delta = 1$, $\frac{h_1}{R} = 0.005$, $\lambda_1 = 20$

Нули дискриминанта условий Флоке и собственные частоты конечной ячейки полностью заполняют границы зон.

Если мы рассмотрим собственные частоты для $n \geq 2$ новые собственные частоты появляются только в полосах пропускания:

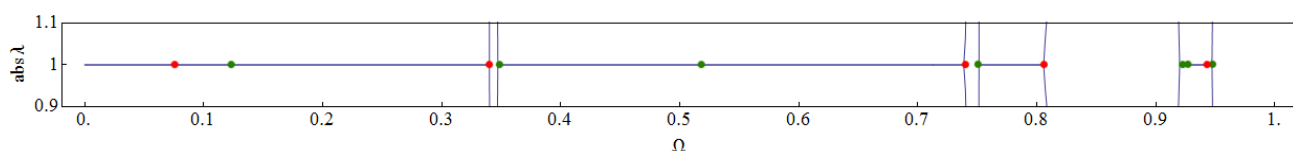


Рисунок 1.28 - Собственные частоты конечной симметричной цилиндрической оболочки

(граничные условия типов А и В) $n = 2$, $\alpha = 0.09$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.1$, $\delta = 1$, $\frac{h_1}{R} = 0.005$, $\lambda_1 = 20$

Анализ повторяет простейший случай продольных колебаний за исключением выбора граничных условий для симметричной ячейки. Ответ на вопрос, можем ли мы однозначно подобрать такие условия, при которых собственные частоты лежат на границах зон запираения положительный. В Главе 2 будет обсуждено соответствие симметричных граничных условий условиям би-ортогональности свободных волн. При этом будет дано более строгое определение симметричных граничных условий.

1.5 Анализ потока энергии

В инженерных приложениях помимо наличия полос запираения так же интересно рассматривать и коэффициент виброизоляции или поток энергии через структуру с некоторым числом периодических вставок. В этом разделе рассмотрены основные свойства и механизмы, которые позволяют оценить степень виброизоляции периодических структур, рассмотренных в предыдущих разделах. Результаты данной главы в целом повторяют результаты численного и экспериментального анализа проведённого в [12,14,27-29,33], однако, внимание

обращается на существенные для данной работы детали. В литературе достаточно хорошо освещён тот факт, что для структур, рассмотренных в Главе 1, в идеальном случае, уровни виброизоляции для периодических структур, как правило достигают нескольких десятков децибел, как показано, например в [13]. Однако, на практике достигаются меньшие значения, как показано в [33]

Продольные колебания стержня

Для анализа виброизоляционных свойств обычно используется схема, изображённая на рисунке 1.29.

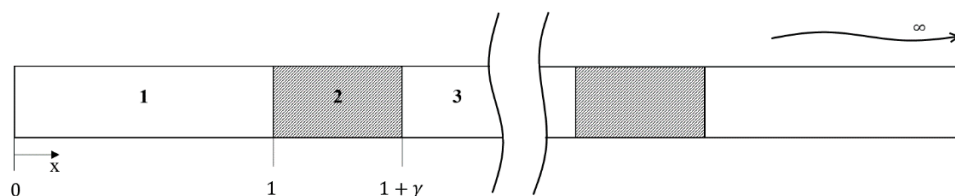


Рисунок 1.29 - Схема анализа виброизоляционных свойств

На рисунке 1.29 к одному концу структуры приложена некоторая сила, а на втором конце, вместо граничных условий поставлены условия Зоммерфельда. В классических приложениях, для анализа виброизоляционных свойств в литературе используется коэффициент виброизоляции, который подразумевает нестационарные колебания, может быть выражен как [13]

$$VI = 20 \lg(v'_0 / v'_n), \quad (1.34)$$

где v'_0 - групповая скорость волнового пакета до периодического включения, а v'_n - после.

В данной главе используется оценка потерь на вставку (1.35). Можно показать, что в случае гармонических колебаний оба подхода для оценки виброизоляционных свойств (1.34) и (1.35) эквивалентны, поэтому для оценки свойств виброизоляции мы будем пользоваться последним, так как он наиболее употребим в литературе по анализу периодических структур.

$$IL_n(\Omega) = 10 \lg(E_0(\Omega) / E_n(\Omega)) \quad (1.35)$$

В уравнении (1.35) $E_n(\Omega)$ - поток энергии с n периодическими вставками, $E_0(\Omega)$ - поток энергии через однородный волновод.

В этом параграфе, для стержня (* обозначает комплексное сопряжение):

$$E(\Omega) = \frac{\Omega}{2} u'(0) (-iu(0))^* \quad (1.36)$$

Для балки Тимошенко (для балки Бернулли-Эйлера $\psi(x) = u'(x); M(x) = u''(x); Q(x) = u'''(x)$):

$$E(\Omega) = \frac{\Omega}{2} Q(0) (-iu(0))^* + \psi(0) (-iM(0))^* \quad (1.37)$$

Максимумы оценки (1.35) соответствуют максимумам коэффициента периодичности, то есть $\max_{\Omega} (IL_n(\Omega)) = \max_{\Omega} (abs(\Lambda))$ внутри данной полосы запираания, как показано на рисунке 1.30. В этой главе, так как используются разные материалы, в графиках используются размерные переменные. Отметим, что частотам $\omega \sim 3000$ Гц соответствует безразмерный параметр $\Omega \sim 0.3 \div 0.6$.

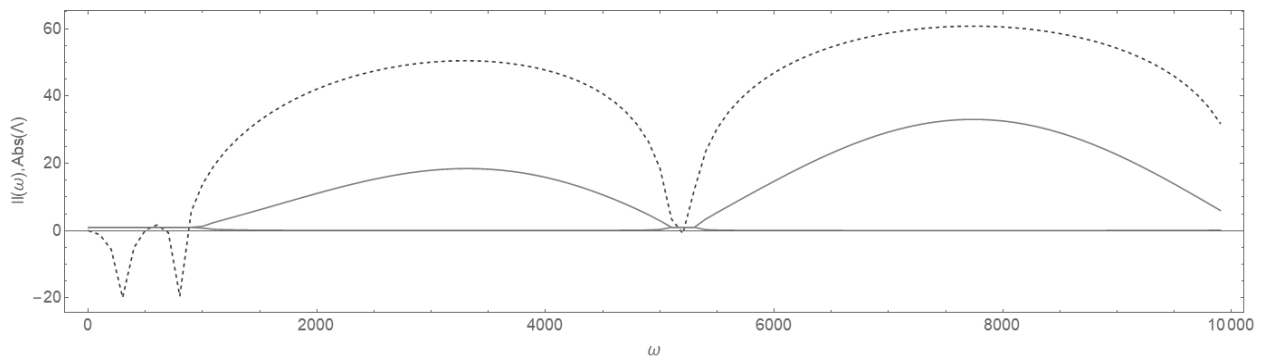


Рисунок 1.30 - Зоны Флоке для случая продольных колебаний стержня для материалов сталь-резина (см. Таблицу 1.1) (сплошная линия) и потери на вставку (штрихованная линия)

Так же, как показано в [13] оценка потерь на вставку увеличивается в кратное число раз при увеличении числа периодических вставок как показано на рисунке 1.31. Поэтому достаточно рассмотреть оценку потерь энергии лишь для определённого числа периодических вставок, чтобы оценить картину виброизоляции.

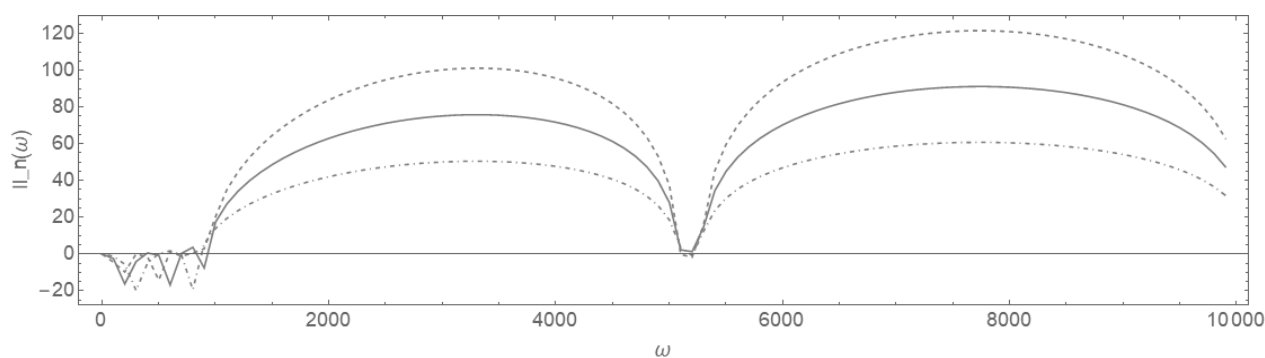


Рисунок 1.31 - Потери на вставку для случая продольных колебаний стержня для 2 (штрихпунктирная линия), 3 (сплошная линия) и 4 ячеек периодичности (штрихованная линия)

Свойства, описанные выше, справедливы для всех структур, приведённых в данной работе. Так как эффект виброизоляции возникает из-за особенной картины интерференции, возникающей из-за разности акустических импедансов на границах между частями периодической структуры, в практических приложениях необходимо знать, как разность импедансов влияет на виброизоляционную картину. В таблице 1.1 показаны параметры материалов, которые используются в этом разделе для анализа виброизоляционной картины периодической структуры.

Таблица 1.1 - Модули упругости и плотности материалов

Материал	Модуль упругости, E, МПа	Плотность, ρ , кг/см ³	Отношение импеданс стали-импеданс материала	Обозначение
Сталь	210	7860	1	
Резина	1	1500	33.17	Сплошная
Железо	200	7870	1.02	Штрихпунктирная
Чугун белый	115	7600	1.37	Пунктирная
Чугун серый	160	7000	1.21	Штриховая
Вольфрам	415	19250	0.45	□
Алюминий	70	2700	2.96	■
Дерево	10	500	18.16	Звезда

Рассмотрим структуры, в которых одна из частей сделана из стали, а вторая поочерёдно из каждого материала, указанного в таблице 1. На рисунке 1.32 показана оценка потерь на вставку 3 ячеек периодичности

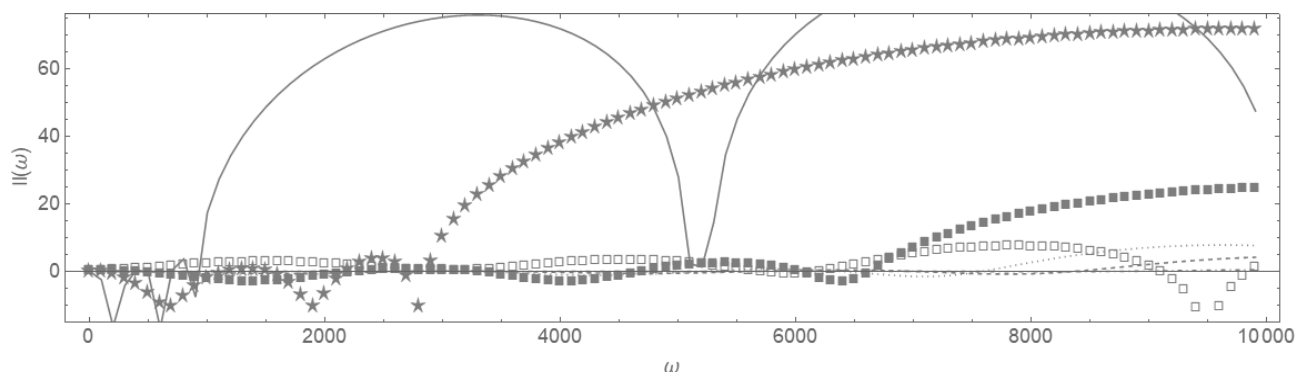


Рисунок 1.32 - Потери на вставку для различных наборов материалов для случая продольных колебаний стержня (обозначения в таблице 1.1)

Анализ картины виброизоляционных свойств показывает, что, во-первых, большая разница импедансов между частями обеспечивает большую степень виброизоляции, однако сдвигает полосы запираания в высокочастотный диапазон.

Для балки Бернулли-Эйлера характерны те же самые свойства, отмеченные для продольных колебаний стержня, однако они выражены не так ярко. Оценка потерь на вставку для трех ячеек периодичности показана на рисунке 1.33

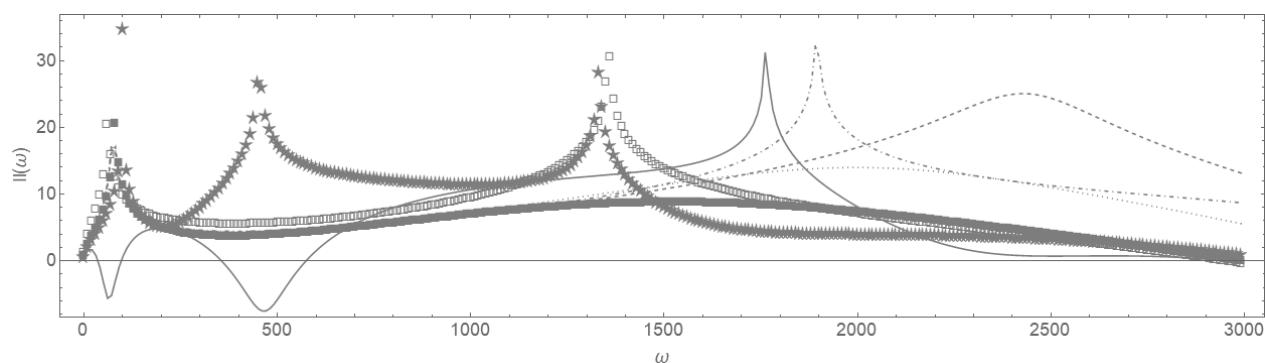


Рисунок 1.33 - Потери на вставку для различных наборов материалов для случая колебания балки Бернулли-Эйлера (обозначения в таблице 1.1)

В этом случае анализ свойств потока энергии, определённо должен быть дополнен анализом картины полос запираания, проведённом в начале этой главы.

Изгибные колебания балки Тимошенко

Анализ в рамках теории Тимошенко на низких частотах, как показано в этой главе интересен, прежде всего с точки зрения сравнения с теорией Бернулли-

Эйлера, так как на низких частотах обе теории предсказывают похожие волновые свойства. Сравнение случая сталь-резина показано на рисунке 1.34

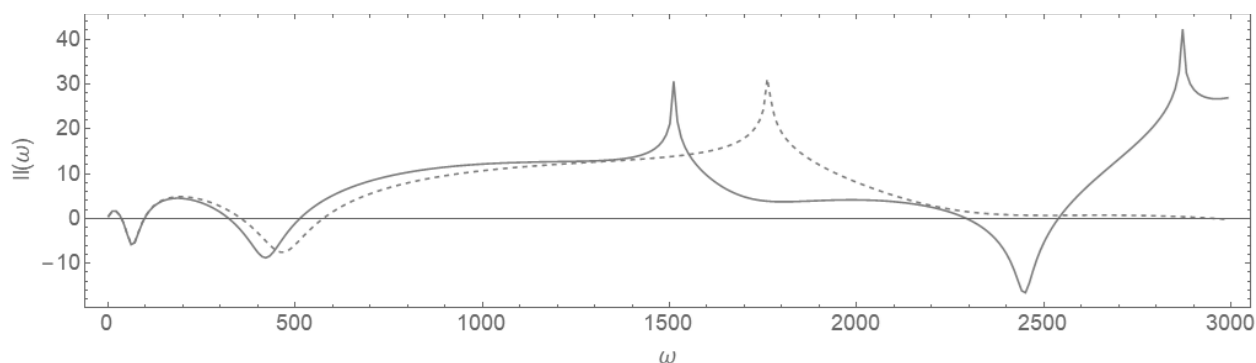


Рисунок 1.34 - Потери на вставку для материалов сталь-резина для балки Бернулли-Эйлера (штриховая линия) и балки Тимошенко (сплошная линия)

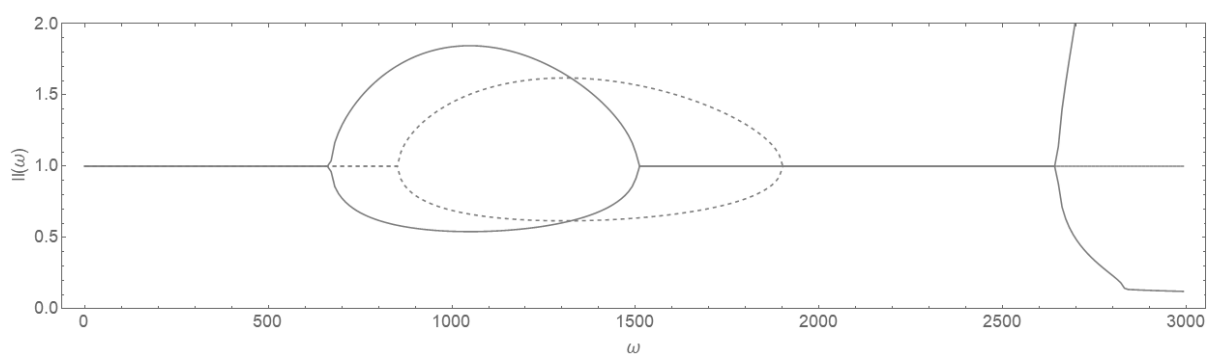


Рисунок 1.35 - Картина полос запираания для балки Бернулли-Эйлера (штриховая линия) и балки Тимошенко (сплошная линия)

На низком диапазоне частот видно соответствие, однако при переходе к частотам 1500 Гц ($\Omega \sim 0.3$), видна разница в предсказаниях, как для потока энергии, так и для анализа в рамках теории Флоке, таким образом, оба способа не противоречат друг-другу.

В целом же анализ потока энергии повторяет анализ для балки Бернулли-Эйлера и рисунок 1.36 полностью соответствует рисунку 1.33

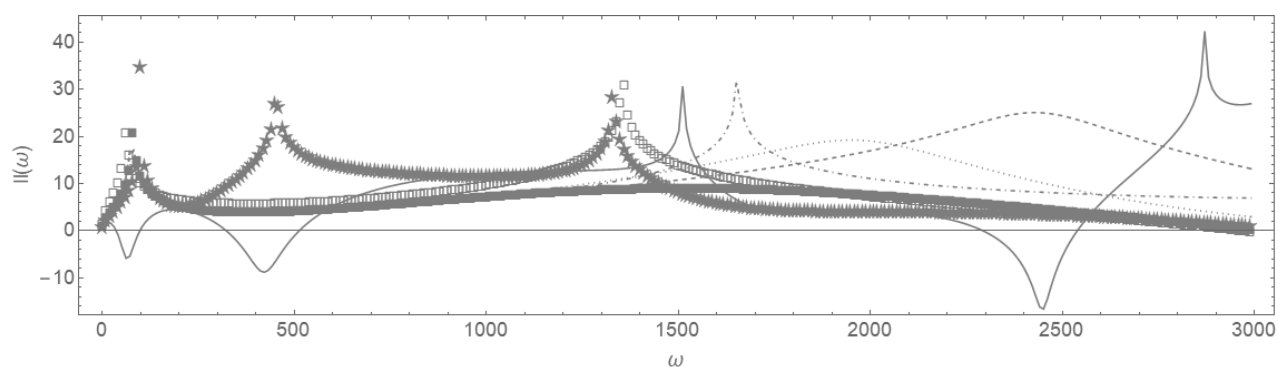


Рисунок 1.36 - Потери на вставку для различных наборов материалов для случая колебания балки Тимошенко (обозначения в таблице 1.1)

Следует отметить, что отдельно анализ продольных и изгибных волн не представляет интереса для практики, в Главе 2 будет приведён совместный анализ. Так же в Главе 4 показана возможность выделения мод Флоке для упругого слоя в рамках задачи Релея-Лэмба, в этом случае продольная и изгибная части образуют две моды Флоке, которые следует рассматривать вместе для наиболее полного анализа картины виброизоляции.

Отметим, что использование разных материалов, которое обеспечивает значительную разность импеданса между частями затруднено практически, так как достичь идеального соединения невозможно. Отчасти, эффекты, вносимые неточностью соединения описаны в [21-23].

Как будет показано в Главе 2, особая интерференционная картина, обеспечивающая виброизоляцию, может быть достигнута не только сменой материала, но и периодической сменой других физических свойств, например, таких как форма и размеры.

1.6 Выводы по Главе 1.

В этой главе рассмотрена иерархия математических моделей бесконечных бикомпонентных периодических волноводов. В главе построена последовательность моделей с возрастающим порядком дифференциальных операторов. Большинство формул в отличие от многих существующих источников получены в аналитическом виде. Как результат, можно выявить несколько общих свойств, которые связывают спектр бесконечного волновода и его конечной части:

- Собственные частоты одной ячейки периодичности с обобщёнными запертыми (граничные условия типа А) и свободными (граничные условия типа В) концами соответствуют границам полос запираения бесконечного волновода.
- Собственные частоты одной несимметричной ячейки периодичности располагаются внутри полосы запираения для всех типов граничных условий.
- Спектр собственных частот составной конечной структуры располагается в полосе пропускания, за исключением пары, которая попадает в полосу запираения в случае одной несимметричной ячейки. Так же спектр структуры, состоящей из большего числа ячеек периодичности, содержит спектр структуры с меньшим числом ячеек периодичности, если меньшее число ячеек является делителем большего числа ячеек.
- Форма собственных колебаний, соответствующих собственной частоте конечной структуры, расположенной на границе полосы запираения совпадает с формой стоячей волны в бесконечной периодической структуре с той же самой частотой.
- Форма собственных колебаний на собственной частоте, лежащей в полосе запираения, повторяет форму неоднородной волны существующей в модели твёрдого тела с периодической структурой в рамках теории Флоке.
- Анализ потока энергии показывает, что большой контраст акустических импедансов обеспечивает высокий уровень виброгашения (несколько десятков децибел) в случае конечной периодической вставки. Чем ниже разность импедансов, тем проще реализовать такую структуру на практике, но тем ниже коэффициент виброизоляции

Эти результаты полностью повторяют наблюдения, описанные в [34-35] на примере балки Бернулли-Эйлера. Однако в этой главе они обобщены на случай операторов более высокого порядка и подкреплены алгебраическими выкладками, которые могут служить доказательством свойств, изложенных в классических статьях [34-35].

Главные результаты Главы 1 – связь между собственными частотами симметричных конечных структур, соответствующих граничным задачам типов А и В, которые формулируются с помощью условий би-ортогональности [37] и полосами запираения, определёнными с помощью теории Флоке.

В следующей главе эти свойства описаны для периодической структуры с более сложной структурой ячейки периодичности. А также в Главе 4 будут обобщены на достаточно общий случай – задачу Рэлея-Лэмба для периодического упругого слоя.

Глава 2. Аналитическое моделирование сложной периодической структуры

В этой главе рассмотрена более сложная периодическая структура, которая составлена из четырёх фрагментов (рисунок 2.1). Методы, применённые в Главе 1 имеют более широкую область применения, чем представленные там примеры. В связи с этим, цель данной главы показать применение теории Флоке для сложной пространственной структуры. Ячейка, показанная на рисунке 2.1, является прототипом виброизолятора ветряной турбины, в дальнейшем мы будем его называть просто виброизолятором.

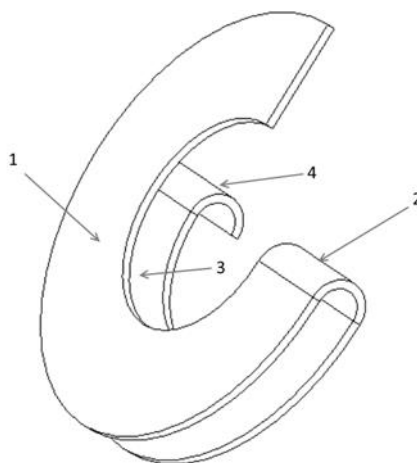


Рисунок 2.1 - Ячейка периодичности виброизолятора

Части 1 и 3 на рисунке 2.1 могут быть представлены, как сегменты круговой тонкой пластины, а части 2 и 4 – как сегменты тонкостенной цилиндрической оболочки. В первом приближении, когда поперечное сечение конструкции имеет небольшое отношение толщины к ширине, ее динамику можно описать в рамках классической теории искривлённых балок (теории Бернулли-Эйлера).

2.1 Бесконечный многокомпонентный периодический волновод

Теорема Флоке так же может быть сформулирована и для случаев более высокой размерности. Тем не менее, главные идеи, показанные в Главе 1, не терпят значительных изменений с ростом числа переменных и уравнений. Подробно, уравнение движения и вывод матрицы Грина для цилиндрической пружины в рамках теории Тимошенко описаны в [39], здесь же мы приведём лишь уравнения для частного случая. Задача о движении цилиндрической пружины в рамках теории

Тимошенко при нулевом угле подъёма переходит в задачу о круговом кольце или, что эквивалентно, в задачу об искривлённой балке в рамках теории Бернулли-Эйлера.

Уравнение колебаний в плоскости кольца описываются следующими уравнениями:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_x}{\partial s} + \frac{1}{R} N_z + p_u - \frac{\partial p_\beta}{\partial s}$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial N_z}{\partial s} - \frac{1}{R} Q_x + p_w + \frac{1}{R} p_\beta,$$

где u - смещение по оси Ox , w - смещение по оси Oz , β - поворот относительно оси Oy , Q_i, N_i - компоненты вектора сил, M_i, T_i - компоненты вектора момента, R - радиус кривизны. Диаграмма сил и моментов приведена на рисунке 2.2 а) и б) соответственно.

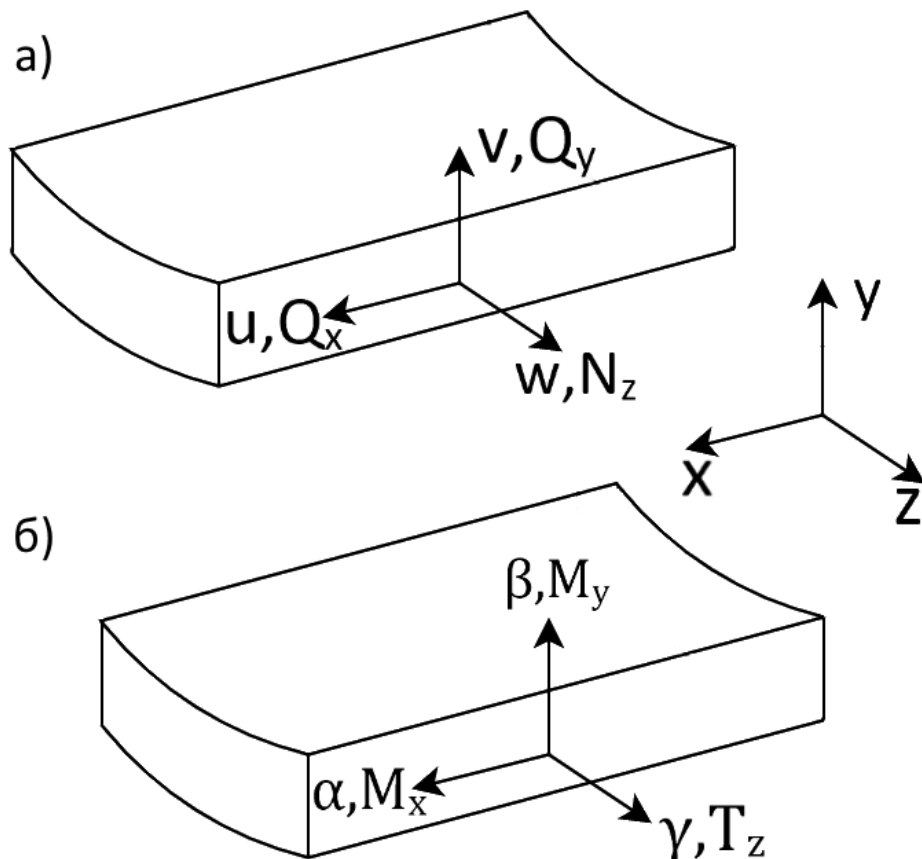


Рисунок 2.2 – Диаграмма сил (а) и моментов (б) для плоского кругового кольца

Обобщенные силы и моменты в рамках предположений теории Бернулли-Эйлера принимают вид:

$$\frac{M_y}{EI_y} = \frac{\partial \beta}{\partial s}, Q_x = -\frac{\partial M_y}{\partial s}$$

$$\frac{N_z}{EA} = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{R}u, \beta = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{R}w$$

Уравнение колебаний в плоскости, перпендикулярной кольца описываются следующими уравнениями:

$$\rho I_p \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \frac{\partial T_z}{\partial s} - \frac{1}{R}M_x + p_\gamma$$

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_y}{\partial s} + p_v + \frac{\partial p_\alpha}{\partial s}$$

Обобщенные силы и моменты с предположениями теории Бернулли-Эйлера принимают вид:

$$\frac{M_x}{EI_x} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{1}{R}\gamma, \frac{T_z}{GI_p} = \frac{\partial \gamma}{\partial s} - \frac{1}{R}\alpha$$

$$Q_y = \frac{\partial M_x}{\partial s} + \frac{1}{R}T_z, \alpha = -\frac{\partial v}{\partial s}$$

,где v - y -смещение по оси Oy , α - поворот относительно оси Ox , γ - поворот относительно оси Oz . Для прямоугольного сечения, $I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_p = \kappa bh^3$, где κ -коэффициент сдвига, вслед за [40] в этой главе значение коэффициента $\kappa = \frac{1}{3}(1 - 0.63\frac{h}{b})$ рассчитывается для прямоугольного сечения.

Бесконечная периодическая структура

Каждая часть искривлённой балки может иметь различный материал, поперечное сечение и геометрию. В случае разных материалов безразмерные параметры могут быть введены как

$$\alpha_{par} = \frac{E_2}{E_1}; \gamma = \frac{l_2}{l_1}; \sigma = \frac{c_2}{c_1}; \lambda = \frac{l_1}{h_1}; \Omega_1 = \frac{\omega h_1}{c_1}; \Omega_2 = \frac{\Omega}{\sigma}; \varepsilon_1 = \frac{h_1}{R_1}; \varepsilon_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

Рассмотрим случай, когда каждый сегмент имеет одинаковые параметры материала и поперечные сечения, но разные радиусы кривизны, тогда набор безразмерных параметров примет следующие значения, которые и будут

использоваться в этой главе, если не сказано иначе (обозначение α_{par} введено для того, чтобы отличать $\alpha(s)$ как угол поворота и α_{par} как параметр введённый в Главе 1)

$$\alpha_{par} = 1; \gamma = 0.5; \sigma = 1; \lambda = 5; \varepsilon_1 = 0.2; \varepsilon_2 = 0.02$$

Заметим, что локальные системы координат (оси, сонаправленные главным осям инерции) отличаются при переходе от сегмента к сегменту и поэтому требуются две координатные системы, показанные на рисунке 2.3.

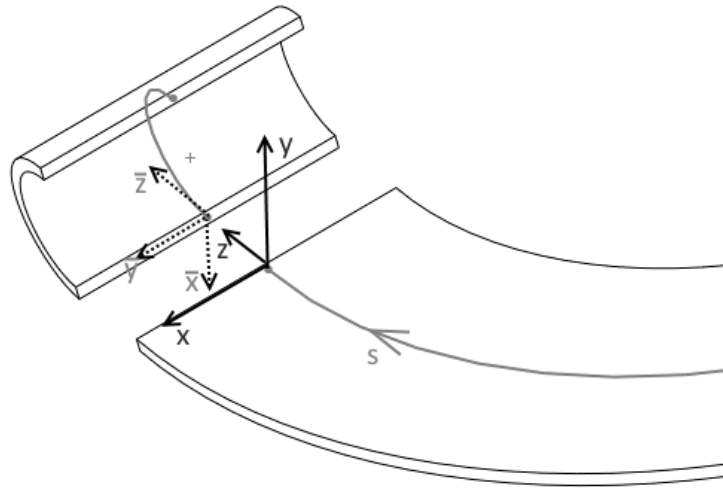


Рисунок 2.3 - Локальные системы координат на границе стыковки

Переход от одной системы координат к другой представляет собой в точности поворот на угол $\pi/2$ по отношению к оси z . Перемещения на прямых стыковки меняются по следующему закону

$$\begin{aligned} u &= \bar{v}, v = -\bar{u}, w = \bar{w} \\ \alpha &= -\bar{\beta}, \beta = -\bar{\alpha}, \gamma = \bar{\gamma} \end{aligned}$$

Чтобы учесть изменение локальных систем координат, введём следующие векторы

$$\begin{aligned} \vec{d}_{i1}(s) &= \{w_{i1}(s), \beta_{i1}(s), u_{i1}(s), v_{i1}(s), \gamma_{i1}(s), \alpha_{i1}(s)\}^T \\ \vec{f}_{i1}(s) &= \frac{1}{E_{i1} I_{i1}^x} \{Q_x^{i1}(s), N_z^{i1}(s), M_y^{i1}(s), Q_y^{i1}(s), M_x^{i1}(s), T_z^{i1}(s)\}^T \\ \vec{d}_{i2}(s) &= \{w_{i2}(s), -\alpha_{i2}(s), v_{i2}(s), -u_{i2}(s), \gamma_{i2}(s), -\beta_{i2}(s)\}^T \\ \vec{f}_{i2}(s) &= \frac{1}{E_{i2} I_{i2}^x} \{Q_y^{i2}(s), N_z^{i2}(s), -M_x^{i2}(s), -Q_x^{i2}(s), -M_y^{i2}(s), T_z^{i2}(s)\}^T \end{aligned}$$

, где $i1=1,3,5,\dots$ и $i2=2,4,6,\dots$. Для всех сил и моментов используется нормализующий множитель $(EI_x)^{-1}$.

Рассмотрим структуру, показанную на рисунке 2.1. Для каждой составляющей части мы определяем функцию Грина, с помощью условий би-ортогональности.

Рассмотрим систему для задачи в плоскости кольца для однородной искривлённой балки

$$\begin{aligned}
 \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial Q_x}{\partial s} + \frac{1}{R} N_z + p_u - \frac{\partial p_\beta}{\partial s} \\
 \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial N_z}{\partial s} - \frac{1}{R} Q_x + p_w + \frac{1}{R} p_\beta \\
 \frac{M_y}{EI_y} &= \frac{\partial \beta}{\partial s}, Q_x = -\frac{\partial M_y}{\partial s} \\
 \frac{N_z}{EA} &= \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{R} u, \beta = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{R} w
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для краткости, рассмотрим задачу без внешнего воздействия, то есть $p_u = p_w = p_\beta \equiv 0$

Будем рассматривать установившееся состояние в виде:

$$\{u(\bar{s}, t), v(\bar{s}, t), w(\bar{s}, t), \gamma(\bar{s}, t)\}^T = \{\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \Gamma\}^T \exp(k_{\text{dim}} \bar{s} - i\omega t) \tag{2.2}$$

При этом дополнительно используются следующие безразмерные параметры:

$$k = k_{\text{dim}} h, s = \frac{\bar{s}}{h}, U = \frac{\bar{U}}{h}, V = \frac{\bar{V}}{h}, W = \frac{\bar{W}}{h}, \varepsilon = \frac{h}{R} \tag{2.3}$$

Для прямоугольного сечения $I_y = \frac{hb^3}{12}$.

После подстановки (2.2)-(2.3) в уравнения (2.1) получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
 W(12k\varepsilon - k^3\varepsilon) + U(-k^4 + 12\Omega^2 - 12\varepsilon^2) &= 0 \\
 W(12k^2 + k^2\varepsilon^2 + 12\Omega^2) + U(-12k\varepsilon + k^3\varepsilon) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Определитель системы (2.4) даёт дисперсионное уравнение (2.5), которое выражено полиномом шестого порядка по k .

$$k^6 + k^4\Omega^2 + 2k^4\varepsilon^2 - 12k^2\Omega^2 + k^2\varepsilon^4 - k^2\Omega^2\varepsilon^2 - 12\Omega^4 + 12\Omega^2\varepsilon^2 = 0 \quad (2.5)$$

Удобно ввести модальный коэффициент $m_w = \frac{W}{U}$, который ищется отдельно для каждого корня дисперсионного уравнения (2.5) с помощью уравнений (2.4) в таком случае можно ввести тривиальный модальный коэффициент $m_u = \frac{U}{U} = 1$. Для прямоугольного сечения остальные модальные коэффициенты выражаются как:

$$\begin{aligned} m_\beta &= (k m_u + \varepsilon m_w) \\ m_{My} &= k m_\beta \\ m_{Nz} &= 12(k m_w - \varepsilon m_u) \\ m_{Qx} &= -k m_{My} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как в методе граничных интегральных уравнений рассматривается задача в одной из полуплоскостей, для акустических приложений матрица Грина должна удовлетворять условиям Зоммерфельда на бесконечности. Поэтому, для составления матриц Грина необходимо выбирать волновые числа, которые удовлетворяют этим требованиям. Более подробно подход к выбору волновых чисел и все необходимые источники приведены в [39]. В данной задаче, среди шести корней дисперсионного уравнения выбирается комплексный корень с отрицательной вещественной частью ($Re(k) < 0$) и два чисто мнимых корня, удовлетворяющих условию $c_{group} = \frac{dk_{din}}{d\omega} > 0$.

Для получения матрицы Грина в данном случае можно использовать условия би-ортогональности. Вывод условий би-ортогональности для данной задачи описан в [37].

Для данной задачи уравнения би-ортогональности имеют вид:

$$M_y^A(s)\beta^B(s) + N_z^A(s)w^B(s) - u^A(s)Q_x^B(s) = 0 \quad (2.7)$$

Или в терминах модальных коэффициентов (2.6) (верхний индекс означает, что модальный коэффициент вычислен для конкретного корня дисперсионного уравнения):

$$m_{My}^{(i)} m_\beta^{(j)} + m_{Nz}^{(i)} m_w^{(j)} - m_u^{(i)} m_{Qx}^{(j)} = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.8)$$

Для задачи в плоскости кольца, каждая строка матрицы Грина представляет собой решение системы дифференциальных уравнений для каждого из трёх возможных атомарных сценариев нагрузки $p_i = \delta(s)$, $p_j = 0$ ($i \neq j; i, j \in \{u, w, \beta\}$)

Для того, чтобы найти матрицу Грина, необходимо перейти к производной дельта-функции, которая имеет единичный скачок. Таким образом, окончательно формируются три атомарных сценария нагрузки: сценарий 1 - $N_z(0) = -\frac{1}{2} \text{sign}(s)$

(что соответствует $p_w = \delta(s)$), сценарий 2 - $M_y(0) = -\frac{1}{2} \text{sign}(s)$ ($p_\beta = \delta(s)$) и сценарий 3 - $Q_x(0) = -\frac{1}{2} \text{sign}(s)$ ($p_u = \delta(s)$).

Рассмотрим атомарный сценарий 1. Запишем соотношения коэффициентов матрицы Грина в следующем виде:

$$\{u(s), N_z(s), M_y(s)\} = \sum_{i=1}^3 \{m_u^{(i)}, m_{N_z}^{(i)}, m_{M_y}^{(i)}\} \Gamma_i^{(1)} \exp(k_i \text{abs}(s)) \text{sign}(s) \quad (2.9)$$

По определению сценария 1:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ M_y(0) &= 0 \\ N_z(0) &= -\frac{1}{2} \text{sign}(s) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставим (2.9) в (2.10) и домножим каждую строку на $m_{Q_x}^{(j)}$, $m_\beta^{(j)}$, $m_w^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) соответственно, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \Gamma_i^{(1)} m_u^{(i)} m_{Q_x}^{(j)} &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 \Gamma_i^{(1)} m_{M_y}^{(i)} m_\beta^{(j)} &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 \Gamma_i^{(1)} m_{N_z}^{(i)} m_w^{(j)} &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Сумма трёх уравнений из (2.12) даёт:

$$\sum_{i=1}^3 \Gamma_i^{(1)} (m_u^{(i)} m_{Q_x}^{(j)} + m_{M_y}^{(i)} m_\beta^{(j)} + m_{N_z}^{(i)} m_w^{(j)}) = -\frac{1}{2} \quad (2.12)$$

Выражение в скобках в точности условие би-ортогональности (2.8) и оно не равно нулю тогда и только тогда, когда $i = j$. Таким образом можно получить все элементы матрицы Грина $\Gamma_i^{(1)}$, где верхний индекс – номер атомарного сценария нагрузки, а нижний – порядковый номер корня дисперсионного уравнения.

$$\begin{aligned}\Gamma_i^{(1)} &= -\frac{1}{2} \frac{m_w^{(i)}}{m_{My}^{(i)} m_\beta^{(i)} + m_{Nz}^{(i)} m_w^{(i)} - m_u^{(i)} m_{Qx}^{(i)}} \\ \Gamma_i^{(2)} &= -\frac{1}{2} \frac{m_\beta^{(i)}}{m_{My}^{(i)} m_\beta^{(i)} + m_{Nz}^{(i)} m_w^{(i)} - m_u^{(i)} m_{Qx}^{(i)}} \\ \Gamma_i^{(3)} &= \frac{1}{2} \frac{m_u^{(i)}}{m_{My}^{(i)} m_\beta^{(i)} + m_{Nz}^{(i)} m_w^{(i)} - m_u^{(i)} m_{Qx}^{(i)}}\end{aligned}\quad (2.13)$$

Окончательно матрица Грина в терминах найденных коэффициентов определяется как:

$$\begin{aligned}G_j^{in}(s, s_0) &= \\ \sum_{i=1}^3 \{ &sign(s) m_u^{(i)}, m_w^{(i)}, m_\beta^{(i)}, m_{Qx}^{(i)}, sign(s) m_{Nz}^{(i)}, sign(s) m_{My}^{(i)} \} \Gamma_i^{(j)} \exp(k_i^{in} abs(s - s_0))\end{aligned}\quad (2.14)$$

С помощью матрицы Грина с использованием свойств дельта-функции, можно получить граничное интегральное уравнение, которое в случае обыкновенного дифференциального уравнения вырождается в функцию, зависящую от границ и точки внутренней области.

$$\delta_{1n} w(s_0) + \delta_{2n} \beta(s_0) + \delta_{3n} u(s_0) = \left[G_n^{in}(s, s_0) \cdot \{ Q_x(s), Nz(s), My(s), -u(s), -w(s), -\beta(s) \} \right]_{s=a}^{s=b}, \quad (2.15)$$

где δ_{ij} - дельта Кронекера $\{ \} \cdot \{ \}$ - векторное произведение, $s = a, s = b$ - координаты границы. Уравнения (2.15) называются граничными интегральными уравнениями.

Для каждой из границ структуры, изображённой на рисунке 2.1 получаем два набора по три (всего, $6 \cdot 8 = 48$) граничных интегральных уравнения (в [39] граничные интегральные уравнения получены для более общего случая цилиндрической пружины) и дополнительно условия стыковки в векторном виде (всего $6 \cdot 6 = 36$ условий стыковки)

$$\begin{aligned}
\vec{d}_1(t_1) &= \vec{d}_2(t_1) \\
\vec{f}_1(t_1) &= \alpha \vec{f}_2(t_1) \\
\vec{d}_2(t_1 + \gamma t_2) &= \vec{d}_3(t_1 + \gamma t_2) \\
\alpha \vec{f}_2(t_1 + \gamma t_2) &= \vec{f}_3(t_1 + \gamma t_2) \\
\vec{d}_3((t_1 + t_3) + \gamma t_2) &= \vec{d}_4((t_1 + t_3) + \gamma t_2) \\
\vec{f}_3((t_1 + t_3) + \gamma t_2) &= \alpha \vec{f}_4((t_1 + t_3) + \gamma t_2)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

В этой главе один поворот по большому радиусу $2\pi R_1$ взят за единицу длины. Так как составляющие части гасителя вибраций короче, чем один полный поворот, удобно ввести части полного поворота как $t_i = \frac{l_i^{(ang)} R_1}{2\pi R_1}$, $l_i^{(ang)}$ - угловая длина (в радианах) i -той части, т.е. t_i - доля полного поворота, которую проходит i -тая часть. Для модели и параметров, используемых в этой главе t_1, t_3 угловая длина частей с большим радиусом кривизны (на рисунке 2.1 $t_1 = \frac{3}{4} = 0.75, t_3 = 0.5$) и t_2, t_4 угловая длина частей с малым радиусом кривизны ($t_2 = t_4 = 0.5$ на рисунке 2.1).

Период структуры – сумма всех поворотов, но так как части с меньшей кривизной имеют меньшую длину дуги (но могут иметь одинаковую угловую длину), нужно использовать безразмерный параметр $\gamma = \frac{l_2}{l_1}$ - отношение длин дуг, тогда период равен $T = t_1 + t_3 + \gamma(t_2 + t_4)$.

С этими обозначениями так же запишем условия Флоке в векторной форме (2*6=12 уравнений)

$$\begin{aligned}
\vec{d}_1(0) &= \Lambda \vec{d}_4((t_1 + t_3) + \gamma(t_2 + t_4)) \\
\vec{f}_1(0) &= \Lambda \vec{f}_4((t_1 + t_3) + \gamma(t_2 + t_4))
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Таким образом получилось $48 + 36 + 12 = 96$ уравнений, что соответствует числу переменных.

Действительно, граничные интегральные уравнения (2.15) для каждой части с условиями (2.16)-(2.17) определяют однородную систему алгебраических уравнений по отношению к неизвестным силам и перемещениям на границах

составных частей изолятора (каждая часть определена с помощью $2*12=24$ констант, что для четырёх частей даёт $4*24=96$).

Пусть $D(\Lambda, \Omega)$ - определитель этой системы. $D(\Lambda, \Omega)$ -полином двенадцатого порядка по Λ , который определяет полосы запираания и пропускания, подобно рассмотренным в Главе 1 случаям. Заметим, что определитель $D(\Lambda, \Omega)$ факторизуется на два полинома шестого порядка по Λ , т.е. $D(\Lambda, \Omega) = D^{w,u}(\Lambda, \Omega)D^{\gamma,v}(\Lambda, \Omega) = D^{\bar{w},\bar{v}}(\Lambda, \Omega)D^{\bar{\gamma},\bar{u}}(\Lambda, \Omega)$. Рассмотрим эти две части по отдельности.

Для структуры, показанной на рисунке 2.4, $D^{w,u}$ определяет изгибно-продольную часть или иначе колебания бесконечной структуры в её плоскости, а $D^{\gamma,v}$ определяет изгибно-крутильную часть или иначе колебания в перпендикулярной плоскости. В пространственном случае на рисунке 2.1, рассмотренном в этой главе, затруднительно определить плоскость, которая содержит всю структуру целиком, поэтому обозначения, которые содержат плоскости колебаний теряют свой смысл

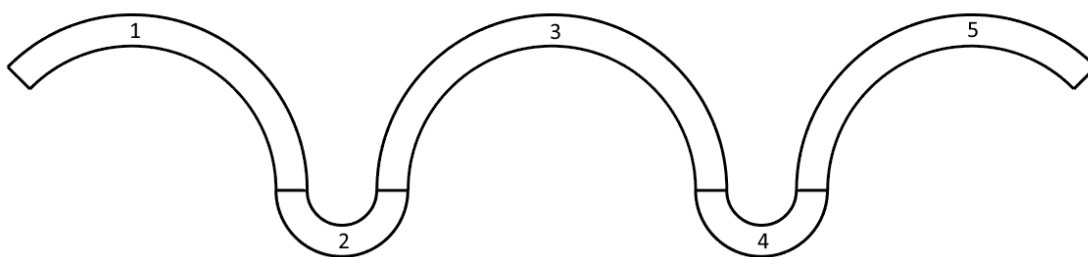


Рисунок 2.4 - Иллюстрация симметричной ячейки периодичности

Оба определителя $D^{w,u}(\Lambda, \Omega)$ и $D^{\gamma,v}(\Lambda, \Omega)$ можно записать в виде

$$D^*(\Lambda, \Omega) = \Lambda^6 + a_5\Lambda^5 + a_4\Lambda^4 + a_3\Lambda^3 + a_2\Lambda^2 + a_1\Lambda + 1$$

Можно определить следующие свойства:

- По теореме Виета и из свойств симметрии волновода, так как свободный член полинома $D^*(\Lambda, \Omega)$ равен 1, то если Λ - корень полинома, то Λ^{-1} так же является корнем
- Полином $D^*(\Lambda, \Omega)$ содержит только чётные функции по Ω в коэффициентах a_i

Можно построить зависимость Λ от Ω , например, из условия $D^{w,u}(\Lambda, \Omega) = 0$. В отличие от случаев, рассмотренных в Главе 1, для полинома существуют три пары решений такие что $\Lambda_1 \Lambda_2 = 1$, то есть три ветви решений $\Lambda_i(\Omega)$: одна пара содержит экспоненциально возрастающее и убывающее решение, то есть полосу запираания (в дальнейшем она будет исключена из рассмотрения, так как она формирует полосу запираания на всём диапазоне частот и не влияет на итоговую картину полос запираания) и две ветви, которые определяют полосы запираания и пропускания. Сказанное выше справедливо для обоих определителей $D^{w,u}$ и $D^{v,v}$. Ниже построена зависимость $\Lambda(\Omega)$ из условия $D^{w,u}(\Lambda, \Omega) = 0$:

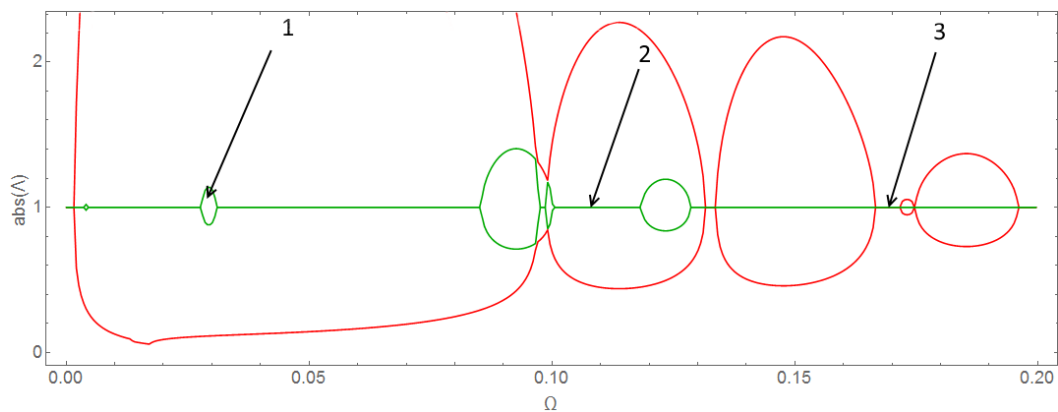


Рисунок 2.5 - Картина полос запираания для $D^{w,u}(\Lambda, \Omega)$: (1) полоса полного запираания, полоса частичного запираания (2), полоса полного пропускания (3)

Можно различать «полную» полосу запираания (отмечена на рисунке цифрой 1), в которой распространение волн полностью заблокировано, она определяется пересечением полос запираания двух ветвей решения (пересечения двух полос запираания на рисунке 2.5). В зоне 1 существуют только экспоненциально растущие и затухающие волны. Так же можно различать «частичную» полосу запираания (отмечена на рисунке цифрой 2), её положение определяется наложением полосы запираания и полосы пропускания разных ветвей решения (пересечение красной полосы запираания и зелёной полосы пропускания и наоборот). В зоне 2 появляется одна бегущая волна. Последний случай, полоса пропускания (отмечена на рисунке цифрой 3), её положение определяется наложением двух полос пропускания разных ветвей решения (зелёной и красной полосы пропускания). В зоне 3 существуют две бегущие волны. Все три зоны содержат так же одну пару

экспоненциально растущей и затухающей волн, которая, как сказано выше, исключена из рассмотрения.

Зависимость $\Lambda(\Omega)$ из отношения $D^{v,\gamma}(\Lambda, \Omega) = 0$ имеет похожую структуру:

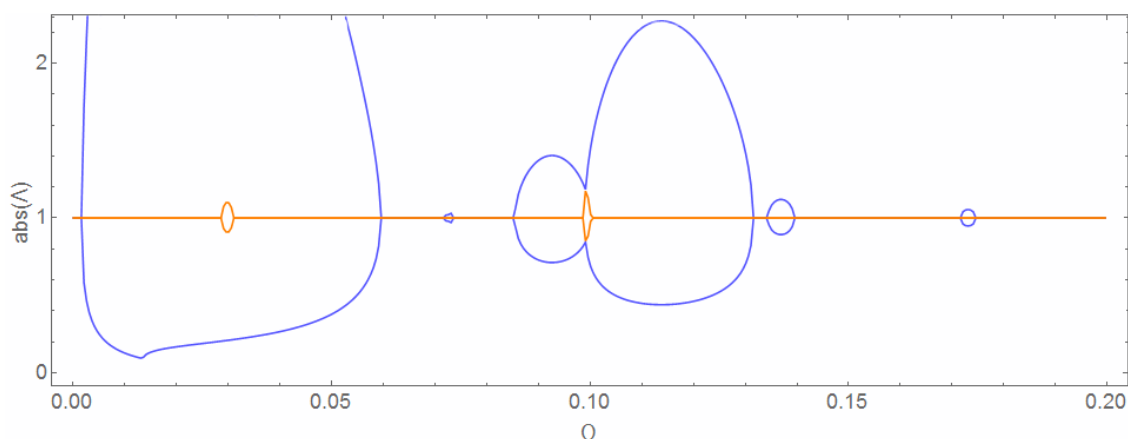


Рисунок 2.6 - Картина полос запираания для $D^{v,\gamma}(\Lambda, \Omega)$

Так как модель рассматривается целиком, обе картины полос запираания для $D^{w,u}$ и $D^{v,\gamma}$ должны рассматриваться одновременно, но для иллюстративности они были разделены. Для сравнения оба рисунка 2.4 и 2.5 можно построить на одном как показано на рисунке 2.7.

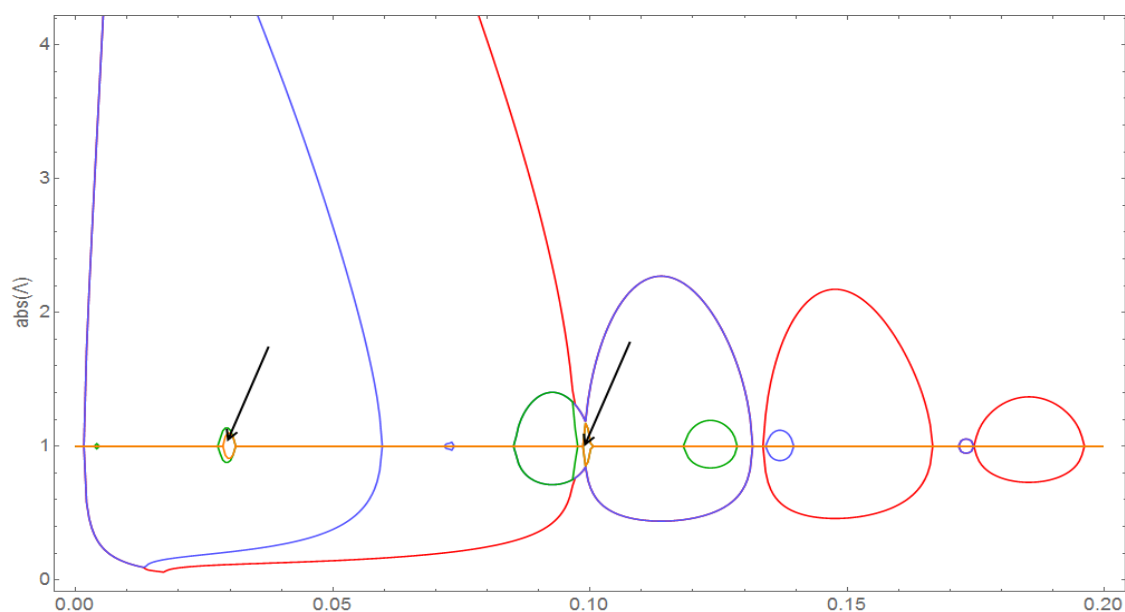


Рисунок 2.7 - Картина полос запираания для $D(\Lambda, \Omega)$ (стрелкой отмечены полосы полного запираания)

Из рисунка 2.6 видно, что существуют зоны (показанные стрелкой), где все шесть ветвей решения полинома двенадцатого порядка имеют значения параметра

распространения $\text{abs}(\Lambda) \neq 1$ и поэтому распространение волн полностью заблокировано.

В случае продольных колебаний, рассмотренном в Главе 1, все вычисления были проверены с помощью метода граничных интегральных уравнений. В более сложных случаях, метод матриц перехода, использованный как основной в Главе 1, становится неустойчивым. Матрицы, полученные в результате решения методом матриц перехода, для случаев большого количества волн переноса становятся плохо обусловленными, и он не может использоваться для проверки. Тем не менее, с помощью метода матриц перехода, можно получить перемещения (собственные частоты) одной части (например, отмеченной цифрой 1) и сравнить их в полученными с помощью граничных интегральных уравнений, что работает только для базовой проверки. Несмотря на то, что существуют другие методы решений (например, интегральные преобразования Фурье и Лапласа) для систем дифференциальных уравнений, методы решения систем с периодическими коэффициентами лежат за рамками данной работы и поэтому теоретическая проверка не выполнялась.

2.2 Конечные периодические структуры

Как и в Главе 1, можно ввести концепцию симметричной ячейки периодичности. Ячейка, показанная на рисунке 2.1, не симметрична. Поэтому, мы делим часть, отмеченную цифрой 1 пополам, и присоединяем к части 4, что схематично может быть изображено как на рисунке 2.8.

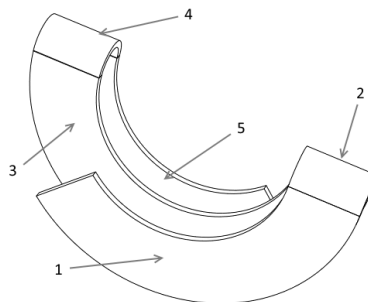


Рисунок 2.8 - Симметричная ячейка периодичности

В структуре, показанной на рисунке 2.8 угловая длина частей 1 и 5 равна $\frac{t_1}{2} = \frac{3}{8}$.

Можно найти собственные частоты для этой структуры. Для каждой части определяются граничные интегральные уравнения [32]. Так же, меняются условия стыковки

$$\begin{aligned}
\vec{d}_1(t_1) &= \vec{d}_2(t_1) \\
\vec{f}_1(t_1) &= \alpha \vec{f}_2(t_1) \\
\vec{d}_2(t_1 + \gamma t_2) &= \vec{d}_3(t_1 + \gamma t_2) \\
\alpha \vec{f}_2(t_1 + \gamma t_2) &= \vec{f}_3(t_1 + \gamma t_2) \\
\vec{d}_3((t_1 + t_3) + \gamma t_2) &= \vec{d}_4((t_1 + t_3) + \gamma t_2) \\
\vec{f}_3((t_1 + t_3) + \gamma t_2) &= \alpha \vec{f}_4((t_1 + t_3) + \gamma t_2) \\
\vec{d}_4((t_1 + t_3) + \gamma(t_2 + t_4)) &= \vec{d}_5((t_1 + t_3) + \gamma(t_2 + t_4)) \\
\vec{f}_4((t_1 + t_3) + \gamma(t_2 + t_4)) &= \alpha \vec{f}_5((t_1 + t_3) + \gamma(t_2 + t_4))
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Вместо условий Флоке ставятся граничные условия. Рассмотрим условия би-ортогональности для цилиндрической пружины, они имеют вид [32]:

$$\begin{aligned}
M_y^A(s)\beta^B(s) + N_z^A(s)w^B(s) - u^A(s)Q_x^B(s) &= 0 \\
T_z^A(s)\gamma^B(s) + Q_y^A(s)v^B(s) - \alpha^A(s)M_x^B(s) &= 0
\end{aligned}$$

В каждое слагаемое условий би-ортогональности входят функции разной чётности, что формирует две группы функций с одинаковой чётностью, которые и представляют собой граничные условия типа А:

$$\{u(s), N_z(s), M_y(s), \alpha(s), Q_y(s), T_z(s)\}$$

И граничные условия типа В:

$$\{w(s), \beta(s), Q_x(s), v(s), \gamma(s), M_x(s)\}$$

В этом случае мы сохранили терминологию D.J.Mead [35] для обобщённо-запертых границ (тип А) и обобщённо-свободных концов (тип В), которая так же обсуждается в Главе 1.

Граничные условия вида А для одной ячейки периодичности определяются как:

$$\begin{aligned}
\{u(\frac{t_1}{2}), N_z(\frac{t_1}{2}), M_y(\frac{t_1}{2}), \alpha(\frac{t_1}{2}), Q_y(\frac{t_1}{2}), T_z(\frac{t_1}{2})\} &= 0 \\
\{u(\frac{t_1}{2} + T), N_z(\frac{t_1}{2} + T), M_y(\frac{t_1}{2} + T), \alpha(\frac{t_1}{2} + T), Q_y(\frac{t_1}{2} + T), T_z(\frac{t_1}{2} + T)\} &= 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Граничные условия вида В:

$$\left\{w\left(\frac{t_1}{2}\right), \beta\left(\frac{t_1}{2}\right), Q_x\left(\frac{t_1}{2}\right), v\left(\frac{t_1}{2}\right), \gamma\left(\frac{t_1}{2}\right), M_x\left(\frac{t_1}{2}\right)\right\} = 0$$

$$\left\{w\left(\frac{t_1}{2} + T\right), \beta\left(\frac{t_1}{2} + T\right), Q_x\left(\frac{t_1}{2} + T\right), v\left(\frac{t_1}{2} + T\right), \gamma\left(\frac{t_1}{2} + T\right), M_x\left(\frac{t_1}{2} + T\right)\right\} = 0$$

, где $T = (t_1 + t_3) + \gamma_{par}(t_2 + t_4)$ период структуры.

Граничные интегральные уравнения с условиями стыковки (2.18) и граничными условиями (2.19) или (2.20) как обычно определяет систему однородных алгебраических уравнений по отношению к неизвестным силам и перемещениям на границах составных частей структуры, при этом система имеет порядок 120×120 . Приравнявая нулю определитель этой системы, мы можем найти собственные частоты. Собственные частоты систем (2.19) и (2.20) полностью покрывают границы полос запираания так же, как и в случаях, описанных в Главе 1.

Определители систем (2.19) и (2.20) так же факторизуются на две части: изгибно-продольную и изгибно-крутильную. И так же оба случая могут быть для ясности рассмотрены отдельно. Изгибно-продольная часть имеет вид:

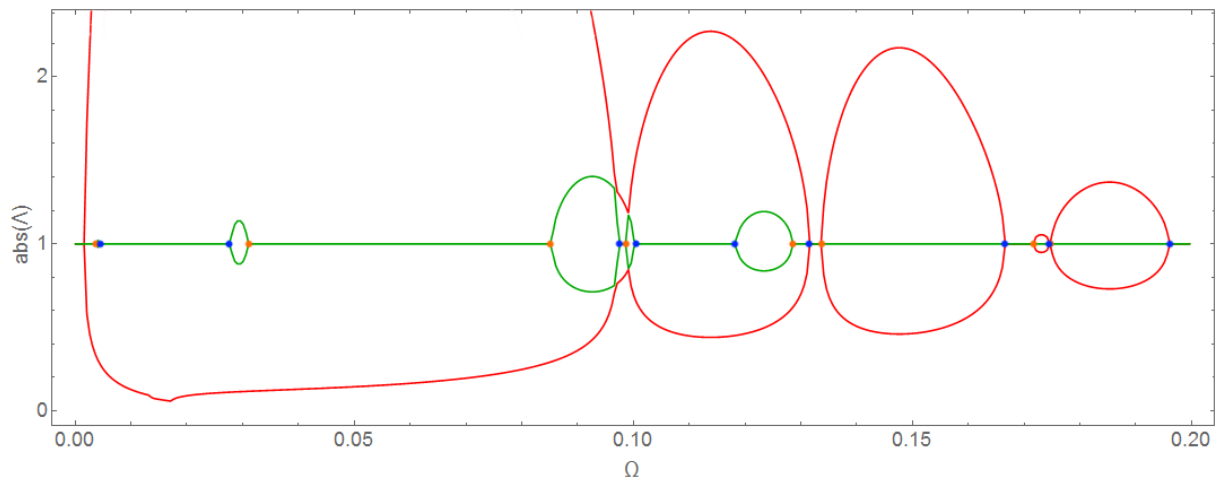


Рисунок 2.9 - Собственные частоты одной ячейки периодичности (изгибно-продольная часть) на фоне полос запираания, граничные условия типов А и В

Из рисунка видно, что свойства собственных частот одной ячейки периодичности сохраняются. Собственные частоты одной ячейки периодичности полностью заполняют все границы полос запираания. При рассмотрении изгибно-крутильной части $D^{v,\gamma}$, картина не меняется:

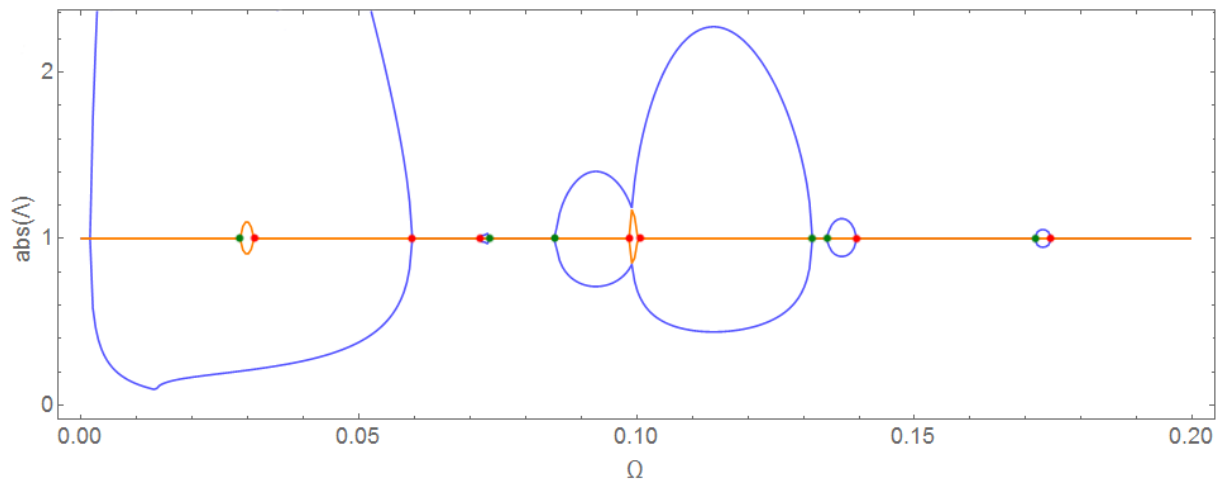


Рисунок 2.10 - Собственные частоты одной ячейки периодичности (изгибно-крутильная часть) на фоне полос запираения, граничные условия типов А и В

Таким образом, все свойства собственных частот, рассмотренные в Главе 1, сохраняются и в более сложном случае изогнутой балки в рамках теории Бернулли-Эйлера.

Анализ собственных колебаний

Анализ собственных колебаний даёт чёткое понимание картины распространения волн в периодической структуре. Форма волны и её вид (стоячая или бегущая волна) легко определяются в процессе анализа собственных колебаний. Детально, способ, применяемый в этой работе для анализа собственных колебаний приведён в разделе 1.1. В этом разделе будут показаны лишь основные моменты.

Сначала должен быть получен определитель $D(\Lambda, \Omega)$ системы (2.16) -(2.17). Как показано выше, в случае искривлённой балки, появляется вторая ветвь решений и с помощью анализа собственных колебаний может быть показана разница между полной и частичной полосой запираения (рисунок 2.4).

Для каждого корня полинома $D^{w,u}(\Lambda, \Omega)$ можно найти собственные колебания для изгибно-продольной ветви задачи. Для данной частоты Ω система (2.16)-(2.17). с полученным из отношения $D^{w,u}(\Lambda, \Omega) = 0$ параметром распространения Λ имеет определитель равный нулю. Поэтому, одна переменная, например, $u_1(0) = 1$, считается постоянной и вычёркивается первое уравнение

системы. Полученное таким образом решение называется формой собственных колебаний бесконечного волновода. В полной полосе запираия все волны стоячие:

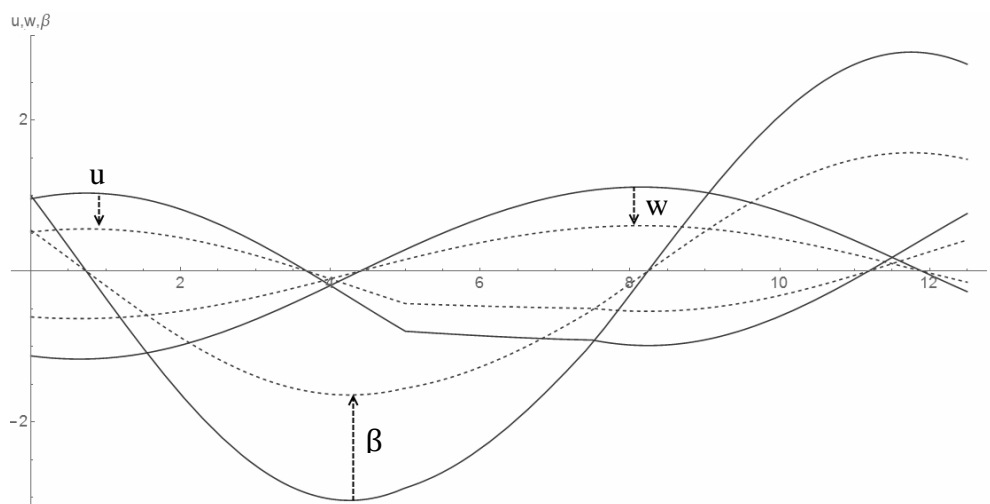


Рисунок 2.11 - Стоячие волны в чистой полосе запираия $\Omega = 0.037$

Во всех случаях волны распространяются попарно как убывающая и затухающая или бегущая слева-направо и справа-налево, каждая пара из трёх определяется соотношением параметров распространения $\Lambda_1 \Lambda_2 = 1$.

В частичной полосе запираия появляется одна пара распространяющихся бегущих волн, тогда как две другие пары затухающая и возрастающая:

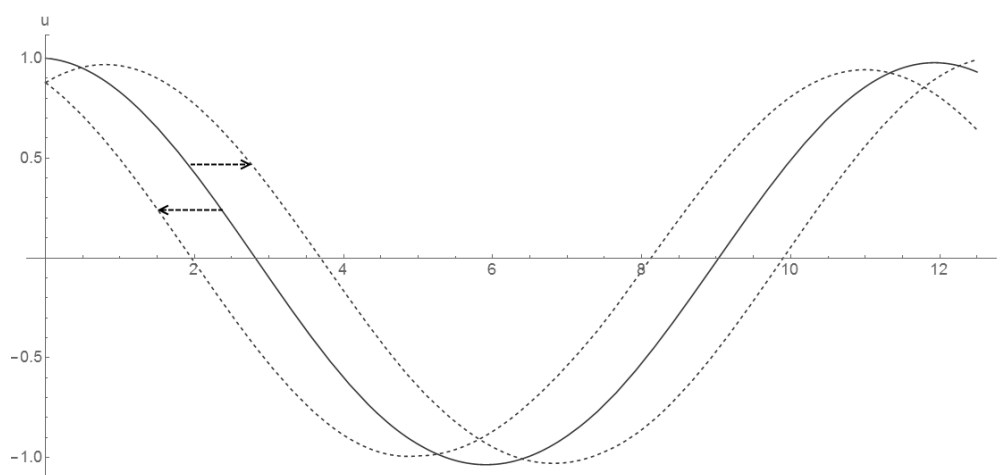


Рисунок 2.12 - Одна пара распространяющихся волн в частичной полосе запираия $\Omega = 0.06$

В полосе пропускания, соответственно, появляется вторая распространяющаяся волна и остаётся одна пара стоячих волн. Картина волн в полосе пропускания опущена для краткости.

2.3 Особенности анализа потока энергии сложной структуры

Все свойства анализа потока энергии, показанные в главе 1 справедливы и для этого случая. Поток энергии (2.22) в этом случае определяется как сумма вклада продольно-крутильных колебаний и продольно-изгибных колебаний.

$$E_n(\Omega) = \Omega / 2(u(s) \cdot (Q_x(s))^* + v(s) \cdot (Q_y(s))^* + w(s) \cdot (N_z(s))^* + \alpha(s) \cdot (M_x(s))^* + \beta(s) \cdot (M_y(s))^* + \gamma(s) \cdot (T_z(s))^*) \quad (2.21)$$

В (2.21) * обозначено комплексное сопряжение.

Однако, эффект виброизоляции начинает наблюдаться только с некоторого количества периодических вставок, например, в данном случае виброизоляционный эффект начинается с количества вставок $n = 7$, как показано на рисунке 2.13

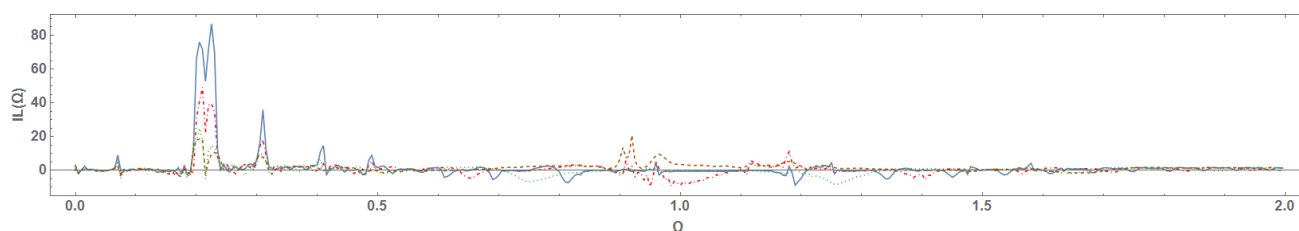


Рисунок 2.13 - Оценка потерь на вставку для $n = 7, 10, 20, 30$ периодических вставок (штриховая, пунктирная, штрихпунктирная, сплошная линии)

Можно показать, что способ стыковки не влияет на картину потока энергии для периодической вставки и можно не учитывать смену системы координат, показанную на рисунке 2.2 и пользоваться упрощённой схемой, изображённой на рисунке 2.4

Анализ сложной структуры отличается несколькими связанными картинками полос запираения, которые являются частными случаями мод Флоке, описанными в Главе 4. Анализ показывает, что минимальное значение потока энергии (максимальное значение величины потери на вставку), возникает лишь в полных полосах запираения, как показано на рисунке 2.14.

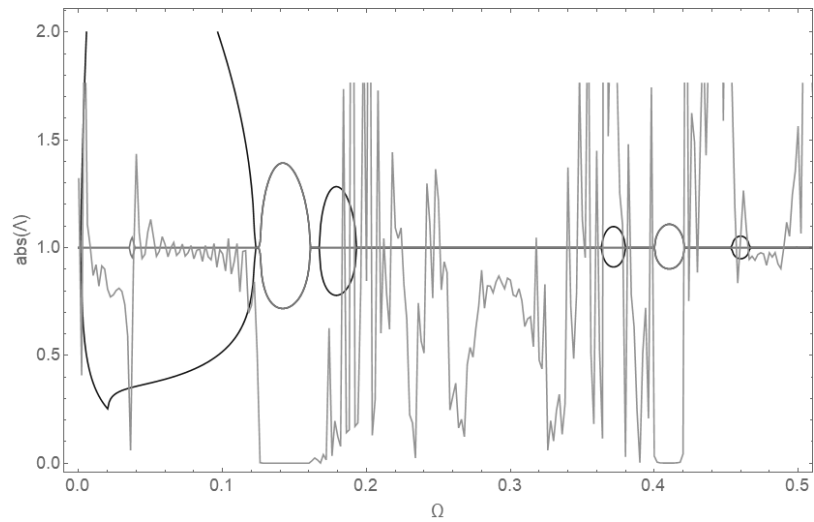


Рисунок 2.14- Поток энергии на фоне полос загираания изгибно-продольной части

Так же, анализ сложной структуры отличается тем, что сила может быть приложена в продольном, крутильном и смешанном направлении. Заметим, что полосы загираания в анализе в рамках теории Флоке не зависят от метода приложения силы. Если рассматривается однородная конструкция, то способ возбуждения однозначно определяет распределение по модам, так, что если возбуждение в точности возбуждает только одну нераспространяющуюся моду, то переноса энергии вообще не будет – хотя распространяющиеся моды есть. В периодической конструкции на стыковках неизбежно «смешивание» мод, и из-за этого чувствительность к способу приложения силы, безусловно, остается, но резко ослабевает. Таким образом, поток энергии, а, следовательно, и потери на вставку не должны отличаться для разных силовых нагрузок, что и показано на рисунке 2.15.

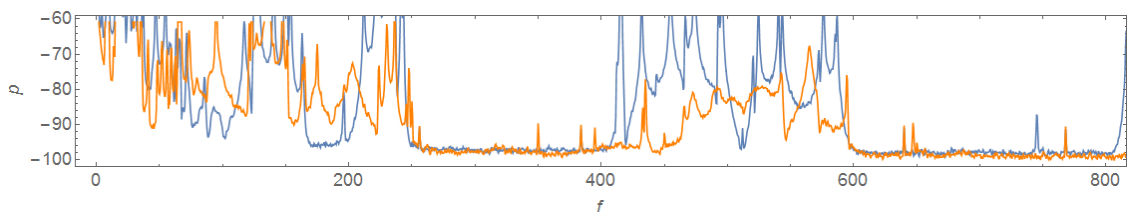


Рисунок 2.15 - Поток энергии для продольной нагрузки (синий) и крутильной нагрузки (оранжевый)

Так же в этом случае вместо параметров материала периодичность, а следовательно, и разница импедансов между частями, достигалась изменением параметра кривизны. В этом случае так же сохраняется прямая зависимость потерь на вставку или эффекта виброизоляции и разницы импедансов между частями

периодической структуры. Если разница между радиусами кривизны отдельных частей мала, то эффект виброизоляции так же мал. Чем больше разница, тем сложнее в изготовлении структура и больше эффект виброизоляции.

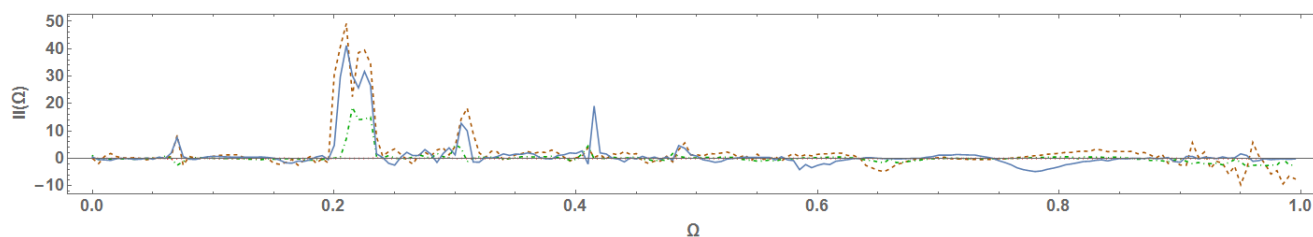


Рисунок 2.16 - Поток энергии для различных параметров отношения радиусов кривизны $\bar{\epsilon} = 10, 5, 2, 1$

Помимо коэффициента виброизоляции при изменении отношения радиусов кривизны, так же интересно рассмотреть влияние отношения импедансов на положение полос запираания. Рассмотрим параметр отношения радиусов кривизны

$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$. Для набора параметров, рассмотренных в этой главе, он равен

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{0.2}{0.02} = 10.$$

Для определённости параметр ϵ_2 считается фиксированным, и, варьируется, соответственно параметр ϵ_1 . На рисунке 2.17 пропусками показаны полные полосы запираания для данного параметра $\bar{\epsilon}$ и частоты Ω , а цветом – частичные и полные полосы пропускания.

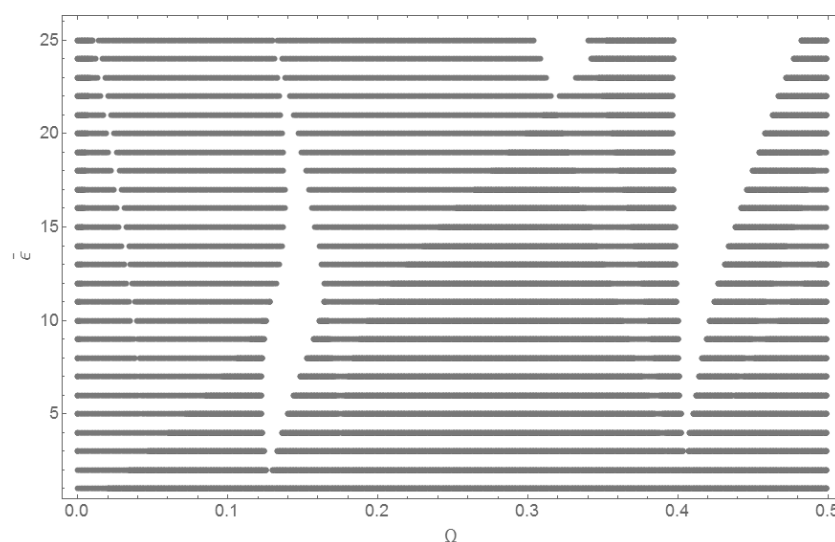


Рисунок 2.17 - Зависимость положения полос запираания от параметра отношений радиусов кривизны $\bar{\epsilon}$ и частоты Ω

Из рисунка 2.17 видно, что с ростом $\bar{\epsilon}$ полные полосы запираания переходят в более высокочастотный диапазон, что соответствует увеличению разности импедансов между частями периодических структур, рассмотренных в Главе 1.

Можно так же рассмотреть влияние параметра γ который в данном случае так же зависит от радиуса кривизны, однако, зависимость имеет другой вид. На рисунке 2.18, как и выше, пропусками показаны полные полосы запираания для данного параметра γ и частоты Ω , а цветом – частичные и полные полосы пропускания.

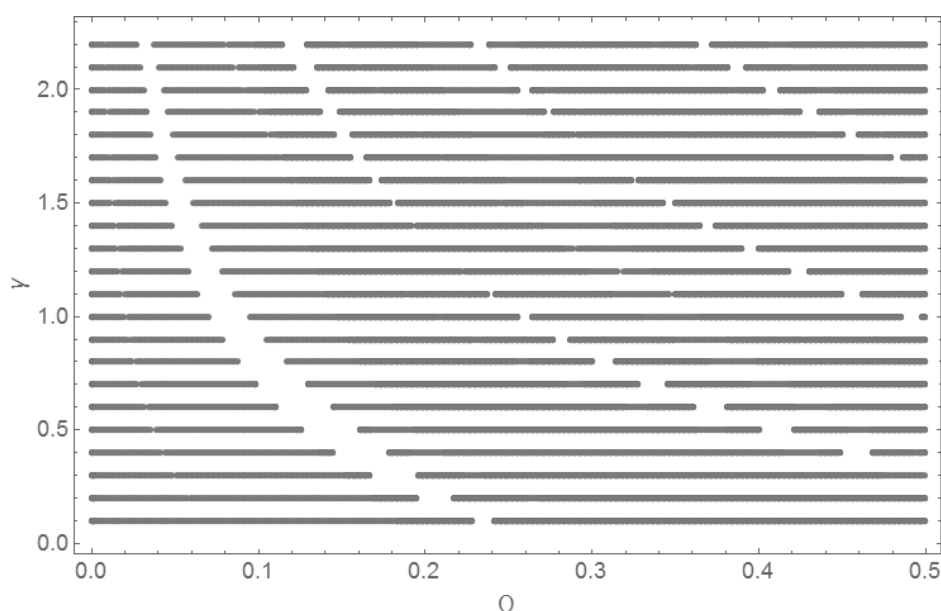


Рисунок 2.18 - Зависимость положения полос запираания от параметра γ и частоты Ω

При изменении параметра γ мы видим обратную зависимость с ростом параметра, полосы запираания переходят в низкочастотный диапазон.

Подобное параметрическое исследование удобно использовать в прикладных задачах, когда требуется найти оптимальные положения полос запираания, а затем нужным числом периодических вставок достигается необходимый коэффициент виброизоляции.

Анализ потока энергии показывает, что особая интерференционная картина, дающая наличие полос запираания, возникает не только в структурах с периодически меняющимся материалом, но и при периодической смене других физических параметров.

2.4 Выводы по Главе 2

В главе 2 была рассмотрена возможность построения модели с более сложной структурой. По сравнению с Главой 2, теория Флоке здесь показывает более сложную структуру полос запираения и пропускания, которая будет обобщена в Главе 4. Главный практический результат – существование «полных» и частичных полос запираения.

Модель, построенная с помощью искривлённых балок Бернулли-Эйлера относительно не требовательна к вычислениям, а использования матриц Грина и граничных интегральных уравнений добавляет модели свойство численной устойчивости. Так как не использовалась дискретизация модели с помощью конечных разностей или конечных элементов, то единственное ограничение модели – частотная область применимости. Так же следует отметить, что все результаты были получены в аналитическом виде, хотя он и не пригоден для вычислений из-за громоздкости.

Несмотря на все свои преимущества, модель, построенная с помощью искривлённых балок Бернулли-Эйлера верна лишь для низкочастотного диапазона. Тем не менее, было показано, что для практических применений в промышленности этого достаточно. Теории более высокого порядка не порождают качественно новых результатов в низкочастотном диапазоне, а лишь незначительно уточняют положение полос запираения, что подробно будет рассмотрено в Главе 4.

Так же в этой главе были детально рассмотрены свойства связи между собственными частотами конечной структуры, состоящей из конечного числа ячеек периодичности и границами полос запираения бесконечного волновода. В Главе 1 эти свойства были рассмотрены для более простых случаев. Также, в Главе 2 подробно рассмотрен механизм получения граничных условий типа А и В и механизма их получения с помощью условий би-ортогональности.

Анализ потока энергии показывает, что разность импедансов, а следовательно, и эффект виброгашения может достигаться не только с помощью разных материалов, но и с помощью разных геометрических параметров, периодически изменяющихся в частях волновода. Данный подход, как правило

более подходит для практических применений, однако, требует более сложных моделей для математического описания.

Так же, на практике, теорию Флоке можно использовать в задачах оптимизации для получения полос запираания в требуемом диапазоне частот.

Глава.3. Полосы запираения в полярных координатах

На практике, в виброакустике полезно рассматривать периодические структуры в других (главы 1 и 2 рассматривают структуры в декартовой системе координат) координатных системах. В частности, компактный источник вибраций (например, работающая насосная помпа) может быть установлена на достаточно большой поверхности, которая является проводником звука (например, палуба судна). В таком случае, чтобы ослабить передачу структурных колебаний, набор из концентрических круговых полос с разными параметрами материала может служить эффективным виброизолятором. Такую задачу естественно описывать в полярных координатах. Анализ цилиндрических волн в канонических постановках подробно описан в монографиях, например, в [44–46]. Свойства цилиндрических волн в случае радиально периодических структур предполагают возможность возникновения интерференционной картины, вызывающей наличие полос запираения и пропускания, так же, как и в декартовых координатах.

Очевидно, в зоне дальнего поля, свойства структур в полярных координатах должны асимптотически стремиться к свойствам структур в декартовых. Задача о распространении волн в декартовых координатах известна в оптике как теория волоконной брэгговской решётки (или брэгговских волокон) [46]. Теория брэгговских волокон используется в задаче управления распространением пучка фотонов. Сложности, возникающие при переходе к задаче с цилиндрической симметрией в рамках теории брэгговских волокон, рассмотрены в [48–51]. В частности, в этих статьях подробно рассматривается возможность использовать напрямую случай декартовых координат с заменой функций Бесселя на их аппроксимации для большого аргумента. В статье [50], симметрия решения относительно параллельного переноса для задачи в цилиндрических координатах достигается с помощью специально выбранных непрерывно изменяющихся параметров анизотропной жидкости, а именно плотности и модуля объёмного сжатия.

В статьях [52–55] описан численный анализ фононных полос запираания в различных структурах в предположении, что расстояние от центра полярных координат достаточно велико, чтобы можно было считать структуру радиальных фононных кристаллов инвариантной относительно переноса. В [52–54] рассмотрено численное решение канонических уравнений динамики в рамках теории упругости с помощью коммерческого программного обеспечения. В [55] анализ уравнений динамики в рамках теории упругости дополнен численным анализом радиально периодических пластин.

Формулировка и использование теории типа брэгговской волоконной решётки в ближнем поле, т. е. в относительной близости от начала полярных координат нуждаются в более подробном рассмотрении. Попытка построить теорию такого типа в полярных координатах для ближнего поля предпринята в этой главе. Для этого задача о радиально периодической мембране рассматривается в терминах теории Флоке. Заметим, что с математической точки зрения, теория Флоке работает только когда система обладает свойством инвариантности относительно переноса и попытка использования теоремы Флоке в её прямой формулировке в задачах распространения упругих цилиндрических волн в полярных координатах решают задачу лишь в частных случаях, что показано в [47–51]. Однако, с практической точки зрения естественно исследовать свойства виброизоляции для таких задач напрямую в полярных координатах, что и послужило толчком к приближённой формулировке теоремы Флоке для случая полярных координат в рамках простых моделей структурной динамики.

3.1 Постановка задачи о колебаниях радиально периодичной мембраны

Рассмотрим радиально периодичную круговую мембрану, показанную на рисунке 3.1.

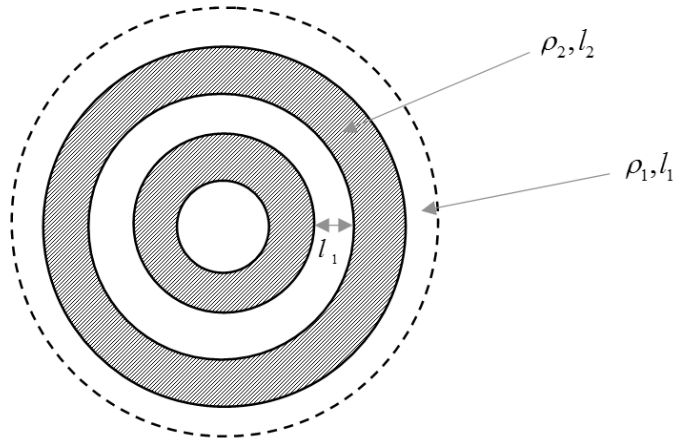


Рисунок 3.1 - Схема радиально-периодичной круговой мембраны

Белая и чёрная части имеют разную радиальную протяжённость l_i и плотность ρ_i , но подвержены одинаковому натяжению. Чтобы сравнить результаты, полученные в этой главе для цилиндрических волн в полярных координатах и плоских волн в декартовых координатах, полученных в Главе 1 и [13], протяжённости по радиальной координате нормированы на протяжённость белого сегмента как показано на рисунке 1.2. Уравнения колебаний для каждого сегмента имеют вид:

$$u_i''(r) + \frac{1}{r}u_i'(r) + (k_i^2 - \frac{m^2}{r^2})u_i(r) = -q(r) \quad (3.1)$$

В (3.1) m - число окружных полуволн, $u_i(r)$ и $q_i(r)$ - поперечные смещения и распределённая нагрузка для данного числа m в i -том сегменте мембраны.

Радиальное волновое число обозначено как $k_i = \frac{\omega}{c_i}$, $c_i = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_i}}$, где $T_0 = const$ - натяжение мембраны. Вслед за задачами, рассмотренными в главах 1-2, мы считаем, что нагрузка отсутствует, то есть $q(r) \equiv 0$.

Уравнение Гельмгольца является отличным модельным примером, который показывает распространение волн в любой заданной системе координат. Так же отметим, что уравнение Гельмгольца в осесимметричном случае описывает распространение цилиндрической волны антиплоской сдвиговой деформации в упругом слое.

В этой главе используются следующие безразмерные параметры:

$$\gamma = \frac{l_2}{l_1}; \sigma = \frac{c_2}{c_1}; k_1 l_1 = \Omega$$

Если не сказано иначе, используются следующие численные значения параметров:

$$\gamma = 2; \sigma = 1.5$$

В статьях [47-51] показано, что полосы запираания существуют и в случае полярных координат. В этой главе поставлена задача определить, насколько близость к началу координат влияет на положение полос запираания и можно ли ввести некоторую функцию $\Lambda(r)$, представляющую собой аналог постоянной распространения в декартовых координатах, которая позволяла бы оценить расположение полос пропускания и запираания в периодической структуре при данном значении координаты r .

Все результаты, полученные в этой главе справедливы для произвольного числа окружных волн m в мембране, однако получены для $m = 0$. Этот параметр определяет лишь порядок функции Бесселя в общем решении уравнения Гельмгольца, при этом не меняя методы используемые для решения задачи. Так же остаются справедливыми выводы и заключения.

3.2 Поток энергии в мембране с конечным числом периодических вставок

В приложениях, вставка из конечного набора ячеек периодичности используется для уменьшения потока энергии через структуру, как показано в Главе 1. Анализ влияния разности импедансов между частями периодической структуры полностью повторяет Главу 1, поэтому, мы ограничимся лишь отличиями, которые можно наблюдать в случае периодической структуры в полярных координатах.

Для того, чтобы получить базовое представление о волноводных свойствах периодической мембраны, и чтобы убедиться, что присутствует значительное снижение потока энергии, вызванное периодическими вставками, рассмотрим вынужденные колебания в структуре с конечным числом периодических вставок. Схематично, такая структура изображена на рисунке 3.2.

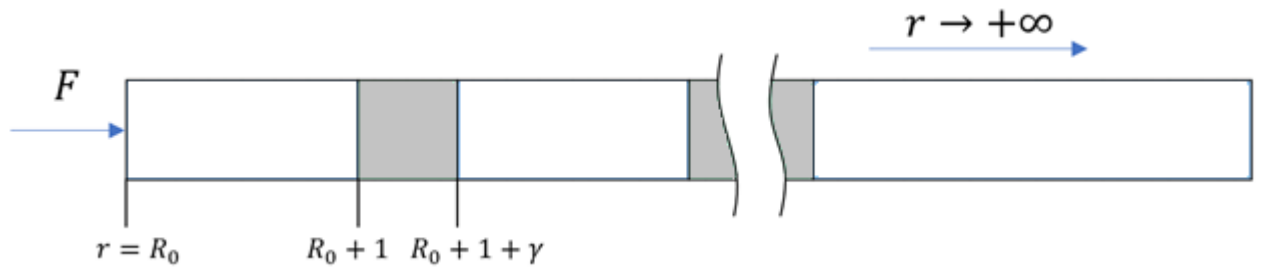


Рисунок 3.2 - Схема для задачи о вынужденных колебаниях

Вслед за предыдущими главами мы будем использовать в качестве оценки эффекта виброизоляции потери на вставку (Π , insertion loss), определяемые как $\Pi(n) = 10 \log_{10} \left(\frac{E_n}{E_0} \right)$, где E_0 - поток энергии проходящий по однородной мембране через окружность заданного радиуса (в этой главе взяты значения радиуса $R_0 + 2$), а E_n - поток энергии в мембране с n периодическими вставками. Как известно [48], потери на вставку (Π) зависят от числа ячеек и имеют большую величину в полосах запираания, предсказываемых теорией Флоке для бесконечной структуры в декартовых координатах.

В декартовых координатах положение точки приложения силы может быть выбрано произвольно. В полярных координатах удобно ввести параметр – расстояние от центра координат до окружности приложения силы. На рисунке 3.2 расстояние от начала координат обозначено как R_0 и нормировано на длину первого сегмента периодической структуры. Внутренняя часть мембраны, $0 < r < R_0 + 1$ однородная и имеет плотность ρ_1 . Ячейки периодичности начинаются с радиальной координаты $r = R_0 + 1$ в сторону её увеличения.

Перемещения, удовлетворяющие однородному уравнению (3.1) в каждом сегменте периодической мембраны, записываются в виде

$$\begin{aligned} u_i(r) &= b_{i,1} J_m(k_i(\Omega)r) + b_{i,2} Y_m(k_i(\Omega)r) & 1 \leq i \leq 2 * N \\ u_{2*N+1}(r) &= b_{2*N+1,1} H_m^{(1)}(k_{2*N+1}(\Omega)r) & i = 2 * N + 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

В дальнейшем зависимость от частоты перемещений и их производных подразумевается, но не указывается явно. Для краткости, рассмотрим только

случай $m = 0$. Тем не менее, как указано выше, все результаты и выводы справедливы для произвольного числа окружных полуволин m .

Условия стыковки для трёх последовательных сегментов (т. е. для ячейки периодичности) с единичной силой, приложенной в точке $r = R_0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} u_1(1 + R_0) &= u_2(1 + R_0); & u_2(1 + \gamma + R_0) &= u_3(1 + \gamma + R_0) \\ u_1'(1 + R_0) &= u_2'(1 + R_0); & u_2'(1 + \gamma + R_0) &= u_3'(1 + \gamma + R_0) \\ u_1'(R_0) &= 1 \end{aligned}$$

Для большего числа ячеек условия записываются аналогично. Параметр R_0 в данном случае можно интерпретировать как радиус окрестности, вырезанной в центре периодической мембраны. Увеличение R_0 соответствует удалению от начала координат.

Условия стыковки с подстановкой (3.2) представляют собой систему неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд $b_{i,j}$ (система уравнений для вставки из n ячеек периодичности имеет порядок $2n$). После решения системы поток энергии через любую concentричную окружность имеет вид

$$E(r) = -\frac{\Omega}{2} 2\pi r \operatorname{Re}((-iu(r))^* \cdot u'(r)),$$

где u^* обозначает комплексно-сопряжённую к u величину.

Зависимость потери на вставку от частоты показывает зоны, где достигается наибольший эффект виброизоляции. Эти зоны соответствуют полосам запирания, рассмотренным в Главе 1. В [48] показано, что уровень затухания в полосах запирания зависит от числа ячеек периодичности, тогда как в полосах пропускания такого эффекта почти не наблюдается. Для наглядности, на графиках построена 1/10 от величины потерь на вставку для цилиндрических волн в полярных координатах (для плоских волн зоны Флоке взяты из рис.1.2):

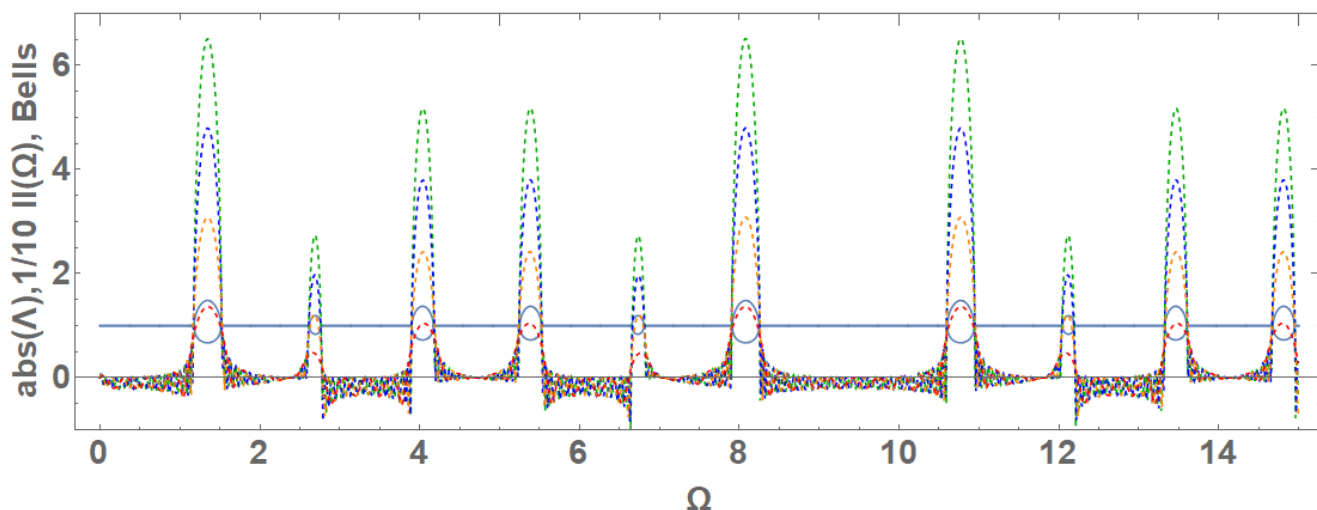


Рисунок 3.3 - Потери на вставку (штриховая линия) для пяти, десяти, пятнадцати и двадцати (сверху-вниз) ячеек периодичности ($R_0 = 20$) на фоне полос запираания для задачи в декартовых координатах

Из рис.3.3 видно, что использование периодической мембраны даёт результаты похожие на те, что могут быть получены с помощью модели стержня с периодической структурой (рис.1.2). Так же видно, что число ячеек так же, как и в декартовом случае влияет на силу затухания.

Однако, в отличие от декартовых координат, задача теперь включает в себя параметр R_0 и его влияние показано на рисунке 3.4. В целом зоны эффективного затухания (зоны со значением Π выше 2) цилиндрических волн расположены близко к предсказываемым теорией Флоке для декартовых координат, однако, точное расположение границ зависит от R_0 .

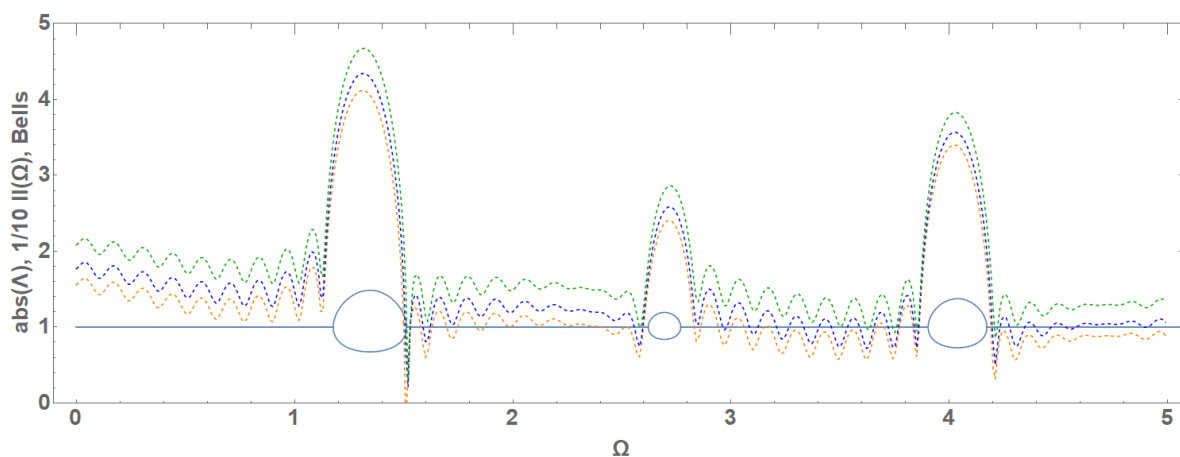


Рисунок 3.4 - Потери на вставку для 10 ячеек для параметров $R_0 = 0.1, 0.15, 0.2$ (зелёный, синий, оранжевый) на фоне полос запираания для задачи в декартовых координатах

Из рисунка 3.4 видно, что при достаточно малом параметре R_0 полосы запираания смещаются, что, как будет показано далее, предсказывается как анализом собственных частот симметричной ячейки периодичности, так и применением приближенной теории брэгговского типа.

Результаты, полученные выше показывают, что затухание из-за периодичности существует и для случая цилиндрических волн, и что положение полос запираания и пропускания достаточно точно при больших R_0 предсказываются с помощью стандартной теории Флоке для «родственных» структур в декартовых координатах.

Увеличение числа ячеек означает, что расстояние от центра так же увеличивается и геометрия в системе полярных координат асимптотически приближается к декартовым. То же самое происходит, когда количество ячеек периодичности постоянно, но растёт расстояние от центра R_0 .

Однако, в приложениях рассматривать «дальнее» поле волновой картины в полярных координатах не представляет интереса. В любой прикладной задаче интересно поставить изолятор, снижающий поток виброакустической энергии настолько близко к источнику, насколько это возможно. Поэтому, требуется анализ возможностей сформулировать приближённую теорию Флоке для цилиндрических волн.

3.3 Модификация теории типа брэгговских волокон в полярных координатах

Можно представить переход от декартовых координат к полярным в виде перехода от плоской бегущей волны к цилиндрической. Поэтому при построении теории следует в первую очередь учесть «естественное» убывание цилиндрической волны, которое присутствует в однородной мембране. Для однородной (во введённых безразмерных параметрах это соответствует $\sigma = 1$) мембраны (стержня в декартовых координатах в терминах Главы 1) параметр периодичности получается прямым вычислением.

Так как решается задача о бесконечной мембране, перемещение имеет вид (используются обозначения из Главы 1):

$$u(x) = A \exp(i\Omega x)$$

Ставится задача о действии единичной силы в начале координат, откуда находится константа A :

$$f(0) = u'(0) = 1 \Rightarrow A = -\frac{i}{\Omega}$$

Теперь константа периодичности по определению равна:

$$\Lambda = \frac{u(x)}{u(x+1+\gamma)} = \exp(-i\Omega(1+\gamma)) = \Lambda_{cartesian}$$

В случае однородной мембраны перемещение можно записать как:

$$u(r) = A H_0^{(1)}(\Omega r) \quad (3.3)$$

Так же ставится задача о единичной силе:

$$f(R_0) = u'(R_0) = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{\Omega H_1^{(1)}(R_0 \Omega)} \quad (3.4)$$

Для того, чтобы ввести в рассмотрение некоторый аналог коэффициента периодичности Λ для однородной мембраны в дальнем поле, могут быть использованы асимптотики функции Бесселя для большого аргумента

$$\begin{aligned} Y_m(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \exp(|\operatorname{Im}(z)|) O\left(\frac{1}{|z|}\right) \\ J_m(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \exp(|\operatorname{Im}(z)|) O\left(\frac{1}{|z|}\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

При подстановке приближения (3.5) в уравнение (3.4) можно вывести формулу параметра периодичности для однородной мембраны в полярных координатах. Мы будем использовать следующее определение этого параметра

$$\Lambda = \frac{u(r)}{u(r+1+\gamma)} = \sqrt{\frac{1+\gamma+r}{r}} \exp(i\Omega(1+\gamma)) = \sqrt{\frac{1+\gamma+r}{r}} \Lambda_{cartesian} \quad (3.6)$$

Отметим, что выражение (3.6) не зависит от точки приложения силы R_0 и является только функцией координаты r и периода $T = (1+\gamma)$.

Полученное для однородной мембраны выражение (3.6) мы будем использовать и для мембраны с периодической структурой. Формула выражает зависимость Λ от r .

Так как известно, что выполняется предельный переход от уравнения мембраны (3.1) к уравнению мембраны (стержня) в декартовых координатах, это выражение так же должно является предельным значением для параметра Λ для однородной мембраны в полярных координатах при $r \rightarrow \infty$, что даёт основание полагать, что приближение (3.6) можно использовать как один из вариантов модификации теории типа брэгговских волокон.

Для аппроксимации (3.6) можно найти спектр полос запираения в рамках теории Флоке. Для этого, вслед за Главой 1 необходимо поставить условия стыковки в виде:

$$\begin{aligned} u_1(r+1) &= u_2(r+1) & u_2(r+1+\gamma) &= u_3(r+1+\gamma) \\ u'_1(r+1) &= u'_2(r+1) & u'_2(r+1+\gamma) &= u'_3(r+1+\gamma) \end{aligned} \quad (3.7)$$

С учётом полученного приближения (3.6) введём условия периодичности в виде:

$$\begin{aligned} u_i(r) &= \Lambda(r) u_{i+2}((1+\gamma)+r) \\ u'_i(r) &= \frac{d}{dr} (\Lambda(r) u_{i+2}((1+\gamma)+r)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

В условии (3.8) использован принцип метода многих масштабов. Дифференцирование ведётся по медленной (в терминах метода многих масштабов) переменной r , которая относится лишь к границам сегментов. Тем временем существует быстрая переменная, которая описывает изменчивость внутри каждого сегмента. В таких терминах $\Lambda(r)$ описывает масштаб медленной переменной. Масштаб быстрой переменной в таких терминах полностью определяется функциями Бесселя с постоянными коэффициентами (3.2). Заметим, что решение приведено без оценки остаточного члена.

Условия (3.7)-(3.8) после подстановки решений (3.2) дают однородную систему из шести линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных

амплитуд $b_{i,j}$. Для того, чтобы получить параметр распространения $\Lambda(r)$ приравняем нулю определитель этой системы и запишем в виде

$$D_r(\Lambda(r), \Omega) = \Lambda(r)^2 + a_1(r, \Omega)\Lambda(r) + 1 = 0$$

Коэффициент $a_1(r, \Omega)$ является комбинацией функций Бесселя и не выписан явно, так как его интерпретация затруднена. Равенство единице свободного члена в квадратном уравнении позволяет так же говорить о полосах запираия и пропускания в терминах параметра Блоха ($\Lambda(r) = \exp(iK_B)$ для конкретного значения r) по аналогии с декартовым случаем.

Решения квадратного уравнения $D_r(\Lambda(r), \Omega) = 0$ дают результаты, показанные на рисунке 3.5.

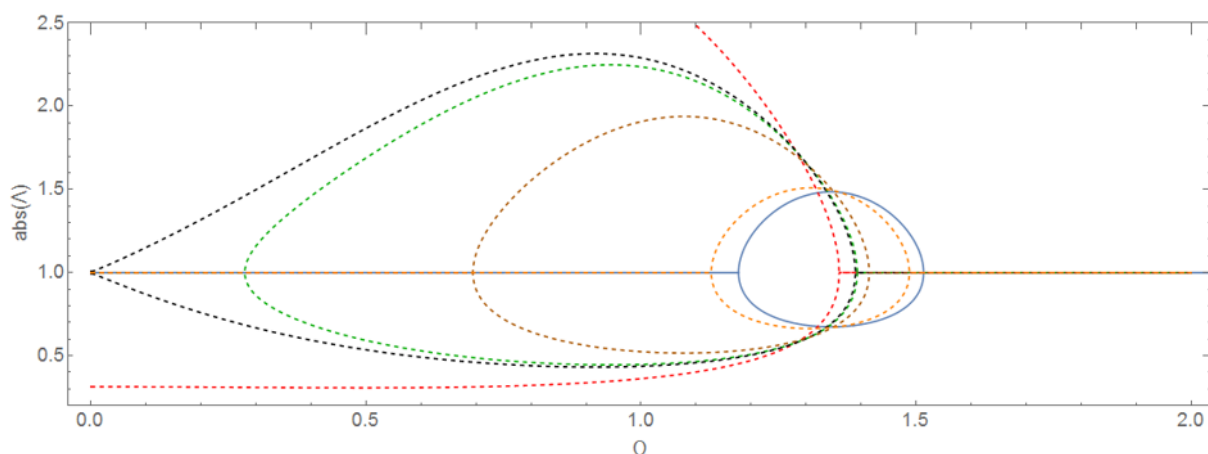


Рисунок 3.5 - Приближение (3.9) полос запираия для радиально-периодической мембраны для $r = 0.1, 0.14349, 0.15, 0.2, 1$ (красный, чёрный, зелёный, коричневый, оранжевый, штриховая линия) и зоны запираия для задачи в декартовых координатах (сплошная линия)

Из анализа потока энергии, приведённого в Разделе 3.2, следует заключить, что низкочастотная часть этой диаграммы будет неверна: предсказанная на диаграмме полоса запираия в окрестности $\Omega = 0$ будет полосой пропускания. Тем не менее, легко показать, что полученное приближение имеет более широкую область применения, чем стандартная теория брэгговских волокон. Из рисунка 3.5 видно, что при росте значения r , полоса псевдо-запираия сходится к полосе запираия, предсказанной для периодического стержня. Отдельно рассмотрим случай, когда полоса запираия начинается в точности на частоте $\Omega = 0$. Соответствующую этому случаю координату r_0 можно найти из соотношения

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} Discr(D_r(\Lambda(r_0), \Omega)) = 0 \quad (3.9)$$

Левая часть уравнения, то есть предел (3.9), не зависит от параметра материала σ и равна

$$\frac{(1+\gamma)^2}{r_0(1+\gamma+r_0)} - \frac{3(1+\gamma+2r_0)}{r_0\sqrt{(3+r_0)(1+\gamma+r_0)}} \log\left(1+\frac{1+\gamma}{r_0}\right) + \frac{9}{4r_0(3+r_0)} \log^2\left(1+\frac{1+\gamma}{r_0}\right) = 0 \quad (3.10)$$

Трансцендентное уравнение (3.10) не имеет аналитического решения, результат численного решения для $\gamma \in [0,10]$ показан на рисунке 3.6.

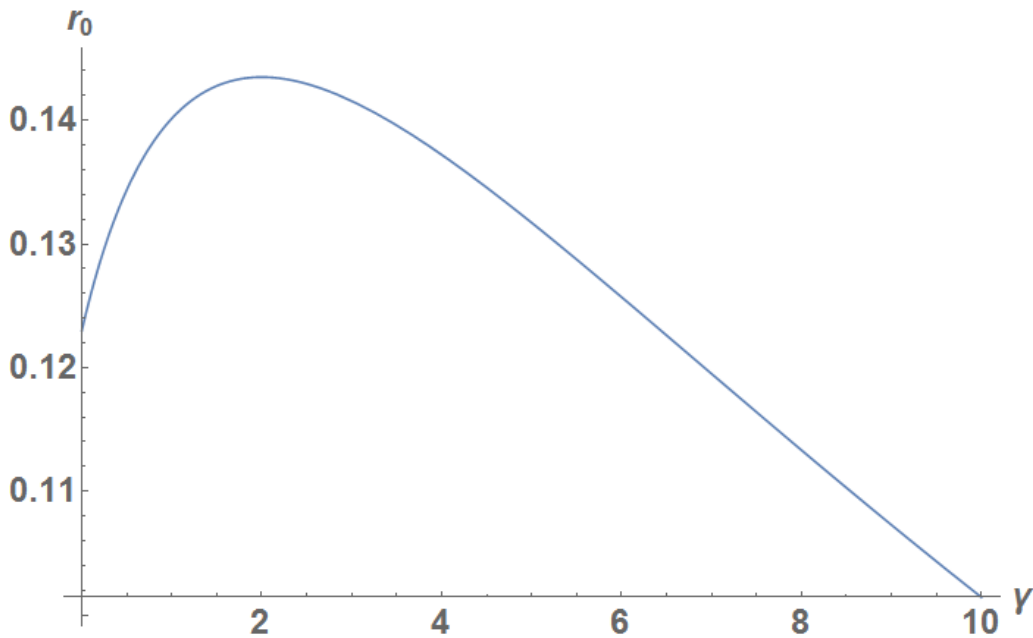


Рисунок 3.6 – Численное решение уравнения (3.10)

Из рисунка 3.6 видно, что с ростом радиуса мембраны и, соответственно, с ростом периода структуры $T = 1 + \gamma$ уменьшается координата r_0 для которой полоса запираания в окрестности точки $\Omega = 0$ предсказывается как полоса пропускания.

Для получения следующих членов в разложении по степеням r параметра $\Lambda(r)$, можно использовать приближения функций Бесселя более высокого порядка, например, полученные с помощью разложений Ханкеля для функций Бесселя

$$a_k(m) = \frac{(4m^2 - 1^2) \dots (4m^2 - (2k-1)^2)}{k! 8^k} \quad (3.11)$$

$$\omega = z - \frac{1}{2} \pi m - \frac{1}{4} \pi$$

$$\begin{aligned}
J_m(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cos(\omega) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{2k}(m)}{z^{2k}} - \sin(\omega) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{2k+1}(m)}{z^{2k+1}} \right) \\
Y_m(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin(\omega) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{2k}(m)}{z^{2k}} + \cos(\omega) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{2k+1}(m)}{z^{2k+1}} \right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

При удержании двух членов в каждой сумме (3.9)-(3.10) можно решить задачу о поиске тривиального коэффициента периодичности для однородной мембраны ($\sigma = 1$) и найти уточнение для приближения (3.8) в виде (для $m = 0$)

$$\Lambda_{polar}^{approx} = \left(\sqrt{\frac{1+\gamma+r}{r}} \left(1 - \frac{i(1+\gamma)}{r(-i+8(1+r+\gamma)\Omega)} \right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \right) \Lambda_{cartesian} \tag{3.13}$$

Использование уточнённой аппроксимации (3.13) не даёт качественно других результатов, однако позволяет оценить следующий член в разложении по степеням r аппроксимации (3.8).

Как замечено выше, условия (3.8) можно использовать для произвольного числа окружных полуволн m , что и показано на рисунке 3.7.

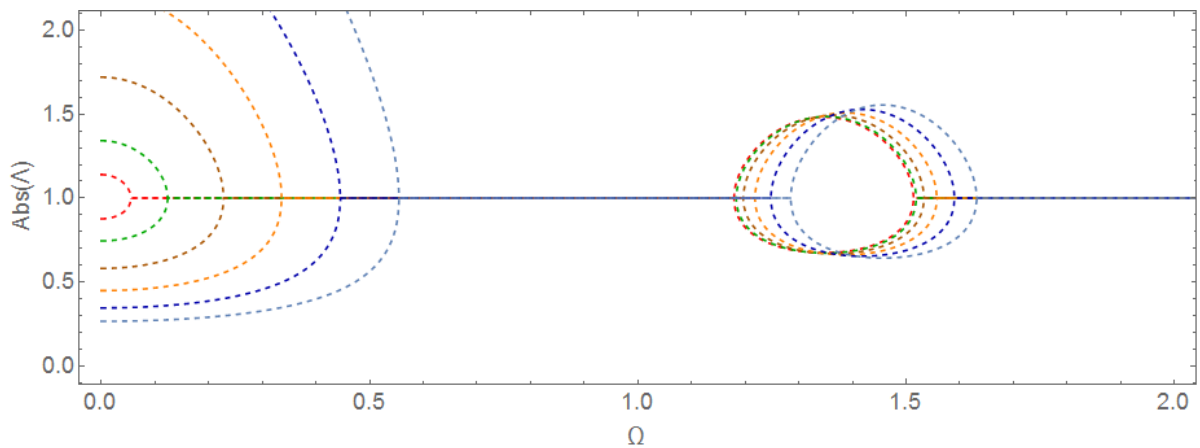


Рисунок 3.7 - Картина полос запираания для приближения (3.11) для радиально-периодической мембраны для $r = 10$, $m = 0, \dots, 5$ (красный, зелёный, коричневый, оранжевый, синий, голубой, штриховые линии)

Из рисунка 3.7 видно, что полоса запираания в окрестности $\Omega = 0$ растёт с ростом m . Неформально, это может быть объяснено, как рост «степени сингулярности» $Y_m(r)$ в точке $r = 0$ с ростом числа m . Более подробное исследование этого факта на основе возможного обобщения условий периодичности (3.8) будет приведено в следующем разделе.

Из анализа условий периодичности (3.8) и полинома D_r видно, что зависимость параметра распространения от координаты r критична в диапазоне низких частот, на которых неверно предсказывается полоса пропускания. Тем не менее, как только расстояние от центра увеличивается, волноводные свойства периодической мембраны приближаются к предсказываемым классической теорией Флоке для плоских волн в декартовых координатах, что, естественно, соответствует стандартной теории брэгговских волокон.

Заметим, что проверка точности предсказаний для D_r на низких частотах с помощью анализа потока энергии затруднительна, так как для того, чтобы эффект полос запирания был виден, требуется вставка некоторого количества ячеек периодичности. Вставка ячеек влечёт за собой отдаление края мембраны от центра координат, и, следовательно, уменьшает разницу между случаем декартовых и полярных координат.

3.4 Конечные радиально периодические мембраны

Любую конечную периодическую структуру можно представить, как последовательный набор «единичных» ячеек периодичности. Для мембраны такая ячейка схематично изображена на рисунке 3.8:

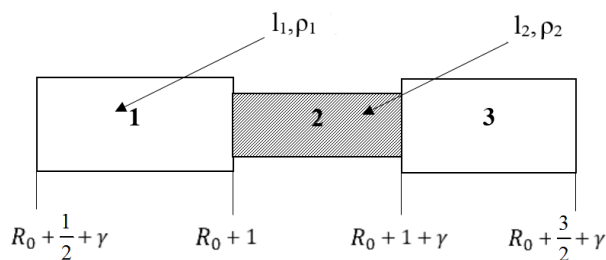


Рисунок 3.8 - Симметричная ячейка периодичности

В дальнейшем, предполагается, что конечная периодическая структура сложена из целого числа таких ячеек. Для того, чтобы найти собственные частоты, условия стыковки (3.7) должны быть дополнены граничными условиями:

$$u_1(1/2 + r) = 0 \quad (3.14)$$

$$u_3(3/2 + \gamma + r) = 0$$

$$u_1'(1/2 + r) = 0 \quad (3.15)$$

$$u_3'(3/2 + \gamma + r) = 0$$

Выбор граничных условий (3.14) и (3.15) обоснован совпадением границ полос запирания и собственных частот граничных задач в декартовых координатах. Граничные условия, замыкающие формулировку спектральной задачи, могут быть выбраны и из других соображений.

Уравнения (3.7), (3.14) определяют краевую задачу с "запертыми" границами или краевую задачу с граничными условиями вида А, уравнения (3.7) и (3.15) определяют краевую задачу со "свободными" границами или краевую задачу с граничными условиями вида В. Корни определителя системы алгебраических уравнений могут быть найдены лишь численно, так как «обратных» функций Бесселя не существует.

Как показано в Главах 1 и 2, в декартовых координатах, собственные частоты симметричной ячейки периодичности расположены в точности на полосах запирания. В полярных координатах собственные частоты подобной ячейки зависят от r . Поэтому, без точной общей теории позволяющей проверить этот факт, можно лишь сказать, что это свойство выполняется лишь приближённо, рисунок 3.12 показывает насколько быстро собственные частоты одной ячейки периодичности стремятся к первой полосе запирания, предсказанной теорией Флоке для плоских волн в декартовых координатах, с ростом координаты r .

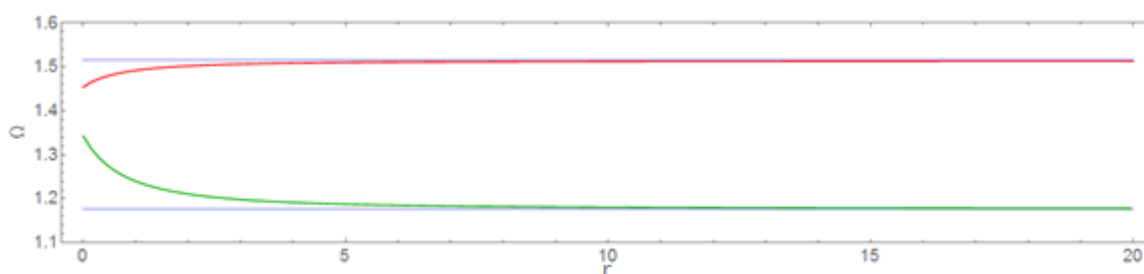


Рисунок 3.12 - Первые собственные частоты одной ячейки периодичности (красный – граничные условия типа А и зелёный – граничные условия типа В) на фоне полосы запирания для декартовых координат (синий)

Доказательство того, что собственные частоты лежат в точности на границах полос запирания используют свойство дискриминанта полинома Флоке в декартовых координатах. Дискриминант раскладывается в произведение двух определителей для задач с «запертыми» и «свободными» концами. В полярных

координатах дискриминант полинома, полученного с помощью условий (3.8) и произведение уравнений (3.14) и (3.15) не совпадают. Поэтому, утверждение, что собственные частоты одной ячейки периодичности лежат на границах полос запираания справедливо только для предельного перехода $r \rightarrow \infty$ или $\Omega \rightarrow \infty$, что в этом случае равносильно. Это свойство показано на рисунке 3.13.

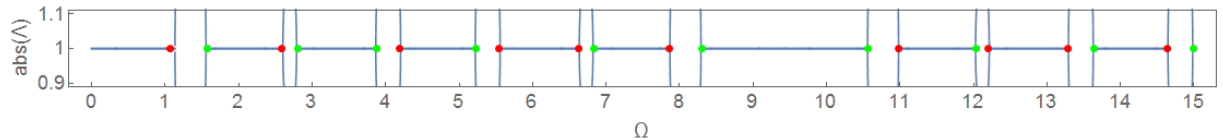


Рисунок 3.13 - Собственные частоты одной ячейки периодичности ($r = 10$) (оба типа граничных условий)

Как и в случае задачи распространения плоских волн в декартовых координатах, рассмотренном в Главе 1, все собственные частоты структур, состоящих более чем из одной ячейки, попадают в полосы пропускания. И так же при условиях, обсуждённых в разделе 1.1, спектр структуры с меньшим числом ячеек содержится в спектре с большим числом ячеек как показано на рисунке 3.14.

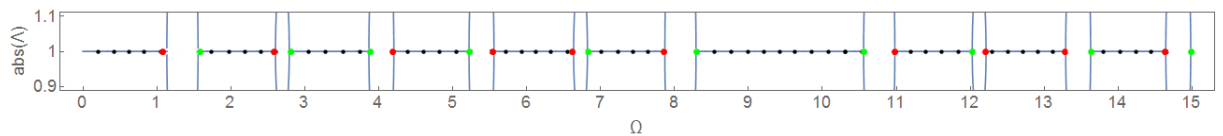


Рисунок 3.14 - Собственные частоты пяти ячеек периодичности ($R_0 = 10$) (оба типа граничных условий)

В Главе 1 формулы для собственных частот получены в явном виде и таким образом, данное свойство было доказано строго для задачи распространения плоских волн в декартовых координатах. Для мембраны в полярных координатах это утверждение можно проверить численным экспериментом. Любая конечная периодическая мембрана имеет подобные свойства независимо от параметра r .

Собственные частоты симметричной ячейки можно сравнить с приближением (3.8). На Рисунке 3.11 изображены две картины полос запираания, полученная с помощью нулей дискриминанта приближения (3.8) и вторая – с помощью собственных частот симметричной ячейки.

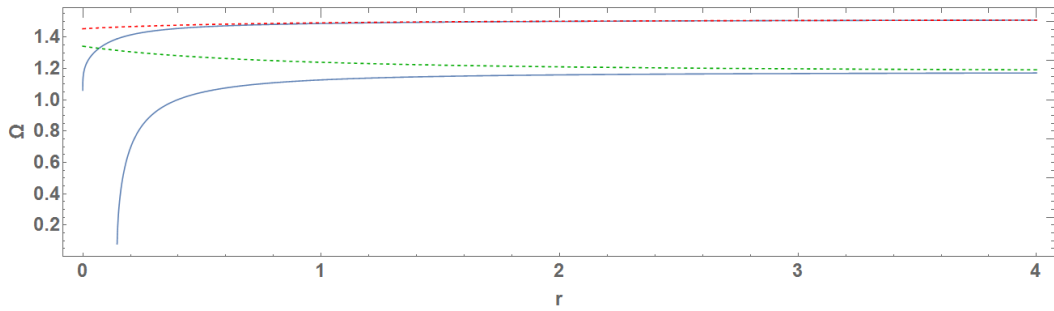


Рисунок 3.15 - Собственные частоты симметричной ячейки (штриховые линии) и частоты первой полосы запираия с условиями (3.8) (сплошные линии)

Из рисунка 3.15 видно, что приближение (3.8) описывает волновые свойства при $r \sim 1.5$ (при данном наборе параметров), что соответствует случаю, когда справедливо приближение функции Бесселя для большого аргумента (3.5).

3.5 Возможное обобщение теории типа брэгговских волокон с помощью дифференциального уравнения.

В предыдущем разделе была построена теория типа брэгговских волокон с применением корректирующего множителя к постоянной распространения и приближений функций Бесселя (3.3). Условия (3.8) можно обобщить, убрав априорное предположение о виде функции $\Lambda(r)$. Тогда, можно записать условия периодичности в виде:

$$\begin{aligned} u_1(r) &= \Lambda(r)u_3((1+\gamma)+r) \\ u_1'(r) &= \Lambda(r)u_3'((1+\gamma)+r) + \Lambda'(r)u_3((1+\gamma)+r) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Приравнивая нулю определитель этой системы $D(\Lambda(r), \Omega)$, мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка с неизвестной функцией $\Lambda(r)$:

$$D(\Lambda(r), \Omega) = \Lambda'(r) + \alpha_2(r)\Lambda^2(r) + \alpha_1(r)\Lambda(r) + \alpha_0(r) = 0 \quad (3.17)$$

Для уравнения (3.17) естественно определить граничное условие $\Lambda'(r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$, которое показывает, что параметр распространения стремится к постоянному с удалением от центра координат. Это означает, что, как и в декартовых координатах, волновые свойства мембраны при достаточно больших параметрах r или, что тоже самое, на больших частотах Ω определяются полиномом второго порядка по Λ , что даёт две константы распространения.

Заметим, что (3.17) - уравнение Риккати в канонической форме с коэффициентами $\alpha_i(r)$ состоящими из различных комбинаций Бесселевых функций. В рамках данной работы аналитическое решение (3.17) в общем виде не рассматривается. Ниже приведено решение уравнения с использованием аппроксимаций функции Бесселя для большого аргумента и численного интегрирования.

Аналитическое решение в предельном случае

С помощью подстановки $\Lambda(r)a_2(r) = \frac{v'(r)}{v(r)}$, (3.15) может быть записано в виде линейного уравнения второго порядка

$$v'' + B_1(r)v' + B_0(r)v = 0 \quad (3.18)$$

При этом коэффициенты могут быть выражены с помощью коэффициентов исходного уравнения как $B_0(r) = \alpha_2(r)\alpha_0(r)$ и $B_1(r) = -(\alpha_1(r) + \frac{\alpha_2'(r)}{\alpha_2(r)})$. Чтобы получить аналитическое решение уравнения (3.18), функции Бесселя заменяются на приближения для большого аргумента (3.5). В этом случае коэффициенты $B_i(r)$ имеют следующий вид

$$B_1 = \frac{1+r}{2r(1+\gamma+r)} + \frac{\Omega((1+\sigma^2)\sin(\Omega)\sin(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}) - 2\sigma\cos(\Omega)\cos(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}))}{\sigma(\sin(\Omega)\cos(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}) + \sigma\cos(\Omega)\sin(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}))} \quad (3.19)$$

$$B_0 = \frac{\Omega^2}{(\sin(\Omega)\cos(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}) + \sigma\cos(\Omega)\sin(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}))^2}$$

Заметим, что, как и в уравнении (3.10), коэффициенты не зависят от числа окружных полуволн m и поэтому приближённые коэффициенты (3.19) уравнения (3.18) подходят для аппроксимации как перемещений, так и сил, действующих далеко от центра координат.

Заметим, что только первое слагаемое в B_1 содержит зависимость от r . При предельном переходе $r \rightarrow \infty$ уравнение (3.18) является уравнением с постоянными

коэффициентами и имеет решение в виде (знак \lim в этом разделе обозначает предельный переход $r \rightarrow \infty$):

$$v^{\lim}(r) = C_1 \exp(k_1 r) + C_2 \exp(k_2 r),$$

где $k_i, i=1,2$ - корни характеристического уравнения:

$$k^2 + \left(\frac{\Omega((1 + \sigma^2) \sin(\Omega) \sin(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}) - 2\sigma \cos(\Omega) \cos(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}))}{\sigma(\sin(\Omega) \cos(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}) + \sigma \cos(\Omega) \sin(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}))} \right) k + \frac{\Omega^2}{(\sin(\Omega) \cos(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}) + \sigma \cos(\Omega) \sin(\frac{\gamma\Omega}{\sigma}))^2} = 0$$

Тогда решение исходного уравнения (3.12) может быть записано в виде

$$\Lambda^{\lim}(r) = \frac{(v^{\lim}(r))'}{\alpha_2^{\lim}(r)v^{\lim}(r)} = \frac{k_1 C_1 \exp(k_1 r) + k_2 C_2 \exp(k_2 r)}{\alpha_2^{\lim}(r)(C_1 \exp(k_1 r) + C_2 \exp(k_2 r))}$$

С помощью $\alpha_2^{\lim}(r)$ обозначен коэффициент $\alpha_2(r)$ уравнения (3.18) переписанный с помощью приближения функций Бесселя для большого аргумента (3.5).

Одна из констант C_1 или C_2 ищется из условия

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (\Lambda^{\lim}(r))' = 0 \quad (3.20)$$

В данном случае (функция $\Lambda^{\lim}(r)$, очевидно, непрерывна по параметру r и для каждого r существует производная), возможен предельный переход под оператором дифференцирования. Рассмотрим предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \Lambda^{\lim}(r) = 0 \quad (3.21)$$

Очевидно, он существует если $k_i \in \mathbb{R}$ и $k_1 > k_2$ или $k_2 > k_1$ в таком случае, предел существует и не зависит от констант C_i и равен

$$\Lambda_{(i)}^{\lim}(r) = \frac{k_i}{\alpha_2^{\lim}(r)} \quad (3.22)$$

Так, как k_i - корни квадратного уравнения и подразумевается, что существует непрерывный переход между полосами записывания и пропускания, то в общем случае $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ - два комплексно-сопряжённых числа. В этих предположениях

предел (3.21) существует только если одна из констант равна нулю. При этом предел (3.21) не зависит от констант и условие (3.20) выполняется всегда. Заметим при этом, что если $C_1 = 0$, то $\Lambda^{\text{lim}}(R_0)$ не зависит от C_2 и наоборот. С помощью всех преобразований функция $\Lambda^{\text{lim}}(r)$ может быть записана в виде:

$$\Lambda_{(i)}^{\text{lim}}(r) = \frac{k_i}{\alpha_2^{\text{lim}}(r)} \quad (3.23)$$

Восстановим исходное квадратное уравнение в виде:

$$(\Lambda - \Lambda_{(1)}^{\text{lim}}(r))(\Lambda - \Lambda_{(2)}^{\text{lim}}(r)) = \Lambda^2 - \sqrt{\frac{1+\gamma+r}{r}} \Lambda a_1(\Omega) + \frac{1+\gamma+r}{r} \quad (3.24)$$

Предельное решение (3.24) приближённо (отличаясь лишь на $\sqrt{\frac{1+\gamma+r}{r}}$) повторяют решения для теории Флоке для плоских волн в декартовых координатах (уравнение (1.4), Глава 1). Уравнение (3.24) повторяет полученное решение для условий (3.8).

Структура дифференциального уравнения (3.16) позволяет использовать метод возмущений для улучшения оценки (3.20) для достаточно больших Ω и r , чтобы можно было считать первое слагаемое в B_1 (3.17) малым по отношению ко второму. Тем не менее, этот метод не даёт качественно новых результатов, так как всё ещё требует использования приближения для большого аргумента (3.6).

Численное решение общего случая

Численное решение уравнения второго порядка (3.18) вместо изначального уравнения первого (3.17) не имеет дополнительных преимуществ. В этом разделе описаны свойства численного решения уравнения (3.17).

Граничное условие $\Lambda'(r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ делает численное решение уравнения (3.15) с помощью стандартных методов невозможным, так как оно имеет такой же порядок производной, что и дифференциальное уравнение, и, более того, содержит предельный переход на бесконечности. Решение и детальный анализ такого уравнения и, следовательно, спектральной задачи – получение картины полос

запираания, само по себе является трудной задачей, поэтому введём несколько ограничений.

Для того, чтобы воспользоваться стандартными численными методами решения дифференциальных уравнений, мы изменим граничное условие $\Lambda'(r) \rightarrow 0$ на его приближение в виде $\Lambda(r^{(\text{lim})}) = \Lambda_{\text{cart}}$ для достаточно большого числа $r^{(\text{lim})}$. Здесь Λ_{cart} - постоянная распространения, посчитанная для тех же параметров и на той же частоте, что и мембрана, но для плоских волн в декартовых координатах. Граничные условия, введённые таким образом, с одной стороны делают возможным решение спектральной задачи, но с другой не дают решениям дифференциального уравнения (3.17) показать картину полос запираания, отличную от декартовой, что соответствует теории брэгговских волокон.

На рисунках в этом разделе использованы интегральные кривые, найденные с помощью встроенного в Wolfram Mathematica алгоритма численного решения дифференциальных уравнений при значении параметра $r^{(\text{lim})} = 100$. В качестве частоты полосы пропускания взята $\Omega = 0.3$ а в качестве полосы запираания $\Omega = 1.35$

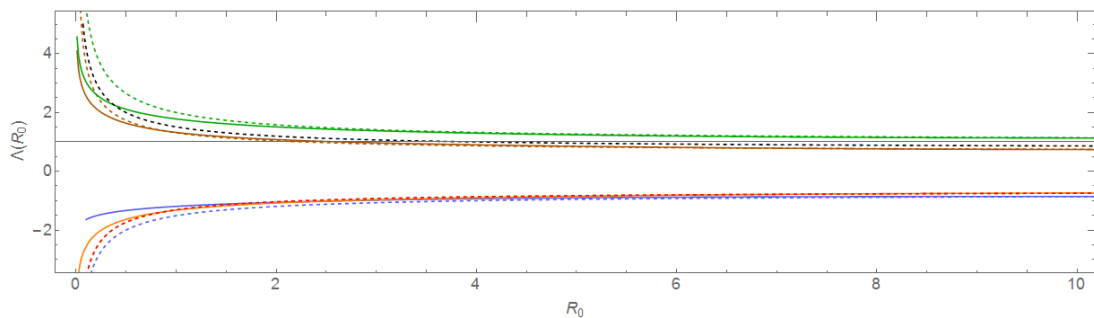


Рисунок 3.16 - Интегральные кривые (3.17) $\Omega = 0.3$, $m = 0$, полоса пропускания (синий – вещественная часть; коричневый, оранжевый – комплексно-сопряжённые мнимые части, зелёный – абсолютная величина), приближение (3.8) (штриховая линия, та же палитра)

Из рисунка 3.16 видно, что решение, полученное с помощью условий (3.8) достаточно хорошо приближают интегральные кривые, полученные с помощью граничных условий $\Lambda = \Lambda_{\text{cart}}^{(1)}$ и $\Lambda = \Lambda_{\text{cart}}^{(2)} = \bar{\Lambda}_{\text{cart}}^{(1)}$ (комплексно сопряжённая к $\Lambda_{\text{cart}}^{(1)}$ величина) в точке $r^{(\text{lim})} = 100$. Значительные различия заметны для значений параметров $r < 2$, что согласуется с результатами, полученными в предыдущем разделе.

Условия (3.8) так же используют и приближение производной $(\Lambda_{polar}^{approx})' = (1 + \gamma) / (2(r)^{3/2} \sqrt{r + 1 + \gamma}) \Lambda_{cartesian}$. Для численно найденных интегральных кривых так же может быть найдена $\Lambda'(r)$ с помощью численного дифференцирования. На рисунке 3.9 показано сравнение приближения производной $(\Lambda_{polar}^{approx})'$ и производной численного решения $\Lambda'(r)$:

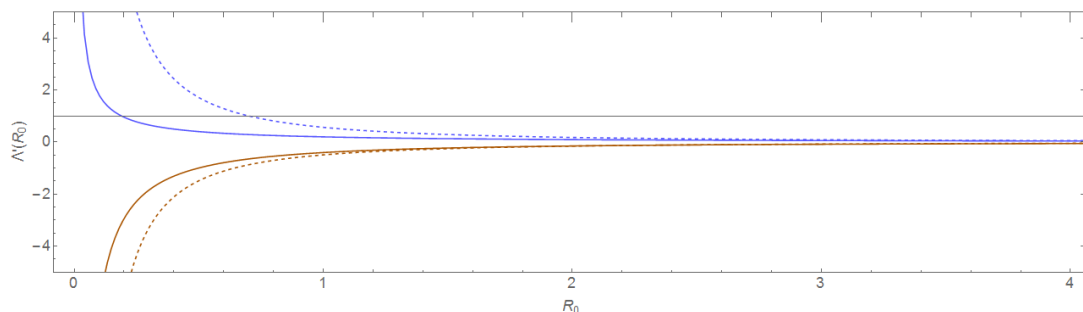


Рисунок 3.17 - Производная $\Lambda'(R_0)$ решения (3.17) $\Omega = 0.3$, $m = 0$, полоса пропускания (сплошная линия) и производная приближения (3.8) (штриховая линия)

Из рисунка 3.17 видно, что приближение производной стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Тем не менее, оно плохо приближает производную для малых r , то есть при $r < 2$.

Оба рисунка 3.16-3.17 показывают, что приближение D_r , используемое в предыдущих разделах, не могут быть использованы для определения волновых свойств периодической мембраны при $r < 2$. Тем не менее, так же показано, что они являются достаточно хорошими приближениями для больших значений этого параметра.

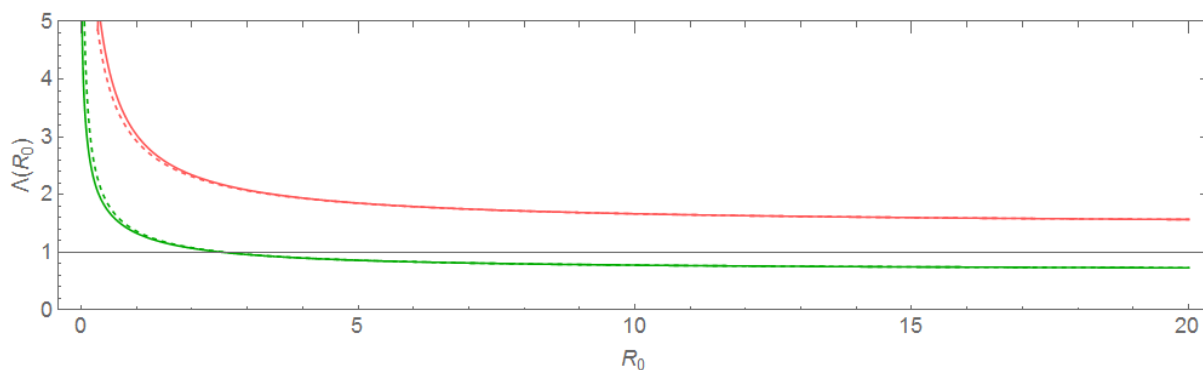


Рисунок 3.18 - Интегральные кривые (3.17) $\Omega = 1.35$, $m = 0$ (полоса запираия, сплошная линия) и приближение (3.8) (штриховая линия)

В декартовых координатах в задаче для плоских волн, существуют всего две константы распространения, которые имеют свойство $\Lambda_{cart}^{(1)} * \Lambda_{cart}^{(2)} = 1$. В полосе запираания, это два вещественных числа, такие что $\Lambda_{cart}^{(1)} < 1$, $\Lambda_{cart}^{(2)} > 1$ (рисунок 3.18). Таким образом, можно интерпретировать функцию $\Lambda(r)$ в рамках теории Флоке с точки зрения наличия полос запираания и пропускания. Полоса пропускания наблюдается в том случае, когда $\Lambda(r)$ имеет комплексные значения, иначе, когда функция принимает вещественные значения – наблюдается полоса запираания.

Влияние числа окружных полуволн m на функцию $\Lambda(r)$ так же видно из решения уравнения (3.17) при этом перемещения считаются функциями Бесселя порядка $m = M_0$, $M_0 \in N$ вместо $m = 0$. На рис.3.11 показано решение для $m = 3$

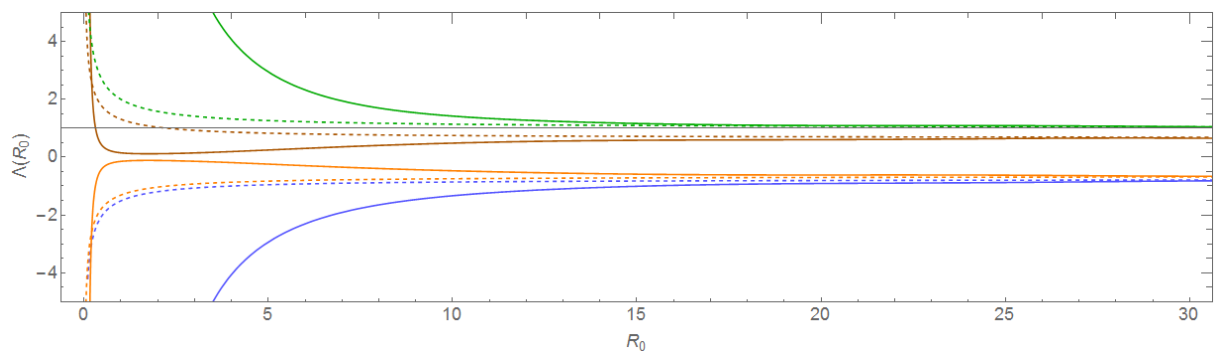


Рисунок 3.19 - Интегральные кривые (3.17) $\Omega = 0.3$, $m = 3$, полоса пропускания (синий – вещественная часть; коричневый, оранжевый – комплексно-сопряжённые мнимые части, зелёный – абсолютная величина), приближение (3.8) (штриховая линия, та же палитра)

Из рисунка 3.19 видно, что приближение (3.8) теряет точность в случае большего числа окружных полуволн и стремится к точному решению на больших расстояниях от начала координат, чем в случае $m = 0$. Это объясняет тот факт, что полосы псевдо-запираания становятся больше при увеличении m как показано на рисунке 3.7.

Обобщение условий периодичности (3.17) полностью описывает все детали распространения волн в радиально-периодической мембране без ограничения на используемые параметры, такие как расстояние от центра r . Несмотря на то, что оно не было решено аналитически в общем виде, некоторые частные решения (при заданном отношении между параметрами Ω и r) могут быть получены с помощью

метода описанного в [50]. Тем не менее, эти аналитические решение представляет собой отдельную задачу, выходящую за рамки данной работы.

3.6 Расширение теории типа брэгговских волокон на периодическую пластину

Вторым примером анализа распространения цилиндрических волн в радиально периодической структуре может служить тонкая пластина, рассмотренная в рамках теории пластин Кирхгофа. В полярных координатах уравнение пластины имеет вид:

$$(\Delta + k^2)(\Delta - k^2)w = (w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\varphi\varphi} + k^2w)(w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\varphi\varphi} - k^2w) = -q(r, \varphi)$$

В декартовых координатах это соответствует задаче распространения плоских волн в балке Бернулли-Эйлера и, поэтому, результаты, полученные для пластины в полярных координатах при достаточном отдалении от центра координат, должны повторять результаты для балки.

В этом разделе введены следующие безразмерные переменные

$$\alpha = \frac{E_2}{E_1}; \beta = \frac{h_2}{h_1}; \gamma = \frac{l_2}{l_1}; \delta = \frac{\rho_2}{\rho_1}; \lambda = \frac{l_1}{h_1}; \Omega^2 = 12(1 - \nu^2) \left(\frac{\omega h_1}{c_1} \right)^2 \quad (3.25)$$

В дополнение к параметрам, введённым для мембраны, здесь, E - модуль Юнга и h - толщина пластины. Если не сказано иначе, используются следующие численные значения параметров

$$\alpha = 2.5; \beta = 1; \gamma = 4; \delta = 15 / 10; \lambda = 4$$

Несмотря на то, что решения в этом разделе представлены только для осесимметричных волн в пластине, все результаты применимы и для произвольного числа окружных полуволн m в пластине. Этот параметр отвечает лишь за порядок функции Бесселя в общем решении уравнения Кирхгофа, при этом методы получения решения не меняются.

Приближённые формулировки теории Флоке для пластины в полярных координатах

Как известно, общее решение уравнения модели Кирхгоффа для пластины представляет собой сумму четырёх различных типов функций Бесселя. Приближения для больших аргументов для функций Бесселя имеют вид (3.26)

$$\begin{aligned}
Y_m(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cos\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \exp(|\operatorname{Im}(z)|) O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right) \\
J_m(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \exp(|\operatorname{Im}(z)|) O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right) \\
I_m(z) &= \exp\left(-\frac{mi\pi}{2}\right) J_m(iz) \\
K_m(z) &= \frac{\pi}{2} \exp\left(\frac{mi\pi}{2}\right) \left(\exp\left(\frac{(m+1)i\pi}{2}\right) I_m(z) - Y_m(iz) \right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Условия стыковки для соседних сегментов в ячейках периодичности (рисунок 3.2) содержат перемещения, касательные, изгибные моменты

$$M(r) = w''(r) + \nu \left(\frac{m^2}{r^2} w(r) + \frac{1}{r} w'(r) \right) \quad \text{и} \quad \text{сдвиговые} \quad \text{силы}$$

$$Q(r) = w'''(r) + (2 - \nu) \left(\frac{1}{r} w''(r) - \frac{1}{r^2} w'(r) + \frac{m^2}{r^2} w'(r) - 2 \frac{m^2}{r^3} w(r) \right)$$

$$\begin{aligned}
w_1(1+r) &= w_2(1+r) & w_2(1+\gamma+r) &= w_3(1+\gamma+r) \\
w'_1(1+r) &= w'_2(1+r) & w'_2(1+\gamma+r) &= w'_3(1+\gamma+r) \\
M_1(1+r) &= M_2(1+r) & M_2(1+\gamma+r) &= M_3(1+\gamma+r) \\
Q_1(1+r) &= Q_2(1+r) & Q_2(1+\gamma+r) &= Q_3(1+\gamma+r)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Отметим, что моменты и силы для чётных частей (то есть для $i = 2, 4, 6, \dots$) содержат множитель $\alpha\beta$ для согласования с безразмерными параметрами (3.25)

С помощью приближений (3.26) рассмотрим однородную пластину для того, чтобы определить форму параметра периодичности по аналогии с задачей о мембране. В этом случае параметр периодичности полностью соответствует тому, что был найден для мембраны, так что первое приближение для параметра распространения может быть записано в виде

$$\Lambda(r) = \sqrt{\frac{1+\gamma+r}{r}} \Lambda_{\text{cartesian}} \tag{3.28}$$

С помощью (3.28) запишем условия периодичности в виде:

$$\begin{aligned}
w_1(r) &= \sqrt{\frac{1+\gamma+r}{r}} \Lambda_{const} w_3(1+\gamma+r) \\
w_1'(r) &= \frac{d}{dr} \left(\sqrt{\frac{1+\gamma+r}{r}} \Lambda_{const} w_3(1+\gamma+r) \right) \\
w_1''(r) &= \frac{d^2}{dr^2} \left(\sqrt{\frac{1+\gamma+r}{r}} \Lambda_{const} w_3(1+\gamma+r) \right) \\
w_1'''(r) &= \frac{d^3}{dr^3} \left(\sqrt{\frac{1+\gamma+r}{r}} \Lambda_{const} w_3(1+\gamma+r) \right)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Заметим, что условия периодичности выписанные таким образом не соответствуют граничным условиям, которые могут быть получены из принципа Гамильтона. Из принципа Гамильтона следует, что граничные условия должны быть записаны в терминах изгибного момента и сдвиговой силы. Однако, заметим, что третье и четвёртое уравнение в (3.29) можно переписать с помощью физических переменных $M(r)$ и $Q(r)$ для полного соответствия принципу Гамильтона. Точно так же, можно переписать моменты и силы с использованием второй, и третьей производной от перемещения. Для удобства изложения мы будем пользоваться условиями в виде (3.29). Для таких же условий, но выписанных с помощью физических переменных $M(r)$ и $Q(r)$ можно получить аналогичные результаты.

Для получения решения в случае распространения цилиндрических волн в Пластине нужно использовать метод граничных интегральных уравнений (в Главе 2 приведён полный вывод функции Грина и граничных интегральных уравнений для искривлённой балки, здесь используется аналогичный метод) с функцией Грина в виде:

$$G(r, r_0) = \begin{cases} \frac{4I_m(kr)K_m(kr_0) + i\pi H_m^{(1)}(kr)H_m^{(2)}(kr_0)}{8k^2} & , r \leq r_0 \\ \frac{4K_m(mr)I_m(mr_0) + i\pi H_m^{(2)}(kr)H_m^{(1)}(kr_0)}{8k^2} & , r > r_0 \end{cases}$$

Набор граничных интегральных уравнений для каждого из трёх последовательных сегментов и условия (3.27), (3.29) определяют систему линейных алгебраических уравнений по отношению к неизвестным перемещениям

и их производным на границах $w_i^{(j)}(r)$. Условия стыковки (3.27) и периодичности (3.29) служат в этом случае дополнительными отношениями для неизвестных значений функций на границах частей периодической структуры в граничных интегральных уравнениях в виде (здесь введены обозначения $G_m(r, r_0) = \frac{\partial}{\partial r_0} G(r, r_0)$, $r = a$ и $r = b$ - границы пластины по радиусу)

$$w(r_0) = (w'''(r)G(r, r_0) - w''(r)G'(r, r_0) + w'(r)G''(r, r_0) - w(r)G'''(r, r_0)) \frac{1}{r} \Big|_{r=a}^{r=b}$$

$$\frac{d}{dr_0} w(r_0) = \left(\begin{array}{l} w'''(r)G_m(r, r_0) - w''(r) \left(\frac{d}{dr} G_m(r, r_0) \right) + w'(r) \left(\frac{d^2}{dr^2} G_m(r, r_0) \right) \\ -w(r) \left(\frac{d^3}{dr^3} G_m(r, r_0) \right) \end{array} \right) \frac{1}{r} \Big|_{r=a}^{r=b}$$

Определитель $D_r(\Lambda_{const}, \Omega)$ системы (3.27), (3.29) представляет собой комбинацию функций Бесселя различного вида и порядков. Зависимость $\Lambda(r)$ от безразмерного параметра частоты Ω и радиуса r может быть найдена из уравнения $D_r(\Lambda(r), \Omega) = 0$ результат численного решения показан на рисунке 3.15.

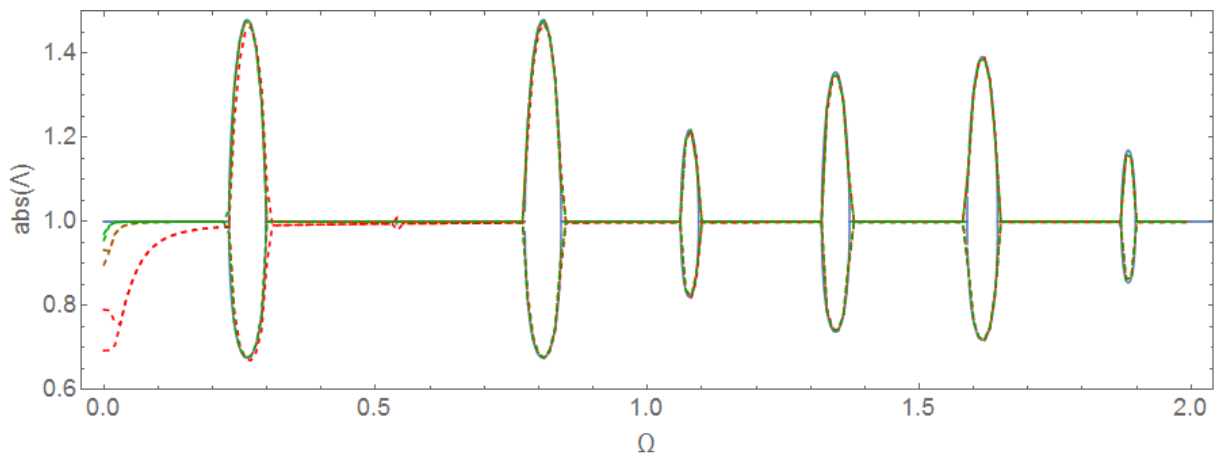


Рисунок 3.20 - Полосы запираания для приближения (3.25) для радиально-периодической пластины $R_0 = 5, 10, 50$ (красный, оранжевы, зелёный, штриховая линия) и полосы запираания балки Бернулли-Эйлера в декартовых координатах (сплошная линия)

Численная неустойчивость в окрестности точки $\Omega = 0$ затрудняет анализ картины полос запираания на низких частотах. Тем не менее, можно предположить, что полоса запираания в окрестности $\Omega = 0$ так же предсказывается неверно, как и

в случае радиально-периодической мембраны. Очевидно, что картина полос запираания стремится к картине, получаемой для периодической балки Бернулли-Эйлера при $R_0 \rightarrow \infty$.

Отметим, что диапазон частот, изображённый на рисунке 3.20, выходит за рамки частотной применимости тонкостенной пластины Кирхгоффа. Это сделано для иллюстрации того факта, что с ростом частоты, разница между положением полос запираания, предсказанными в моделях в декартовых и полярных координатах исчезает, как и в случае радиально-периодической мембраны.

Дифференциальное уравнение для радиально-периодической пластины в полярных координатах

Так же, как и в случае радиально-периодической мембраны, общее условие периодичности можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 w_1(r) &= \Lambda(r)w_3((1+\gamma)+r) \\
 w_1'(r) &= \frac{d}{dr}(\Lambda(r)w_3((1+\gamma)+r)) \\
 w_1''(r) &= \frac{d^2}{dr^2}(\Lambda(r)w_3((1+\gamma)+r))'' \\
 w_1'''(r) &= \frac{d^3}{dr^3}(\Lambda(r)u_3((1+\gamma)+r))'''
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Условия стыковки (3.25) и периодичности (3.29) формируют систему с определителем $D(\Lambda(r), \Omega)$. Приравнивая определитель нулю, можно получить нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка по отношению к неизвестной функции $\Lambda(r)$

$$\begin{aligned}
 D(\Lambda(r), \Omega) &= L(\Lambda(r)) + f_4(r)\Lambda^4(r) + f_3(r)\Lambda^3(r) + \\
 &+ f_2(r)\Lambda^2(r) + f_1(r)\Lambda(r) + f_0(r) = 0
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Дифференциальный оператор $L(r)$ в случае радиально-периодической пластины имеет вид (коэффициенты φ_i представляют собой комбинации функций Бесселя разного рода и порядка):

$$L = \left(\frac{d^3}{dr^3} + \varphi_2(r) \frac{d^2}{dr^2} + \varphi_1(r) \frac{d}{dr} \right) \left(1 + \varphi_3(r) \frac{d^2}{dr^2} + \varphi_4(r) \frac{d}{dr} \right) \left(1 + \varphi_5(r) \frac{d}{dr} \right)$$

В отличие от случая радиально-периодической мембраны, (3.30) не соответствует ни одному каноническому дифференциальному оператору. Условия убывания на бесконечности $\Lambda^{(j)}(r) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty, j = 0, \dots, 3$, которые позволяют радиально-периодической пластине иметь волновые свойства, соответствующие балке Бернулли-Эйлера, в этом случае являются естественными граничными условиями для уравнения (3.31). Уравнение (3.31) может быть решено лишь численно. Численные результаты аналогичны полученным для радиально-периодической мембраны, при этом условия на бесконечности так же заменяются на константы, полученные для случая балки Бернулли-Эйлера в декартовых координатах.

Конечные структуры

Рассмотрим свободные колебания конечной пластины, показанной на рисунке 3.11, которая состоит из целого числа симметричных ячеек периодичности. Для пластины симметричные условия периодичности можно записать в виде

$$\begin{aligned} w_1(1/2 + r) &= 0 \\ w_3(3/2 + \gamma + r) &= 0 \\ M_1(1/2 + r) &= 0 \\ M_3(3/2 + \gamma + r) &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} w'_1(1/2 + r) &= 0 \\ w'_3(3/2 + \gamma + r) &= 0 \\ Q_1(1/2 + r) &= 0 \\ Q_3(3/2 + \gamma + r) &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Как и во всех предыдущих случаях условия (3.32) являются условиями типа А, а (3.33) – условия типа В. Условия стыковки (3.27) с граничными условиями типа А или В представляют собой замкнутую систему однородных линейных алгебраических уравнений. Приравнивая нулю её определитель, получим уравнения для собственных частот конечной структуры. Корни этого уравнения показаны на рисунке 3.21

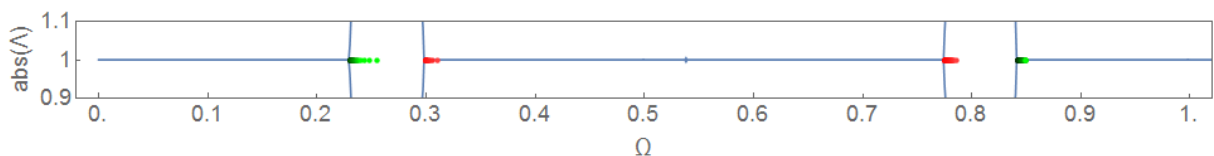


Рисунок 3.21 - Собственные частоты одной ячейки периодичности ($R_0 = 5, \dots, 100$) (оба типа граничных условий)

Из рис.3.16 видно, что собственные частоты одной ячейки периодичности зависят от параметра r и стремятся к границам полос запираания для задачи в декартовых координатах с ростом этого параметра.

Собственные частоты структуры, состоящей из нескольких последовательно расположенных ячеек периодичности, появляются только в полосах пропускания, как и во всех предыдущих случаях (рисунок 3.22):

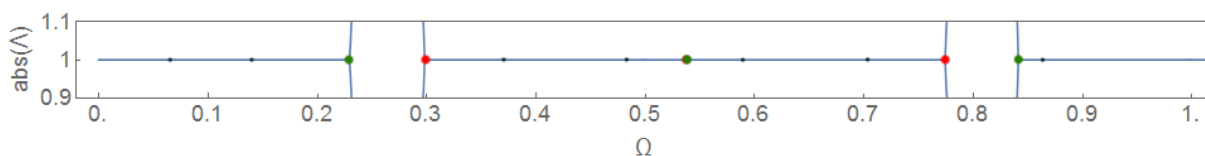


Рисунок 3.22 - Собственные частоты трёх ячеек периодичности ($R_0 = 20$) (оба типа граничных условий)

Поэтому, можно говорить о том, что все свойства, полученные для радиально-периодической мембраны, справедливы и для радиально-периодической пластины.

3.7 Выводы к Главе 3

В Главе 3 были рассмотрены две модели радиально-периодических структур, для которых можно построить теорию типа теории брэгговских волокон. При этом отметим следующие свойства:

- Вслед за предыдущими авторами было установлено, что стандартная теория волоконной брэгговской решётки, в которой используются асимптотики функций Бесселя для большого аргумента, применима для изучения эффекта виброизоляции, возникающего из-за периодичности в радиально-периодических мембранах и пластинах, однако она справедлива лишь на достаточно больших расстояниях от начала полярных координат.
- В отличие от задач о периодических структурах в декартовых координатах (Главы 1,2,4), параметр периодичности для цилиндрических волн включают в себя зависимость от радиуса r , которая может описываться обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением. Это уравнение имеет нечётный порядок, на один порядок ниже, чем уравнение колебаний мембраны

- В задаче о радиально-периодической мембране дифференциальное уравнение относительно параметра распространения допускает своё преобразование к форме канонического уравнения Риккати, которое может быть решено аналитически для аппроксимаций функций Бесселя для большого аргумента. Так же предложен метод численного решения дифференциальных уравнений для задач о радиально-периодической мембране и пластине в общем виде. При этом, отметим, что уравнение для пластины не преобразуется к какому-либо каноническому дифференциальному уравнению и может быть решено лишь численно
- Свойства собственных частот конечных структур, составленных из целого числа симметричных ячеек периодичности, имеющие вид строгого равенства в задачах в декартовых координатах сохраняются и в задачах в полярных координатах, но лишь в виде асимптотического равенства при радиусе $r \rightarrow \infty$
- Анализ потока энергии подчёркивает зависимость полос запираения от расстояния от центра полярных координат, но в целом повторяет подобный анализ в декартовых координатах: уровень виброизоляции зависит от разности импедансов между частями периодической структуры и возрастает с ростом числа периодических вставок

Глава 4. Теория Флоке в задаче Рэлея-Лэмба

В этой главе рассматривается виброизоляционный эффект, возникающий при рассмотрении моделей конечного и бесконечного прямоугольных периодических упругих слоёв с постоянной толщиной. Главной задачей этой главы является расширить теорию распространения волн в однородном слое, который обычно рассматривается в рамках канонической задачи Рэлея-Лэмба [58-61], на двусоставной слой. Обычно, анализ виброизоляционных свойств, возникающих из-за периодичности, проводится в низкочастотной области. Положение и размер полос запираания контролируются параметрами частей, входящих в состав периодической структуры. В каждом семействе распространяющихся волн в упругом слое (симметричные и кососимметричные моды) есть волна, которая распространяется в низкочастотном диапазоне. Эти волны достаточно точно моделируются теорией Бернулли-Эйлера и в рамках теории Флоке в окрестности нулевой частоты мы всегда наблюдаем полосу пропускания вне зависимости от параметров компонент, составляющих периодическую структуру. Полосы запираания появляются на достаточно большой частоте и, как описано в [25], картина полос запираания в случае когда $\frac{\gamma}{\sigma} \in \mathbb{Q}$ периодична относительно частоты.

Тем не менее, модели в рамках простых теорий показывают неверную картину на высоких частотах, когда затухающие волны переходят в распространяющиеся, что происходит на частотах отсечки. Очевидно, такой переход снижает виброизоляционные свойства структуры. Поэтому, предсказания полос запираания в рамках теории Бернулли-Эйлера становятся излишне оптимистичными на высоких частотах.

Цель этой главы – исследовать разницу между низкочастотным диапазоном, когда число распространяющихся волн ограничено одной парой и высокочастотным диапазоном, когда число распространяющихся волн растёт. Отчасти, этот момент освещается в Главе 2. Здесь же проведено обобщение, с помощью последовательности усечённых моделей для задачи Рэлея-Лэмба для

каждого из сегментов, составляющих периодическую структуру. Эта последовательность исследована в [60-61] для кососимметричных и симметричных мод в однородном слое. Для того, чтобы применить теорию Флоке для высокочастотного диапазона, не обязательно использовать точную формулировку задачи Рэля-Лэмба. Вместо этого достаточно использовать усечённую теорию, которая описывает достаточное число распространяющихся волн в данном диапазоне. При этом увеличение числа распространяющихся волн выше достаточного в модели влияет лишь на положение полос запираания, а не на их существование.

Как показано в Главах 1-3, задача о собственных частотах симметричной ячейки периодичности связана с положением полос запираания в бесконечной периодической структуре, составленной из этих ячеек. Этот результат так же будет обобщён на случай высокочастотного диапазона в этой главе.

Так как задача Рэля-Лэмба как для однородного, так и для периодического слоя факторизуется, и волновые свойства, наблюдаемые в случае симметричных и кососимметричных мод практически идентичны [61], в этой главе рассмотрена только симметричная часть. Для рассмотрения виброизоляционных свойств на высоких частотах акустического диапазона, достаточно рассмотреть три модели с возрастающей сложностью, одномодовую теорию Бернулли-Эйлера, трёх- и пяти-модовую модели. Отметим, что пятимодовая модель имеет частоту отсечки однородного слоя заведомо больше акустического диапазона для любого материала, используемого на практике. Таким образом, все результаты, полученные в данной главе справедливы и для задачи об упругом слое в канонической постановке. В этой главе приводятся лишь необходимые для дальнейших выкладок формулы, полностью весь вывод формул описан в [60-61].

4.1 Последовательность моделей усечённого порядка для упругого слоя

Рассмотрим гармонические колебания в периодическом упругом слое, схематически изображённом на рисунке 4.1. При этом отметим, что мы решаем задачу в рамках классической задачи о плоской деформации

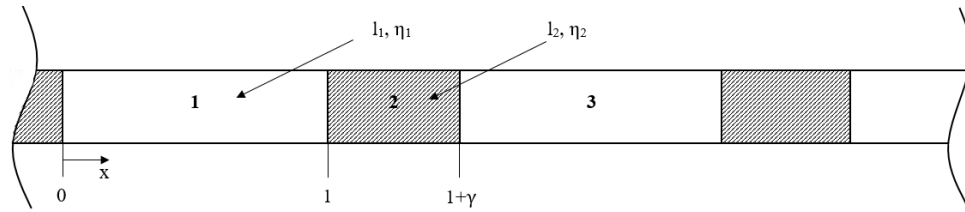


Рисунок 4.1 - Периодический упругий слой

Каждый сегмент характеризуется собственной скоростью распространения волн сжатия-растяжения $c_1^{(i)}$, скоростью распространения волн сдвига $c_2^{(i)}$, и длиной l_i . Толщина считается одинаковой для всех сегментов $h_1 = h_2 = h$. Введём

безразмерный параметр $\eta_i = \frac{c_1^{(i)}}{c_2^{(i)}}$ для каждого сегмента, при этом подразумевается,

что скорость сдвиговых волн меняется незначительно, так что $c_2^{(1)} = c_2^{(2)} = c_2$.

Полный набор безразмерных параметров выглядит следующим образом

$$\sigma = \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad \gamma = \frac{l_2}{l_1} \quad \lambda = \frac{h_1}{l_1}$$

Если не указано иначе, в этой главе используется следующий набор безразмерных параметров для численных экспериментов

$$\lambda = 0.3; \sigma = 0.7; \gamma = 10$$

Как сказано во вступлении к Главе 4, распространение волн в каждом сегменте описывается с помощью моделей усечённого порядка [54-55].

Уравнения моделей усечённого порядка получаются в результате разложения перемещений u, v по полиномам Лежандра, общее разложение имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{i=0}^{[m/2]+1} \bar{U}_{2i}(x, t) L_{2i}(y) \\ v(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{[m/2]} \bar{V}_{2i-1}(x, t) L_{2i-1}(y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $L_j(y)$ - нормированные в стандартной метрике L^2 полиномы Лежандра порядка j , $[m]$ - целая часть числа m .

Уравнения моделей усечённого порядка в этой главе получены с помощью

стандартной формулировки интеграла действия в форме $H = \int_S \int_{t_1}^{t_2} [T - V] dt dS$ при

этом уравнения для кинетической T и потенциальной энергии V имеют стандартную для упругого слоя форму

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] dS$$

$$V = \frac{1}{2} \rho c_2^2 \int_S [\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{xy} \epsilon_{xy} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy}] dS, \quad (4.2)$$

где u, v - компоненты поля деформации, ϵ_{ij} - компоненты линейного тензора деформаций Коши в рамках задачи о плоской деформации, σ_{ij} - соответствующие им напряжения

Следующие уравнения для моделей усечённого порядка получены из принципа Гамильтона $\delta H = 0$ с помощью разложения (4.1) для числа мод $m = 1, 3, 5$, подставленного в уравнения:

а) 1-модовая теория в рамках аппроксимации Бернулли-Эйлера

$$-\frac{\partial^2 \bar{U}_0(x,t)}{\partial t^2} + \frac{4(\eta^2 - 1)}{\eta^2} c_2^2 \frac{\partial^2 \bar{U}_0(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

При этом граничные условия при $x = a$, $x = b$ (здесь a и b - координаты границ однородного упругого слоя) имеют вид

$$\bar{U}_0(x,t) = 0 \text{ или } \bar{F}_0(x,t) \equiv -\frac{4(\eta^2 - 1)}{\eta^2} \frac{\partial \bar{U}_0(x,t)}{\partial x} = 0$$

б) 3-модовая теория

$$\eta^2 \frac{\partial^2 \bar{U}_0(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \bar{U}_0(x,t)}{\partial t^2} - (2 - \eta^2) \frac{\partial \bar{V}_1(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$(2 - \eta^2) \frac{\partial \bar{U}_0(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \bar{V}_1(x,t)}{\partial x^2} - \eta^2 \bar{V}_1(x,t) - \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_1(x,t)}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial \bar{U}_2(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$2 \frac{\partial \bar{V}_1(x,t)}{\partial x} + \frac{4}{5} \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{U}_2(x,t)}{\partial x^2} - 48 \bar{U}_2(x,t) - \frac{12}{\pi^2} \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \bar{U}_2(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

При этом граничные условия при $x = a$, $x = b$ представляют собой три пары обобщённых перемещений и сил

$$\bar{F}_0(x,t) \equiv \eta^2 \frac{\partial \bar{U}_0(x,t)}{\partial x} + (\eta^2 - 2) \bar{V}_1(x,t) = 0 \text{ или } \bar{U}_0(x,t) = 0$$

$$\bar{F}_1(x,t) \equiv \frac{1}{12} \frac{\partial \bar{V}_1(x,t)}{\partial x} - 2\bar{U}_2(x,t) = 0 \text{ или } \bar{V}_1(x,t) = 0$$

$$\bar{F}_2(x,t) \equiv \frac{4}{5} \eta^2 \frac{\partial \bar{U}_2(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ или } \bar{U}_2(x,t) = 0$$

в) 5-модовая теория

$$\begin{aligned} & \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{U}_0(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \bar{U}_0(x,t)}{\partial t^2} - (2 - \eta^2) \frac{\partial \bar{V}_1(x,t)}{\partial x} + 2\sqrt{7}(2 - \eta^2) \frac{\partial \bar{V}_3(x,t)}{\partial x} = 0 \\ & (2 - \eta^2) \frac{\partial \bar{U}_0(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \bar{V}_1(x,t)}{\partial x^2} - \eta^2 \bar{V}_1(x,t) - \frac{1}{12} \frac{1}{c_2^2} C_{21} \frac{\partial^2 \bar{V}_1(x,t)}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial \bar{U}_2(x,t)}{\partial x} + \\ & \quad + 2\eta^2 \sqrt{7} \bar{V}_3(x,t) + 3 \frac{\partial \bar{U}_4(x,t)}{\partial x} = 0 \\ & 2 \frac{\partial \bar{V}_1(x,t)}{\partial x} + \frac{4}{5} \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{U}_2(x,t)}{\partial x^2} - 48 \bar{U}_2(x,t) - \frac{4}{5} \frac{1}{c_2^2} C_{22} \frac{\partial^2 \bar{U}_2(x,t)}{\partial t^2} - \\ & \quad - 4\sqrt{7}(2 - \eta^2) \frac{\partial \bar{V}_3(x,t)}{\partial x} + 72 \bar{U}_4(x,t) = 0 \\ & -2\sqrt{7}(2 - \eta^2) \frac{\partial \bar{U}_0(x,t)}{\partial x} + 2\alpha^2 \sqrt{7} \bar{V}_1(x,t) + 4\sqrt{7}(2 - \eta^2) \frac{\partial \bar{U}_2(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{V}_3(x,t)}{\partial x^2} - \\ & \quad - 168\eta^2 \bar{V}_3(x,t) - \frac{1}{c_2^2} C_{23} \frac{\partial^2 \bar{V}_3(x,t)}{\partial t^2} - 6\sqrt{7} \frac{\partial \bar{U}_4(x,t)}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Множители, корректирующие момент инерции [61] для 5-модовой модели имеют вид

$$C_{21} = \frac{2(25 + \sqrt{355})}{9\pi^2}, C_{22} = \frac{3(35 + \sqrt{105})}{16\pi^2}, C_{23} = \frac{56(25 - \sqrt{355})}{9\pi^2}, C_{24} = \frac{9(35 - \sqrt{105})}{4\pi^2}$$

При этом граничные условия представляют собой пять пар обобщённых перемещений и сил

$$\bar{F}_0(x,t) \equiv \eta^2 \frac{\partial \bar{U}_0(x,t)}{\partial x} + (\eta^2 - 2)\bar{V}_1(x,t) - 2\sqrt{7}(\eta^2 - 2)\bar{V}_3(x,t) = 0 \text{ или } \bar{U}_0(x,t) = 0$$

$$\bar{F}_1(x,t) \equiv \frac{1}{12} \frac{\partial \bar{V}_1(x,t)}{\partial x} - 2\bar{U}_2(x,t) + 3\bar{U}_4(x,t) = 0 \text{ или } \bar{V}_1(x,t) = 0$$

$$\bar{F}_2(x,t) \equiv \frac{4}{5} \eta^2 \frac{\partial \bar{U}_2(x,t)}{\partial x} + 4\sqrt{7}(\eta^2 - 2)\bar{V}_3(x,t) = 0 \text{ или } \bar{U}_2(x,t) = 0$$

$$\bar{F}_3(x,t) \equiv \frac{\partial \bar{V}_3(x,t)}{\partial x} - 6\sqrt{7}\bar{U}_4(x,t) = 0 \text{ или } \bar{V}_3(x,t) = 0$$

$$\bar{F}_4(x,t) \equiv \eta^2 \frac{\partial \bar{U}_4(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ или } \bar{U}_4(x,t) = 0$$

После того, как получены уравнения моделей, рассматривается стационарное распространение гармонических волн с помощью $\exp(-i\omega t)$, то есть $\bar{U}_0(x,t) = U_0(x)\exp(-i\omega t)$ (остальные проекции на пространство с базисом состоящим из полиномов Лежандра определяются аналогично).

Пространственная зависимость имеет вид $\exp(ikx)$ для каждой из проекций (для краткости показана только мода U_0 разложения по полиномам Лежандра). Итоговая форма колебаний имеет вид

$$\bar{U}_0(x,t) = U_0 \exp(ikx - i\omega t) \quad (4.3)$$

Колебания в форме (4.3) подставляются в уравнения для 1-,3- и 5-модовых теорий.

После факторизации на множитель $\exp(ikx - i\omega t)$ мы получаем однородную систему из m алгебраических уравнений с неизвестными амплитудами U_p, V_q .

Определитель системы содержит волновое число k и параметр частоты $\Omega = \frac{\omega h_1}{c_1^{(1)}}$ в

качестве переменных, при этом, приравнивая нулю определитель можно получить дисперсионное отношение $k_m(\Omega)$ в виде полинома. На рисунке 4.2 построена дисперсионная диаграмма для белых сегментов (рисунок 4.1):

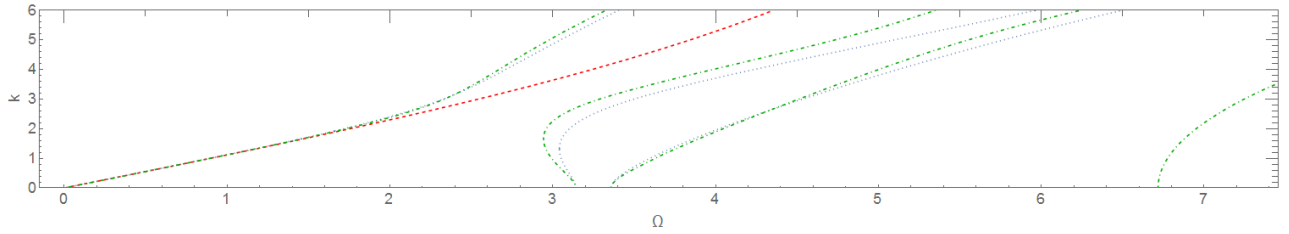


Рисунок 4.2 - Дисперсионные диаграммы для 1,3,5-модовой модели (штрихованная, пунктирная, штрихпунктирная линии соответственно)

Для частотно-волнового окна, показанного на рисунке 4.2, точные решения задачи Рэлея-Лэмба без искажений повторяются соответствующими дисперсионными кривыми на рисунке 4.2, полученными для 5-модовой теории.

Для дальнейших вычислений удобно ввести векторные обозначения, которые соотносят компоненты разложения перемещений по полиномам Лежандра с физическими перемещениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(x) &= \{U_0(x), U_2(x), U_4(x)\}; & \boldsymbol{\sigma}_{xy}^{(i)}(x) &= \{F_1(x), F_3(x)\}; \\ \mathbf{v}_i(x) &= \{V_1(x), V_3(x)\}; & \boldsymbol{\sigma}_{xx}^{(i)}(x) &= \{F_0(x), F_2(x), F_4(x)\}; \end{aligned} \quad (4.4)$$

В (4.4) вектор $\mathbf{u}_i(x)$ содержит компоненты разложения по полиномам Лежандра продольного перемещения i -го сегмента, $\mathbf{v}_i(x)$ - изгибного перемещения. Вектор $\boldsymbol{\sigma}_{jk}^{(i)}(x)$ содержит компоненты разложения тензора напряжений $F_j^{(i)}$ [61] (аналогично формуле (4.1) компоненты тензора напряжений так же можно разложить по полиномам Лежандра, при этом компоненты будут иметь вид $F_j^{(i)}$).

В (4.4) компоненты разложения, соответствующие 1-модовой теории имеют индекс 0, 3-модовой - индексы 0,1,2, при этом компоненты 5-модовой теории содержатся в (4.4) полностью.

Отметим, что периодический слой на рисунке 4.1 содержит также и серые сегменты, которые обладают своими волновыми свойствами: дисперсионной диаграммой и частотами отсечки. На рис.4.3 с помощью сплошных и пунктирных линий показаны дисперсионные кривые для 5-модовой теории, при этом за единицу

параметра частоты взят параметр белого сегмента, то есть, $\Omega = \frac{\omega h_1}{c_1^{(1)}}$

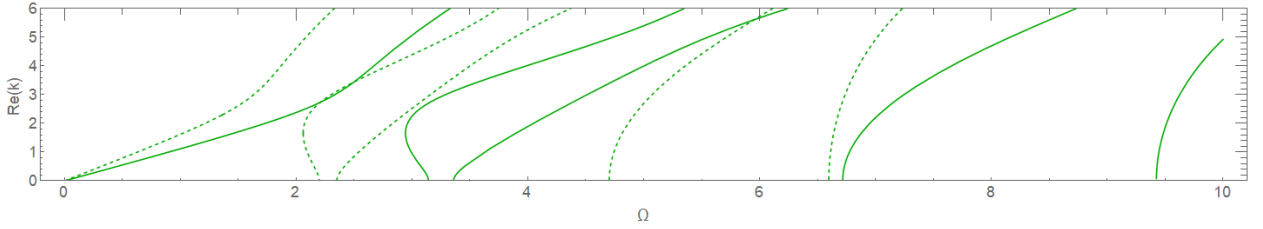


Рисунок 4.3 - Дисперсионная диаграмма для 5-модовой модели (сплошная линия – для белого сегмента, штрихованная линия – для серого сегмента)

Из рисунка 4.3 видно, что имеется значительное различие между частотами отсечек для составляющих периодического слоя. Как будет показано далее, это свойство меняет картину полос запираания, а также влияет на спектр конечной ячейки периодичности.

4.2 Периодический слой

Рассмотрим три последовательных сегмента, показанных цифрами на рисунке 4.1. Условия стыковки имеют вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_1(1) &= \mathbf{u}_2(1); & \mathbf{u}_2(1+\gamma) &= \mathbf{u}_3(1+\gamma); \\
 \mathbf{v}_1(1) &= \mathbf{v}_2(1); & \mathbf{v}_2(1+\gamma) &= \mathbf{v}_3(1+\gamma); \\
 \sigma_{xx}^{(1)}(1) &= \sigma_{xx}^{(2)}(1); & \sigma_{xx}^{(2)}(1+\gamma) &= \sigma_{xx}^{(3)}(1+\gamma); \\
 \sigma_{xy}^{(1)}(1) &= \sigma_{xy}^{(2)}(1); & \sigma_{xy}^{(2)}(1+\gamma) &= \sigma_{xy}^{(3)}(1+\gamma);
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Условия периодичности имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_1(0) &= \Lambda \mathbf{u}_3(1+\gamma); \\
 \mathbf{v}_1(0) &= \Lambda \mathbf{v}_3(1+\gamma); \\
 \sigma_{xx}^{(1)}(0) &= \Lambda \sigma_{xx}^{(3)}(1+\gamma); \\
 \sigma_{xy}^{(1)}(0) &= \Lambda \sigma_{xy}^{(3)}(1+\gamma);
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Как обычно, Λ обозначает постоянную распространения, которая связывается с постоянной Блоха K_B с помощью отношения $\Lambda = \exp(iK_B)$.

Уравнения (4.5) -(4.6) записаны с помощью векторов (4.4), так что в покомпонентной форме для разложения по полиномам Лежандра система однородных алгебраических уравнений имеет разную размерность для 1-,3- и 5-модовой моделей. Уравнения (4.5) -(4.6) с граничными интегральными уравнения для каждого сегмента [61] образуют системы алгебраических уравнений порядка 12, 36 и 60 (здесь так же использовался метод граничных интегральных уравнений,

для каждого из сегментов нужно найти по два неизвестных значения на границах для каждой из компонент разложения (4.1)) для соответствующих неизвестных амплитуд для разложений по полиномам Лежандра. Приравнивая нулю определители этих систем, получаем полиномы второго, шестого и десятого порядка по Λ для 1-, 3- и 5-модовой моделей соответственно.

Пусть $m=1,3,5$ - порядок теории усечённого порядка. Прямыми вычислениями можно показать, что выражение для определителя имеет вид

$$D^{(m)}(\Lambda, \Omega) = \Lambda^{2m} + a_{2m-1}\Lambda^{2m-1} + \dots + 1 \quad (4.7)$$

В аппроксимации Бернулли-Эйлера (то есть, при $m=1$), (4.7) представляет собой квадратный полином, при этом можно говорить, что на этом уровне аппроксимации существует одна мода Флоке, которая может быть распространяющейся (полоса пропускания) или затухающей (полоса запирания). Мода Флоке в полосе пропускания состоит из синусоидальных форм, соответствующих разным волновым числам для разных сегментов, то есть она кусочно-синусоидальна. Естественно, в полосе пропускания мода Флоке представлена парой распространяющихся в противоположных направлениях волн. Мода Флоке в полосе запирания состоит из тех же частей, но амплитуды волн затухают в противоположных направлениях, как показано в Главе 1.

Разница между модами Флоке в полосах запирания и пропускания характеризуется постоянной распространения Λ . Зоны с $|\text{abs}(\Lambda)|=1$ как обычно будем называть полосами пропускания, а зоны с $|\text{abs}(\Lambda)| \neq 1$ - полосами запирания. Теорема Виета для корней даёт соотношение $\Lambda^{(1)} * \Lambda^{(2)} = 1$, которое доказывает, что характеристики волн, убывающих в противоположных направлениях идентичны. Полученные параметры распространения показаны на нижней части рисунка 4.4. Так как в практических применениях интерес представляет лишь наличие полосы запирания, а не степень затухания волны, мы приводим в верхней части рисунка 4.4 диаграмму, которой и будем пользоваться на протяжении всей главы, на диаграмме цветом показаны полосы пропускания, полосы запирания же отмечены пропусками.

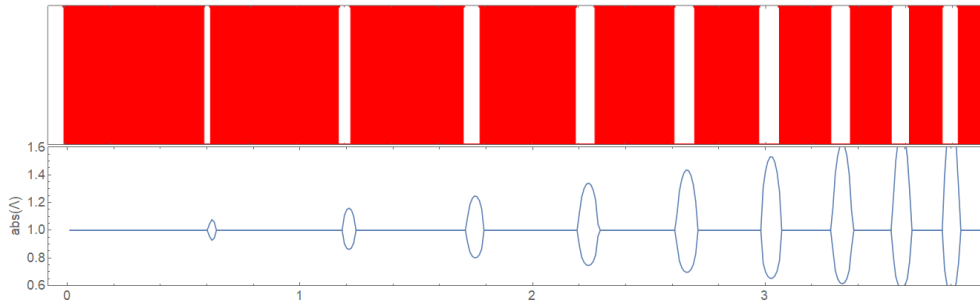


Рисунок 4.4 - Нули определителя с уравнением $D^{(1)}(\Lambda, \Omega) = 0$ (нижняя часть) для 1-модовой аппроксимации и диаграмма полос запираения и пропускания (верхняя часть): цветом обозначены полосы пропускания, пропусками – полосы запираения

Прямым вычислением можно показать, что существует m констант распространения или, иначе, существует m мод Флоке для периодического волновода в m -модовом приближении. Для каждой моды свойство симметрии $\Lambda_1^{(1)} * \Lambda_1^{(2)} = \dots = \Lambda_m^{(1)} * \Lambda_m^{(2)} = 1$ выполняется независимо от того являются ли они параметрами полосы запираения или пропускания. Таким образом, можно получить явную форму разложения уравнения (4.7)

$$D^{(m)}(\Lambda, \Omega) = \prod_{j=1}^m (\Lambda^2 + a_{m,j}(\Omega)\Lambda + 1) = \prod_{j=1}^m D_j^{(m)}(\Lambda, \Omega)$$

Более того можно найти явный вид коэффициентов $a_{1,j}(\Omega)$ для уравнения $D_j^{(m)}(\Lambda, \Omega)$ в (4.6), который имеет форму

$$a_{m,k}(\Omega) = -(\Lambda_k^{(1)} + \Lambda_k^{(2)})$$

Частичный бином Флоке $D_j^{(m)}(\Lambda, \Omega)$ определяет волновые свойства каждой из мод Флоке. Вслед за описанными в главе 1 задачами, можно показать, что границы полос запираения i -той моды определяются дискриминантом бинома $D_j^{(m)}(\Lambda, \Omega)$ с помощью уравнения

$$\text{discr}(D_j^{(m)}) = 0, i = 1, \dots, m$$

Дискриминант полинома произвольной степени в этой главе обозначается с помощью discr . Так как биномы $D_j^{(m)}(\Lambda, \Omega)$ не имеют общих корней (в случае однородного упругого слоя, это соответствует факторизации на моды дисперсионного уравнения, если бы общие корни были, то совпадали бы и ветви дисперсионной диаграммы), выполняется следующее свойство

$$\text{discr}(D^{(m)}) \sim \prod_{j=1}^m \text{discr}(D_j^{(m)}(\Lambda, \Omega))$$

Знак эквивалентности \sim понимается как совпадения множества нулей полиномов.

Наконец, с помощью (4.7) мы можем изобразить на рисунке 4.5 полную картину полос запираания, например, для 3-модовой модели.

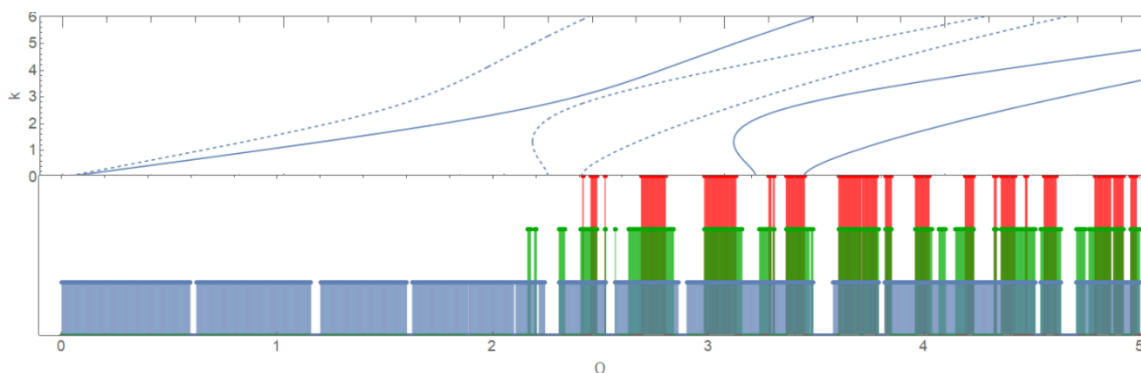


Рисунок 4.5 - Верхняя часть: дисперсионная диаграмма 3-модовой модели (только распространяющиеся волны) белый сегмент – сплошная линия, чёрный сегмент – пунктирная линия; нижняя часть – диаграмма мод Флоке – пропуски – полосы запираания.

На верхней части рисунка 4.5 показана дисперсионная диаграмма для белого и серого сегментов отдельно при этом диапазон частот от $\Omega = 0$ до $\Omega = 5$ выбран таким образом, чтобы вторая и третья моды Флоке начинали вносить вклад в общую картину полос запираания. Частоты отсечки белого и серого сегмента имеют числовые значения, $\Omega_1^{\text{белый}} \approx 3.04$, $\Omega_1^{\text{серый}} \approx 2.13$ и $\Omega_2^{\text{белый}} \approx 3.35$, $\Omega_2^{\text{серый}} \approx 2.35$ соответственно. Нижняя часть рисунка представляет собой диаграммы полос запираания для отдельных мод Флоке, при этом пропуски обозначают частичные полосы запираания. До частоты отсечки $\Omega_1^{\text{серый}}$, полосы пропускания существуют лишь у первой моды Флоке. Как только число распространяющихся в сером сегменте волн увеличивается, вторая и третья моды Флоке начинают показывать полосы пропускания несмотря на то, что в белом сегменте распространяющаяся волна появляется на более высокой частоте $\Omega_1^{\text{белый}} \approx 3.04$. Таким образом, частоты $\Omega_1^{\text{серый}}$ и $\Omega_2^{\text{серый}}$ можно считать частотами отсечки мод Флоке в периодическом упругом слое.

До первой частоты отсечки, картина полос запираания определяется одной модой Флоке, которая выражается биномом $D_1^{(m)}$. Начиная с первой частоты отсечки, две моды Флоке определяют картину полос запираания, так как два бинома $D_1^{(m)}$ и $D_2^{(m)}$ имеют свои собственные полосы запираания и пропускания.

Каждый бином имеет свою картину полос запираания, поэтому удобно различать полные, то есть зоны, где все активные моды Флоке имеют полосу запираания, и частичные полосы запираания для периодического упругого слоя. Разница между полными и частичными полосами запираания видна из рис.4.5.

Несмотря на то, что картина появления распространяющихся мод Флоке в модели с мультимодальным оператором похожа на условия превращения затухающих волн в распространяющиеся при переходе через частоту отсечки, существуют два существенных различия между этими процессами. Во-первых, в последнем случае, волна становится распространяющейся и остаётся распространяющейся с ростом частоты. Естественно, классический пример обратного – аномальная волна с отрицательной энергией во второй ветви дисперсионной диаграммы, показанной на рисунке 4.2, но волна становится строго распространяющейся в третьей ветви дисперсионной диаграммы и в дальнейшем не меняет своих волновых свойств. В периодической структуре мода Флоке характеризуется многочисленными переходами из полосы пропускания в полосу запираания и наоборот после частоты отсечки. Во-вторых, каждая волна в однородном упругом твёрдом теле представляет собой экспоненциальную волну со строго определённым чисто мнимым, вещественным или комплексным аргументом, тип которого не меняется, после перехода через частоту отсечки. Мода Флоке является составной, так что все свободные волны вносят вклад в её формирование. Эта разница более подробно рассмотрена в разделе 4.5.

Сравнивая 1-модовую и 3-модовую модель можно сделать вывод, что качественно они дают один и тот же результат до первой частоты отсечки, так как волновые свойства определяются одной парой констант распространения со свойством $\Lambda^{(1)} * \Lambda^{(2)} = 1$.

5-модовая модель является естественным расширением 3-модовой модели и поэтому анализ 5-модовой модели, показанный на рисунке 4.6 полностью повторяет анализ 3-модовой. Частотный диапазон на рисунке 4.6 существенно шире частотного диапазона на рисунке 4.5 для того, чтобы показать вклад четвёртой и пятой мод Флоке.

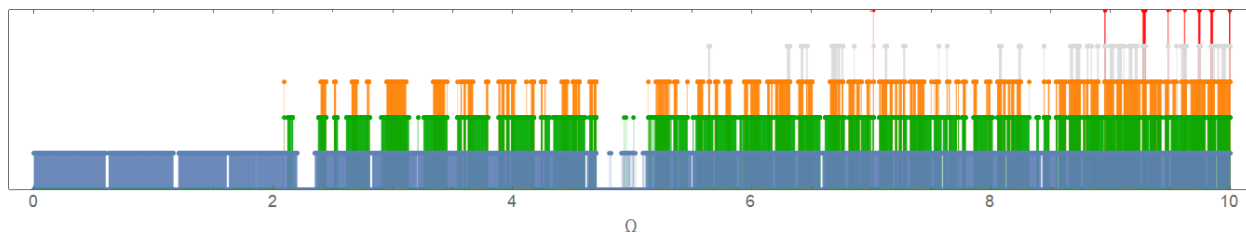


Рисунок 4.6 - Диаграмма полос заграждения (отмечены пропусками) для мод Флоке, определяемых уравнениями $D_1^{(5)}, \dots, D_5^{(5)}$

4.3 Анализ потока энергии

Чтобы установить достоверность предсказаний теории Флоке, проанализируем поток энергии в полубесконечном упругом слое, показанном на рисунке 4.7. При этом свободный конец подвержен произвольной нагрузке.

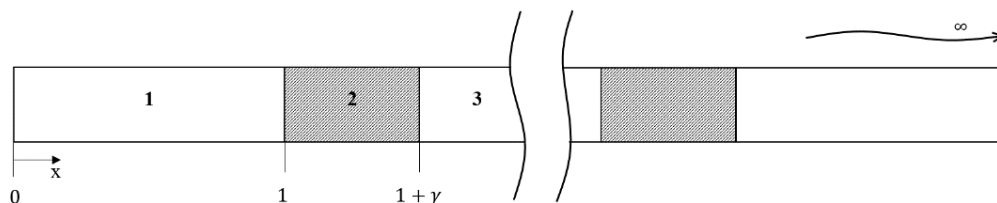


Рисунок 4.7 - Диаграмма для анализа потока энергии

Условия стыковки имеют тот же вид, что и для бесконечного слоя. Для последнего сегмента устанавливаются условия излучения на бесконечности. Для определённости условия нагрузки для трёхмодовой модели имеют вид

$$\begin{aligned} F_0(0) &= 1 \\ U_1(0) &= 0 \\ F_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

Поток энергии для структуры с n периодическими включениями и векторными обозначениями (4.4) имеет вид (\cdot обозначает скалярное произведение)

$$E_n(x, \Omega) = \frac{1}{2} \Omega \operatorname{Re}[i(u^*(x) \cdot \sigma_{xx}(x) + v^*(x) \cdot \sigma_{xy}(x))]$$

С помощью * обозначен оператор комплексного сопряжения. При этом предполагается, что E_0 - поток энергии через однородный полубесконечный слой без вставок. Используем стандартное определение для потерь на вставку в виде

$$IL(\Omega) = 10 \log \left(\frac{E_0(\Omega)}{E_n(\Omega)} \right)$$

При этом отметим, что значение энергии может быть найдено в любой точке, так как выполняется закон сохранения энергии.

В целом анализ потока энергии не противоречит, например, анализу потока энергии для продольных колебаний стержня, проведённого в параграфе 1.5, например случай сталь-резина показан на рисунке 4.8.

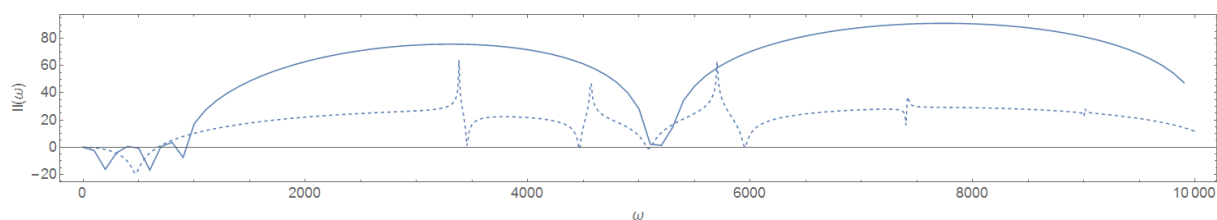


Рисунок 4.8 - Поток энергии через 3 периодических вставки для продольных колебаний стержня (сплошная линия) и для упругого слоя (пунктирная линия)

Из рисунка 4.8 видно, что при рассмотрении упругого слоя картина потерь на вставку получается более детальной и при этом предсказывается меньший уровень виброизоляции.

Результаты вычислений потока энергии показаны на рисунке 4.9. Для иллюстративности они показаны на фоне диаграммы полос загираания для 3-модовой теории. Так же, для иллюстративности значение потерь на вставку изменено на $-1/10IL(\Omega)$.

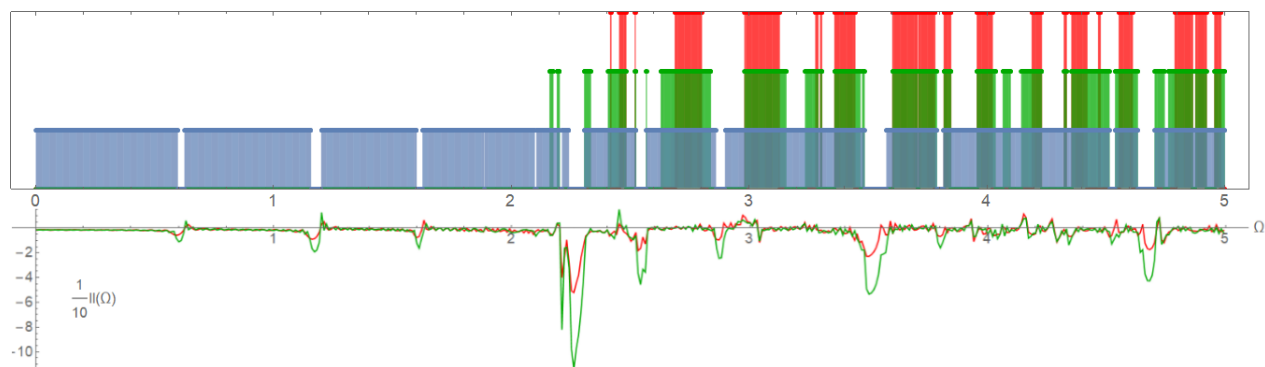


Рисунок 4.9 - Поток энергии через 20 и 40 периодических вставок на фоне диаграммы полос загираания

Когда частота возбуждения попадает в полосу запираания, потери на вставку увеличиваются с ростом числа ячеек, в полосе пропускания такого увеличения не происходит. Из рисунка 4.10 видно, что значительные потери на вставку наблюдаются только в полных полосах запираания, поэтому для анализа виброизоляции на высоких частотах требуется знать детальную картину мод Флоке.

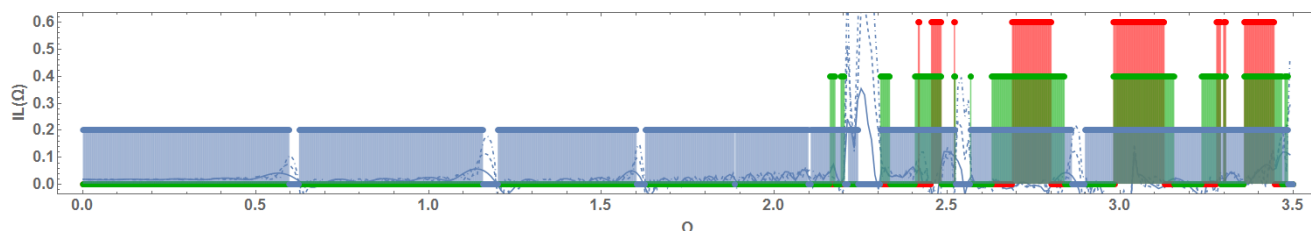


Рисунок 4.10 - Поток энергии через 10, 20, 30 периодических вставок (сплошная, пунктирная, штрихпунктирная линии, соответственно) на фоне полос запираания

Анализ потока энергии показывает, что на высокочастотном диапазоне полные полосы запираания, где все моды Флоке имеют свойство $abs(\Lambda) \neq 1$, и частичные полосы запираания, где существует хотя бы одна константа $abs(\Lambda) = 1$, что является определением полосы пропускания, различаются и в практических применениях важно знать положение полных полос запираания.

4.4 Задача о собственных частотах конечного слоя

Бесконечная структура может быть рассмотрена как бесконечная последовательность конечных структур. В предыдущих главах было показано, что существенные свойства бесконечной структуры могут быть показаны с помощью анализа собственных частот симметричной ячейки периодичности, напомним её вид на рисунке 4.11

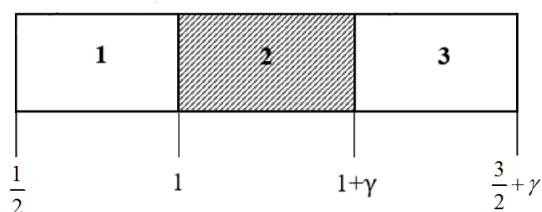


Рисунок 4.11 - Симметричная ячейка периодичности

При этом симметричная ячейка периодичности так же требует симметричных граничных условий.

Как и в прошлых главах, симметричные граничные условия формулируются с помощью условий би-ортогональности. Для задачи Рэлея-Лэмба условия би-ортогональности имеют вид [62]

$$\int_S (u^A \cdot \sigma_{xx}^B - v^B \cdot \sigma_{xy}^A) dS = 0$$

Прямыми вычислениями показывается, что в рамках 5-модовой модели условия би-ортогональности принимают вид

$$U_0^A(x)F_0^B(x) + U_2^A(x)F_2^B(x) + U_4^A(x)F_4^B(x) = V_1^B(x)F_1^A(x) + V_3^B(x)F_3^A(x)$$

Для 3-модовой модели, последние слагаемые с обеих частей уравнения опускаются, для 1-модовой модели условия би-ортогональности не существует.

В этом случае можно так же выделить граничные условия типов А и В при этом они имеют следующий векторный вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(i)}(x) &= \{\mathbf{u}_i(x), \boldsymbol{\sigma}_{xx}^{(i)}(x)\} = \{U_0(x), U_2(x), U_4(x), F_1(x), F_3(x)\}; \\ \mathbf{B}^{(i)}(x) &= \{\mathbf{v}_i(x), \boldsymbol{\sigma}_{xy}^{(i)}(x)\} = \{V_1(x), V_3(x), F_0(x), F_2(x), F_4(x)\}; \end{aligned}$$

Два набора граничных условий позволяют получить собственные частоты, лежащие на границах полос запираания. В явном виде эти условия для одной ячейки периодичности записываются как

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)}(1/2) &= 0 & \mathbf{B}^{(1)}(1/2) &= 0 \\ \mathbf{A}^{(3)}(3/2 + \gamma) &= 0 & \mathbf{B}^{(3)}(3/2 + \gamma) &= 0 \end{aligned}$$

Условия стыковки вместе с граничными условиями типов А и В определяют две системы однородных линейных алгебраических уравнений, и соответственно две спектральные задачи. Обозначим определители систем как $D_A(\Omega)$ и $D_B(\Omega)$, тогда собственные частоты задачи находятся из выражений $D_A^{(m)}(\Omega) = 0$ и $D_B^{(m)}(\Omega) = 0$.

На рисунке 4.12 показаны собственные частоты на фоне полос запираания в низкочастотном диапазоне, где распространяется только одна мода Флоке, для иллюстративности они располагаются на прямой $\text{abs}(\Lambda) = 1$

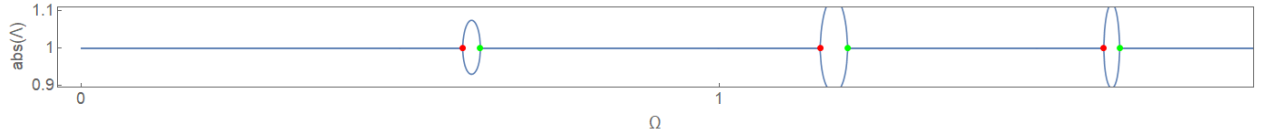


Рисунок 4.12 - Собственные частоты одной ячейки периодичности, 3-модовая теория, граничные условия типов А и В.

Соответствие между спектральными задачами типов А и В и границами полос запирания были показаны в прошлых Главах и доказаны в Главе 1 для 1-модовой теории в различных аппроксимациях. Соотношение между уравнениями собственных частот и дискриминантом полинома Флоке так же выполняется и для многомодовых теорий. Для многомодовых теорий соответствие имеет вид (в этой главе $m=1,3,5$):

$$D_A^{(m)}(\Omega) * D_B^{(m)}(\Omega) = C * \text{discr}(D^{(m)}(\Lambda, \Omega)) \sim \prod_{j=1}^m \text{discr}(D_j^{(m)}(\Lambda, \Omega)) \quad (4.8)$$

Так как полином Флоке $D^{(m)}(\Lambda, \Omega)$ по Λ имеет более сложный вид для $m=3$ и $m=5$ чем тот, что рассмотрен в Главе 1, наиболее простым представляется искать C численно для каждого набора безразмерных параметров, чем в общем виде.

Для любого набора параметров, произведение уравнений для собственных частот $D_A(\Omega) * D_B(\Omega)$ и дискриминант полинома Флоке $\text{discr}(D^{(m)}(\Lambda, \Omega))$ дают трансцендентные уравнения по Ω , которые, тем не менее, имеют только общие корни.

Два трансцендентных уравнения имеют одно и то же множество корней тогда и только тогда, когда они различаются на функцию, которая не имеет корней на всей области определения. Таким образом, в отличие от полиномов, C содержит функцию частоты Ω , в случае многомодовых моделей зависимость имеет вид $C = a * \Omega^b$, где a - комплексное число, а b - вещественная степень.

Из уравнения (4.8) следует, что собственные частоты одной ячейки периодичности лежат на границах всех частичных полос запирания. Тогда произведение $D_A(\Omega) * D_B(\Omega)$ должно иметь разложение, которое определяет собственные частоты, лежащие на каждой из зон Флоке. Иначе говоря, каждая мода Флоке должна определять свой набор собственных частот. Тем не менее, строгое

математическое доказательство этого факта затруднительно даже для относительно простой 3-модовой модели. Однако, многочисленные численные эксперименты показывают справедливость данного предположения.

Определим частные уравнения для собственных частот как

$$D_A^{(m,j)}(\Omega) * D_B^{(m,j)}(\Omega) \equiv C * \text{discr}(D_j^{(m)}(\Lambda, \Omega)) \quad (4.9)$$

С другой стороны, произведение частных уравнений для собственных частот должно давать произведение для полных уравнений

$$D_A(\Omega) * D_B(\Omega) = \prod_{j=1}^m D_A^{(j)}(\Omega) * \prod_{j=1}^m D_B^{(j)}(\Omega) \quad (4.10)$$

Из (4.8) -(4.10) можно непосредственно получить формулы для вычисления частных собственных частот

$$D_A^{(m,k)}(\Omega) = \frac{D_A(\Omega)}{\sqrt{\prod_{j \neq k} \text{discr}(D_j^{(m)}(\Lambda, \Omega))}} = 0$$

$$D_B^{(m,k)}(\Omega) = \frac{D_B(\Omega)}{\sqrt{\prod_{j \neq k} \text{discr}(D_j^{(m)}(\Lambda, \Omega))}} = 0$$

Собственные частоты найденные из отношений $D_A^{(m,1)}(\Omega) = 0$ и $D_B^{(m,1)}(\Omega) = 0$ заполняют полосы запираания лишь первой моды Флоке $D_1^{(m)}(\Lambda, \Omega)$, тогда как зоны всех остальных мод Флоке $D_q^{(m)}(\Lambda, \Omega)$, $q > 1$ остаются незаполненными.

На рисунке 4.13 показаны частные спектры для граничных условий типов А и В для первой и второй мод Флоке для 3 модовой теории

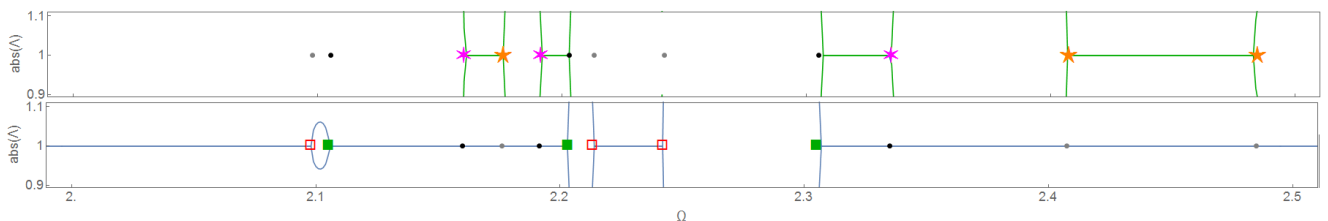


Рисунок 4.13 - Собственные частоты (среднечастотный диапазон), определяемые частными уравнениями для собственных частот $D_A^{(3,j)}(\Omega)$ и $D_B^{(3,j)}(\Omega)$ (квадрат и звёздочка) и дополнительные собственные частоты, порождаемые полным уравнением для собственных частот (точки)

Из уравнения (4.8) следует что соответствие между волновыми свойствами бесконечного периодического упругого слоя и собственными частотами одной симметричной ячейки периодичности имеют более глубокое соответствие, чем показано в предыдущих главах. Каждой из композитных мод, существующих в периодическом упругом слое, которые определяются сомножителями в полиноме (4.7) соответствует своя граничная задача и свой сомножитель в частотном уравнение для симметричной ячейки, в результате было найдено намного более сильное выражение (4.9), которое показывает разделение спектра на частные спектры, соответствующие каждой из мод Флоке.

Похожий результат был получен в рамках теории колебаний однородной балки в аппроксимации Тимошенко и называется вторым спектром теории Тимошенко [63]. Отметим, что полученные результаты в рамках теории моделей усечённого порядка для упругого слоя, а именно разложение задачи на композитные моды и соответствующие им сомножители в частотном уравнении для граничной задачи, могут быть получены и в рамках общей теории Рэлея-Лэмба. Однако, для этого потребуется намного более сложный математический аппарат. Так же отметим, что вместо теории Флоке можно использовать граничные условия типов А и В для нахождения полос запираения в многомодовых акустических волноводах.

В заключение этого раздела отметим, что анализ собственных частот конечной структуры, состоящий из нескольких ячеек периодичности, повторяет анализ для 1-модовых моделей представленный в Главах 1-3. Для таких структур, в независимости от числа ячеек периодичности, собственные частоты попадают в полосу пропускания, за исключением, быть может, одной пары собственных частот, которая соответствует одной ячейке периодичности.

4.5 Сравнение моделей

Дисперсионные диаграммы, представленные на рисунке 4.2, показывают область применимости моделей усечённого порядка для однородного упругого слоя (обычно областью применимости считается последняя предсказанная частота

отсечки). В этом разделе мы рассмотрим точность предсказания этих моделей для определения расположения полос запирания, при этом в полной мере будет использоваться эквивалентность задач о бесконечном упругом слое и о спектре симметричной ячейки периодичности.

На рисунке 4.14 показаны диаграммы полос запирания, предсказанных 1,3,5-модовыми моделями. Первая полоса предсказывается хорошо всеми моделями. С увеличением частоты 1-модовая и 3,5-модовые модели начинают расходиться в предсказаниях и вторая полоса предсказывается лишь приближённо. Начиная с третьей полосы запирания 1-модовая модель не может предсказать реальные полосы, так как предсказания многомодовых моделей ей противоречат.

Предсказания расходятся в диапазоне частот, где распространяется только одна мода Флоке. Из рисунков 4.2-4.3 видно, что для однородного слоя на этом диапазоне частот дисперсионные диаграммы всех приближений совпадают. Поэтому, результат, показанный на рисунке 4.14, может показаться неожиданным.

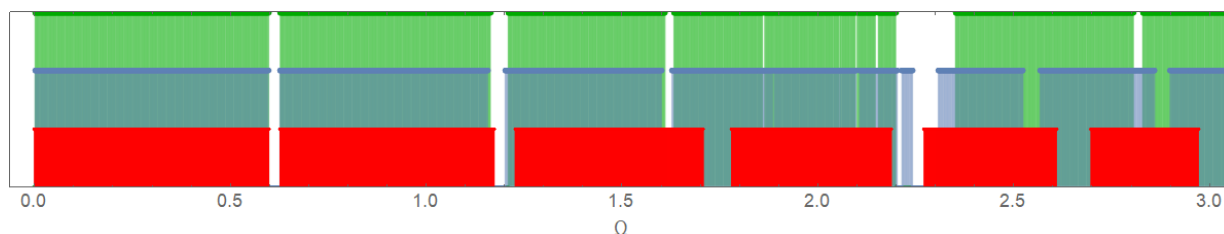


Рисунок 4.14 - Диаграмма полос запирания первой моды Флоке, предсказанных 1,3,5-модовыми теориями (снизу-вверх)

Для того, чтобы объяснить подобное поведение, полезно рассмотреть собственные частоты для однородного сегмента той же длины, что и одна ячейка периодичности. В таблице 4.1 показан спектр собственных частот для полностью белого и полностью серого упругого слоя (для одномодовой модели указаны лишь две первые собственные частоты). Заметим, что разницы между спектрами для граничных условий типов А и В нет (за исключением собственной частоты, соответствующей движению твёрдого тела как целого). Анализ форм собственных колебаний, полученных в рамках 3- и 5-модовой модели показывает, что они представлены суперпозицией одной пары распространяющихся волн, которые характеризуются первой ветвью дисперсионной диаграммы, при этом другие

волны в формировании форм собственных колебаний не участвуют. Незначительное расхождение (менее 1%) объясняется различием в дисперсионных диаграммах, соответствующих разным теориям (рисунки 4.2-4.3). Вторая собственная частота белого слоя в 1-модовом приближении отличается лишь на 1.2% по отношению к 5-модовому, для полностью серого слоя это различие составляет 1.7%.

Собственные частоты симметричной ячейки периодичности с граничными условиями типов А и В показаны в Таблице 4.2. Эти собственные частоты в точности совпадают с границами полос запираения, и, как замечено выше, разница между 1-модовой и многомодовыми теориями растёт с увеличением частоты.

Таблица 4.1 - Собственные частоты в однородном упругом слое длиной $L = (1 + \gamma)\lambda = 3.3$

Количество мод		Собственные частоты					
				Первая частота отсечки			
1	Белый	0.854233	1.67445				
3		0.852385	1.64462	3.05498	3.08527	3.57845	3.97339
5		0.853787	1.65539	2.95193	3.00065	3.60749	4.0027
1	Серый	0.597963	1.17211				
3		0.596669	1.15124	2.13848	2.15969	2.50491	2.78138
5		0.597651	1.15877	2.06635	2.10046	2.52524	2.80189

Таблица 4.2 - Собственные частоты одной ячейки периодичности

Количество мод	Первая полоса запираения		Вторая полоса запираения		Третья полоса запираения	
	Тип А	Тип В	Тип А	Тип В	Тип А	Тип В
1	0.598149	0.626777	1.17351	1.22713	1.70736	1.77976
3	0.597367	0.625043	1.15773	1.20017	1.60196	1.62654
5	0.59826	0.626175	1.16475	1.20875	1.6104	1.63175

Чтобы объяснить разницу между точностью предсказаний собственных частот для однородного и периодического слоя одинаковой длины, можно рассмотреть дополнительно форму собственных колебаний для периодического слоя. В отличие от однородного, в периодическом слое волны, соответствующие всем ветвям дисперсионной диаграммы участвуют в формировании формы собственных колебаний. Это вызвано тем, что условия стыковки включают в себя все свободные волны.

Таблица 4.3 показывает отношение амплитуд каждой из компонент в разложении по полиномам Лежандра продольного перемещения для 5-модовой теории. Числа в каждой строке показывают отношения амплитуд, соответствующих каждому из полиномов Лежандра к итоговому продольному перемещению, которое является суммой всех мод в разложении. Эти амплитуды являются амплитудами свободных волн, умноженными на соответствующий модальный коэффициент. Таблица 4.3 явно демонстрирует влияние компоненты U_4 (которая игнорируется в 3-модовой модели) на форму собственных колебаний, что объясняет различие между 3- и 5-модовыми моделями.

Таблица 4.3 Относительные амплитуды в разложении перемещения по полиномам Лежандра

Компонента	Первая полоса запираания		Вторая полоса запираания		Третья полоса запираания	
	Тип А	Тип В	Тип А	Тип В	Тип В	Тип А
U_0	0.983	0.981	0.91	0.9	0.72	0.69
U_2	0.017	0.019	0.089	0.1	0.27	0.3
U_4	0.00015	0.00006	0.0025	0.0031	0.012	0.015

Из таблиц 4.2-4.3 видно, что все волны, которые соответствуют каждой из ветвей дисперсионной диаграммы, участвуют в формировании формы колебаний в периодическом бесконечном упругом слое. Это вызвано наличием условий стыковки, которые включают в себя нераспространяющиеся в однородном слое волны на низких частотах. Поэтому, высокая точность данной многомодовой

модели в предсказании волновых свойств однородного слоя не обязательно влечёт за собой такую же точность в предсказании полос запираания в периодическом слое.

4.6 Выводы по главе 4

Результаты, полученные в данной главе, показывают, что последовательность моделей усечённого порядка, рассмотренная в [54-55] может быть использована для анализа распространения волн в периодическом упругом слое на более высокочастотном диапазоне, чем теория Бернулли-Эйлера. Модели позволяют выделить моды Флоке при этом их простота (в сравнении с приближёнными решениями задачи Рэлея-Лэмба) позволяет детально изучить распространение волн в упругом слое. Отметим основные свойства:

- Было показано, что свойства каждой моды Флоке можно рассматривать отдельно. В этом случае нужно различать частичные полосы запираания, которые при наложении дают полную полосу запираания. Подобно однородному волноводу в рамках модели Бернулли-Эйлера, первая мода Флоке определяет низкочастотные полосы запираания. Вторая мода Флоке становится активной, как только частоты превышают первую частоту отсечки. Начиная с этого момента одномодовые теории дают качественно неверный результат.
- Для каждого из членов последовательности многомодовых моделей можно определить граничные условия типов А и В, которые однозначно определяются структурой условий би-ортогональности. Спектр симметричной ячейки периодичности совпадает с набором полос запираания для каждой из мод Флоке в упругом теле с периодической структурой. Более того, было показано, что можно ввести частные уравнения для собственных частот, которые соответствуют лишь одной из мод Флоке. Этот результат является естественным обобщением результатов, полученных для одномодовых теорий, полученных в Главах 1-3.
- Так же было показано, что область применимости любой многомодовой модели для периодического слоя значительно уже, чем для однородного.

Анализ собственных колебаний, соответствующих граничным задачам типа А и В, объясняет это расхождение. Условия стыковки «активизируют» нераспространяющиеся волны в каждом из сегментов, так что волны, соответствующие каждой из ветвей дисперсионной диаграммы, участвуют в формировании стоячей волны в периодическом слое. Таким образом, как только вклады четвёртой и пятой мод становятся значительными, 3-модовая теория теряет свою предсказательную способность. Это так же справедливо и для теорий более высокого порядка.

В заключение стоит отметить, что число необходимых вычислений растёт с ростом числа мод и соответственно с ростом порядка модели. Представленные результаты могут быть получены и в рамках приближённого решения полной задачи Рэлея-Лэмба, однако технически это сделать на порядок сложнее.

Заключение

В настоящей работе были показаны следующие свойства, которые выполняются для довольно широкого ряда моделей твёрдого тела с периодической структурой:

- Дискриминант для решения спектральной задачи в рамках теории Флоке в моделях в декартовых координатах раскладывается в произведения определителей для спектральных задач симметричной ячейки периодичности с краевыми условиями А- и В-типа;

- Собственные частоты симметричной ячейки периодичности с граничными условиями А- и В-типа лежат на границах полос запираения, что следует из факторизации дискриминанта;

- Симметричные граничные условия в декартовых координатах однозначно могут быть определены с помощью условий би-ортогональности;

- В полярных координатах можно использовать теорию типа брэгговских волокон. А именно, можно ввести условия периодичности, которые дают схожий результат с моделью в декартовых координатах и позволяют говорить о полосах запираения и пропускания. Такие условия периодичности можно обобщить, тем самым заменив полином дифференциальным уравнением, форма записи которого при удалении от начала полярных координат стремится к канонической форме полинома Флоке для задачи в декартовых координатах;

- В дальнем поле анализ виброизоляционных свойств бесконечного волновода в полярных координатах полностью повторяет анализ в декартовых координатах;

- Композитные волны в периодическом упругом слое в рамках задачи Рэля-Лэмба в рамках теории Флоке имеют свойство факторизации. Можно определить каждую из волн, существующих в упругом слое с помощью сомножителей полинома, так и с помощью сомножителей, соответствующих граничной задаче для ячейки.

Список литературы

- [1] Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела: в 2 т //I—II. м.: мир. – 1979.
- [2] Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
- [3] Бриллюэн Л. и др. Распространение волн в периодических структурах: Пер. с франц. – Иностранной литературы, 1959.
- [4] Артобелевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д., Введение в акустическую динамику машин. - М:Наука, 1979.
- [5] Бобровницкий Ю. И., Маслов В. П. Распространение изгибных волн по стержню с периодической сосредоточенной нагрузкой //Акустический журнал. – 1966. – Т. 12. – №. 2. – С. 167-172.
- [6] Будрин С.В., Маслов В.Л. Никифоров А.С. Распространение упругих волн в конструкциях с периодическими неоднородностями в кн: Методы виброизоляции машин и присоединённых конструкций. - М: Наука, 1975
- [7] Маслов В.П., Римский-корсаков А.В. Плоские волны в пластине с параллельными рёбрами жёсткости в кн: Вибрации и шумы. - М:Наука, 1969
- [8] Ляпунов В.Т. О распространении упругих волн в пластине с периодическими препятствиями //Акустический журнал. – 1972. – Т. 18. – №. 2. – С. 152-171.
- [9] Mead D. J. Wave propagation and natural modes in periodic systems: I. Monocoupled systems //Journal of Sound and Vibration. – 1975. – Т. 40. – №. 1. – С. 1-18.
- [10] Борн М., Кунь Х. Динамическая теория кристаллических решеток //М.: ИЛ. – 1958. – Т. 488.
- [11] Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. – Наука, 1965.
- [12] Sigmund O., Jensen J. S. Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization //Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2003. – Т. 361. – №. 1806. – С. 1001-1019.

[13] Ионов А. В. Средства снижения вибрации и шума на судах. – СПб.: ЦНИИ им. акад. АН Крылова, 2000.

[14] Søe-Knudsen A. Design of stop-band filter by use of curved pipe segments and shape optimization //Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2011. – Т. 44. – №. 6. – С. 863-874.

[15] Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. – 1972.

[16] Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука //Л.: Судостроение. – 1989.

[17] Перцев А. К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин. – Л.: Судостроение, 1987.

[18] Новожилов В. В. Линейная теория тонких оболочек. – Рипол Классик, 1991.

[19] Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

[20] Hvatov A., Sorokin S. Free vibrations of finite periodic structures in pass-and stop-bands of the counterpart infinite waveguides //Journal of Sound and Vibration. – 2015. – Т. 347. – С. 200-217

[21] Sorokin S. V. On propagation of plane symmetric waves in a periodically corrugated straight elastic layer //Journal of Sound and Vibration. – 2015. – Т. 349. – С. 348-360.

[22] Benaroya H. Waves in periodic structures with imperfections //Finite elements in analysis and design. – 1996. – Т. 23. – №. 2-4. – С. 291-302.

[23] Sorokin V. S., Thomsen J. J. Effects of weak nonlinearity on the dispersion relation and frequency band-gaps of a periodic Bernoulli–Euler beam //Proc. R. Soc. A. – 2016. – Т. 472. – №. 2186. – С. 20150751.

[24] Fabro A. T. et al. Uncertainty analysis of band gaps for beams with periodically distributed resonators produced by additive manufacturing// Proceedings of ISMA. – 2016.

[25] Nielsen R. B., Sorokin S. V. Periodicity effects of axial waves in elastic compound rods //Journal of Sound and Vibration. – 2015. – Т. 353. – С. 135-149.

[26] Shorr B. F. The wave finite element method. – Springer Science & Business Media, 2012.

[27] Будрин С. В. Применение метода конечных волновых элементов для расчета упругих волн в разветвленных колебательных системах с учетом возможности распространения конечного числа волн в каждой ветви системы //Техническая акустика. – 2007. – Т. 7. – №. 7.

[28] Huang J., Ruzzene M., Chen S. Analysis of in-plane wave propagation in periodic structures with Sierpinski-carpet unit cells //Journal of Sound and Vibration. – 2017. – Т. 395. – С. 127-141.

[29] Manconi E., Mace B. R., Garziera R. The loss-factor of pre-stressed laminated curved panels and cylinders using a wave and finite element method //Journal of Sound and Vibration. – 2013. – Т. 332. – №. 7. – С. 1704-1711.

[30] Filippenko G. V. The location of pass and stop bands of an infinite periodic structure versus the eigenfrequencies of its finite segment consisting of several 'periodicity cells //4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering COMPDYN 2013

[31] Sorokin S. V., Ershova O. A. Plane wave propagation and frequency band gaps in periodic plates and cylindrical shells with and without heavy fluid loading //Journal of sound and vibration. – 2004. – Т. 278. – №. 3. – С. 501-526.

[32] Søe-Knudsen A., Sorokin S. V. Modelling of linear wave propagation in spatial fluid filled pipe systems consisting of elastic curved and straight elements //Journal of Sound and Vibration. – 2010. – Т. 329. – №. 24. – С. 5116-5146.

[33] Søe-Knudsen A., Darula R., Sorokin S. Theoretical and experimental analysis of the stop-band behavior of elastic springs with periodically discontinuous of curvature //The Journal of the Acoustical Society of America. – 2012. – Т. 132. – №. 3. – С. 1378-1383.

[34] Mead D. M. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964–1995 //Journal of sound and vibration. – 1996. – Т. 190. – №. 3. – С. 495-524.

- [35] Mead D. J. Wave propagation and natural modes in periodic systems: II. Multi-coupled systems, with and without damping //Journal of Sound and Vibration. – 1975. – Т. 40. – №. 1. – С. 19-39.
- [36] Brun M. et al. Asymptotics of eigenfrequencies in the dynamic response of elongated multi-structures //Proc. R. Soc. A. – 2011. – С. rspa20110415.
- [37] Sorokin S. V. On the bi-orthogonality conditions for multi-modal elastic waveguides //Journal of Sound and Vibration. – 2013. – Т. 332. – №. 21. – С. 5606-5617.
- [38] Хватов А.А. Теория Флоке в анализе виброизоляции // Ученые записки Физического Факультета Московского Университета, - 2017, Т. 5, С. 1751413
- [39] Sorokin S. V. The Green's matrix and the boundary integral equations for analysis of time-harmonic dynamics of elastic helical springs //The Journal of the Acoustical Society of America. – 2011. – Т. 129. – №. 3. – С. 1315-1323.
- [40] Jensen J. J. On the shear coefficient in Timoshenko's beam theory //Journal of Sound and Vibration. – 1983. – Т. 87. – №. 4. – С. 621-635.
- [41] Слепьян Л. И. Нестационарные упругие волны. – Изд-во " Судостроение", 1972.
- [42] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М:Наука, 1967.
- [43] Sorokin S. V., Nielsen J. B., Olhoff N. Green's matrix and the boundary integral equation method for the analysis of vibration and energy flow in cylindrical shells with and without internal fluid loading //Journal of Sound and Vibration. – 2004. – Т. 271. – №. 3-5. – С. 815-847.
- [44] Стрэтт Д. В. Теория звука. – Рипол Классик, 2014.
- [45] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для инженеров и научных работников. – 1974.
- [46] Korenev B. G. Bessel functions and their applications. – CRC Press, 2003.
- [47] Yeh P., Yariv A., Marom E. Theory of Bragg fiber //JOSA. – 1978. – Т. 68. – №. 9. – С. 1196-1201.
- [48] Xu Y. et al. Asymptotic matrix theory of Bragg fibers //Journal of lightwave technology. – 2002. – Т. 20. – №. 3. – С. 428.

[49] Torrent D., Sánchez-Dehesa J. Radial wave crystals: radially periodic structures from anisotropic metamaterials for engineering acoustic or electromagnetic waves //Physical review letters. – 2009. – T. 103. – №. 6. – C. 064301.

[50] Torrent D., Sánchez-Dehesa J. Acoustic resonances in two-dimensional radial sonic crystal shells //New Journal of Physics. – 2010. – T. 12. – №. 7. – C. 073034.

[51] Kitagawa A., Sakai J. Bloch theorem in cylindrical coordinates and its application to a Bragg fiber //Physical Review A. – 2009. – T. 80. – №. 3. – C. 033802.

[52] Xu Z., Wu F., Guo Z. Low frequency phononic band structures in two-dimensional arc-shaped phononic crystals //Physics Letters A. – 2012. – T. 376. – №. 33. – C. 2256-2263.

[53] Li Y. et al. Propagation of Lamb waves in one-dimensional radial phononic crystal plates with periodic corrugations //Journal of Applied Physics. – 2014. – T. 115. – №. 5. – C. 054907.

[54] Ma T. et al. Band structures of bilayer radial phononic crystal plate with crystal gliding //Journal of Applied Physics. – 2014. – T. 116. – №. 10. – C. 104505.

[55] Shi X. et al. Research on wave bandgaps in a circular plate of radial phononic crystal //International Journal of Modern Physics B. – 2016. – T. 30. – №. 23. – C. 1650162.

[56] Chapman C. J., Sorokin S. V. The deferred limit method for long waves in a curved waveguide //Proc. R. Soc. A. – 2017. – T. 473. – №. 2200. – C. 20160900.

[57] Mindlin, R. D. An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates. - World Scientific, 2006.

[58] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. – Elsevier, 2012.

[59] Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. – Elsevier, 2012.

[60] Sorokin S. V., Chapman C. J. A hierarchy of high-order theories for symmetric modes in an elastic layer //Journal of Sound and Vibration. – 2014. – T. 333. – №. 15. – C. 3505-3521.

[61] Sorokin S., Kolman R., Kopacka J. The boundary integral equations method for analysis of high-frequency vibrations of an elastic layer //Archive of Applied Mechanics. – 2017. – T. 87. – №. 4. – C. 737-750.

[62] Fraser W. B. Orthogonality relation for the Rayleigh–Lamb modes of vibration of a plate //The Journal of the Acoustical Society of America. – 1976. – T. 59. – №. 1. – C. 215-216.

[63] Stephen N. G. The second spectrum of Timoshenko beam theory—Further assessment //Journal of sound and vibration. – 2006. – T. 292. – №. 1-2. – C. 372-389.