

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
Кафедра механики и процессов управления

На правах рукописи



Лукин Алексей Вячеславович

**Нелинейная динамика и устойчивость упругих элементов  
нано- и микросистемной техники в связанных полях**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Скубов Д.Ю.

Санкт-Петербург – 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>1 Статика и устойчивость упругих элементов нано- и микросистемной техники .....</b>	<b>8</b>
1.1 Принцип работы электростатического преобразователя .....	9
1.2 Модель микроэлектромеханического осциллятора .....	11
1.2.1 Устойчивость и бифуркации положений равновесия в поле одного электрода .....	14
1.2.2 Устойчивость и бифуркации положений равновесия в поле двух электродов .....	18
1.3 Континуальные модели упругих элементов нано- и микросистемной техники .....	22
1.3.1 Математическая постановка связанной задачи электроупругости мембран и пластинок .....	22
1.3.2 Ветвление форм равновесия круглых мембран и их устойчивость .....	25
1.3.3 Ветвление форм равновесия круглых пластинок и их устойчивость .....	55
<b>2 Нелинейная динамика упругих элементов нано- и микросистемной техники.....</b>	<b>63</b>
2.1 Динамика микроэлектромеханического осциллятора .....	64
2.1.1 Система с одним неподвижным электродом .....	64
2.1.2 Система с двумя неподвижными электродами .....	77
2.2 Нелинейная динамика упругих мембран и пластинок .....	84
2.2.1 Математическая постановка динамической задачи для пластинки электрическом поле .....	84
2.2.2 Круглая мембрана в переменном электрическом поле .....	84
2.2.3 Круглая пластинка в переменном электрическом поле.....	97
<b>3 Динамика упругих элементов нано- и микросистемной техники в термоэлектрических полях.....</b>	<b>106</b>
3.1 Термоупругая диссипация в нано- и микроэлектромеханических резонаторах .....	107
3.1.1 Математическая постановка связанной задачи термоупругости пластинок во внешнем электрическом поле.....	110
3.1.2 Резонансные свойства круглой пластинки в поле одного неподвижного электрода .....	111
3.2 Динамика и устойчивость электростатического преобразователя под действием теплового импульса.....	120
3.2.1 Актуальность проблемы .....	120
3.2.2 Постановка задачи.....	121
3.2.3 Определение формы равновесия балки в электрическом поле .....	123
3.2.4 Решение нестационарной задачи теплопроводности .....	128
3.2.5 Исследование устойчивости балки при лазерном воздействии .....	132
<b>Заключение.....</b>	<b>137</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>140</b>

## Введение

Разработка нано- и микросистемной техники (НМСТ, другое название - нано- и микро-электромеханические системы, НЭМС/МЭМС) является одним из наиболее перспективных направлений развития приборостроения в XXI веке. Оно влечет за собой коренное изменение технологий производства приборов и обеспечивает беспрецедентный диапазон применения измерительных и исполнительных устройств. В качестве основных областей применения технологий НЭМС/МЭМС следует назвать следующие ([11,37,56,61,62,66]):

- 1) военная и гражданская авиация;
- 2) космические и морские навигационные системы;
- 3) ракетостроение;
- 4) автомобильная промышленность;
- 5) робототехника;
- 6) системы радиолокации;
- 7) электроакустика;
- 8) микроэлектроника;
- 9) оптические и телекоммуникационные системы;
- 10) биологические (биомедицинские) нано/микро-электромеханические системы;
- 11) технологии струйной печати;
- 12) системы автономного энергообеспечения.

Широкое применение нано- и микросистемной техники в современном приборостроении связано с высокой чувствительностью данных систем к нано- и микро-масштабным изменениям физических (давление, ускорение, температура, длина волны, интенсивность магнитного поля, напряжение), химических и биологических параметров (состав и концентрация вещества, скорость реакции) [37]. Причиной этому является определяющее влияние совместного действия физических полей различной природы (механического, температурного, электромагнитного) на состояние элементов НМСТ. В связи с проявлением масштабного фактора, внутренняя связанность (междисциплинарность) задачи анализа динамики, прочности и работоспособности элементов НМСТ приводит к необходимости исследования нелинейных эффектов, вызванных совместным действием указанных физических полей.

**Цели и задачи работы.** Предметом диссертационного исследования являются существенно нелинейные статические и динамические задачи механики деформируемого твердого тела в связанных полях, возникающие при разработке и моделировании объектов нано- и микросистемной техники.

Цель настоящей работы состоит в аналитическом и численном исследовании ветвления форм равновесия упругих элементов НМСТ, а также их свободных и вынужденных колебаний в условиях совместного действия механического, электрического и температурного полей.

Задачей работы является создание и анализ дискретных и распределенных математических моделей упругих элементов НМСТ (нелинейные микроэлектромеханические осцилляторы, балки, мембраны, пластинки). Анализ исследуемых систем приводит к существенно нелинейным краевым задачам математической физики – эллиптическим при исследовании положений равновесия систем; гиперболическим и параболическим при исследовании нестационарных процессов. Данные задачи характеризуются качественной зависимостью решений от значений конкретных физических параметров: возможной множественностью решений при одних значениях параметров и отсутствием решений при других. С практической точки зрения нахождение зон существования решений, их конкретного вида и устойчивости определяет эксплуатационные характеристики приборов.

**Методология и методы исследования.** Центральной темой исследований является изучение существенно нелинейных эффектов, связанных с ветвлением (бифуркациями) форм равновесия и динамических режимов работы элементов НМСТ при изменении внешних электромагнитных и температурных воздействий. Качественное изменение равновесных конфигураций и характера установившихся движений системы может сопровождаться параметрическими колебаниями, возникновением автоколебаний и резонансных режимов, что принципиально влияет на работоспособность НМСТ.

Решение данных задач требует применения современного математического аппарата нелинейной механики, в том числе, новых методов решения нелинейных краевых статических и динамических задач, возникающих при исследовании работы элементов НМСТ в связанных полях.

В работе используется следующий математический аппарат: вариационные методы математической физики, теория ветвления решений нелинейных операторных уравнений, аналитические и численные методы решения нелинейных уравнений и их продолжения по параметрам, теория устойчивости дискретных и континуальных систем, асимптотические методы теории нелинейных колебаний, аналитические и численные методы качественного анализа динамических систем, метод конечных элементов.

**Актуальность темы исследования.** Область науки, затрагиваемая в работе, - построение и исследование математических моделей элементов НЭМС/МЭМС, действующих в связанных полях, – активно развивающаяся область современной прикладной механики, имеющая большое значение для современного приборостроения. Среди основных направлений исследований нужно отметить следующие [79,82,107,108,111,112,114,115]:

1) Определение равновесных конфигураций упругих элементов НЭМС/МЭМС и их устойчивости в зависимости от значений физических параметров, определяющих механическое, температурное, гидродинамическое и электромагнитное состояние системы [70,88,95,97,98,101]. Объектами исследований здесь являются различные конструкции чувствительных и исполнительных элементов (датчиков давления, акселерометров, микромеханических гребенчатых гироскопов, микрозеркал, микронасосов, высокочастотных переключателей и др.);

2) Анализ существования и устойчивости периодических режимов движения упругих элементов НЭМС/МЭМС (нитей, мембран, пластин, трубок, оболочек) под действием внутренних и внешних возбуждений [76,77,78,99,106];

3) Определение характеристик электромагнитных, температурных и гидродинамических полей, в условиях которых действуют НЭМС/МЭМС [72,73,74]. В частности, большое внимание привлекают задачи оценки влияния краевых условий и высоких градиентов названных полей на прочность и работоспособность систем;

4) Разработка уточненных моделей упругости и пластичности, электропроводности, теплопроводности и других физических свойств используемых материалов на нано/микромасштабном уровне [107].

Содержание настоящей работы заключается в решении ряда задач, связанных с обеспечением работоспособности электростатических преобразователей (датчиков и актуаторов), входящих в состав НЭМС/МЭМС различного назначения, в условиях электромагнитных и температурных воздействий.

**Теоретическая и практическая значимость.** Основной научный результат работы состоит в выявлении и качественном исследовании принципиально важных для приборостроения свойств (структура возможных положений равновесия, допускаемые значения физических параметров системы и др.) и характеристик (спектральных, резонансных и др.) упругих элементов различных современных и перспективных НЭМС/МЭМС. Примененные в работе аналитические и численные методы имеют достаточно общий характер и могут быть использованы при решении существенно нелинейных связанных задач, возникающих при проектировании различных объектов нано- и микросистемной техники: микромеханических акселерометров и гироскопов [45-47,52,53], микродатчиков давления [68], микронасосов [66], ультразвуковых преобразователей [90], высокочастотных (ВЧ) переключателей [96], элементов оптических и телекоммуникационных систем (линзы, диафрагмы, оптические переключатели, микрозеркала и дифракционные решетки) [66], систем автономного энергообеспечения [55], а также биомедицинских приборов (биосенсоры, детекторы массы прилипающей частицы, системы направленного транспорта лекарственных веществ в организме) [71,113].

**Научную новизну** составляют следующие результаты работы, являющиеся **предметом защиты**:

1) получены аналитические и численные решения ряда статических и динамических нелинейных связанных задач электроупругости и термо-электроупругости для дискретных и распределенных моделей упругих элементов электростатических преобразователей – компонентов НМСТ;

2) разработаны достаточно общие алгоритмы применения современных численных методов продолжения по параметрам решений нелинейных операторных уравнений (алгебраических уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных) к задачам статики, устойчивости и динамики дискретных и распределенных механических систем;

3) исследована применимость и точность приближенных аналитических методов теории ветвления и нелинейной механики к существенно нелинейным задачам, возникающим при моделировании НЭМС/МЭМС.

**Достоверность результатов** обеспечивается использованием в работе строгих методов математики и механики; сравнением результатов, полученных приближенными аналитическими методами, с точными решениями; сравнением решений, полученных численными методами, с аналитическими решениями.

**Апробация работы и публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах:

1. Skubov D., Lukin A., Popov I., Shtukin L. Bifurcations of Equilibrium Forms of NEMS/MEMS as a Sensor of Microphysical Alterations, MATEC Web of Conferences, Volume 76, 21 October 2016, Article number 01001, DOI: 10.1051/mateconf/20167601001
2. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Лукин А.В., Попов И.А., Привалова О.В., Скубов Д.Ю., Штукин Л.В. Ветвление форм равновесия микро/нанострун с постоянными токами // ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2016 г., том 471, №2, с. 158-162
3. Lukin A.V., Popov I.A., Skubov D.Yu., Shtukin L.V. Equilibrium forms branching of a nanolayers system, Vibroengineering Procedia, Volume 8, 1 October 2016, P. 517-521
4. Лукин А.В., Попов И.А., Привалова О.В., Скубов Д.Ю., Штукин Л.В. Ветвление форм равновесия нелинейных НЭМС и МЭМС // Сборник трудов III Международной школы-конференции молодых ученых «Нелинейная динамика машин» SCHOOL-NDM 2016
5. Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Нелинейная динамика и устойчивость элементов микросистемной техники // Сборник трудов XIX конференции молодых ученых "Навигация и управление движением" (XIX КМУ 2017)

6. Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Исследование устойчивости и ветвления форм равновесия упругих элементов микросистемной техники // Сборник трудов IV Международной школы-конференции молодых ученых «Нелинейная динамика машин» SCHOOL-NDM 2017

7. Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Нелинейная динамика и устойчивость элементов микросистемной техники // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики, 2017 г., том 17, №6

8. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Лукин А.В., Попов И.А., Привалова О.В., Штукин Л.В. Динамика и устойчивость электростатического преобразователя под действием теплового импульса // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки, 2018 г., том 198, №2

9. Лукин А.В., Попов И.А. Нелинейная динамика и устойчивость упругих элементов нано- и микросистемной техники в связанных термоэлектрических полях // Сборник тезисов докладов XLIV Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения - 2018», С. 398-399

10. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Лукин А.В., Попов И.А., Привалова О.В., Штукин Л.В. Устойчивость балки Бернулли-Эйлера в связанных электрических и тепловых полях // ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2018 г., том 481, №6, с. 40-45

Результаты диссертации докладывались на четырех семинарах (дважды на семинаре кафедры механики и процессов управления СПбПУ, а также на семинаре кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ и на Городском семинаре по механике в Институте проблем машиноведения РАН) и семи международных конференциях (III и IV Международные школы-конференции молодых ученых «Нелинейная динамика машин», ИМАШ РАН, Москва; XX International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers (CSCC 2016), Crete Island, Greece; XIX и XX конференции молодых ученых "Навигация и управление движением", ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург; XLV Международная летняя школа-конференция «Advanced Problems in Mechanics»; XLIV Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения»).

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Работа изложена на 145 страницах и содержит 80 рисунков. Список литературы содержит 118 наименований.

## 1 Статика и устойчивость упругих элементов нано- и микросистемной техники

Основным предметом исследования настоящей работы являются емкостные (электростатические) преобразователи, входящие в состав приборов НМСТ различного назначения: акселерометров, гироскопов, датчиков давления, высокочастотных переключателей, ультразвуковых преобразователей и др. Элементная база нано- и микромеханических приборов достаточно обширна: микросистемная технология позволяет создавать конструкции в виде упругих подвесов различных конфигураций, струн, балок, мембран, пластинок и систем, состоящих из перечисленных базовых элементов [37]. Анализ статических и динамических режимов работы подобных объектов требует применения математического аппарата механики деформируемого твердого тела, нелинейной динамики и математической физики, а также современных численных методов в указанных областях.

Особенностью работы электростатических датчиков и актуаторов является сильная связанность механического и электрического полей, что приводит к необходимости исследовать существенно нелинейные математические модели рассматриваемых объектов.

В настоящей главе дано описание принципа работы электростатического преобразователя, построены дискретные и континуальные модели упругих элементов НМСТ, исследована устойчивость и ветвление их форм равновесия в зависимости от физических и геометрических параметров.

## 1.1 Принцип работы электростатического преобразователя

Рассмотрим плоскопараллельный конденсатор (рисунок 1.1) произвольной формы, одна из пластин которого может перемещаться в направлении нормали к плоскости пластин.

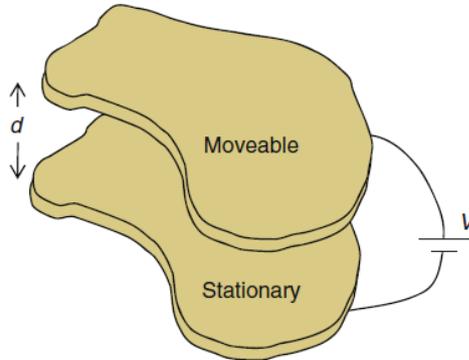


Рисунок 1.1 – Плоскопараллельный конденсатор

Пластинам конденсатора сообщается заданная, постоянная при изменении расстояния между пластинами, разность потенциалов  $V = \varphi_2 - \varphi_1 = const$ . Заряд на обкладках  $Q$  определяется по формуле

$$Q = C(\eta)V, \quad (1.1)$$

где  $C(\eta)$  – емкость конденсатора,  $\eta$  – расстояние между обкладками.

Энергия электрического поля конденсатора равна

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2. \quad (1.2)$$

Раздвигание пластин сопровождается изменением электрической энергии

$$\delta_\varphi W = \delta \left\{ \frac{1}{2}CV^2 \right\} = \frac{1}{2}V^2 \delta C. \quad (1.3)$$

Отметим, что при постоянстве заряда конденсатора ( $Q = const$ ) изменение энергии равно

$$\delta_Q W = \delta \left( \frac{Q^2}{2C} \right) = -\frac{Q^2}{2C^2} \delta C = -\frac{1}{2}V^2 \delta C, \quad (1.4)$$

т.е.

$$\delta_\varphi W = -\delta_Q W = A, \quad (1.5)$$

где  $A$  – работа сил электрического поля при раздвигании пластин.

Таким образом, сопровождающие перемещение обкладок конденсатора изменения его электрической энергии при  $Q = const$  и при  $V = const$  равны по величине, но противоположны по знаку. С другой стороны, ввиду соотношения (1.1), изменение емкости  $C$  при постоянном  $V$  должно сопровождаться изменением заряда конденсатора  $Q$

$$\delta Q = V\delta C, \quad (1.6)$$

т.е. перенесением заряда  $\delta Q$  с одной из обкладок конденсатора на другую. При прохождении этого заряда  $\delta Q$  через включенный между обкладками конденсатора гальванический элемент химическая энергия этого элемента уменьшается, а ЭДС элемента  $\mathcal{E}$  совершает работу  $P = \mathcal{E} \cdot \delta Q$ .

В разомкнутой цепи, состоящей из элемента и конденсатора,

$$\mathcal{E} = V \quad (1.7)$$

и, стало быть,

$$P = V\delta Q = V^2\delta C, \quad (1.8)$$

или ввиду (1.5)

$$P = 2\delta_\varphi W = A + \delta_\varphi W. \quad (1.9)$$

Таким образом, при  $V = const$  работа  $A$  пондеромоторных сил поля совершается не за счет энергии поля  $W$ , а за счет химической энергии гальванического элемента (или энергии другого источника сторонней ЭДС). В частности, положительная работа сил поля  $A$  сопровождается приращением энергии  $W$ , происходящим также за счет энергии гальванического элемента.

В связи с вышеизложенным, притягивающая пондеромоторная сила, действующая на подвижную пластину конденсатора, определяется формулой

$$F_e = \frac{\partial W_\varphi}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial \eta} V^2. \quad (1.10)$$

Для электродов простой геометрической формы может быть вычислено аналитическое выражение для емкости  $C(\eta)$ . В общем случае искомая зависимость находится численно с помощью методов конечных или граничных элементов.

## 1.2 Модель микроэлектромеханического осциллятора

Рассмотрим частный случай конденсатора, образованного прямоугольными обкладками, одна из которых неподвижна (рисунок 1.2). Напряженность электрического поля между пластинами равна [42]

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad (1.11)$$

где  $\sigma = Q/S$  – поверхностная плотность заряда,  $S = Lb$  – площадь обкладки ( $L$  – длина пластины,  $b$  – ширина),  $\epsilon_r$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды в пространстве между обкладками,  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$  – диэлектрическая проницаемость вакуума. В формуле (1.11) не учитывается краевой эффект – неоднородность электрического поля вблизи краев пластин конденсатора. Для многих микромеханических устройств расстояние между обкладками конденсаторов мало по сравнению с размерами пластин. Это приводит к локализации областей неоднородности электрического поля, что делает приемлемым принятое допущение.

Разность потенциалов

$$V = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma \eta}{\epsilon_r \epsilon_0}. \quad (1.12)$$

Емкость конденсатора определяется по формуле

$$C = \frac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{\eta} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{Lb}{\eta}. \quad (1.13)$$

Сила притяжения между обкладками, согласно (1.10), равна

$$F_e = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial \eta} V^2 = - \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{2\eta^2}, \quad (1.14)$$

где знак минус показывает, что сила действует противоположно направлению оси  $\eta$ .

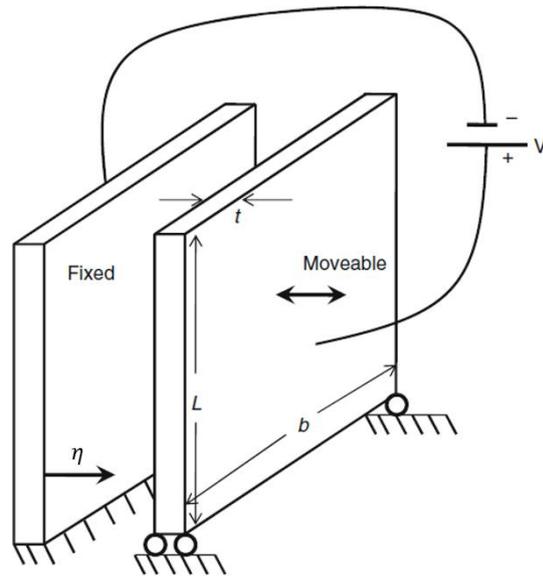


Рисунок 1.2 – Плоский конденсатор с прямоугольными обкладками

Рассмотрим модель микроэлектромеханического осциллятора, состоящую из массы на пружине с демпфером, прикрепленной к подвижной обкладке плоскопараллельного конденсатора (рисунок 1.3).

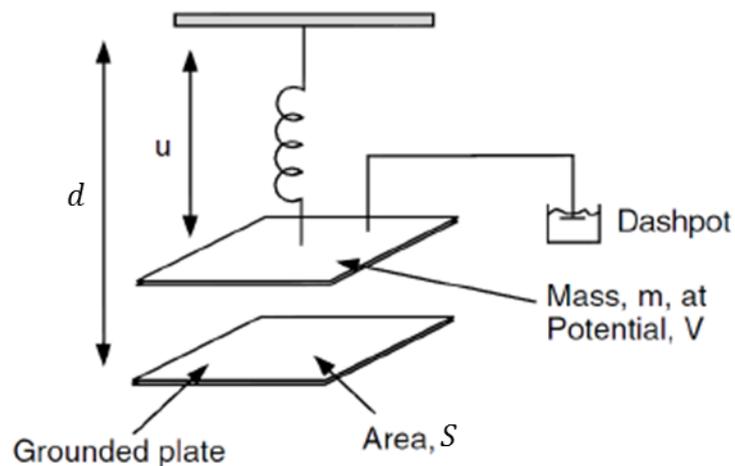


Рисунок 1.3 – Модель микромеханического осциллятора

В обозначениях рисунка  $d$  – расстояние между неподвижной обкладкой и точкой крепления осциллятора,  $m$  – масса подвижной пластины,  $c$  – коэффициент диссипации,  $k$  – жесткость пружины,  $l$  – длина недеформированной пружины. С учетом совпадения положительного направления оси  $x$  с направлением поперечной силы притяжения между обкладками, выражение для последней примет вид

$$F_e = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{(d - u)^2}. \quad (1.15)$$

Уравнение движения осциллятора записывается в следующей форме:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + k(u - l) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{(d - u)^2}. \quad (1.16)$$

Перейдя к безразмерным величинам

$$x = \frac{u - l}{d - l}, \quad \tau = \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad \alpha = \frac{c}{\sqrt{mk}} \quad (1.17)$$

преобразуем уравнение (1.16) к виду

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \alpha \frac{dx}{d\tau} + x = \frac{\lambda}{(1 - x)^2}, \quad (1.18)$$

где  $\lambda = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{k(d-l)^3}$  – безразмерный параметр, определяющий соотношение между

пондеромоторной и упругой силами, действующими на систему. Действительно, параметр  $\lambda$  можно представить в виде

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{(d-l)^2} \cdot \frac{1}{k(d-l)} = \frac{\tilde{F}_e}{\tilde{F}_s}, \quad (1.19)$$

где  $\tilde{F}_e = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{(d-l)^2}$  – характерная пондеромоторная сила, соответствующая расстоянию

между обкладками при недеформированной пружине;  $\tilde{F}_s = k(d-l)$  – характерная упругая сила, возникающая в пружине при совмещении пластин конденсатора.

Рассмотрим микромеханический осциллятор, расположенный в электрическом поле двух неподвижных электродов (рисунок 1.4).

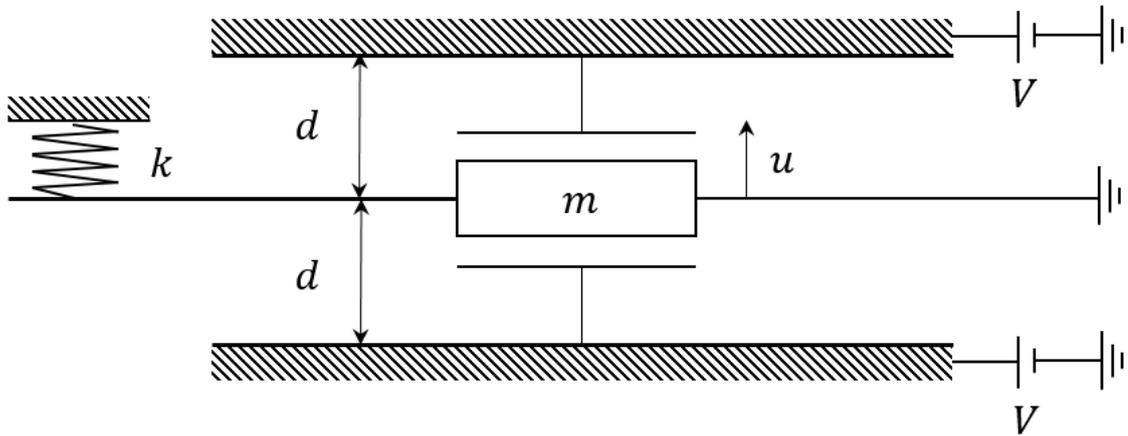


Рисунок 1.4 – Микромеханический осциллятор в поле двух электродов

Подвижной пластине (точечной массе осциллятора) и неподвижным электродам сообщается одинаковая разность потенциалов  $V$ . В предположении симметрии системы примем длину недеформированной пружины  $l$  равной нулю.

Уравнение движения осциллятора записывается в следующей форме:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{(d - u)^2} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{(d + u)^2}, \quad (1.20)$$

или, в безразмерной форме,

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \alpha \frac{dx}{d\tau} + x = \lambda \left[ \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \right], \quad (1.21)$$

где

$$x = \frac{u}{d}, \quad \tau = \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad \alpha = \frac{c}{\sqrt{mk}}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{k d^3}. \quad (1.22)$$

### 1.2.1 Устойчивость и бифуркации положений равновесия в поле одного электрода

Перейдем к задаче о нахождении положений равновесия микроэлектромеханического осциллятора и исследовании их устойчивости.

Рассмотрим микроэлектромеханический осциллятор в поле одного электрода. Решая задачу статики, не будем учитывать наличие в системе диссипативных сил. Тогда уравнение (1.18) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \frac{\lambda}{(1-x)^2}. \quad (1.23)$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение описывает прямолинейное движение материальной точки в силовом поле с потенциальной энергией

$$\Pi(x) = - \int \left( -x + \frac{\lambda}{(1-x)^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\lambda}{1-x}. \quad (1.24)$$

Интеграл энергии записывается в форме

$$\left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = 2(h - \Pi(x)), \quad (1.25)$$

откуда

$$\tau - \tau_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(h - \Pi(\xi))}}. \quad (1.26)$$

Здесь  $h = \frac{\dot{x}_0^2}{2} + \Pi(x_0)$  – постоянная полной энергии;  $x_0, \dot{x}_0$  – начальные значения положения и скорости. Точкой сверху обозначена производная по  $\tau$ .

Равновесия системы находятся из условия равенства противоположно направленных силы упругости и пондеромоторной силы:

$$x = \frac{\lambda}{(1-x)^2}. \quad (1.27)$$

На рисунке 1.5 показаны графики функций  $-F_s(x) = x$  и  $F_e(x) = \frac{\lambda}{(1-x)^2}$  для различных значений параметра  $\lambda$ . Точкам пересечения кривых соответствуют положения равновесия.

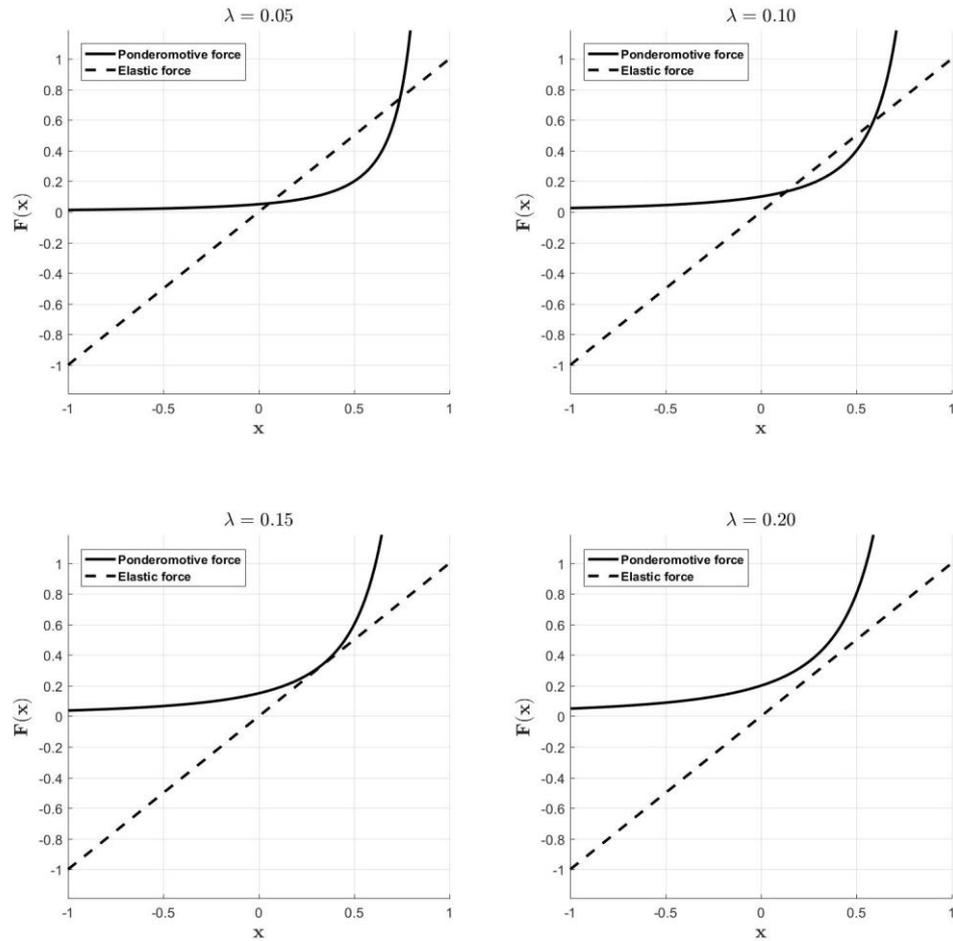


Рисунок 1.5 – Соотношение между упругой и пондеромоторной силами

Согласно теореме Дирихле [2], положениям равновесия соответствуют экстремумы функции потенциальной энергии. На рисунке 1.6 показаны графики функции  $\Pi(x)$  и соответствующие фазовые портреты исследуемой динамической системы для различных значений параметра  $\lambda$ .

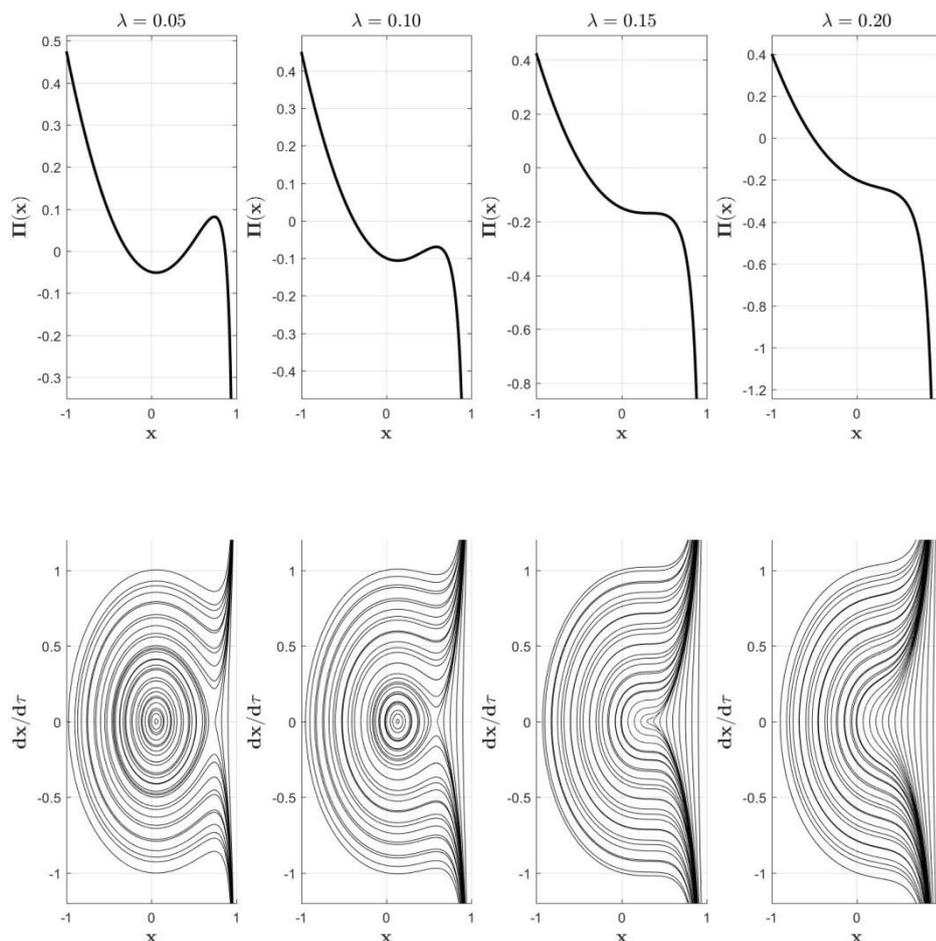


Рисунок 1.6 – Качественная структура фазовой плоскости в зависимости от  $\lambda$

При достижении  $\lambda$  некоторого критического значения происходит бифуркация – слияние устойчивого (особая точка типа «центр») и неустойчивого (седло) положений равновесия с их последующим исчезновением. Бифуркационное значение  $\lambda_*$  находится из условия сложного экстремума – обращения в нуль первой и второй производных потенциальной функции  $\Pi(x)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial x} = x - \frac{\lambda}{(1-x)^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = 1 - \frac{2\lambda}{(1-x)^3} = 0, \end{cases} \quad (1.28)$$

откуда получаем

$$(1-x)^2(1-3x) = 0, \quad (1.29)$$

что с учетом геометрического условия  $x \in (-1; 1)$  дает  $x_* = \frac{1}{3}$  при  $\lambda_* = \frac{4}{27} \cong 0,148$ .

На рисунке 1.7 показана диаграмма ветвления положений равновесия системы.

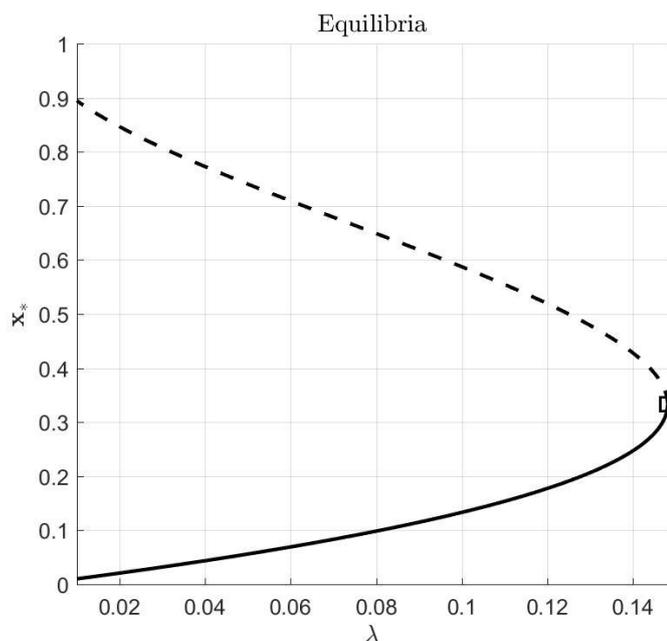


Рисунок 1.7 – Диаграмма ветвления положений равновесия

Значению  $\lambda_*$  отвечает регулярная экстремальная точка бифуркационной диаграммы [20,60]. Сплошной линией на рисунке 1.7 обозначены устойчивые решения, пунктирной – неустойчивые.

В англоязычной литературе указанная бифуркация часто называется «*static pull-in instability*» в силу характерности именно для базовых элементов микроэлектромеханических систем, где она физически соответствует «схлопыванию» подвижного упругого элемента с неподвижным электродом [112].

В дальнейшем, при изучении континуальных систем, для определения точек ветвления положений равновесия и устойчивости решений, соответствующих различным ветвям, неоднократно будет использоваться метод построения уравнений в вариациях относительно найденных стационарных решений. Применим этот метод в простом случае рассматриваемой одномерной системы.

Найдя положение равновесия  $x_s$  из уравнения (1.27), примем  $x = x_s + \xi$  и подставим данное выражение в уравнение движения (1.23):

$$\ddot{\xi} + x_s + \xi = \frac{\lambda}{(1 - x_s - \xi)^2}. \quad (1.30)$$

Разложив правую часть в ряд Тейлора по  $\xi$  и оставив только линейное по  $\xi$  слагаемое, получим уравнение в вариациях:

$$\ddot{\xi} + \left(1 - \frac{2\lambda}{(1 - x_s)^3}\right)\xi = 0. \quad (1.31)$$

Его решение имеет вид

$$\xi = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}, \quad (1.32)$$

где  $\omega = \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{(1-x_s)^3}}$ ;  $A, B$  – произвольные постоянные. При тех малых значениях  $\lambda$ , которым соответствует два положения равновесия, выражение  $\omega^2 = 1 - \frac{2\lambda}{(1-x_s)^3}$  принимает для одного из равновесий (меньшего) положительное значение, а для другого (большого) – отрицательное. Поэтому, согласно (1.32), первое положение равновесия устойчиво, а второе неустойчиво. При росте  $\lambda$  квадрат частоты  $\omega^2$  достигает нуля, что соответствует слиянию устойчивого и неустойчивого положений равновесия, т.е. точке ветвления. Критическое значение  $\lambda$  находится, таким образом, из условий

$$\begin{cases} x_s - \frac{\lambda}{(1-x_s)^2} = 0, \\ 1 - \frac{2\lambda}{(1-x_s)^3} = 0, \end{cases} \quad (1.33)$$

совпадающих с ранее полученными уравнениями (1.28). Проведенные вычисления являются примером нахождения регулярной экстремальной точки с помощью динамического метода исследования устойчивости положений равновесия [7].

### 1.2.2 Устойчивость и бифуркации положений равновесия в поле двух электродов

Перейдем к рассмотрению микроэлектромеханического осциллятора в поле двух электродов. Уравнение (1.21) без учета диссипативных сил примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \lambda \left[ \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \right] = \frac{4\lambda x}{(1-x^2)^2}. \quad (1.34)$$

Потенциальная энергия системы выражается следующей формулой:

$$П(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2\lambda}{1-x^2}. \quad (1.35)$$

Интеграл энергии и квадратура, определяющая движение, записываются так же, как в формулах (1.25), (1.26).

На рисунке 1.8 показаны графики функций  $-F_s(x) = x$  и  $F_e(x) = \frac{4\lambda x}{(1-x^2)^2}$  для различных значений параметра  $\lambda$ . Точкам пересечения кривых соответствуют положения равновесия.

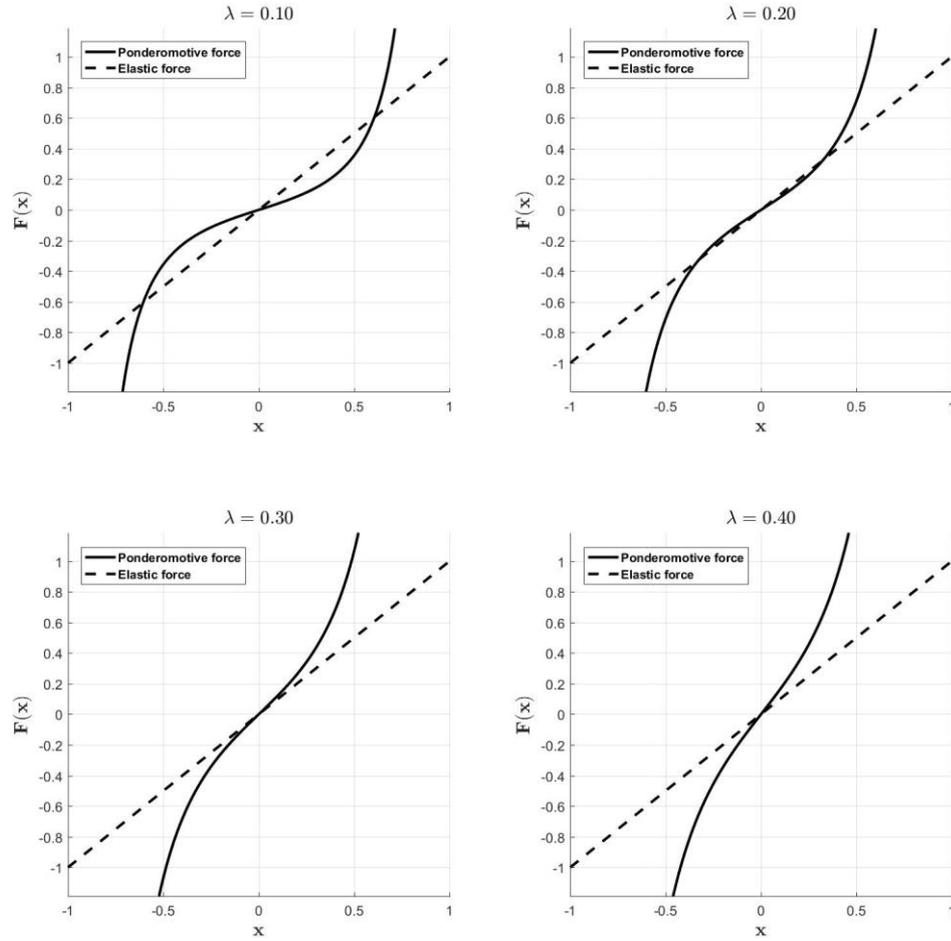


Рисунок 1.8 – Соотношение между упругой и пондеромоторной силами

Изменение структуры фазовой плоскости системы в зависимости от параметра  $\lambda$  показано на рисунке 1.9.

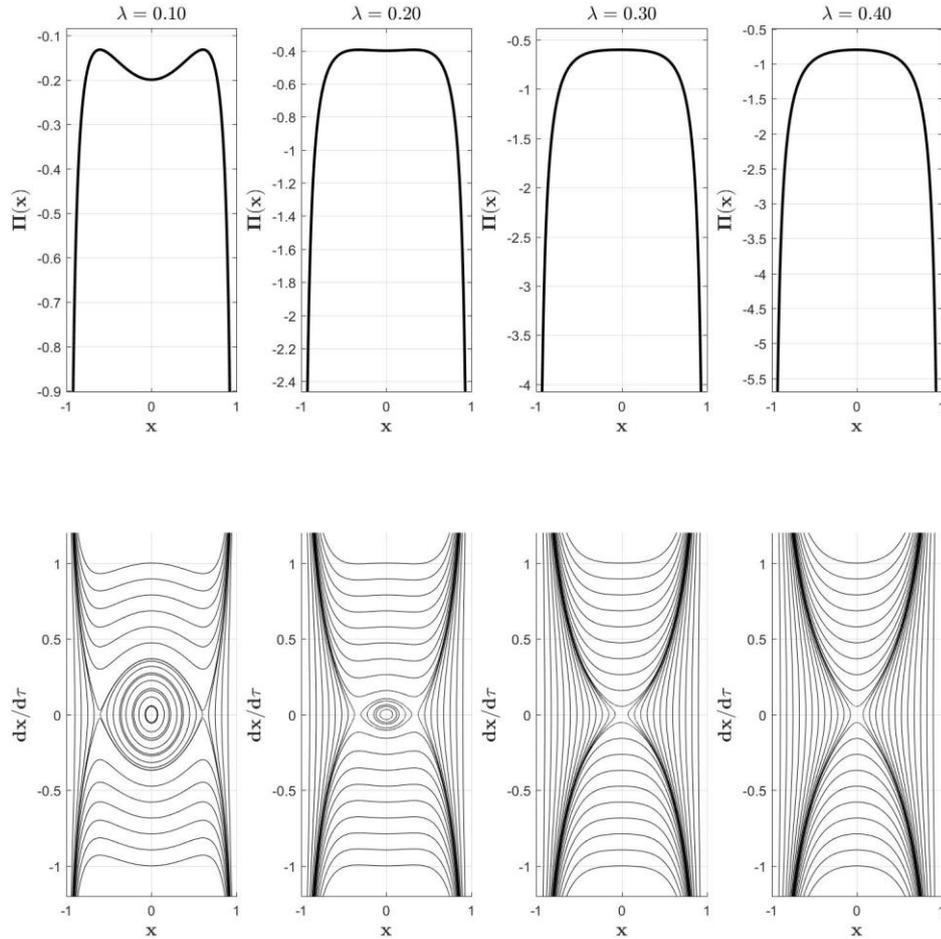


Рисунок 1.9 – Качественная структура фазовой плоскости в зависимости от  $\lambda$

Как видно из рисунка, при малых  $\lambda$  существуют три положения равновесия в геометрически допустимом интервале  $x \in (-1; 1)$ : устойчивое нулевое (нейтральное) и два неустойчивых, симметричных относительно нуля с большими амплитудами ( $x \cong \pm 1$ ). При увеличении  $\lambda$  боковые положения равновесия смещаются к нулю, и при некотором критическом значении  $\lambda_*$  сливаются с нейтральным равновесием. При дальнейшем росте  $\lambda$  в системе сохраняется единственное неустойчивое нулевое положение равновесия.

Геометрически допустимые положения равновесия осциллятора, согласно (1.34), определяются по формуле

$$x = \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{\lambda}}, \quad (1.36)$$

откуда следует, что точке ветвления отвечает значение  $\lambda_* = \frac{1}{4}$ .

Диаграмма ветвления положений равновесия показана на рисунке 1.10.

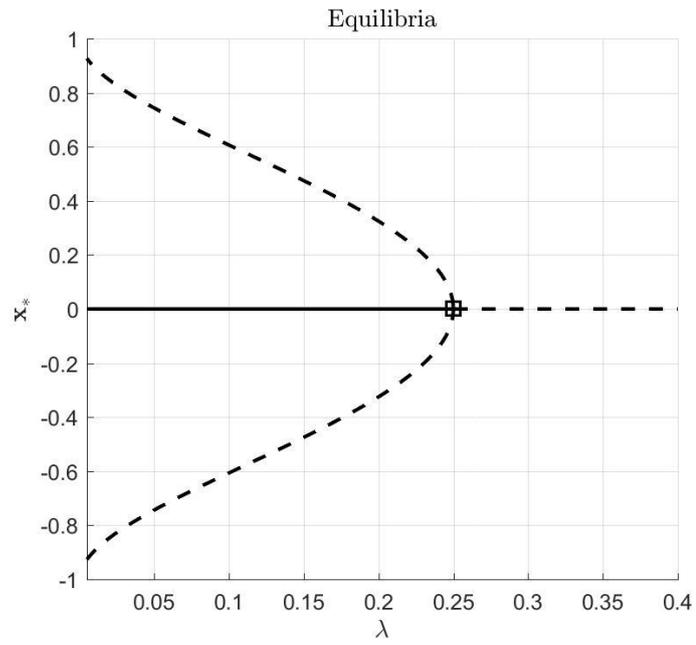


Рисунок 1.10 – Диаграмма ветвления положений равновесия

Как видно из рисунка, значению  $\lambda_*$  соответствует односторонняя субкритическая бифуркация с исчезновением устойчивых положений равновесия. [20,60].

### 1.3 Континуальные модели упругих элементов нано- и микросистемной техники

В настоящем пункте исследуются распределенные модели упругих элементов НМСТ, входящих в состав электростатических преобразователей – мембраны и пластинки. Подобные объекты широко используются в современном приборостроении. В частности, рассматриваемые далее круглые пластинки являются основным элементом емкостных ультразвуковых преобразователей, назначение которых состоит в детектировании или генерировании акустических волн в широком частотном диапазоне [75,83,84,86,89].

#### 1.3.1 Математическая постановка связанной задачи электроупругости мембран и пластинок

Уравнения геометрически нелинейной теории гибких пластинок (уравнения Кармана), основанные на гипотезе недеформируемых нормалей Кирхгофа-Лява, имеют вид [14,65]:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w &= L(w, \Phi) + h\Pi(\sigma, w) + F, \\ \nabla^4 \Phi &= -\frac{Eh}{2}L(w, w), \end{aligned} \quad (1.37)$$

где  $w$  – прогиб пластинки;  $\Phi$  – функция напряжений;  $h$  – толщина пластинки;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – изгибная жесткость пластинки;  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала;  $F$  – интенсивность внешней поперечной нагрузки, вообще говоря, зависящей от прогиба  $w$ .

Оператор  $L(w, \Phi)$  в полярных координатах  $(r, \theta)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} L(w, \Phi) &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ &\quad - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \end{aligned} \quad (1.38)$$

заменой  $\Phi$  на  $w$  находим  $L(w, w)$ .

Оператор  $\Pi(\sigma, w)$  в уравнении (1.37) выражает действие усилий  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  в срединной поверхности пластинки:

$$\Pi(\sigma, w) = \sigma_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2\tau_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \quad (1.39)$$

Для оператора Лапласа  $\nabla^2$  в полярных координатах имеем выражение

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (1.40)$$

Рассмотрим круглую пластинку, равномерно растянутую натяжением  $T$ . В этом случае  $\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{T}{h}$ ,  $\tau_{r\theta} = 0$ , и оператор  $\Pi(\sigma, w)$  принимает вид

$$\Pi(\sigma, w) = \frac{T}{h} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{T}{h} \nabla^2 w. \quad (1.41)$$

Для осесимметричных задач уравнения статики гибких пластинок записываются в форме

$$D \nabla^4 w = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{T}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) + F(r, w), \quad (1.42)$$

$$\nabla^4 \Phi = - \frac{Eh}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr},$$

где бигармонический оператор  $\nabla^4$  имеет вид

$$\nabla^4 = \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2. \quad (1.43)$$

Перейдем к определению внешней силы  $F$ , действующей на пластинку в электрическом поле. Как известно, объемные пондеромоторные силы электрического поля могут быть сведены к поверхностным силам натяжения, характеризуемым максвелловым тензором натяжений  $\mathbf{T}$  [42,57]. Компоненты тензора  $\mathbf{T}$  в произвольной декартовой системе координат  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1,2,3$  выражаются формулами:

$$T_{\alpha\beta} = \epsilon_r \epsilon_0 \left( E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right), \quad (1.44)$$

где  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля.

Рассмотрим круглую пластинку в поле одного неподвижного электрода (рисунок 1.11).

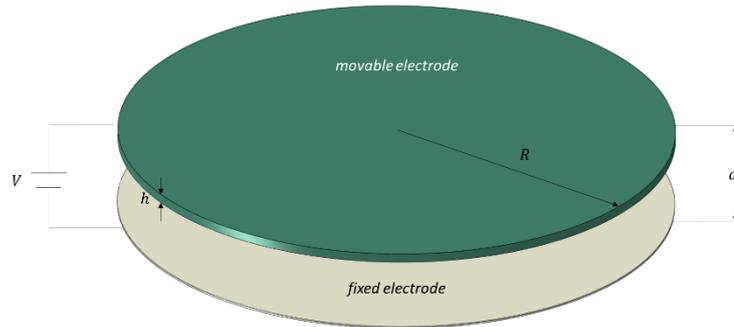


Рисунок 1.11 – Круглая пластинка в поле одного электрода

Начало  $O$  декартовой системы координат расположим в центре пластины; ось  $Oz$  направим вертикально вниз. Пренебрегая неоднородностью электрического поля вблизи краев пластины и электрода, найдем, что вектор напряженности  $\mathbf{E} = E_z \mathbf{k}$ , где  $\mathbf{k}$  – единичный вектор оси  $Oz$ . Примем прогиб пластинки  $w$  положительным в направлении  $Oz$ . Внешняя сила  $F$ , входящая в уравнения равновесия (1.37), равна компоненте  $T_{zz}$  тензора натяжений:

$$F = T_{zz} = \epsilon_r \epsilon_0 \left( E_z^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = - \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{2} |\nabla \varphi|^2, \quad (1.45)$$

где  $\varphi$  – потенциал электрического поля. Для нахождения  $\varphi$  необходимо решить уравнение Пуассона [42]

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho_q, \quad (1.46)$$

где  $\rho_q$  – объемная плотность электрического заряда. В рассматриваемом случае  $\rho_q = 0$ . С учетом сделанных предположений об однородности электрического поля уравнение Лапласа для потенциала примет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.47)$$

Положим  $\varphi = V$  на пластине (т.е. при  $z = w$  – величине прогиба в данной точке пластины) и  $\varphi = 0$  на неподвижном электроде ( $z = d$ ). Тогда

$$\varphi = \frac{z-d}{w-d}V, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{V}{d-w}, \quad (1.48)$$

и для пондеромоторной силы  $F$  из (1.45) получаем выражение

$$F(w) = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V^2}{2(d-w)^2}. \quad (1.49)$$

Отметим, что сделанное допущение о постоянстве направления вектора напряженности  $\mathbf{E}$  с механической точки зрения соответствует переходу от рассмотрения следящей (непотенциальной) силы к силе неизменного направления, имеющей потенциал (т.е. к консервативной силе).

Таким образом, нелинейные уравнения равновесия пластинки в электростатическом поле одного электрода имеют вид

$$D\nabla^4 w = L(w, \Phi) + h\Pi(\sigma, w) + \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V^2}{2(d-w)^2}, \quad (1.50)$$

$$\nabla^4 \Phi = -\frac{Eh}{2}L(w, w).$$

Рассмотрение системы с двумя неподвижными электродами и симметрично расположенной между ними пластинкой приводит к следующему выражению для пондеромоторной силы:

$$F(w) = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V_1^2}{2(d-w)^2} - \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V_2^2}{2(d+w)^2}, \quad (1.51)$$

где  $V_1, V_2$  – разности потенциалов между пластинкой и двумя неподвижными электродами.

Уравнения равновесия пластинки в поле двух электродов получаются из (1.50) заменой выражения для  $F$ .

В дальнейшем исследуются формы равновесия растянутых с натяжением  $T$  круглых пластинок в электрических полях одного и двух электродов. Для удобства процедуры

приведения к безразмерному виду, присвоим размерным величинам функции напряжений  $\Phi$ , прогиба  $w$  и радиальной координаты  $r$ , а также дифференциальным операторам  $\nabla$  и  $L$  символ " $\wedge$ ":

$$\begin{aligned} D\widehat{\nabla}^4\widehat{w} &= \widehat{L}(\widehat{w}, \widehat{\Phi}) + T\widehat{\nabla}^2\widehat{w} + \widehat{F}, \\ \widehat{\nabla}^4\widehat{\Phi} &= -\frac{Eh}{2}\widehat{L}(\widehat{w}, \widehat{w}). \end{aligned} \quad (1.52)$$

### 1.3.2 Ветвление форм равновесия круглых мембран и их устойчивость

Конкретный метод перехода к безразмерным уравнениям зависит от принимаемых физических предположений. Имея в виду рассмотрение форм равновесия круглой натянутой мембраны радиуса  $R$  в электрическом поле, приведем уравнения (1.52) к виду

$$\begin{aligned} \delta\nabla^4 w &= \beta L(w, \Phi) + \nabla^2 w + \lambda\tilde{F}_e, \\ \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2}L(w, w), \end{aligned} \quad (1.53)$$

где

$$\begin{aligned} r &= \frac{\hat{r}}{R}, & w &= \frac{\hat{w}}{d}, & \Phi &= \frac{\hat{\Phi}}{Ehd^2}, & \delta &= \frac{D}{R^2T}, \\ \beta &= \frac{Eh}{T}\left(\frac{d}{R}\right)^2, & \lambda &= \frac{\epsilon_r\epsilon_0R^2V^2}{2d^3T}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Приведенная пондеромоторная сила в системе с одним неподвижным электродом имеет вид

$$\tilde{F}_e = \frac{1}{(1-w)^2}; \quad (1.55)$$

в системе с двумя электродами при  $V_1 = V_2 = V$  (см. формулу (1.51))

$$\tilde{F}_e = \frac{1}{(1-w)^2} - \frac{1}{(1+w)^2}. \quad (1.56)$$

Введенные параметры имеют понятный физический смысл: параметр  $\delta$  характеризует соотношение между изгибной и мембранной жесткостями пластинки; параметр  $\beta$  определяет значение геометрической нелинейности уравнений равновесия при данном отношении расстояния между обкладками  $d$  к радиусу пластинки  $R$ .

### 1.3.2.1 Формы равновесия в поле одного неподвижного электрода

#### 1.3.2.1.1 Уравнение равновесия

Широкий класс микроэлектромеханических систем с математической точки зрения описывается уравнениями равновесия и колебаний тонких мембран. К таким системам относятся ультразвуковые преобразователи, микрофоны, микронасосы, резонаторы, детекторы массы прилипающих частиц и др. Характерными особенностями данных систем являются:

1) малость зазора между обкладками (расстояния между подвижным элементом и неподвижным электродом) по сравнению с продольным размером упругого элемента (радиусом пластинки);

2) малая толщина упругого элемента (пластинки) и преобладание мембранной жесткости над изгибной.

В этих предположениях примем в уравнениях равновесия (1.53) параметры  $\beta$  и  $\delta$  равными нулю. В результате получаем уравнение равновесия натянутой мембраны в электрическом поле:

$$\nabla^2 w + \lambda \tilde{F}_e = 0, \quad (1.57)$$

где приведенная пондеромоторная сила определяется формулами (1.55) или (1.56).

В случае системы с одним электродом приходим к уравнению

$$\nabla^2 w = -\frac{\lambda}{(1-w)^2}. \quad (1.58)$$

Переходя к новой искомой функции прогиба  $u = -w$ , запишем уравнение равновесия круглой мембраны в готовом для исследования виде:

$$\nabla^2 u = \frac{\lambda}{(1+u)^2}. \quad (1.59)$$

Функция прогиба  $u(r, \theta)$  должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} r = 0: \quad u & - \text{огр.}; \\ r = 1: \quad u & = 0. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Задача (1.59)-(1.60) возникает также при исследовании форм равновесия ферромагнитной мембраны в электромагнитном поле [40,87].

Запишем уравнение (1.59) в полярных координатах  $(r, \theta)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\lambda}{(1+u)^2}. \quad (1.61)$$

Приступим к задаче нахождения осесимметричных форм равновесия мембраны и определения их устойчивости. Принимая, что прогиб  $u$  не зависит от угловой координаты  $\theta$ , приходим к нелинейной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{\lambda}{(1+u)^2} \quad (1.62)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} r = 0: \quad u' = \frac{du}{dr} = 0; \\ r = 1: \quad u = 0. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Важной особенностью нелинейных краевых задач является, вообще говоря, неединственность (и не всегда существование) решений при заданных значениях параметров уравнения [26].

### 1.3.2.1.2 Прямой численный расчет

Чтобы продемонстрировать множественность решений нелинейной краевой задачи (1.62)-(1.63) при заданных значениях параметра  $\lambda$ , выполним прямой численный расчет задачи с помощью алгоритмов программной системы *MATLAB* [118]. Применяется функция *bvp4c* модуля решения краевых задач для ОДУ «*Boundary value Problem for ordinary differential equations*» [102], содержащая численные процедуры методов пристрелки и коллокаций [21,64]. Входными данными для функции *bvp4c* являются исследуемое уравнение в форме  $y' = f(x, y)$  и граничные условия, а также начальное приближение искомого решения, необходимое для старта итерационного процесса.

На рисунке 1.12 показаны полученные осесимметричные формы равновесия мембраны при различных начальных приближениях для четырех значений параметра  $\lambda$ . На рисунке каждому значению  $\lambda$  соответствуют два решения, обозначенные одним цветом.

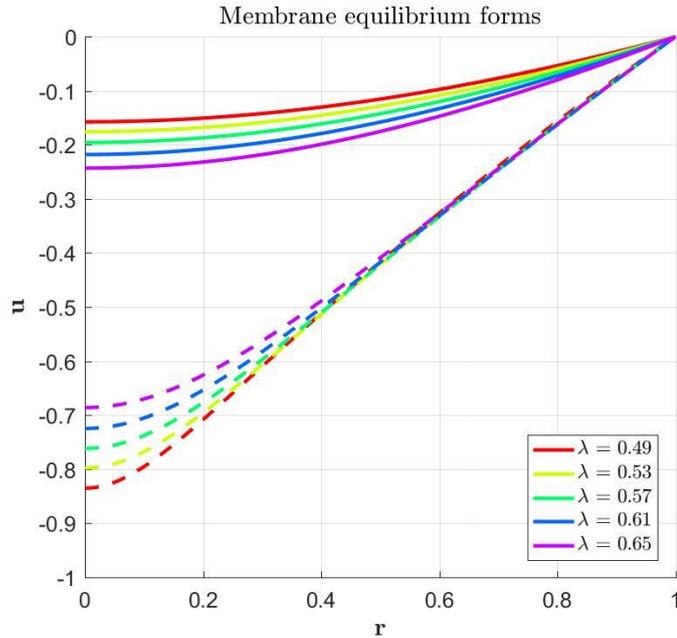


Рисунок 1.12 – Осесимметричные прогибы мембраны при различных  $\lambda$

### 1.3.2.1.3 Сведение к уравнению Эмдена-Фаулера

Описанный выше метод прямого численного решения краевой задачи не вполне удовлетворяет всем задачам исследования, т.к. не позволяет определить точное количество и вид форм равновесия, соответствующих данному значению параметра  $\lambda$ .

Чтобы преодолеть эти трудности, применим метод анализа уравнения (1.62), представленный в работах [40,87]. Вводя новую искомую функцию прогиба  $v = 1 + u$  и независимую переменную  $\rho = \sqrt{\lambda}r$ , запишем исследуемую краевую задачу в виде

$$\frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\rho} - \frac{1}{v^2} = 0,$$

$$\rho = 0: \quad \frac{dv}{d\rho} = 0;$$

$$\rho = \sqrt{\lambda}: \quad v = 1.$$
(1.64)

Данное уравнение относится к классу уравнений Эмдена-Фаулера [4,39]:

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho^k \frac{dv}{d\rho} \right) - \rho^m v^n = 0.$$
(1.65)

В рассматриваемом случае  $k = 1, m = 1, n = -2$ . Уравнение Эмдена-Фаулера интегрируется в квадратурах лишь при нескольких значениях  $k, m, n$ , отличных от данных. Однако, как показано в [87], уравнение (1.64) можно привести к системе, не содержащей аргумента явно, что упрощает исследование.

Введем новые переменные: аргумент  $\tau$  и неизвестную функцию  $\eta$  соотношениями

$$\rho = \sqrt{\lambda} e^{-\frac{3}{2}\tau}, \quad v = b\eta(\tau)e^{-\tau}, \quad b = \sqrt[3]{\frac{9\lambda}{4}}, \quad (1.66)$$

так, что центру мембраны ( $\rho = 0$ ) соответствует значение новой независимой переменной  $\tau \rightarrow +\infty$ , а на краю мембраны ( $\rho = \sqrt{\lambda}$ )  $\tau = 0$ . Для функции  $\eta(\tau)$  получаем автономное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} - 2\frac{d\eta}{d\tau} + \eta - \frac{1}{\eta^2} = 0 \quad (1.67)$$

с граничными условиями

$$\eta(0) = \frac{1}{b}, \quad \exists \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \eta(\tau)e^{-\tau} \neq \pm\infty. \quad (1.68)$$

Физический смысл второго условия состоит в ограниченности прогиба в центре мембраны. Для исследования структуры фазовой плоскости запишем уравнение (1.67) в стандартной форме ( $\eta' = d\eta/d\tau$ ):

$$\begin{aligned} \eta' &= \vartheta, \\ \vartheta' &= 2\vartheta - \eta + \frac{1}{\eta^2}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Система (1.69) имеет единственную особую точку  $\eta_* = 1, \vartheta_* = 0$ . Положим  $\eta = \eta_* + \xi$ . Линеаризуя уравнения в окрестности особой точки, получим систему

$$\begin{aligned} \xi' &= \vartheta, \\ \vartheta' &= 2\vartheta - 3\xi \end{aligned} \quad (1.70)$$

с характеристическими числами  $1 \pm i\sqrt{2}$ , откуда следует, что особая точка – неустойчивый фокус.

Из всего множества интегральных кривых уравнения (1.67) необходимо выбрать те решения, которые удовлетворяют граничным условиям (1.68). Первое из условий однозначно определяется значением параметра  $b$ , а значит, характерным физическим параметром системы  $\lambda$ . Второе условие накладывает ограничения на скорость роста функции  $\eta(\tau)$  при  $\tau \rightarrow +\infty$ . В работе [87] показано, что единственной интегральной кривой, удовлетворяющей условию (1.68)<sub>2</sub>, является разделяющая интегральная кривая, выходящая из неустойчивого фокуса и имеющая асимптоту  $\vartheta = \eta$  при  $\tau \rightarrow +\infty$ . На рисунке 1.13 показан фазовый портрет динамической системы (1.69). Жирной сплошной линией обозначена искомая интегральная кривая, пунктирной – её асимптота.

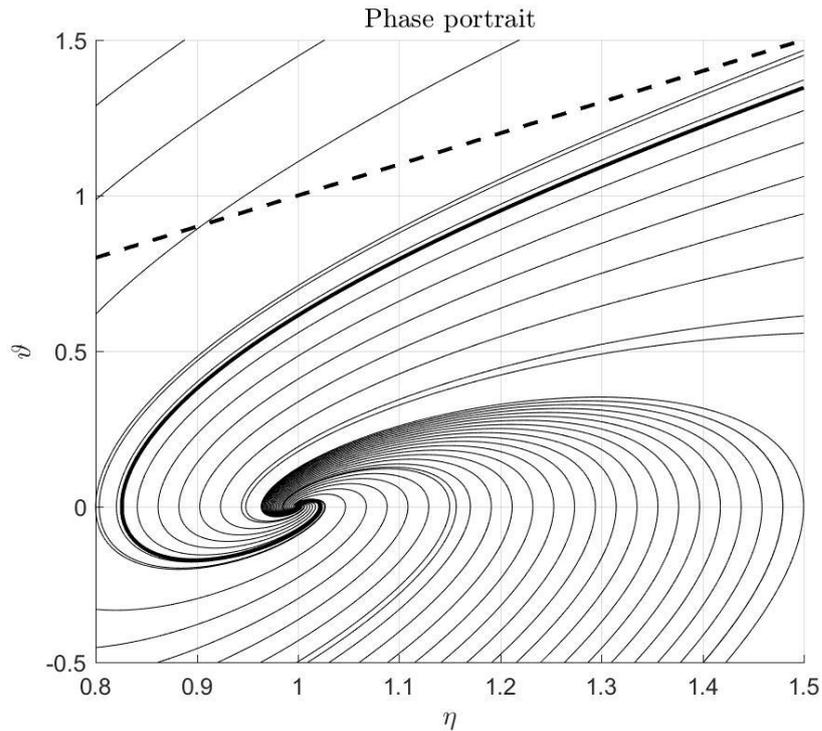


Рисунок 1.13 – Фазовый портрет динамической системы (1.69)

Таким образом, для того, чтобы найти решение краевой задачи (1.64) при заданном значении параметра  $\lambda$  и, следовательно,  $b = \sqrt[3]{9\lambda/4}$ , нужно провести на фазовой плоскости вертикаль  $\eta(0) = 1/b$  (см. рисунок 1.14). От точки её пересечения с интегральной кривой, выходящей из фокуса, и далее, следуя по соответствующему участку фазовой траектории, получаем решения осесимметричной краевой задачи, которых в связи с неединственностью пересечений вертикали с фазовой кривой может быть несколько. При  $\lambda < 4/9$  вертикаль идет справа от  $\eta = 1$  и слева при  $\lambda > 4/9$ . Исключение составляет форма равновесия, соответствующая  $\lambda = \lambda_\infty = 4/9$  и, следовательно,  $b = 1 = \eta(0)$ . Решение краевой задачи в этом случае полностью ложится на фазовую кривую, исходящую из фокуса и асимптотически приближающуюся к биссектрисе первого квадранта фазовой плоскости. Мембрана, изогнувшаяся таким образом, похожа на воронку с заострением в центре. Такое решение и близкие к нему следует рассматривать как формальные, не отвечающие первоначальному предположению о малости кривизны деформированной мембраны.

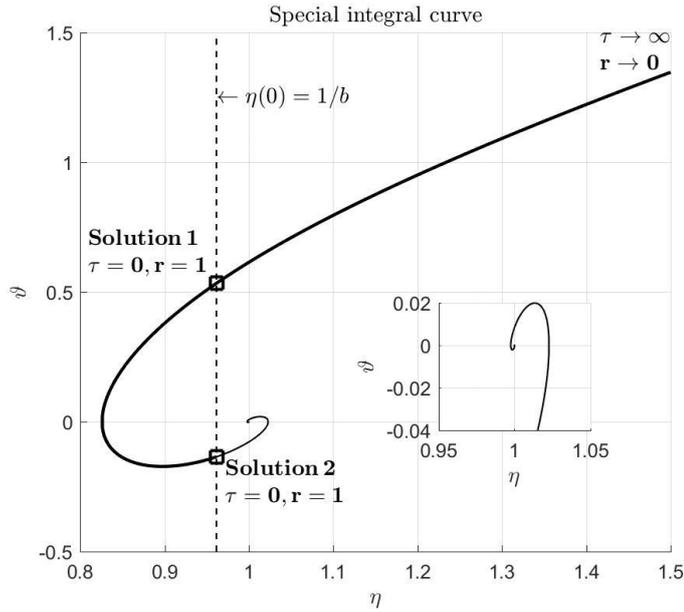


Рисунок 1.14 – К описанию алгоритма решения краевой задачи (1.64)

Представленный графо-аналитический метод позволяет полностью решить задачу об определении осесимметричных форм равновесия круглой мембраны – найти их вид и количество при заданном значении параметра  $\lambda$ .

На рисунке 1.15 показано совпадение форм прогиба, найденных двумя методами – прямым численным решением краевой задачи и вышеописанным методом сведения к автономной системе.

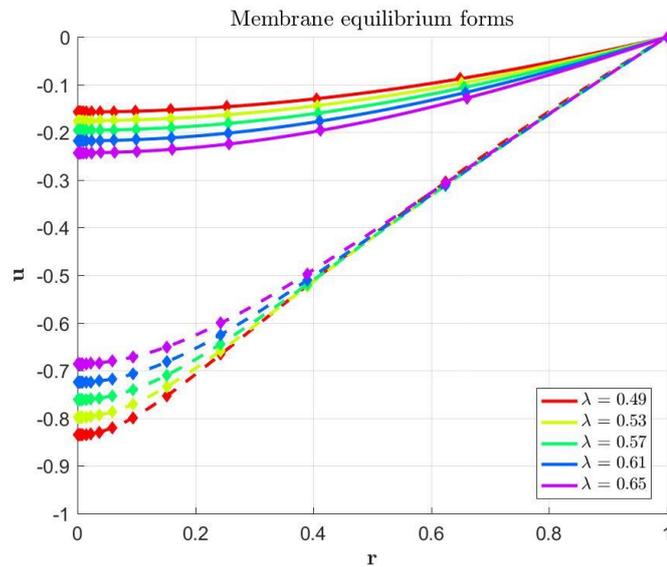


Рисунок 1.15 – Сравнение решений, полученных разными методами

Для примера на рисунке 1.16 показаны три формы равновесия, соответствующие  $\lambda = 0,47$ . Отметим, что найти третью форму с наибольшим по модулю прогибом с помощью прямого численного метода затруднительно, т.к. требуется достаточно точное начальное приближение к данному решению.

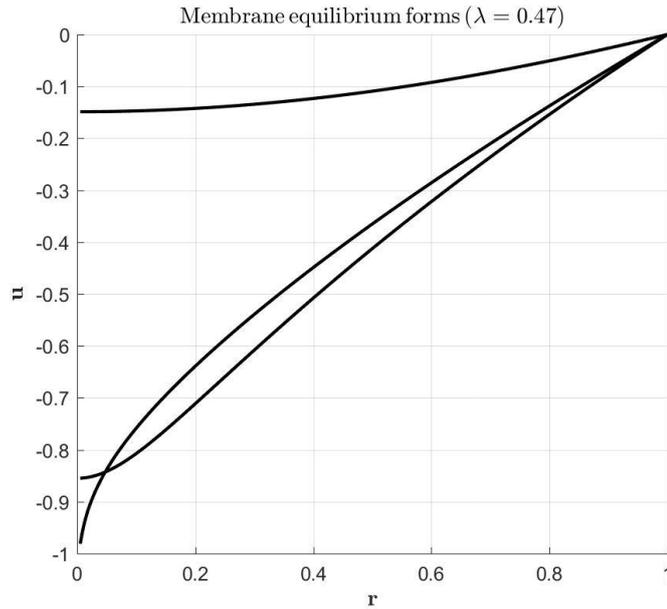


Рисунок 1.16 – Три формы равновесия при  $\lambda = 0,47$

На рисунке 1.17 показана диаграмма ветвления осесимметричных форм равновесия. По оси ординат откладывается величина прогиба в центре мембраны.

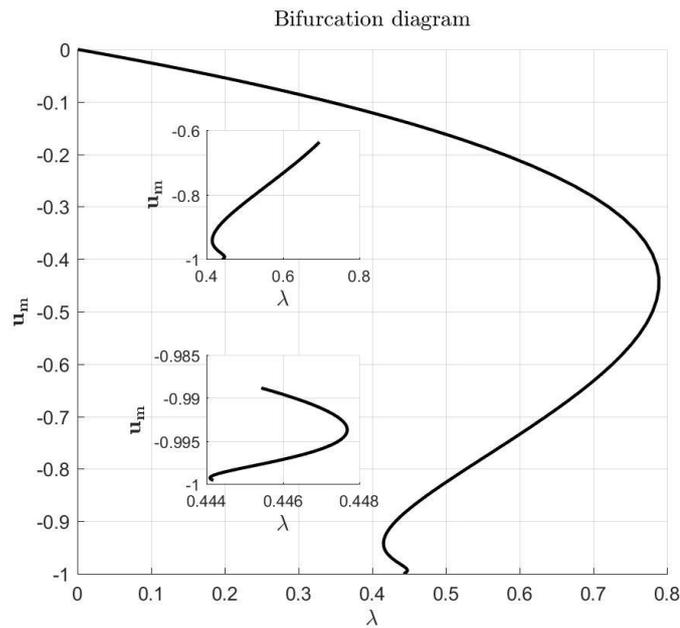


Рисунок 1.17 – Диаграмма ветвления осесимметричных форм равновесия

#### 1.3.2.1.4 Поиск кососимметричных форм равновесия

Перейдем к вопросу о существовании кососимметричных форм равновесия. Вернемся к уравнению (1.61):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\lambda}{(1+u)^2}. \quad (1.61)$$

К рассматриваемому уравнению применима весьма общая теорема, доказанная в работе [81]:

*Теорема:* Пусть  $u > 0, u \in C^2(\bar{\Omega})$  – положительное решение нелинейного эллиптического уравнения

$$\Delta u + f(u) = 0, \quad u = 0 \text{ при } |x| = R, \quad (1.71)$$

где  $\Omega$  – шар  $n$  – мерного пространства  $|x| < R, x \in \mathbb{R}^n; f \in C^1$  и  $f(u) \geq 0$  для всех  $u \in \bar{\Omega}$ . Тогда решение  $u$  радиально симметрично и  $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$  при  $0 < r < R$ .

Заменим в исследуемом уравнении (1.61)  $u$  на  $-u$ :

$$\Delta u + \frac{\lambda}{(1-u)^2} = 0. \quad (1.72)$$

Получим, что в обозначениях теоремы  $n = 2$ , шар  $\Omega$  представляет собой круговую область мембраны, а функция  $f$  имеет вид

$$f(u) = \frac{\lambda}{(1-u)^2} \quad (1.73)$$

и удовлетворяет условиям теоремы. Таким образом, формы равновесия мембраны обладают свойством радиальной симметрии, т.е. кососимметричных форм не существует. Утверждение теоремы об отсутствии точек перегиба вдоль радиальной координаты подтверждается ранее полученными результатами.

Возможность применения указанной теоремы обусловлена специальным видом функции  $f(u)$ . В дальнейшем будут исследоваться элементы микросистемной техники, действующие в электрических полях других конфигураций, для которых условие положительности функции  $f$  не выполняется. Поэтому представляется целесообразным применить к исследуемому уравнению (1.61) прямые аналитические и численные методы определения ответвлений кососимметричных форм равновесия, пригодные в случае систем более общего вида.

Точкам ветвления уравнения (1.61) соответствуют нетривиальные решения уравнения в вариациях относительно невозмущенного положения равновесия, в качестве которого будем рассматривать найденные ранее осесимметричные прогибы мембраны  $u_0(r, \lambda)$ . Допуская зависимость вариации  $\xi$  от окружной координаты  $\theta$ , будем искать решения в виде

$$u(r, \theta, \lambda) = u_0(r, \lambda) + \xi(r, \theta). \quad (1.74)$$

После подстановки (1.74) в уравнение (1.61) и его линеаризации по  $\xi$  получим однородную краевую задачу в вариациях

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{2\lambda}{(1+u_0(r, \lambda))^3} \xi = 0 \quad (1.75)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} r = 0: \quad \xi - \text{огр.}; \\ r = 1: \quad \xi = 0. \end{aligned} \tag{1.76}$$

Решение данной задачи будем искать в виде

$$\xi(r, \theta) = \Xi_k(r) \cos k\theta, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{1.77}$$

Для неизвестных функций  $\Xi_k$  получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Xi_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \Xi_k}{dr} + \left[ \frac{2\lambda}{(1 + u_0(r, \lambda))^3} - \frac{k^2}{r^2} \right] \Xi_k = 0, \\ \Xi_k(0) - \text{огр.}, \quad \Xi_k(1) = 0. \end{aligned} \tag{1.78}$$

При произвольных значениях параметра  $\lambda$  задача (1.78) имеет только нулевое решение. Особые значения  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения  $\Xi_k(r)$ , могут быть определены из задачи на собственные значения

$$A_k \Xi_k = \mu \Xi_k. \tag{1.79}$$

Здесь  $\mu$  – искомое собственное значение, а оператор  $A_k$  имеет вид

$$A_k = - \frac{(1 + u_0(r, \lambda))^3}{2} \cdot \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \right]. \tag{1.80}$$

Оператор  $A_k$  зависит от параметра  $\lambda$ ; те значения  $\lambda$ , при которых наименьшее собственное значение  $\mu$  задачи (1.79) совпадает с  $\lambda$ :  $\mu = \lambda$ , соответствуют нетривиальным решениям краевой задачи (1.78).

Задача на собственные значения (1.79) решается численно с помощью функции *bvp4c* программной системы *MATLAB* [118]. Особенностью данной задачи является наличие сингулярных слагаемых с множителями  $1/r$  и  $k^2/r^2$ . Реализованный в функции *bvp4c* численный алгоритм позволяет решать граничные задачи вида

$$\mathbf{y}' = \mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{y}}{x} + \mathbf{F}(x, \mathbf{y}, \mu), \tag{1.81}$$

где  $\mathbf{y}$  – искомая вектор-функция скалярного аргумента  $x$ ,  $\mathbf{S}$  – постоянная матрица коэффициентов при сингулярных слагаемых,  $\mathbf{F}$  – регулярная вектор-функция правых частей системы уравнений,  $\mu$  – искомое собственное значение.

Задача (1.79) соответствует постановке (1.81) только при поиске точек ветвления осесимметричных форм ( $k = 0$ ); при  $k \geq 1$  в уравнении появляется множитель  $k^2/r^2$ , не допускаемый функцией *bvp4c* [103]. Для кососимметричных форм с  $k = 1$  данную трудность можно преодолеть заменой зависимой переменной:  $\Xi_1 = r\chi$ . После преобразований задача (1.78) примет вид, соответствующий постановке (1.81):

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\chi}{dr} + \frac{2}{(1 + u_0(r, \lambda))^3} \mu\chi = 0, \quad (1.82)$$

$$\chi(0) - \text{огр.}, \quad \chi(1) = 0.$$

На рисунке 1.18 показана зависимость первого собственного значения  $\mu$  задачи (1.79) от параметра  $\lambda$  при  $k = 0$ . Значение  $\lambda$ , при котором происходит пересечение кривой  $\mu(\lambda)$  с биссектрисой  $\mu = \lambda$ , соответствует точке ветвления осесимметричных форм равновесия мембраны.

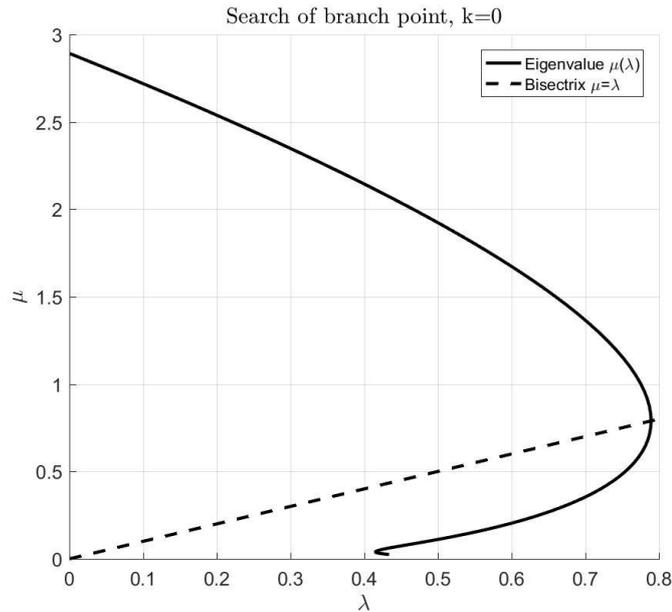


Рисунок 1.18 – Определение точки ветвления осесимметричных форм равновесия

На рисунке 1.19 показана кривая  $\mu(\lambda)$  при поиске ответвлений первой кососимметричной формы ( $k = 1$ ).

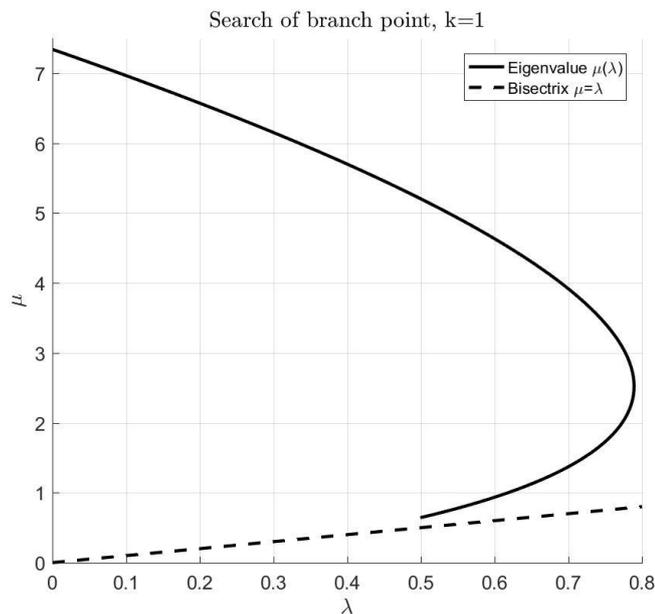


Рисунок 1.19 – Поиск ответвлений кососимметричных форм ( $k = 1$ )

Как видно из рисунка, кривая  $\mu(\lambda)$  стремится к прямой  $\mu = \lambda$  при приближении параметра  $\lambda$  к особому значению  $\lambda_\infty = 4/9$ , соответствующему бесконечному числу форм равновесия (см. рисунок 1.17). В связи с ростом кривизны форм равновесия при  $\lambda \rightarrow \lambda_\infty$  и связанными с этим вычислительными трудностями, прямой численный расчет не позволяет убедиться в том, что пересечения указанных двух линий все же не происходит, как это следует из представленной выше теоремы.

Применим для решения задачи на собственные значения (1.78) процесс Бубнова-Галеркина, который состоит в следующем [30]. Пусть поставлена задача на собственные значения для функции  $u(P)$ , где  $P$  – точка некоторой области  $\Omega$ :

$$Au - \mu u = 0. \quad (1.83)$$

Здесь  $A$  – линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве;  $\mu$  – искомый числовой множитель. Выберем бесконечную последовательность координатных функций  $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n(P), \dots$ , которые достаточное число раз (в соответствии с данными задачи) непрерывно дифференцируемы в замкнутой области  $\bar{\Omega} = \Omega + S$ , где  $S$  – граница области  $\Omega$ , и которые удовлетворяют всем краевым условиям задачи. Приближенное решение ищется в виде

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(P), \quad (1.84)$$

где  $a_k$  – некоторые постоянные. По методу Бубнова-Галеркина коэффициенты  $a_k$  определяются из требования, чтобы левая часть уравнения (1.83) стала, после подстановки в нее  $u_n(P)$  вместо  $u(P)$ , ортогональной к функциям  $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n(P)$ .

Метод Бубнова-Галеркина тем самым приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n a_k \{(A\varphi_k, \varphi_m) - \mu(\varphi_k, \varphi_m)\} = 0, \quad m = 1, \dots, n. \quad (1.85)$$

Приравняв нулю определитель этой системы, мы получим уравнение, определяющее приближенные значения собственных чисел:

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \mu(\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_1, \varphi_2) - \mu(\varphi_1, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_1, \varphi_n) - \mu(\varphi_1, \varphi_n) \\ (A\varphi_2, \varphi_1) - \mu(\varphi_2, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \mu(\varphi_2, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_2, \varphi_n) - \mu(\varphi_2, \varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A\varphi_n, \varphi_1) - \mu(\varphi_n, \varphi_1) & (A\varphi_n, \varphi_2) - \mu(\varphi_n, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \mu(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.86)$$

Как известно, для обеспечения сходимости данного процесса к точному решению задачи достаточно, чтобы линейный оператор  $A$  был симметричным и положительно определенным [12,30]. Для таких операторов процесс Бубнова-Галеркина эквивалентен процессу Ритца минимизации функционала  $(Au, u)$  при дополнительном условии  $(u, u) = 1$ .

Таким образом, для обоснования применения метода Бубнова-Галеркина к задаче (1.78) следует доказать симметричность и положительность операторов  $A_k$ .

Условие симметричности

$$(A_k f, g) - (f, A_k g) = 0 \quad \forall f, g \in D_A, \quad (1.87)$$

где  $D_A$  – область определения оператора, приводится в случае  $k = 1$  (первая кососимметричная форма) к виду

$$\int_0^1 p[-g'f + gf' - rg''f + rgf'']dr = 0 \quad \forall f, g = 0 \text{ при } r = 0, 1, \quad (1.88)$$

где  $p(r, \lambda) = (1 + u_0(r, \lambda))^3$ . Данное условие, вообще говоря, не выполняется для произвольных функций  $f, g \in D_A$ , а значит, оператор  $A_k$  не является симметричным.

Несмотря на отсутствие обоснования сходимости процесса Бубнова-Галеркина к точному решению задачи, постараемся применить этот метод для уточнения зависимости первого собственного числа  $\mu$  задачи (1.78) от физического параметра  $\lambda$  вблизи особого значения  $\lambda_\infty = 4/9$ .

Выберем в качестве координатных функций формы свободных гармонических колебаний натянутой мембраны, уравнение которых имеет вид [12]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1.89)$$

Свободные колебания разыскиваются в виде

$$u = U_k(r) \cos k\theta \sin \omega_k t, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.90)$$

Для форм колебаний получаем уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 U_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_k}{dr} + \left( \gamma_k^2 - \frac{k^2}{r^2} \right) U_k = 0, \quad \gamma_k^2 = \frac{\omega_k^2}{a^2}, \quad (1.91)$$

$$U_k(0) - \text{огр.}, \quad U_k(1) = 0.$$

В силу ограниченности прогиба в центре мембраны решения уравнения представляют собой функции Бесселя первого рода:

$$U_k(r) = C_k J_k(\gamma_k r), \quad (1.92)$$

где  $C_k$  – произвольные постоянные. С учетом граничного условия на краю мембраны, частоты свободных колебаний  $\omega_{km} = a\gamma_{km}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  определяются корнями функций Бесселя:

$$J_k(\gamma_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.93)$$

Запишем исследуемую задачу на собственные значения (1.79) в виде, идентичном (1.78):

$$\frac{d^2 \Xi_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \Xi_k}{dr} + \left[ \frac{2}{p(r, \lambda)} \mu_k - \frac{k^2}{r^2} \right] \Xi_k = 0, \quad (1.94)$$

$$\Xi_k(0) - \text{огр.}, \quad \Xi_k(1) = 0,$$

где, как и ранее,  $\mu_k$  – искомые собственные значения и  $p(r, \lambda) = (1 + u_0(r, \lambda))^3$ . В соответствии с методом Бубнова-Галеркина, будем искать решение в виде ряда по полной системе функций  $J_k(\gamma_{km}r)$ :

$$\Xi_k(r) = \sum_{m=1}^n C_m J_k(\gamma_{km}r), \quad (1.95)$$

где  $n$  – число учтенных форм колебаний, а коэффициенты  $\gamma_{km}$  определяются из (1.93).

Записав проекционные условия, получим следующую систему линейных однородных уравнений для компонент вектора  $\mathbf{c} = [C_1, \dots, C_m]^T$ :

$$\sum_{m=1}^n C_m \left[ \mu \int_0^1 \frac{2r}{p(r, \lambda)} J_k(\gamma_{km}r) J_k(\gamma_{ks}r) dr - \gamma_{km}^2 \int_0^1 r J_k(\gamma_{km}r) J_k(\gamma_{ks}r) dr \right] = 0, \quad (1.96)$$

$$s = 1, \dots, n.$$

Условие равенства нулю определителя данной системы приводит к характеристическому уравнению, позволяющему определить зависимость первого собственного значения  $\mu$  задачи (1.94) от физического параметра  $\lambda$ . На рисунке 1.20 показан результат вычислений при поиске точек ответвления первой кососимметричной формы мембраны ( $k = 1$ ) с учетом четырех координатных функций ( $n = 4$ ).

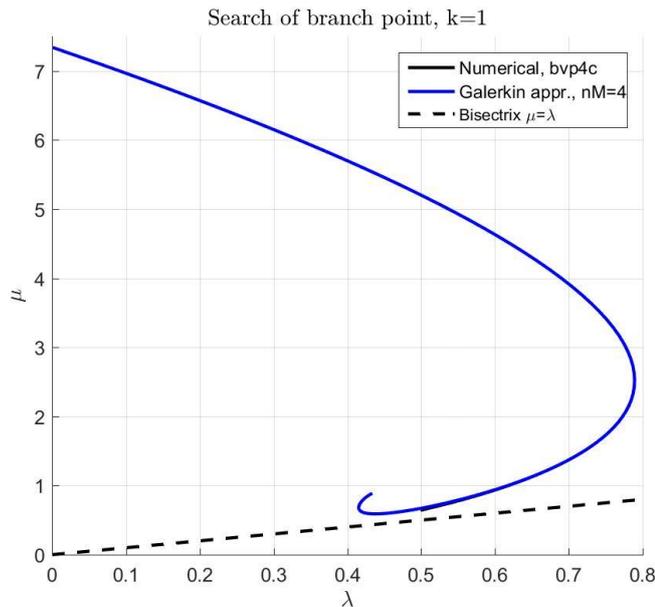


Рисунок 1.20 – Применение метода Бубнова-Галеркина

Как видно из рисунка, наблюдается совпадение приближенного аналитического решения с численным. При этом метод Галеркина позволяет рассмотреть окрестность особого значения

$\lambda_\infty = 4/9$  и подтвердить высказанное ранее утверждение об отсутствии пересечений биссектрисы  $\mu = \lambda$  с кривой  $\mu(\lambda)$ , что эквивалентно отсутствию кососимметричных форм равновесия мембраны в электрическом поле одного электрода.

### 1.3.2.1.5 Исследование устойчивости осесимметричных форм равновесия

Перейдем к исследованию устойчивости найденных осесимметричных форм равновесия мембраны. Как видно из найденной бифуркационной диаграммы (рисунок 1.17), в системе имеется регулярная экстремальная точка ветвления при  $\lambda \approx 0,8$ . Согласно общей теории бифуркаций [20], в регулярной экстремальной точке происходит смена устойчивости решений. Бесконечное число точек ветвления того же типа имеется в системе и при  $\lambda \rightarrow \lambda_\infty = 4/9$ . Таким образом, при тех значениях  $\lambda$ , которым соответствуют несколько положений равновесия, устойчивые формы прогиба чередуются с неустойчивыми. С целью подтверждения данного результата применим динамический метод определения устойчивости [6].

Рассмотрим задачу о малых колебаниях в окрестности найденных ранее статических решений  $u_s(r, \lambda)$  уравнения

$$\frac{d^2 u_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_s}{dr} = \frac{\lambda}{(1 + u_s)^2}. \quad (1.97)$$

Введя малое возмущение  $\xi$  по формуле

$$u(r, t; \lambda) = u_s(r, \lambda) + \xi(r, t; \lambda), \quad (1.98)$$

получим следующую динамическую задачу в вариациях:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{2\lambda}{(1 + u_s(r, \lambda))^3} \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.99)$$

с граничными условиями

$$\frac{d\xi}{dr}(0, t) = \xi(1, t) = 0. \quad (1.100)$$

Решение данной задачи о свободных колебаниях ищем в виде  $\xi = \Xi(r)e^{i\omega t}$ . Функция  $\Xi(r)$  определяется из уравнения

$$\frac{d^2 \Xi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Xi}{dr} + \left[ \frac{2\lambda}{(1 + u_s(r, \lambda))^3} + \omega^2 \right] \Xi = 0, \quad (1.101)$$

$$\Xi(0) = \Xi(1) = 0.$$

Таким образом, возникает краевая задача на собственные значения, решение которой позволяет определить зависимость  $\omega(\lambda)$ . Решение будем искать в виде ряда Галеркина по функциям Бесселя  $J_0(\gamma_{0m}r)$ ,  $m = 1, \dots, n$ , где  $n$  – число учтенных форм:

$$\Xi(r) = \sum_{m=1}^n C_m J_0(\gamma_{0m} r). \quad (1.102)$$

Подставляя (1.102) в (1.101) и учитывая ортогональность выбранной системы координатных функций, получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{m=1}^n C_m \left[ (\omega^2 - \gamma_{0m}^2) \cdot \|J_0(\gamma_{0m} r)\|^2 \cdot \delta_{ms} + 2\lambda \int_0^1 \frac{r}{p(r, \lambda)} J_0(\gamma_{0m} r) J_0(\gamma_{0s} r) dr \right] = 0, \quad (1.103)$$

$$s = 1, \dots, n,$$

где  $\|J_0(\gamma_{0m} r)\|^2 = \int_0^1 r J_0^2(\gamma_{0m} r) dr$ ,  $p(r, \lambda) = (1 + u_0(r, \lambda))^3$ ,  $\delta_{ms}$  – символ Кронекера.

На рисунке 1.21 показана вычисленная зависимость квадрата первой собственной частоты от значения физического параметра  $\lambda$  при  $n = 4$ .

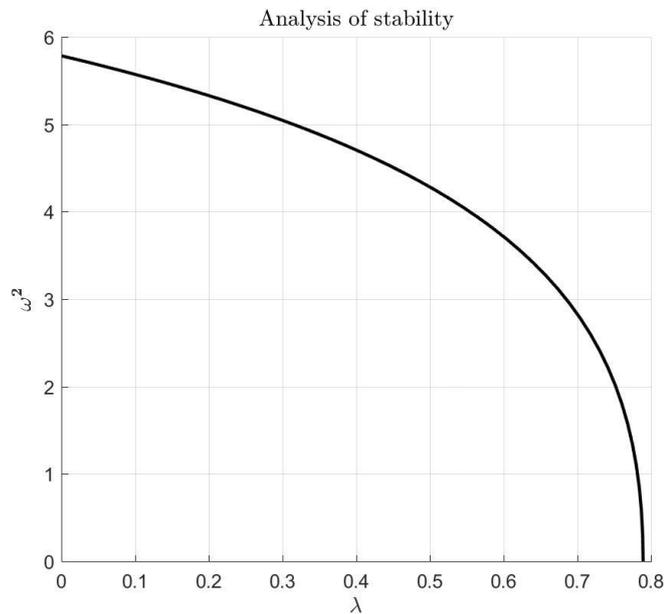


Рисунок 1.21 – Анализ устойчивости осесимметричных форм равновесия

Как видно из рисунка, при достижении регулярной экстремальной точки  $\lambda \approx 0,8$  квадрат частоты переходит через нулевое значение, что соответствует потере устойчивости по сценарию дивергенции [35].

### 1.3.2.1.6 Применение метода Галеркина к исходному нелинейному уравнению

Таким образом, статический анализ мембраны в электрическом поле одного электрода выполнен. Важно отметить, что определение всего множества положений равновесия и их устойчивости стало возможным только благодаря методу сведения исходного уравнения с разновидности уравнения Эмдена-Фаулера и последующему графо-аналитическому решению

задачи. Как было отмечено ранее, прямой численный метод решения в применении к данной существенно нелинейной задаче не позволяет выполнить исчерпывающее исследование, т.к., вообще говоря, неизвестно количество положений равновесия при заданном значении физического параметра  $\lambda$ ; неизвестен и характер зависимости найденных решений от  $\lambda$ . Поэтому рассмотренная задача является исключительной в том смысле, что непосредственно допускает аналитическое исследование. В дальнейшем будут рассматриваться математические модели микромеханических систем, для которых аналитические методы не разработаны. Это приводит к необходимости применения более универсальных, но приближенных методов решения нелинейных краевых задач эллиптического типа. Основным методом такого класса является метод Галеркина в применении к исходному нелинейному уравнению («Reduced order method», [68]). Несмотря на отсутствие строгого обоснования, данный метод позволяет находить решение многих практических задач.

Применим метод Галеркина к исходному уравнению осесимметричных прогибов мембраны (1.62):

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{\lambda}{(1+u)^2}. \quad (1.62)$$

Решение будем искать в виде ряда по формам свободных осесимметричных колебаний:

$$u(r) = \sum_{m=1}^n C_m J_0(\gamma_{0m} r). \quad (1.104)$$

Подставив ряд (1.104) в (1.62) и записав проекционные условия, мы получим систему нелинейных уравнений, в которой неизвестные коэффициенты  $C_m$  находятся под знаком интеграла, что затрудняет поиск решений. Чтобы преодолеть эту трудность, можно либо предварительно умножить уравнение (1.62) на  $(1+u)^2$ , либо разложить правую часть в ряд Тейлора по функции прогиба  $u$ . Последовательно рассмотрим эти две возможности.

Следуя первому методу, приходим к следующей системе нелинейных уравнений:

$$\int_0^1 r \left[ 1 + \sum_{m=1}^n C_m J_0(\gamma_{0m} r) \right]^2 \left( \sum_{m=1}^n C_m \gamma_{0m}^2 J_0(\gamma_{0m} r) \right) J_0(\gamma_{0s} r) dr = -\lambda \int_0^1 r J_0(\gamma_{0s} r) dr, \quad s = 1, \dots, n. \quad (1.105)$$

На рисунке 1.22 показано сравнение диаграмм ветвления, полученных прямым численным методом и методом Галеркина с учетом различного числа координатных функций ( $n = 1, 2, 4, 7$ ).

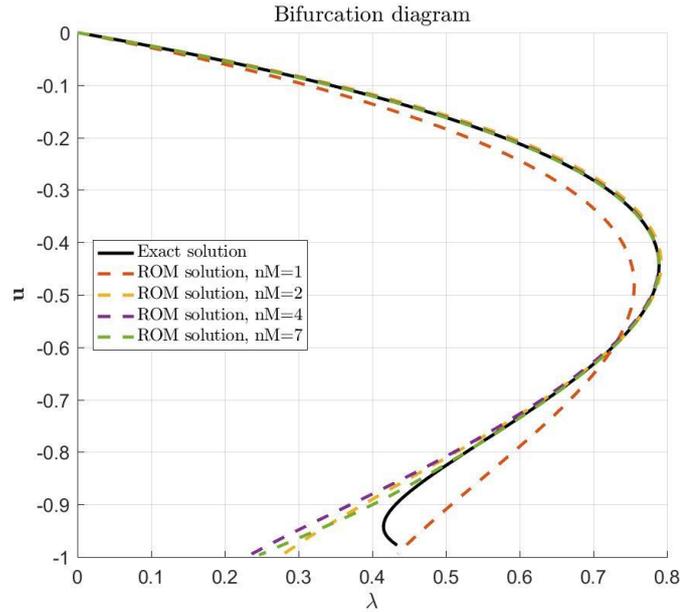


Рисунок 1.22 – Диаграмма ветвления форм равновесия

Как видно из рисунка, неточность метода Галеркина проявляется лишь для заостренных к центру форм прогиба, которые не соответствуют исходному предположению о малости кривизны мембраны. Представляющие основной интерес устойчивые формы равновесия определяются точно, и при этом для их нахождения достаточно использовать две координатные функции  $J_0(\gamma_{01}r), J_0(\gamma_{02}r)$ . Отметим, что при решении задач динамики мембран в электрическом поле под действием периодического внешнего возбуждения точное нахождение неустойчивых ветвей диаграммы, соответствующих большим прогибам, имеет большое значение, т.к. они определяют области притяжения различных установившихся динамических режимов.

Рассмотрим второй вариант применения метода Галеркина к решению уравнения (1.62), связанный с разложением нелинейного члена в ряд Тейлора. Имеем

$$\frac{1}{(1+u)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (j+1) u^j = 1 - 2u + 3u^2 - 4u^3 + \dots \quad (1.106)$$

Ограничиваясь первыми  $N$  членами ряда Тейлора и представляя решение в виде ряда по собственным функциям (1.104), получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов  $C_1, \dots, C_n$ :

$$C_s \gamma_{0s}^2 \|J_o(\gamma_{0s}r)\|^2 = -\lambda \int_0^1 r J_o(\gamma_{0s}r) \cdot \left[ \sum_{j=0}^N (-1)^j (j+1) \left( \sum_{m=1}^n C_m J_o(\gamma_{0m}r) \right)^j \right] dr, \quad (1.107)$$

$$s = 1, \dots, n.$$

На рисунке 1.23 показано сравнение диаграмм ветвления, полученных прямым численным методом и методом Галеркина с учетом двух координатных функций ( $n = 2$ ) и различного числа слагаемых в ряде Тейлора ( $N = 2, 5, 7$ ). На рисунке приведена также бифуркационная кривая для  $n = 2$ , полученная методом домножения уравнения (1.62) на  $(1 + u)^2$ .

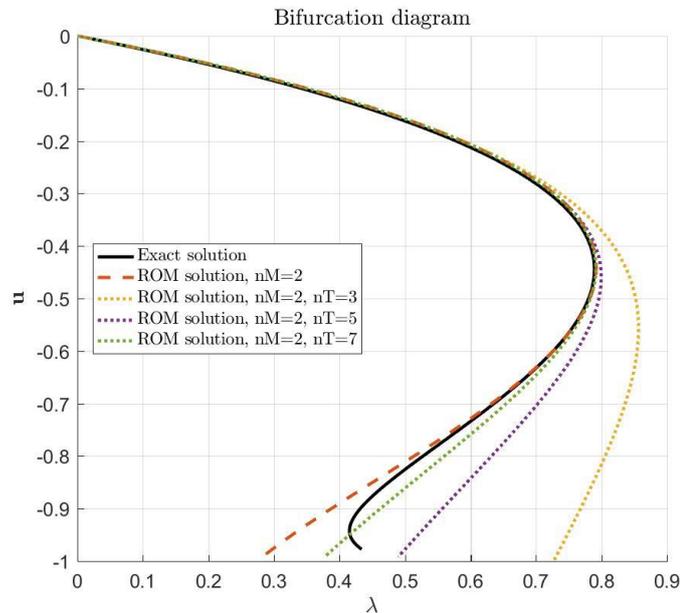


Рисунок 1.23 – Диаграмма ветвления форм равновесия

Как видно из рисунка, степенное разложение нелинейного члена с учетом трех слагаемых позволяет достаточно точно определять устойчивые положения равновесия мембраны. При этом важная для динамических расчетов неустойчивая ветвь вычисляется точно лишь при учете семи членов в степенном разложении.

### 1.3.2.2 Формы равновесия в поле двух неподвижных электродов

#### 1.3.2.2.1 Уравнение равновесия

Рассмотрим задачу о нахождении форм равновесия и исследовании их устойчивости для круглой мембраны, расположенной между двумя электродами. В этом случае приведенные к безразмерному виду уравнения равновесия (1.53) записываются следующим образом:

$$\nabla^2 w = \lambda \left[ \frac{1}{(1+w)^2} - \frac{1}{(1-w)^2} \right]. \quad (1.108)$$

Рассматриваемая задача в двух отношениях математически существенно отличается от задачи о мембране в поле одного электрода. Во-первых, для уравнения (1.108) не выполняются условия теоремы Ниренберга о радиальной симметричности решений, т.е. в системе возможно существование кососимметричных форм равновесия. Во-вторых, для рассматриваемой задачи не разработаны эффективные аналитические методы, подобные методу сведения исходного уравнения к уравнению Эмдена-Фаулера, которые позволяли бы проводить качественный анализ зависимости числа и вида форм равновесия от физического параметра  $\lambda$ .

#### 1.3.2.2.2 Аналитическое определение точек ветвления нетривиальных решений

Приступим к аналитическому исследованию нелинейной эллиптической краевой задачи

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \lambda \left[ \frac{1}{(1+w)^2} - \frac{1}{(1-w)^2} \right] \quad (1.109)$$

в круге  $r \leq 1$  с граничными условиями

$$\begin{aligned} r = 0: \quad w & - \text{огр.}; \\ r = 1: \quad w & = 0. \end{aligned} \quad (1.110)$$

Из уравнения (1.109) следует, что в системе всегда существует нейтральное (нулевое) положение равновесия  $w \equiv 0$ . Уравнение в вариациях  $\xi(r, \theta)$  относительно нулевого решения имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} = -4\lambda \xi. \quad (1.111)$$

Представляя решение в виде

$$\xi(r, \theta) = \Xi_k(r) \cos k\theta, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (1.112)$$

получим следующие краевые задачи на собственные значения для функций формы  $\Xi_k$ :

$$\frac{\partial^2 \Xi_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Xi_k}{\partial r} + \left[ 4\lambda - \frac{k^2}{r^2} \right] \Xi_k = 0, \quad (1.113)$$

$$\Xi_k(0) - \text{огр.}, \quad \Xi_k(1) = 0.$$

Уравнения Бесселя (1.113) имеют нетривиальные решения

$$\Xi_k(r) = C_k J_k(2\sqrt{\lambda}r) \quad (1.114)$$

в тех случаях, когда

$$4\lambda = \gamma_{km}^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.115)$$

где  $\gamma_{km}$  – корни функции Бесселя порядка  $k$ :

$$J_k(\gamma_k) = 0. \quad (1.116)$$

Нетривиальные решения уравнения в вариациях соответствуют точкам бифуркации решений исходного уравнения. Поэтому условие (1.115) определяет значения параметра  $\lambda$ , при которых происходит ответвление от нулевого решения  $m$ -й формы равновесия с индексом осевой симметрии  $k$ .

### 1.3.2.2.3 Применение методов теории ветвления решений нелинейных уравнений

Таким образом, аналитически найдены точки бифуркации нетривиальных решений. При этом задача нахождения конкретного вида ненулевых форм равновесия не поддается прямому аналитическому исследованию. Непосредственное применение численных методов, таких как метод конечных элементов, в данном случае также затруднительно в связи с необходимостью задания начального приближения к искомому решению, что требует предварительного изучения характера ветвления в окрестности точек бифуркации.

С этой целью применим к задаче (1.109)-(1.110) методы теории ветвления решений нелинейных уравнений [1,10]. Рассмотрим случай осесимметричных форм равновесия:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \lambda \left[ \frac{1}{(1+w)^2} - \frac{1}{(1-w)^2} \right], \quad (1.117)$$

$$r = 0: \quad \frac{dw}{dr} = 0;$$

$$r = 1: \quad w = 0.$$

Задача (1.117) представляет собой нелинейную граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. В работе С. Антмана и Дж. Келлера [1] разработаны аналитические методы определения а) решений  $u_0$  и значений параметра  $\lambda_0$ , при которых происходит ветвление; б) числа решений, ответвляющихся от  $u_0$ ; в) поведения этих решений при  $\lambda$ , близких к  $\lambda_0$ . Представим общие положения разработанной теории для нелинейного уравнения второго порядка частного вида.

Рассмотрим нелинейную граничную задачу

$$\begin{aligned} [A(t)u_t]_t + f(u, t, \lambda) &= 0, \quad t_1 < t < t_2, \\ \alpha_1 u_t(t_1) + \beta_1 u(t_1) &= 0, \\ \alpha_2 u_t(t_2) + \beta_2 u(t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Будем предполагать, что задача имеет решение  $u_0(t, \lambda)$  и вырождается при  $\lambda = \lambda_0$ , т.е. соответствующее линеаризованное уравнение имеет нетривиальное решение.

Линеаризованная задача при  $u_0, \lambda$  имеет вид

$$\begin{aligned} (A\xi_t)_t + f_u[u_0(t, \lambda), t, \lambda]\xi &= 0, \quad t_1 < t < t_2, \\ \alpha_1 \xi_t(t_1) + \beta_1 \xi(t_1) &= 0, \\ \alpha_2 \xi_t(t_2) + \beta_2 \xi(t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Нетривиальное решение этой задачи при  $\lambda = \lambda_0$  обозначим  $\xi(t) = \varphi(t)$ ,  $\varphi(t_1) = 1$ .

Представим решение задачи (1.118) в виде

$$u(t, \lambda) = u_0(t, \lambda) + av(t, \lambda, a), \quad (1.120)$$

где  $v(t)$  – неизвестная функция,  $a$  – постоянная. Постоянная  $a$  должна быть выбрана так, чтобы можно было наложить условие

$$v(t_1) = 1. \quad (1.121)$$

Для определения  $v(t)$  и  $a$  получаем задачу

$$\begin{aligned} (Av_t)_t + a^{-1}[f(u_0 + av, t, \lambda) - f(u_0, t, \lambda)] &= 0, \quad t_1 < t < t_2, \\ \alpha_1 v_t(t_1) + \beta_1 v(t_1) &= 0, \\ \alpha_2 v_t(t_2) + \beta_2 v(t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Уравнение (1.122)<sub>3</sub> представляет собой уравнение разветвления:

$$b(a, \lambda) \equiv \alpha_2 v_t(t_2, \lambda, a) + \beta_2 v(t_2, \lambda, a) = 0. \quad (1.123)$$

Имеют место следующие теоремы:

*Теорема 1.* Пусть  $A(t)$  положительна и непрерывно дифференцируема при  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

Пусть  $f, f_u, f_{uu}$  и  $f_{u\lambda}$  существуют и непрерывны по  $u, t, \lambda$  для  $u_1 \leq u \leq u_2, \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, t_1 \leq t \leq t_2$ . Пусть  $\alpha_1 \neq 0$  и  $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$ . Предположим, что при  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$  функция  $u_0(t, \lambda)$  является решением задачи (1.118). Кроме того, пусть  $u_{0\lambda}(t, \lambda)$  существует, непрерывна и  $u_1 \leq u_0(t, \lambda) \leq u_2$  для  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, t_1 \leq t \leq t_2$ . Предположим, что линеаризованная задача при  $u_0(t, \lambda_0)$ ,  $\lambda_0$  имеет нетривиальное решение  $\varphi(t)$ , такое, что выполняются условия:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \{f_{uu}[u_0(t, \lambda_0), t, \lambda_0]u_{0\lambda}(t, \lambda_0) + f_{u\lambda}[u_0(t, \lambda_0), t, \lambda_0]\}\varphi^2(t)dt &\neq 0, \\ \int_{t_1}^{t_2} f_{uu}[u_0(t, \lambda_0), t, \lambda_0]\varphi^3(t)dt &\neq 0. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Тогда существует положительная постоянная  $\gamma$ , такая, что для каждого  $\lambda$ , удовлетворяющего неравенству  $|\lambda - \lambda_0| \leq \gamma$ , задача (1.118) имеет единственное близкое к  $u_0(t, \lambda_0)$  решение  $u(t, \lambda)$ , непрерывное по  $\lambda$ , отличное от  $u_0(t, \lambda)$  при  $\lambda \neq \lambda_0$  и совпадающее с ним при  $\lambda = \lambda_0$ .

*Теорема 2.* Предположим, что выполнены условия теоремы 1 с равенством в (1.124)<sub>2</sub>, и что  $b_{aa}(0, \lambda_0)$  существует и отлично от нуля. Тогда существует положительная постоянная  $\gamma$ , такая, что для каждого  $\lambda$ , удовлетворяющего неравенству  $0 \leq \lambda - \lambda_0 \leq \gamma$ , если  $b_{aa}(0, \lambda_0)/b_\lambda(0, \lambda_0) < 0$ , или неравенству  $0 \leq \lambda_0 - \lambda \leq \gamma$ , если  $b_{aa}(0, \lambda_0)/b_\lambda(0, \lambda_0) > 0$ , задача (1.118) имеет ровно два различных близких к  $u_0(t, \lambda_0)$  действительных решения, отличных от  $u_0(t, \lambda)$  при  $\lambda \neq \lambda_0$ , непрерывных по  $\lambda$  и совпадающих с  $u_0(t, \lambda_0)$  при  $\lambda = \lambda_0$ . Для  $0 < \lambda_0 - \lambda \leq \gamma$  при  $b_{aa}(0, \lambda_0)/b_\lambda(0, \lambda_0) < 0$  и для  $0 < \lambda - \lambda_0 \leq \gamma$  при  $b_{aa}(0, \lambda_0)/b_\lambda(0, \lambda_0) > 0$  таких решений не существует.

В обозначениях (1.118) исследуемая задача (1.117) имеет вид

$$[tu_t]_t + \lambda \frac{4tu}{(1-u^2)^2} = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad u_t(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (1.125)$$

Ранее было показано, что линейризованное уравнение в окрестности  $u_0 \equiv 0$  имеет нетривиальное решение при  $\lambda_m = \gamma_{0m}^2/4$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , где  $\gamma_{0m}$  – корни функции Бесселя:  $J_0(\gamma_0) = 0$ . При этом  $\xi_m(t) = \varphi_m(t) = J_0(\gamma_{0m}t)$ .

Можно показать [1], что в случае  $f(u, t, \lambda) = \lambda g(u, t)$ ,  $g(0, t) \equiv 0$  и  $u_0(t, \lambda) \equiv 0$  условия (1.124) теоремы 1 при  $\lambda = \lambda_m$  принимают вид:

$$\begin{aligned} \lambda_m \int_{t_1}^{t_2} g_u(0, t) \varphi_m^2(t) dt &\neq 0, \\ \lambda_m \int_{t_1}^{t_2} g_{uu}(0, t) \varphi_m^3(t) dt &\neq 0. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Уравнение разветвления (1.123) имеет решение

$$\lambda(a) = \lambda_m + \lambda_{aa}(0) \frac{a^2}{2} + o(a^2), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.127)$$

где

$$\lambda_{aa}(0) = -\frac{b_{aa}(0, \lambda_m)}{b_\lambda(0, \lambda_m)} = -\frac{\lambda_m \int_{t_1}^{t_2} g_{uuu}(0, t) \varphi_m^4(t) dt}{3 \int_{t_1}^{t_2} g_u(0, t) \varphi_m^2(t) dt}. \quad (1.128)$$

Если  $\lambda_{aa}(0) \neq 0$ , то равенство (1.127) можно обратить:

$$a_\pm(\lambda) = \pm \left[ \frac{2(\lambda - \lambda_m)}{\lambda_{aa}(0)} \right]^{1/2} + o[(\lambda - \lambda_m)^{1/2}]. \quad (1.129)$$

Для уравнения (1.125) имеем

$$\begin{aligned}
 g(u, t) &= \frac{4tu}{(1-u^2)^2}, \\
 g_u(u, t) &= \frac{4t(1+3u^2)}{(1-u^2)^3}, \quad g_u(0, t) = 4t, \\
 g_{uu}(u, t) &= \frac{48tu(1+u^2)}{(1-u^2)^4}, \quad g_{uu}(0, t) \equiv 0, \\
 g_{uuu}(u, t) &= \frac{48t(5u^4+10u^2+1)}{(1-u^2)^5}, \\
 \lambda_{aa}(0) &= -\frac{\lambda_m \int_0^1 48tJ_0^4(\gamma_{0m}t)dt}{3 \int_0^1 tJ_0^2(\gamma_{0m}t)dt}, \quad m = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{1.130}$$

откуда по формуле (1.129) получаем зависимость амплитуды осесимметричного прогиба мембраны от параметра  $\lambda$  в окрестности точки ветвления  $\lambda_m = \gamma_{0m}^2/4$ . Отметим, что в рассматриваемом случае выполняются условия теоремы 2, и при этом  $b_{aa}(0, \lambda_0)/b_\lambda(0, \lambda_0) > 0$ , откуда следует, что бифуркации имеют субкритический характер.

На рисунке 1.24 показано полученное аналитическое приближение диаграммы ветвления форм равновесия мембраны в поле двух электродов. В качестве нормы решения  $\|w\|$  принято алгебраическое значение прогиба в центре мембраны.

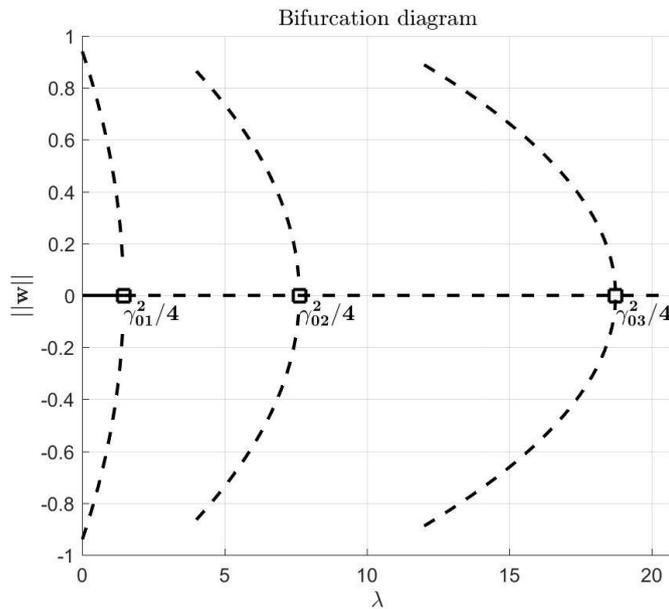


Рисунок 1.24 – Диаграмма ветвления форм равновесия

Сплошной линией обозначено устойчивое тривиальное положение равновесия. Согласно общим принципам теории ветвления [20], в первой точке субкритической бифуркации  $\lambda = \lambda_1$  нейтральное положение равновесия теряет устойчивость; ответвляющиеся от него ненулевые формы равновесия также неустойчивы.

### 1.3.2.2.4 Применение метода Галеркина к исходному нелинейному уравнению

Полученное аналитическое приближение для диаграммы ветвления, вообще говоря, действительно только в малой окрестности точек бифуркации, т.к. аналитические методы теории ветвления задействуют процедуру линеаризации исследуемых уравнений. С целью изучения зависимости от физического параметра  $\lambda$  осесимметричных форм равновесия с конечными амплитудами, применим метод Галеркина.

Как и при исследовании мембраны в поле одного электрода, решение уравнения (1.117) будем искать в виде ряда по формам свободных осесимметричных колебаний:

$$w(r) = \sum_{m=1}^n C_m J_0(\gamma_{0m} r). \quad (1.131)$$

Подставив ряд (1.131) в (1.117) и записав проекционные условия, получим следующую систему нелинейных уравнений для определения коэффициентов  $C_1, \dots, C_n$ :

$$\int_0^1 r \left[ 1 - \left( \sum_{m=1}^n C_m J_0(\gamma_{0m} r) \right)^2 \right]^2 \left( \sum_{m=1}^n C_m \gamma_{0m}^2 J_0(\gamma_{0m} r) \right) J_0(\gamma_{0s} r) dr = \quad (1.132)$$

$$= 4\lambda C_s \cdot \|J_0(\gamma_{0s} r)\|^2, \quad s = 1, \dots, n.$$

На рисунке 1.25 показана диаграмма ветвления, полученная методом Галеркина (пунктирные линии) с учетом трех координатных функций, в сравнении с приближенным аналитическим решением из предыдущего пункта (штриховые линии).

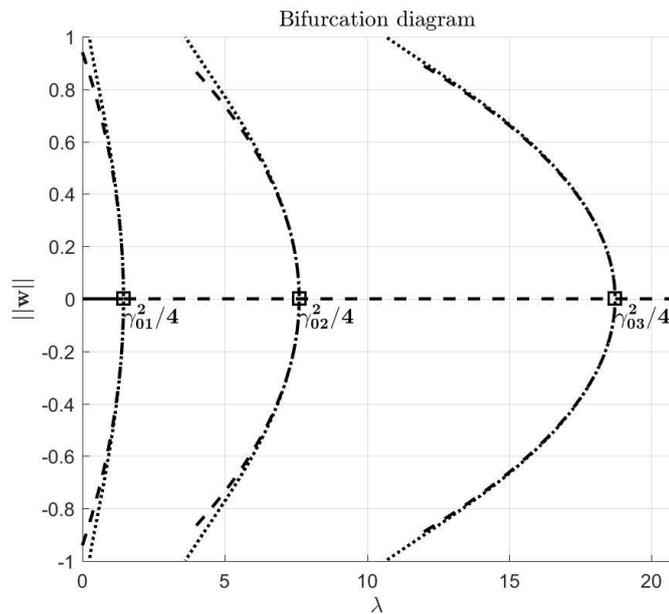


Рисунок 1.25 – Сравнение метода Галеркина с приближенным аналитическим решением

Как видно из рисунка, приближенное аналитическое решение совпадает с решением методом Галеркина практически для всех допустимых значений безразмерного прогиба  $|w| \leq 1$ .

### 1.3.2.2.5 Исследование кососимметричных форм равновесия

Перейдем к исследованию кососимметричных форм равновесия. Имеем нелинейную краевую задачу для уравнения с частными производными

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \lambda \left[ \frac{1}{(1+w)^2} - \frac{1}{(1-w)^2} \right] = -\lambda \frac{4w}{(1-w^2)^2}, \quad (1.133)$$

$$r = 0: \quad w - \text{огр.};$$

$$r = 1: \quad w = 0.$$

В п. 1.3.2.2.2 были определены точки ответвления нетривиальных решений от нулевого:  $4\lambda = \gamma_{km}^2$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , где  $k$  – индекс осевой симметрии. В случае  $k = 0$  (осесимметричные формы) задача (1.133) становится нелинейной краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения и допускает приближенное аналитическое решение с применением методов теории ветвления (п. 1.3.2.2.3). При  $k \geq 1$  применение аналитических методов связано с изучением ветвления решений нелинейных операторных уравнений и представляет значительные математические трудности [8,9,10,23,24]. В связи с этим, для определения ветвления кососимметричных форм равновесия непосредственно перейдем к применению метода Галеркина.

Решение уравнения (1.133) будем искать в виде ряда по формам свободных колебаний с индексом осевой симметрии  $k$ :

$$w_k(r, \theta) = \sum_{m=1}^n C_m J_k(\gamma_{km} r) \cos k\theta. \quad (1.134)$$

Подставив ряд (1.134) в (1.133) и записав проекционные условия, получим следующую систему нелинейных уравнений для определения коэффициентов  $C_1, \dots, C_n$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left[ 1 - \left( \sum_{m=1}^n C_m J_k(\gamma_{km} r) \cos k\theta \right)^2 \right]^2 \left( \sum_{m=1}^n C_m \gamma_{km}^2 J_k(\gamma_{km} r) \right) J_k(\gamma_{ks} r) \cos^2 k\theta \, dr d\theta \quad (1.135)$$

$$= 4\pi\lambda C_s \cdot \|J_k(\gamma_{ks} r)\|^2, \quad s = 1, \dots, n.$$

На рисунке 1.26 показана вычисленная диаграмма ветвления форм равновесия мембраны в поле двух электродов. Пунктирными линиями обозначены осесимметричные формы, штрихпунктирными – формы с индексом симметрии  $k = 1$ . Точки ответвления данных форм от нулевого решения обозначены квадратными и круглыми маркерами соответственно.

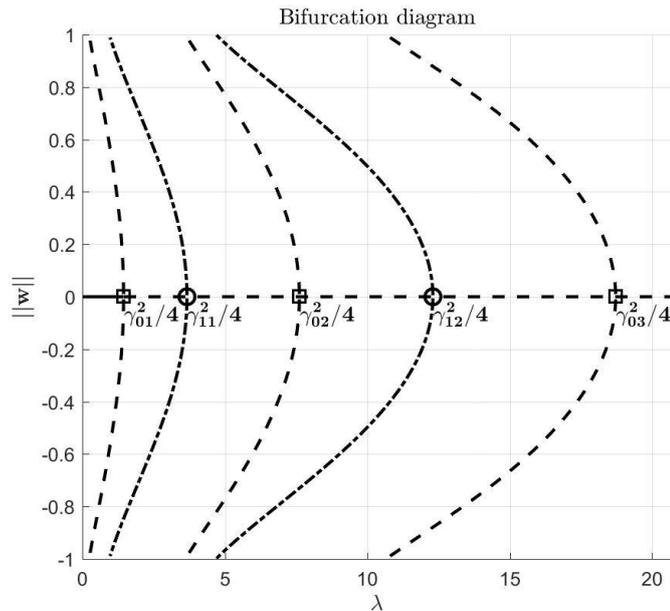


Рисунок 1.26 – Диаграмма ветвления форм равновесия мембраны в поле двух электродов

### 1.3.2.2.6 Построение диаграммы ветвления с помощью численных методов

Как было отмечено ранее, полученные методом Галеркина приближенные решения обладают высокой точностью практически для всех физически допустимых амплитуд прогибов мембраны, за исключением заостренных к центру форм равновесия с  $\|w\| \approx \pm 1$ . Нахождение данных форм приближенными аналитическими методами, например, методом Галеркина, требует учета большого числа координатных функций и нецелесообразно с вычислительной точки зрения. Прямое численное решение нелинейной краевой задачи для уравнения в частных производных (1.133) может быть выполнено с помощью метода конечных элементов, однако лишь для заданного значения параметра  $\lambda$  и при известном начальном приближении к искомому решению, что затрудняет построение диаграммы ветвления, особенно при изучении форм равновесия с большой кривизной.

Более эффективными являются численные методы продолжения по параметру решений нелинейных операторных уравнений, реализованные в таких программных системах как *MATCONT* [116] и *AUTO* [117]. Математической основой данных методов являются элементы функционального анализа: принцип сжимающих отображений, теорема о неявной функции, теорема Ньютона-Канторовича и др. [22;54,58]. Ограничением данной группы методов является их применимость к уравнениям с одной независимой переменной. В рассматриваемой задаче это соответствует исследованию осесимметричных форм равновесия.

С целью уточнения характера ветвления осесимметричных форм равновесия мембраны в поле двух электродов найдем прямое численное решение данной задачи с помощью

программной системы *AUTO*. Используемый здесь вычислительный алгоритм построен на конечно-разностной дискретизации исходной задачи и сведении её к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных – значений прогиба в точках расчетной сетки [58].

На рисунке 1.26 показана вычисленная диаграмма ветвления.

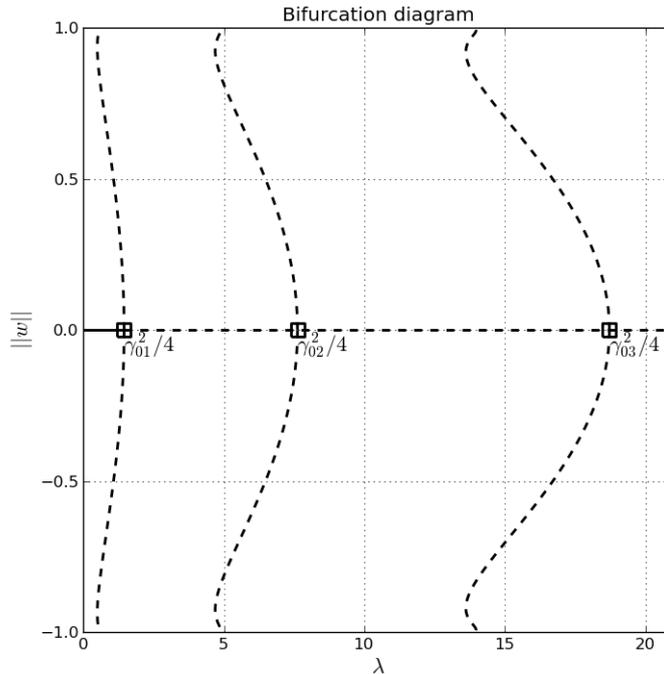


Рисунок 1.27 – Численно полученная диаграмма ветвления

Как видно из рисунка, на каждой из ветвей при  $\|w\| \approx \pm 1$  существует бесконечное множество следующих друг за другом регулярных экстремальных точек, подобно тому, как это было ранее получено для мембраны в поле одного электрода (см. п.1.3.2.1.3).

Несмотря на невозможность применения программных систем *MATCONT* или *AUTO* для изучения характера ветвей, соответствующих кососимметричным формам прогиба, можно ожидать, что на них также присутствует бесконечное множество регулярных экстремальных точек.

### 1.3.2.2.7 Вычисление отдельных решений методом конечных элементов

Формы равновесия мембраны в поле двух электродов при заданном значении физического параметра  $\lambda$  могут быть найдены с помощью метода конечных элементов. На рисунках 1.28, 1.29 показаны осесимметричные и кососимметричные формы равновесия, вычисленные с помощью модуля «*Partial Differential Equation Toolbox*» программной системы *MATLAB* [118].

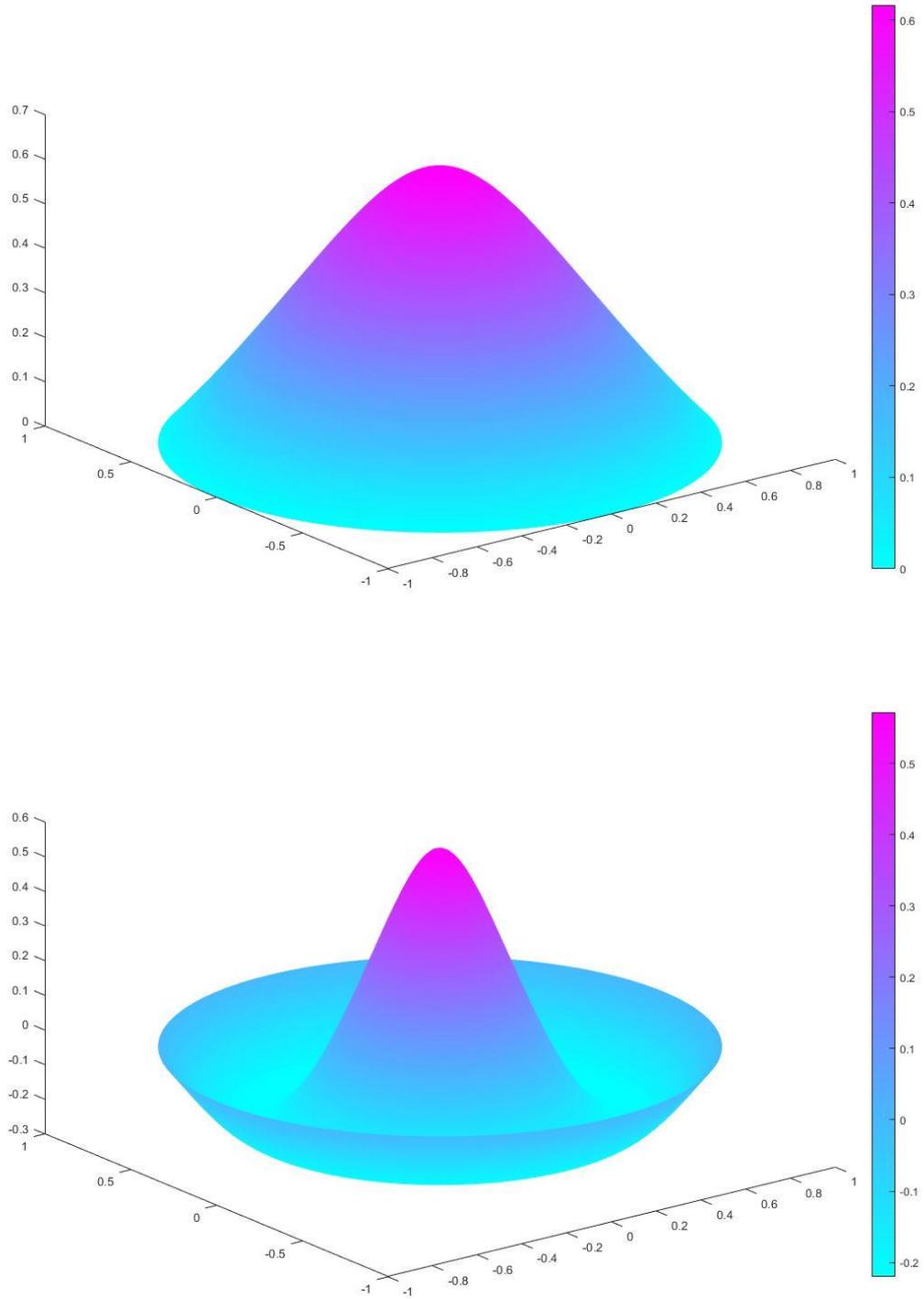


Рисунок 1.28 – Осесимметричные формы равновесия

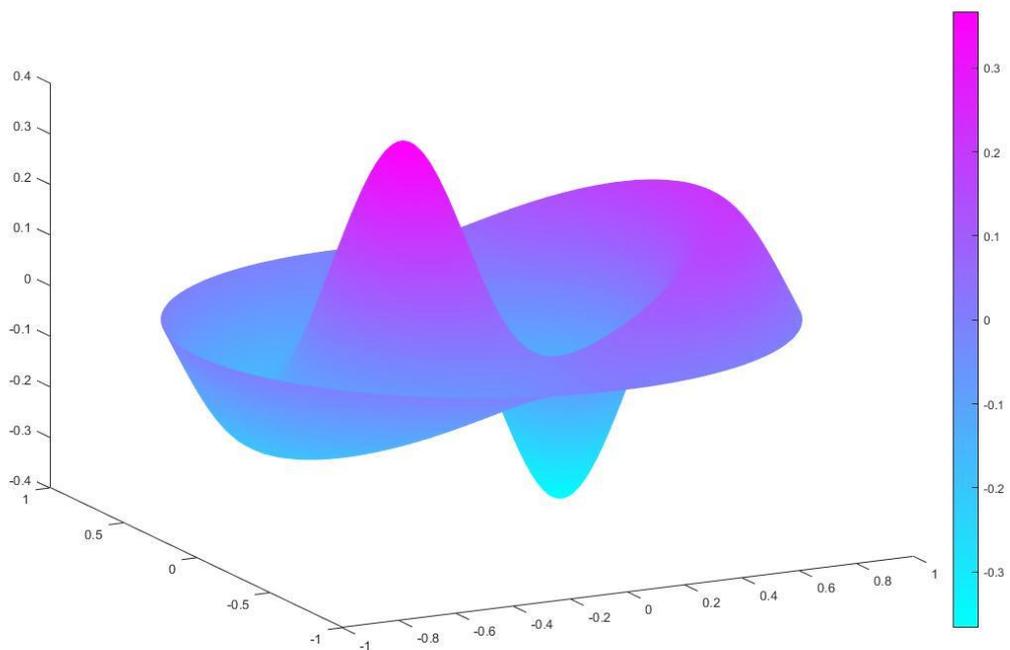
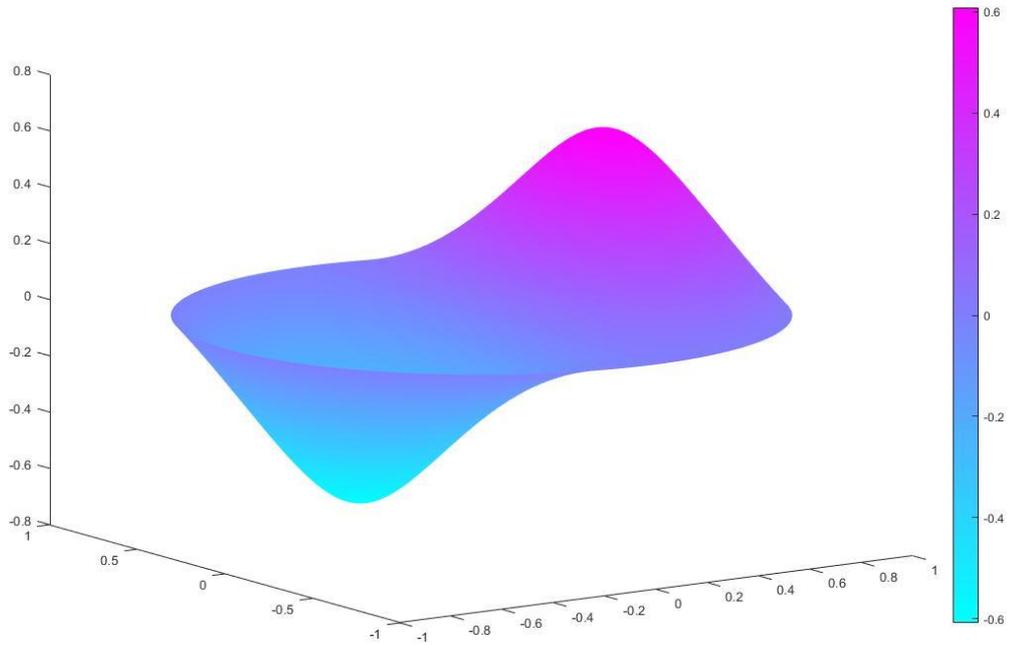


Рисунок 1.29 – Формы равновесия с индексом симметрии  $k = 1$

Таким образом, выполнен статический анализ мембраны в поле двух неподвижных электродов. Несмотря на отсутствие точного аналитического решения, с помощью численных и приближенных аналитических методов оказалось возможным выполнить исследование качественной зависимости форм равновесия и их устойчивости от значений физического параметра  $\lambda$ .

### 1.3.3 Ветвление форм равновесия круглых пластинок и их устойчивость

Перейдем к изучению статической устойчивости круглых пластинок. В п. 1.3.1 было показано, что геометрически нелинейные уравнения равновесия пластинки имеют вид

$$\begin{aligned} D\hat{\nabla}^4\hat{w} &= \hat{L}(\hat{w}, \hat{\Phi}) + T\hat{\nabla}^2\hat{w} + \hat{F}, \\ \hat{\nabla}^4\hat{\Phi} &= -\frac{Eh}{2}\hat{L}(\hat{w}, \hat{w}), \end{aligned} \quad (1.52)$$

где дифференциальные операторы  $\hat{L}$  и  $\hat{\nabla}^2$  определены формулами (1.38) и (1.40) соответственно.

Переходя к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} r &= \frac{\hat{r}}{R}, & w &= \frac{\hat{w}}{d}, & \Phi &= \frac{\hat{\Phi}}{Ehd^2}, & \delta &= \frac{R^2T}{D}, \\ \beta &= \frac{12d^2(1-\nu^2)}{h^2}, & \lambda &= \frac{\epsilon_r\epsilon_0R^4V^2}{2d^3D}, \end{aligned} \quad (1.136)$$

приведем уравнения (1.52) к виду

$$\begin{aligned} \nabla^4w &= \beta L(w, \Phi) + \delta\nabla^2w + \lambda\tilde{F}_e, \\ \nabla^4\Phi &= -\frac{1}{2}L(w, w). \end{aligned} \quad (1.137)$$

На рисунке 1.30 показаны модели пластинок в поле одного электрода для различных значений параметра  $\beta$ , характеризующего степень геометрической нелинейности системы.

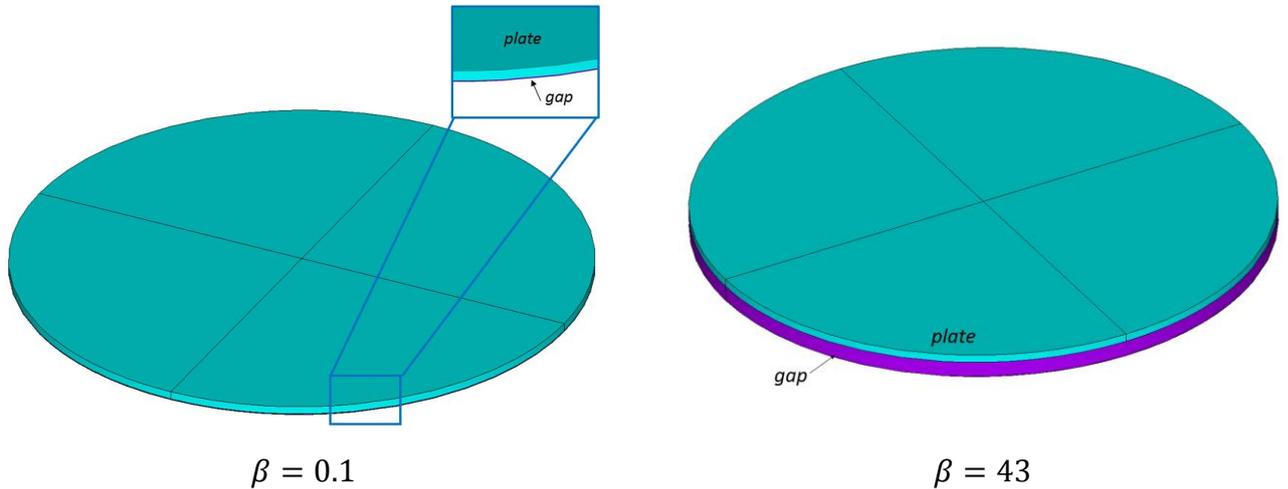


Рисунок 1.30 – Соотношение между пластинкой и зазором конденсатора

### 1.3.3.1 Формы равновесия в поле одного неподвижного электрода

Рассмотрим осесимметричные формы равновесия круглой пластинки в поле одного электрода. Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned}\nabla^4 w &= \frac{\beta}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \delta \nabla^2 w + \frac{\lambda}{(1-w)^2}, \\ \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr}.\end{aligned}\quad (1.138)$$

В случае заземленной по краю пластинки граничные условия записываются следующим образом [14,65]:

$$\begin{aligned}r = 0: \quad & w, \Phi - \text{огр.}; \\ r = 1: \quad & w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \quad \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \nu \frac{d\Phi}{dr} = 0.\end{aligned}\quad (1.139)$$

Для решения нелинейной краевой задачи (1.138)-(1.139) применим метод Галеркина. Искомую функцию прогиба  $w(r)$  будем искать в виде ряда по формам свободных колебаний для линейного уравнения изгиба пластинок:

$$w(r) = \sum_{m=1}^n C_m \phi_m(r), \quad (1.140)$$

где координатные функции  $\phi_m$  удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^4 \phi_m = \gamma_{0m}^4 \phi_m \quad (1.141)$$

и имеют вид [25,65]

$$\phi_m = \frac{J_0(\gamma_{0m} r)}{J_0(\gamma_{0m})} - \frac{I_0(\gamma_{0m} r)}{I_0(\gamma_{0m})}. \quad (1.142)$$

Здесь  $J_0$  – функция Бесселя первого рода,  $I_0$  – функция Бесселя первого рода мнимого аргумента [17], а коэффициенты  $\gamma_{0m}$  в случае заземленной по краю пластинки являются корнями уравнения

$$J_0(\gamma_0)I_1(\gamma_0) + J_1(\gamma_0)I_0(\gamma_0) = 0 \quad (1.143)$$

и связаны с соответствующими частотами свободных колебаний  $\omega_m$  соотношениями

$$\omega_m = \gamma_{0m}^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1.144)$$

Система функций  $\{\phi_m\}$  полна в пространстве  $\mathcal{L}_2[(0,1); r]$  интегрируемых с квадратом функций [12] и ортонормирована:

$$\int_0^1 r \phi_m(r) \phi_p(r) dr = \delta_{mp}. \quad (1.145)$$

В работе [65] показано, что в случае вынужденных осесимметричных колебаний круглой пластинки, описываемых нелинейными уравнениями Кармана, под действием поперечной силы

$$F(r, t) = f(r) \cos \Omega t, \quad (1.146)$$

где частота внешнего возбуждения  $\Omega$  близка к собственной частоте  $\omega_m$ , функция прогиба  $w(r, t)$  при наличии диссипации в системе может быть с достаточной точностью представлена в виде одномодального приближения Галеркина:

$$w(r, t) \approx \eta_m(t) \phi_m(r), \quad (1.147)$$

где  $\eta_m(t)$  – искомая функция амплитуды колебаний;  $\phi_m$  – форма свободных колебаний на частоте  $\omega_m$ . Функция напряжений  $\Phi$  в этом случае ищется в виде

$$\Phi(r, t) = \psi_m(r) \eta_m^2(t), \quad (1.148)$$

где функция  $\psi_m(r)$  в силу уравнения совместности (1.138)<sub>2</sub> является решением следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 \psi_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_m}{dr} \right) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi_m}{dr} \right)^2, \\ r = 0: \quad \psi_m &- \text{огр.}; \\ r = 1: \quad \frac{d^2 \psi_m}{dr^2} - \nu \frac{d\psi_m}{dr} &= 0. \end{aligned} \quad (1.149)$$

Можно показать [65], что решение задачи (1.149) удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_m}{dr} &= \frac{1}{4r} \int_0^r \xi \left( \frac{d\phi_m(\xi)}{d\xi} \right)^2 d\xi + \frac{r}{4} \int_r^1 \frac{1}{\xi} \left( \frac{d\phi_m(\xi)}{d\xi} \right)^2 d\xi \\ &+ \frac{r}{4} \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^1 \xi \left( \frac{d\phi_m(\xi)}{d\xi} \right)^2 d\xi. \end{aligned} \quad (1.150)$$

Вернемся к задаче о пластинке в электрическом поле одного электрода. Подставив ряд (1.140) в уравнение (1.138)<sub>2</sub>, получим:

$$\nabla^4 \Phi = -\frac{1}{r} \sum_{m,p=1}^n C_m C_p \phi_m'' \phi_p'. \quad (1.151)$$

Следуя представленному выше методу, будем искать функцию напряжений в виде

$$\Phi(r) = \sum_{m,p=1}^n C_m C_p \psi_{mp}(r), \quad (1.152)$$

где

$$\psi_{mp}(r) = \frac{1}{4r} \int_0^r \xi \phi_m' \phi_p' d\xi + \frac{r}{4} \int_r^1 \frac{\phi_m' \phi_p'}{\xi} d\xi + \frac{r}{4} \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^1 \xi \phi_m' \phi_p' d\xi. \quad (1.153)$$

Подставляя (1.140), (1.152) в уравнение (1.138)<sub>1</sub>, предварительно умноженное на  $(1-w)^2$ , с учетом (1.141) получим:

$$\left(1 - \sum_{l=1}^n C_l \phi_l\right)^2 \cdot \left(\sum_{p=1}^n C_p \gamma_{0p}^4 \phi_p\right) = \left(1 - \sum_{l=1}^n C_l \phi_l\right)^2 \cdot \left\{ \frac{\beta}{r} \frac{d}{dr} \left[ \left(\sum_{m=1}^n C_m \phi'_m\right) \cdot \left(\sum_{p,q=1}^n C_p C_q \psi'_{pq}\right) \right] + \frac{\delta}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \left(\sum_{m=1}^n C_m \phi'_m\right) \right] \right\} + \lambda. \quad (1.154)$$

Искомые константы  $C_1, \dots, C_n$  находятся из проекционных условий, получаемых умножением (1.154) на  $r\phi_s(r), s = 1, \dots, n$  и интегрированием по  $r$  на промежутке  $[0,1]$ .

На рисунке 1.31 показаны бифуркационные диаграммы, вычисленные при различных значениях параметра  $\delta$ , характеризующего величину приложенных к пластинке мембранных усилий (растягивающих при  $\delta > 0$  и сжимающих при  $\delta < 0$ ). В расчете учитывались две первые координатные функции; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,25$ .

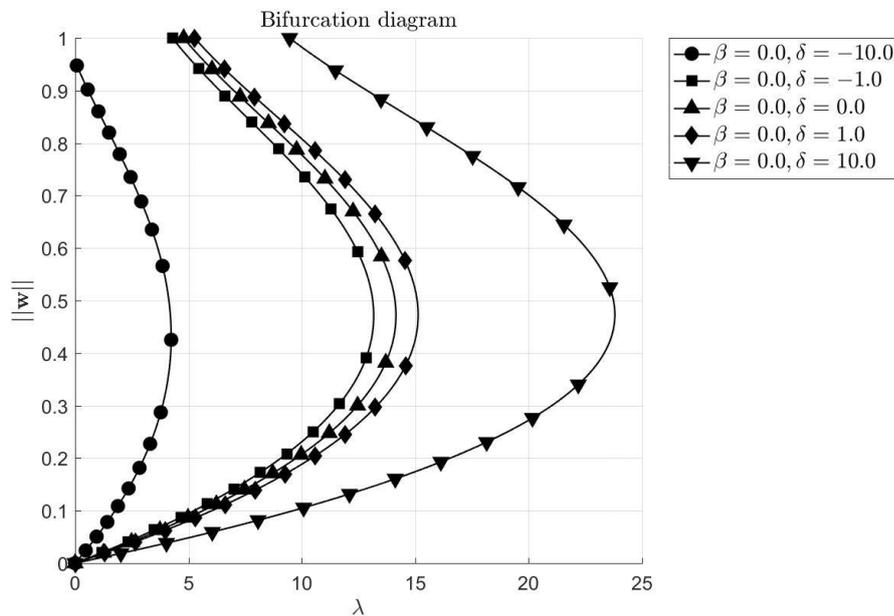


Рисунок 1.31 – Диаграмма ветвления форм равновесия пластинки при различных  $\delta$

Как видно из рисунка, величина мембранных усилий определяет бифуркационное значение параметра  $\lambda$ , соответствующее исчезновению равновесных положений пластинки (явлению «*pull-in*»).

На рисунке 1.32 показаны диаграммы ветвления, вычисленные при различных значениях параметра  $\beta$ , характеризующего степень геометрической нелинейности задачи.

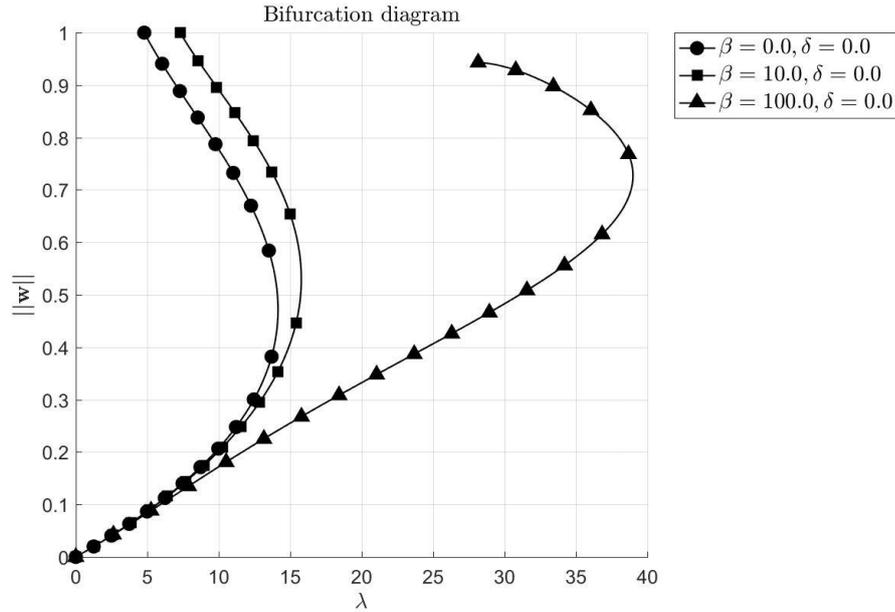


Рисунок 1.32 – Диаграмма ветвления форм равновесия пластинки при различных  $\beta$

Как видно из рисунка, при увеличении  $\beta$ , т.е. при уменьшении толщины пластинки  $h$  или увеличении зазора между пластинкой и неподвижным электродом  $d$ , значение нелинейных членов в уравнениях равновесия возрастает и выражается в росте бифуркационного значения параметра  $\lambda$  и соответствующей ему величины прогиба пластинки  $\|w\|$ .

### 1.3.3.2 Формы равновесия в поле двух неподвижных электродов

Перейдем к исследованию форм равновесия круглой пластинки в поле двух электродов. В осесимметричном случае уравнения равновесия с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\begin{aligned}\nabla^4 w &= \frac{\beta}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \delta \nabla^2 w + \lambda \frac{4w}{(1-w^2)^2}, \\ \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr}.\end{aligned}\quad (1.155)$$

Рассматривая защемленную по краю пластинку, имеем следующие граничные условия

$$\begin{aligned}r = 0: \quad & w, \Phi - \text{огр.}; \\ r = 1: \quad & w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \quad \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \nu \frac{d\Phi}{dr} = 0.\end{aligned}\quad (1.156)$$

Как и в случае пластинки в поле одного электрода, решение будем искать с помощью метода Галеркина. В качестве координатных функций для искомой функции прогиба  $w(r)$  используются формы свободных изгибных колебаний (1.142). Функция напряжений  $\Phi(r)$  представляется в виде ряда по функциям  $\psi_{mp}(r)$ , удовлетворяющим соотношениям (1.153). В результате уравнения равновесия (1.155) принимают вид

$$\left[ 1 - \left( \sum_{m=1}^n C_m \phi_m \right)^2 \right]^2 \cdot \sum_{p=1}^n C_p \gamma_{0p}^4 \phi_p = \left[ 1 - \left( \sum_{m=1}^n C_m \phi_m \right)^2 \right]^2 \cdot \left\{ \frac{\beta}{r} \frac{d}{dr} \left[ \left( \sum_{l=1}^n C_l \phi'_l \right) \cdot \left( \sum_{p,q=1}^n C_p C_q \psi'_{pq} \right) \right] + \frac{\delta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \sum_{t=1}^n C_t \phi'_t \right) \right\} + 4\lambda \sum_{m=1}^n C_m \phi_m. \quad (1.157)$$

Искомые константы  $C_1, \dots, C_n$  находятся из проекционных условий, получаемых умножением (1.157) на  $r\phi_s(r), s = 1, \dots, n$  и интегрированием по  $r$  на промежутке  $[0,1]$ .

На рисунке 1.33 показаны ответвления от нулевого решения первых осесимметричных форм, вычисленные при различных значениях параметра  $\delta$ , характеризующего величину приложенных к пластинке мембранных усилий (растягивающих или сжимающих). В расчете учитывались две первые координатные функции; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,25$ .

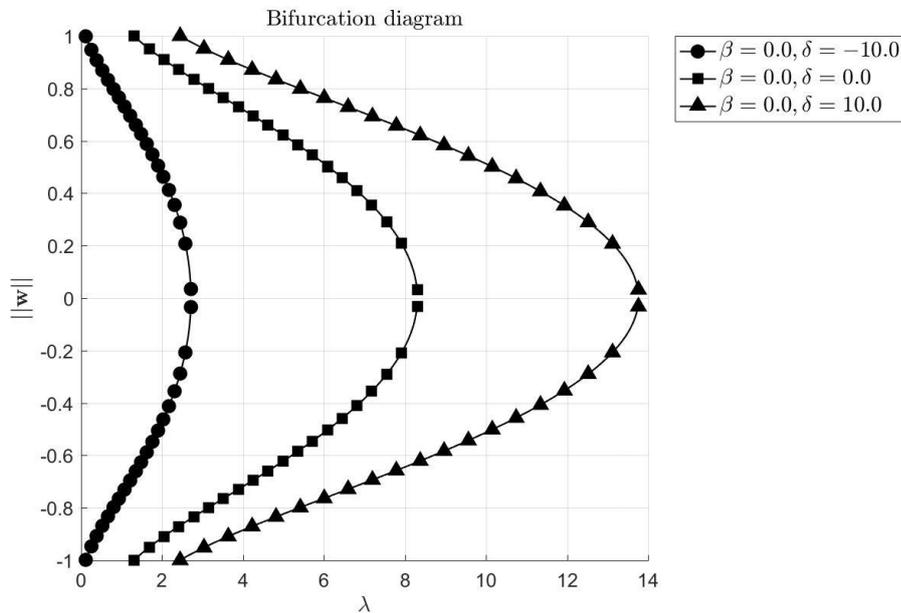


Рисунок 1.33 – Ответвление первой осесимметричной формы при различных  $\delta$

Как видно из рисунка, величина мембранных усилий определяет бифуркационное значение параметра  $\lambda$ , соответствующее потере устойчивости нейтрального положения равновесия (не обозначено на рисунке) и субкритической бифуркации – ответвлению неустойчивых нетривиальных форм равновесия.

На рисунке 1.34 показаны ответвления от нулевого решения первых осесимметричных форм, вычисленные при различных значениях параметра  $\beta$ , характеризующего степень геометрической нелинейности задачи.

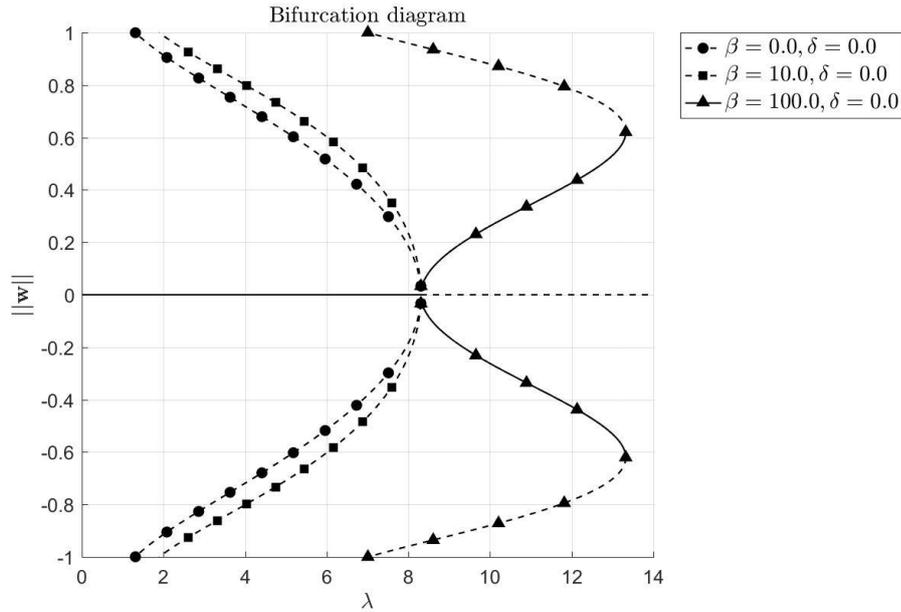


Рисунок 1.34 – Ответвление первой осесимметричной формы при различных  $\beta$

Как видно из рисунка, параметр  $\beta$  качественным образом влияет на характер бифуркационной картины: при малых  $\beta$  наблюдается субкритическая бифуркация с ответвлением неустойчивых форм равновесия пластинки, подобно тому, как это ранее было установлено для мембраны; при увеличении  $\beta$  тип бифуркации изменяется на суперкритический, что влечет за собой ответвление устойчивых нетривиальных форм равновесия, ветви которых в свою очередь содержат регулярные экстремальные точки, аналогичные «pull-in»-значениям в случае одного электрода.

Перейдем к поиску кососимметричных форм равновесия. Будем рассматривать геометрически линейную постановку задачи ( $\beta = 0$ ). В этом случае уравнение равновесия и граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla^4 w &= \delta \nabla^2 w + \lambda \frac{4w}{(1-w^2)^2}, \\ r = 0: \quad w &= \text{огр.}; \\ r = 1: \quad w &= 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \end{aligned} \quad (1.158)$$

где для оператора Лапласа в полярных координатах  $(r, \theta)$  имеем выражение

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (1.159)$$

Применяя метод Галеркина для поиска кососимметричных форм равновесия с индексом симметрии  $k$ , представим решение в виде ряда по формам свободных колебаний защемленной по краю пластинки:

$$w(r, \theta) = \sum_{m=1}^n C_m R_{km}(r) \cos k\theta, \quad (1.160)$$

где

$$R_{km}(r) = \frac{J_k(\gamma_{km}r)}{J_k(\gamma_{km})} - \frac{I_k(\gamma_{km}r)}{I_k(\gamma_{km})}. \quad (1.161)$$

Величины  $\gamma_{km}$  являются корнями следующего уравнения:

$$J_k(\gamma)I_{k+1}(\gamma) + J_{k+1}(\gamma)I_k(\gamma) = 0. \quad (1.162)$$

Подставляя (1.160) в (1.158)<sub>1</sub> и записывая проекционные условия метода Галеркина, приходим к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $C_1, \dots, C_n$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{2\pi} r R_{ks} \left[ 1 - \left( \sum_{m=1}^n C_m R_{km} \right)^2 \cos^2 k\theta \right]^2 \cdot \left[ \sum_{m=1}^n C_m \gamma_{km}^4 R_{km} \right] \cdot \cos^2 k\theta \, d\theta \, dr \\ & = -\delta \int_0^1 \int_0^{2\pi} r R_{ks} \left[ 1 - \left( \sum_{m=1}^n C_m R_{km} \right)^2 \cos^2 k\theta \right]^2 \\ & \quad \cdot \left[ \sum_{m=1}^n C_m \gamma_{km}^2 P_{km} \right] \cos^2 k\theta \, d\theta \, dr + 4\lambda\pi C_s, \quad s = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.163)$$

где

$$P_{km}(r) = \frac{J_k(\gamma_{km}r)}{J_k(\gamma_{km})} + \frac{I_k(\gamma_{km}r)}{I_k(\gamma_{km})}. \quad (1.164)$$

Система уравнений (1.163), как и всюду ранее, решается численно с помощью алгоритмов продолжения по параметру решений нелинейных алгебраических уравнений, реализованных в программной системе *MATCONT* [116]. Примечательно, что в отличие от случая мембраны в поле двух электродов, для пластинки не удается найти точки ответвления нетривиальных кососимметричных решений. Таким образом, по результатам расчетов, наличие изгибной жесткости у упругого элемента приводит к исчезновению кососимметричных форм равновесия.

## 2 Нелинейная динамика упругих элементов нано- и микросистемной техники

Широкий класс объектов НМСТ построен на резонансном принципе работы – в основном эксплуатационном режиме данные объекты осуществляют установившиеся высокочастотные колебания. Приборы, выполняющие функцию датчиков, измеряют изменение физической величины (давление, ускорение, сила магнитного поля) путем сопоставления амплитуды и фазы наблюдаемых колебаний с оценкой, полученной с помощью математической модели, учитывающей влияние измеряемой величины на характер движений резонатора. Исполнительные устройства (актуаторы) задействуют резонансные свойства подвижного элемента для максимально быстрого и энергоэффективного перехода система из исходного положения в требуемое. К подобного рода устройствам относятся, в частности, высокочастотные (ВЧ) переключатели, микронасосы, элементы оптических и телекоммуникационных систем. Отдельный класс приборов составляют ультразвуковые преобразователи (устройства, в которых внешняя среда посредством акустической волны возбуждает колебания чувствительного элемента, которые преобразуются в электрический сигнал) и генераторы частоты.

Особенностью объектов НМСТ, построенных на электростатическом принципе, является сильная связанность электрического и механического полей. При исследовании задач динамики это приводит к необходимости исследовать существенно нелинейные уравнения в обыкновенных и частных производных. Тот факт, что нелинейные слагаемые в уравнениях, вообще говоря, не являются малыми, затрудняет обоснование применимости к данным задачам широко используемых в нелинейной динамике асимптотических методов. В связи с этим, особое значение приобретают численные методы качественного анализа – методы продолжения по параметрам решений нелинейных операторных уравнений.

В настоящей главе рассматриваются динамические задачи для дискретных (микроэлектромеханический осциллятор) и континуальных (мембраны, пластинки) моделей упругих элементов нано- и микросистемной техники, действующих в переменном электрическом поле. Выполняется сравнительный анализ результатов, полученных с помощью приближенных аналитических и численных методов.

## 2.1 Динамика микроэлектромеханического осциллятора

### 2.1.1 Система с одним неподвижным электродом

Приступим к исследованию режимов движения микроэлектромеханического осциллятора в поле одного электрода. Прежде чем рассматривать задачу о вынужденных колебаниях, изучим качественную структуру фазовой плоскости системы при наличии диссипации, определяемой коэффициентом  $\mu > 0$ . Уравнение движения в постоянном электрическом поле примет вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \mu \frac{dx}{d\tau} + x = \frac{\lambda}{(1-x)^2}. \quad (2.1)$$

Положения равновесия и их ветвление в зависимости от параметра  $\lambda$  были исследованы в п. 1.2.1; при учете диссипации меняется лишь тип найденных особых точек. На рисунке 2.1 показаны фазовые портреты системы (2.1) при различных значениях параметра  $\lambda$  и фиксированном  $\mu$ .

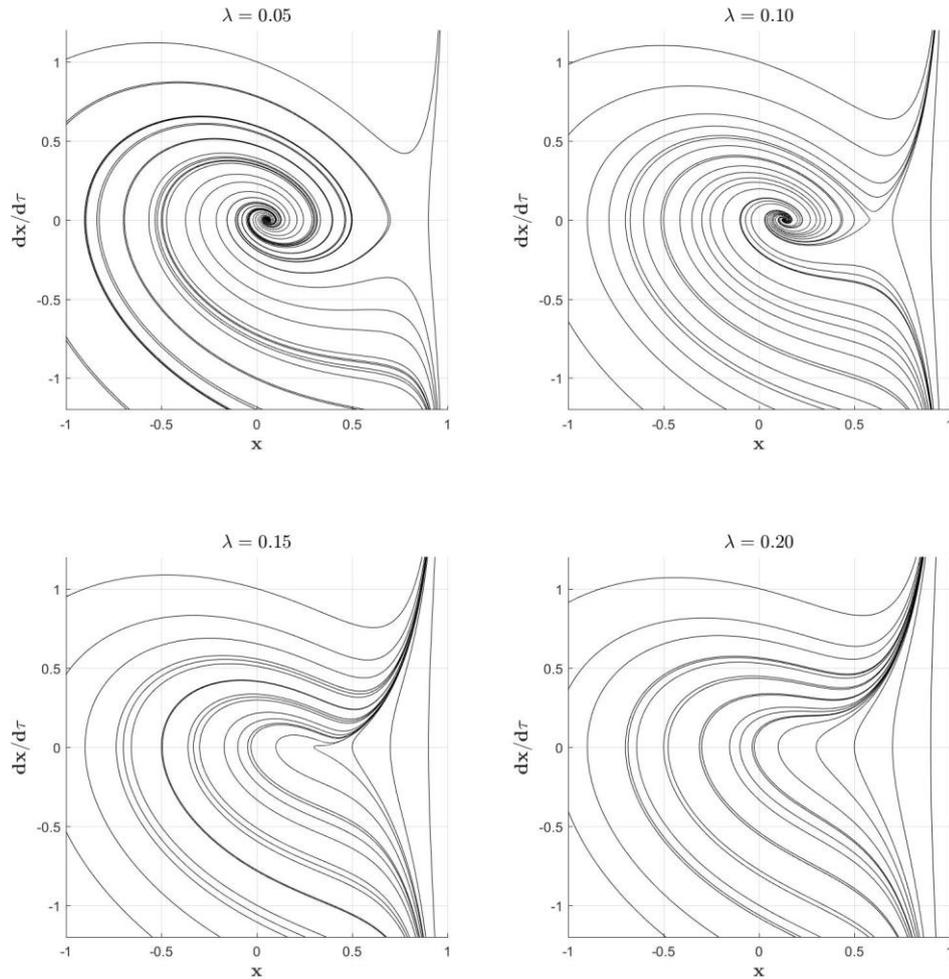


Рисунок 2.1 – Фазовые портреты МЭМС-осциллятора с учетом демпфирования ( $\mu = 0,05$ )

Как видно из рисунка, при  $\lambda < \lambda_* = \frac{4}{27}$  в системе имеется две особые точки: устойчивый фокус и седло. При  $\lambda > \lambda_*$  особые точки отсутствуют.

Перейдем к задаче о вынужденных колебаниях микромеханического осциллятора в поле одного электрода. Здесь можно рассматривать два различных случая возбуждения колебаний. В первом случае напряжение между неподвижной обкладкой конденсатора и проводящим упругим элементом является знакопеременной функцией времени, например, меняется по закону  $V_{AC} \cos \tilde{\Omega} \tilde{t}$ . Во втором случае динамическое возбуждение накладывается на стационарный уровень напряжения:  $V_{DC} + V_{AC} \cos \tilde{\Omega} \tilde{t}$ . Первый режим возбуждения используется в высокочастотных (ВЧ) переключателях и других микросистемных устройствах, в которых требуется максимально быстро вывести упругий элемент из устойчивого положения равновесия и обеспечить контакт с неподвижной обкладкой («*pull-in*»). Второй режим применяется в работе резонаторов, акселерометров, датчиков давления, генераторов частоты.

Рассмотрим первый вариант возбуждения колебаний. Уравнение движения в безразмерных величинах имеет вид:

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + x = \frac{\lambda \cos^2 \Omega t}{(1-x)^2}. \quad (2.2)$$

Здесь для удобства, в отличие от п. 1.2, безразмерное время обозначено буквой  $t$ . Построим аналитическое решение уравнения (2.2) с помощью асимптотических методов теории нелинейных колебаний [31,32]. Введем малый параметр  $\varepsilon$  в обозначение коэффициента диссипации  $\varepsilon\mu$  и амплитуды возбуждения  $\varepsilon\lambda$  и разложим нелинейное слагаемое в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$\ddot{x} + \varepsilon\mu\dot{x} + x = \varepsilon\lambda \cos^2 \Omega t (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots). \quad (2.3)$$

В дальнейшем в правой части уравнения (2.3) учитываются слагаемые в степенях до третьей включительно. С целью определения резонансных частот применим метод прямого асимптотического разложения. Решение будем искать в виде

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots, \quad (2.4)$$

где  $x_i(t), i = 0, 1, 2, \dots$  - искомые функции времени.

Подставляя ряд (2.4) в (2.3) и группируя слагаемые по степеням малого параметра  $\varepsilon$ , получим следующую систему уравнений для функций  $x_i$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= -\mu\dot{x}_0 + \lambda(1 + 2x_0 + 3x_0^2 + 4x_0^3) \cos^2 \Omega t, \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= -\mu\dot{x}_1 + 2\lambda(x_1 + 3x_0x_1 + 6x_0^2x_1) \cos^2 \Omega t, \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для «нулевого приближения»  $x_0$  имеем однородное уравнение, общее решение которого запишем в виде

$$x_0 = a \cos(t + \beta), \quad (2.6)$$

где  $a, \beta$  – константы, определяемые начальными условиями. Подставив (2.6) в правую часть уравнения для  $x_1(t)$ , найдем:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + x_1 = & \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \cos 2\Omega t + \mu a \sin(t + \beta) \\
& + \frac{\lambda}{2} a [\cos((2\Omega + 1)t + \beta) + \cos((1 - 2\Omega)t + \beta)] \\
& + \lambda a \cos(t + \beta) + \frac{3}{4} \lambda a^2 \cos 2\Omega t + \frac{3}{4} \lambda a^2 \cos(2t + 2\beta) \\
& + \frac{3}{4} \lambda a^2 \\
& + \frac{3}{8} \lambda a^2 [\cos((2\Omega + 2)t + \beta) + \cos((2\Omega - 2)t - 2\beta)] \\
& + \frac{3}{4} \lambda a^3 [\cos((2\Omega + 1)t + \beta) + \cos((2\Omega - 1)t - \beta)] \\
& + \frac{1}{4} \lambda a^3 [\cos((2\Omega + 3)t + 3\beta) + \cos((2\Omega - 3)t - 3\beta)] \\
& + \frac{3}{2} \lambda a^3 \cos(t + \beta) + \frac{1}{2} \lambda a^3 \cos(3t + 3\beta)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Решение линейного неоднородного уравнения (2.7) содержит секулярные слагаемые, а также слагаемые с малыми знаменателями, возникающие при близости частоты изменения электрического поля  $\Omega$  к одной из резонансных частот системы (2.3). Анализ правой части уравнения (2.7) показывает, что в первом приближении резонансными являются частоты из следующего набора:

$$\Omega = \frac{1}{2}; \quad 1; \quad \frac{3}{2}; \quad 2. \tag{2.8}$$

Таким образом, построенное прямое разложение становится непригодным в резонансных зонах системы по причине наличия неограниченно возрастающих слагаемых в решении (2.4).

С целью построения равномерно пригодного разложения применим асимптотический метод многих масштабов. Решение уравнения (2.3) будем искать в виде

$$x = x_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, \dots) + \dots, \tag{2.9}$$

где  $T_k = \varepsilon^k t$  – различные масштабы времени,  $x_i, i = 0, 1, 2, \dots$  – искомые функции.

Следуя [32], выразим производные по реальному времени  $t$  через производные по  $T_k$ :

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots, \tag{2.10}$$

где  $D_k = \partial/\partial T_k$ . Построим первое приближение. Подставляя (2.9), (2.10) в (2.3) и группируя члены по степеням параметра  $\varepsilon$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
D_0^2 x_0 + x_0 &= 0, \\
D_0^2 x_1 + x_1 &= -2D_0 D_1 x_0 - \mu D_0 x_0 + \lambda \cos^2 \Omega T_0 [1 + 2x_0 + 3x_0^2 + 4x_0^3], \dots
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Решение однородного уравнения для  $x_0$  запишем в комплексной форме

$$x_0(T_0, T_1) = A(T_1) e^{iT_0} + (\text{к. с.}), \tag{2.12}$$

где введено краткое обозначение для комплексно сопряженных слагаемых. Комплексная амплитуда колебаний определяется как

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)}, \quad (2.13)$$

где  $a$  и  $\beta$  – искомые функции медленного времени  $T_1$ .

Рассмотрим главный резонанс, при котором частота внешнего возбуждения  $2\Omega \approx 1$ .

Введем параметр расстройки  $\sigma$  по формуле

$$\Omega = \frac{1}{2} + \varepsilon\sigma. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.12), (2.14) в правую часть уравнения (2.11)<sub>2</sub> и записывая условие отсутствия секулярных слагаемых, получим следующее уравнение для комплексной амплитуды:

$$-2iA' - \mu iA + \lambda A + 6\lambda A^2 \bar{A} + \frac{\lambda}{4} e^{2i\sigma T_1} + \frac{3\lambda}{4} A^2 e^{-2i\sigma T_1} + \frac{3\lambda}{2} A \bar{A} e^{2i\sigma T_1} = 0. \quad (2.15)$$

Переходя к экспоненциальной форме записи (2.13) и отделяя вещественную и мнимую части в уравнении (2.15), получим следующую систему дифференциальных уравнений для медленно меняющихся амплитуды и фазы колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dT_1} &= -\frac{1}{2}\mu a + \frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{3}{4}a^2\right) \sin \gamma, \\ a \frac{d\gamma}{dT_1} &= 2a\sigma + \frac{1}{2}\lambda a + \frac{3}{4}\lambda a^3 + \frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{9}{4}a^2\right) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь введено обозначение

$$\gamma = 2\sigma T_1 - \beta. \quad (2.17)$$

Стационарным (установившимся) колебаниям соответствуют особые точки автономной системы (2.16), определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu a &= \frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{3}{4}a^2\right) \sin \gamma, \\ -2a\sigma - \frac{1}{2}\lambda a - \frac{3}{4}\lambda a^3 &= \frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{9}{4}a^2\right) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Исключение переменной  $\gamma$  приводит к следующему уравнению, неявно определяющему зависимость амплитуды установившихся колебаний от частотной расстройки  $a(\sigma)$ :

$$\frac{\lambda^2}{16} = \frac{1}{4} \frac{\mu^2 a^2}{\left(1 + \frac{3}{4}a^2\right)^2} + \left( \frac{2a\sigma + \frac{1}{2}\lambda a + \frac{3}{4}\lambda a^3}{1 + \frac{9}{4}a^2} \right)^2. \quad (2.19)$$

На рисунках 2.2, 2.3 показано сравнение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ), полученных следующими тремя методами: согласно аналитическому выражению (2.19); прямым численным расчетом приближенной системы (2.3); прямым численным расчетом

полной системы (2.2). Численные зависимости  $a(\sigma)$  определены с помощью алгоритма продолжения по параметру периодических решений, реализованного в программном комплексе *MATCONT* [116]. Коэффициент демпфирования  $\mu$  принят равным 0,005.

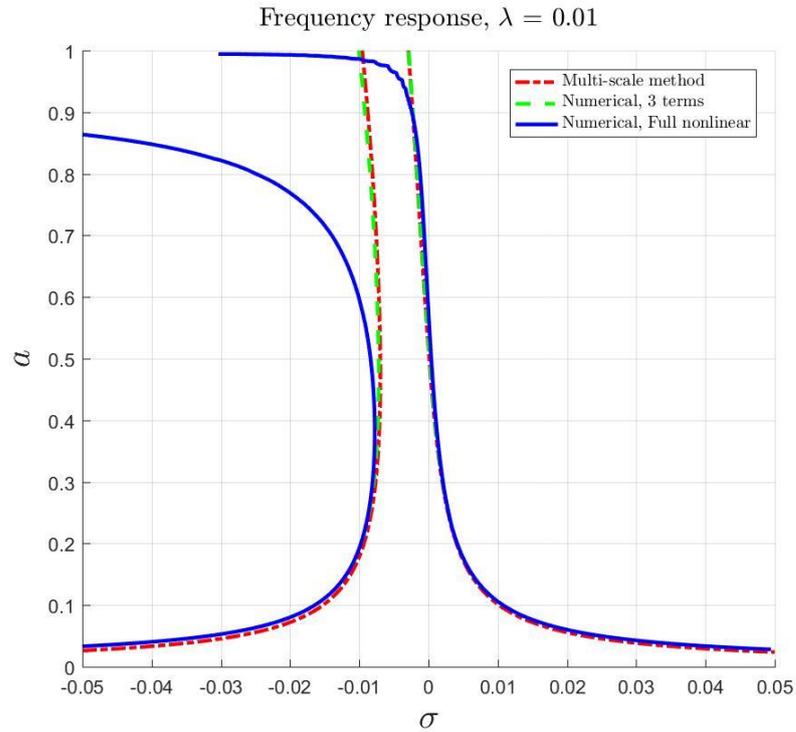


Рисунок 2.2 – Сравнение АЧХ в окрестности главного резонанса  $\Omega \approx \frac{1}{2}$

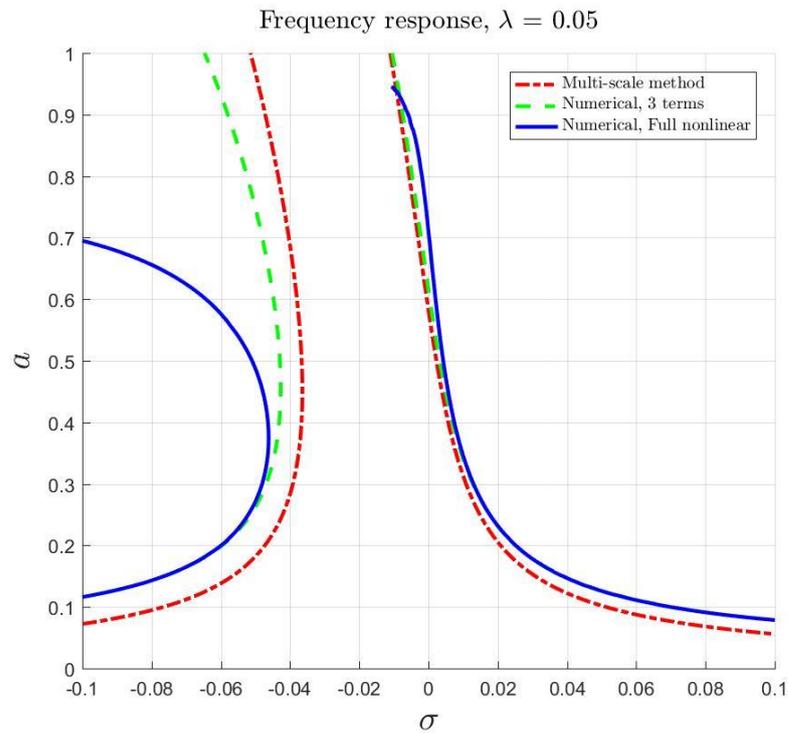


Рисунок 2.3 – Сравнение АЧХ в окрестности главного резонанса  $\Omega \approx \frac{1}{2}$

Как видно из рисунков, при достаточно малых значениях  $\lambda$  первое приближение к решению, полученное методом многих масштабов, практически совпадает с прямым численным решением уравнения (2.3). Отличие приближенных решений от прямого численного решения исходного нелинейного уравнения (2.2) состоит в существовании ветви неустойчивых периодических движений при отрицательных значениях параметра расстройки  $\sigma$ . Практическое значение данной ветви состоит в том, что она ограничивает область притяжения устойчивого периодического режима с малыми амплитудами колебаний. На рисунке 2.4 представлено сравнение режимов движения систем, описываемых уравнениями (2.2), (2.3), в зависимости от начальных условий. Соответствующие АЧХ показаны на рисунке Рисунок 2.2.

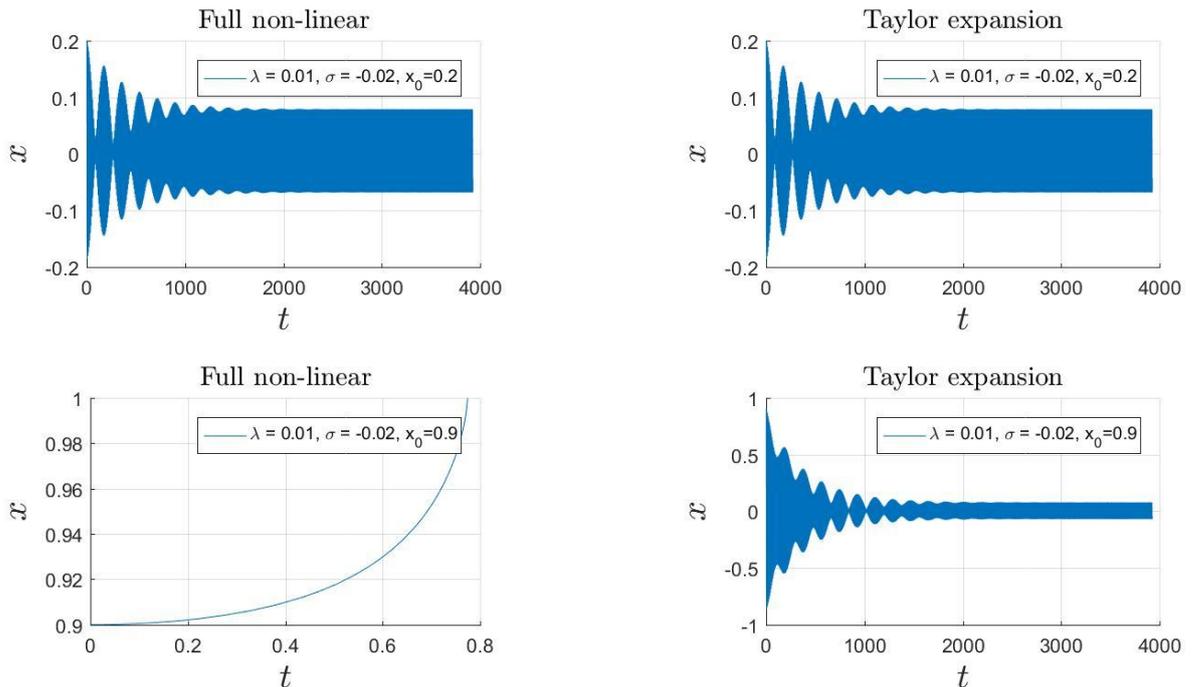


Рисунок 2.4 – Сравнение режимов движения систем (2.2) и (2.3)

Как видно из рисунка, разложение правой части уравнения (2.2) в ряд Тейлора с удержанием степеней не выше третьей может привести к ошибочному выводу об устойчивости стационарного колебательного движения системы при больших начальных возмущениях.

Рассмотрим подробнее вопрос об определении устойчивости найденных периодических режимов колебаний. Согласно общим положениям теории устойчивости движения [3,18,28,29,36], для определения устойчивости стационарного режима нужно построить уравнение в возмущениях в окрестности исследуемого движения. В случае анализа периодических колебаний данное уравнение в возмущениях представляет собой линейное уравнение с периодическими коэффициентами [43]. Условием асимптотической устойчивости периодического движения является нахождение всех мультипликаторов (собственных чисел матрицы монодромии) внутри единичной окружности на комплексной плоскости. Существование мультипликатора с модулем, равным единице, соответствует ограниченному (в

общем случае неперiodическому) движению. Наличие мультипликаторов вне единичной окружности является критерием неустойчивости исследуемого периодического движения.

Применяемый в численных расчетах программный комплекс *MATCONT* позволяет вычислять мультипликаторы в окрестности каждого найденного стационарного периодического режима колебаний. Используем данную возможность для подтверждения факта потери устойчивости периодическими движениями системы (2.2) в регулярной экстремальной точке на левой ветви АЧХ на рисунках 2.2, 2.3. На рисунке 2.5 показана зависимость значений максимального по модулю мультипликатора от параметра частотной расстройки  $\sigma$ . Две связанные кривые соответствуют левой и правой ветвям АЧХ при  $\lambda = 0,05$ .

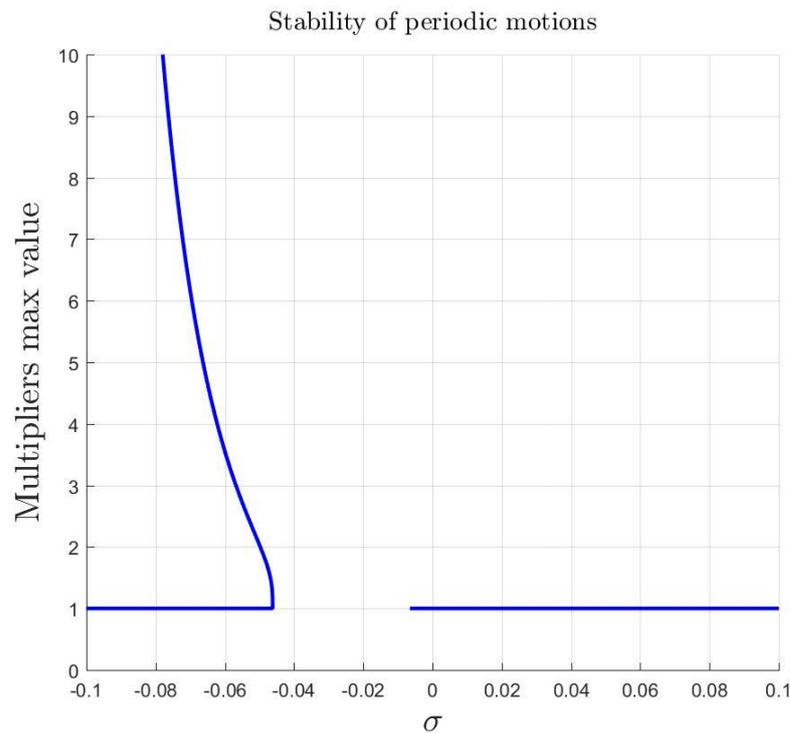


Рисунок 2.5 – Зависимость значений максимального по модулю мультипликатора от  $\sigma$

Как видно из рисунка, выход мультипликаторов из единичной окружности комплексной плоскости значений происходит при той же расстройке частоты, что и перегиб левой ветви АЧХ на рисунке 2.3. Независимое от  $\sigma$  наличие в системе мультипликатора с модулем, равным единице, вызвано особенностями численной реализации в *MATCONT* задачи продолжения по параметру периодических движений, а именно, тем обстоятельством, что программный комплекс *MATCONT* предназначен для исследования автономных динамических систем. В связи с этим возникает необходимость построить автономную систему, эквивалентную (2.2) в смысле описания движений микроэлектромеханического осциллятора. Для этого неавтономное слагаемое  $\cos \Omega t$  в уравнении (2.2) заменяется установившимся решением (предельным циклом) следующей динамической системы [117]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + \Omega y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= -\Omega x + y - y(x^2 + y^2),\end{aligned}\tag{2.20}$$

имеющей асимптотически устойчивое решение

$$x = \sin \Omega t, y = \cos \Omega t.\tag{2.21}$$

Таким образом, решаемая в *MATCONT* система уравнений, записанная в стандартной форме, имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_2 - x_1 - \frac{\lambda x_4^2}{(1 - x_1)^2}, \\ \dot{x}_3 &= x_3 + \Omega x_4 - x_3(x_3^2 + x_4^2), \\ \dot{x}_4 &= -\Omega x_3 + x_4 - x_4(x_3^2 + x_4^2).\end{aligned}\tag{2.22}$$

Линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, получаемая из (2.22) путем построения уравнения в возмущениях относительно стационарного периодического решения, имеет мультипликатор, равный единице, что и позволяет проинтерпретировать рисунок 2.5.

Исследуем теперь зависимость амплитуды установившихся колебаний от параметра силы внешнего возбуждения  $\lambda$  при фиксированной его частоте в окрестности главного резонанса  $\Omega \approx \frac{1}{2}$ . На рисунках 2.6, 2.7 показано сравнение прямого численного решения системы (2.2) с приближенным аналитическим решением (2.19), а также с численным решением соответствующей ему системы (2.3).

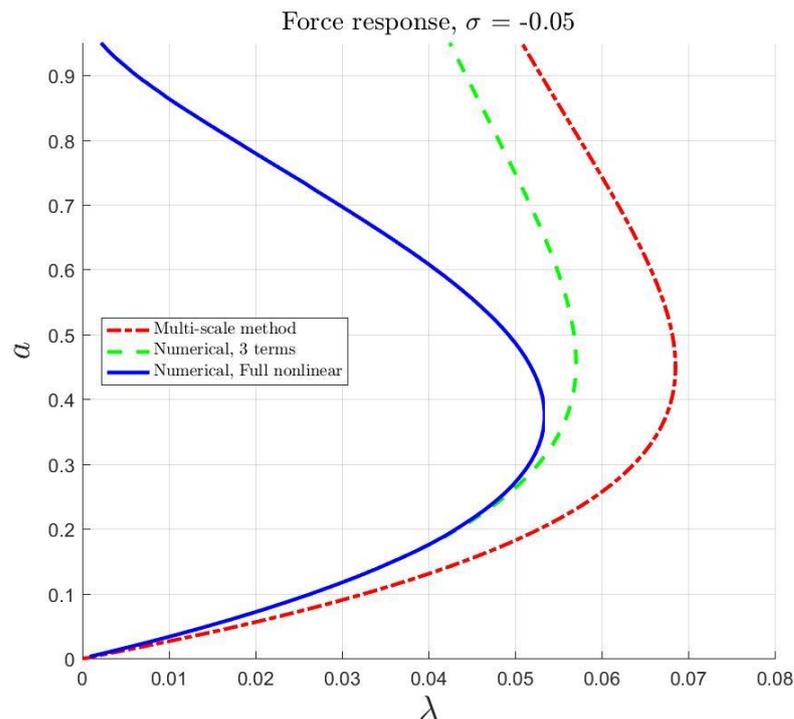
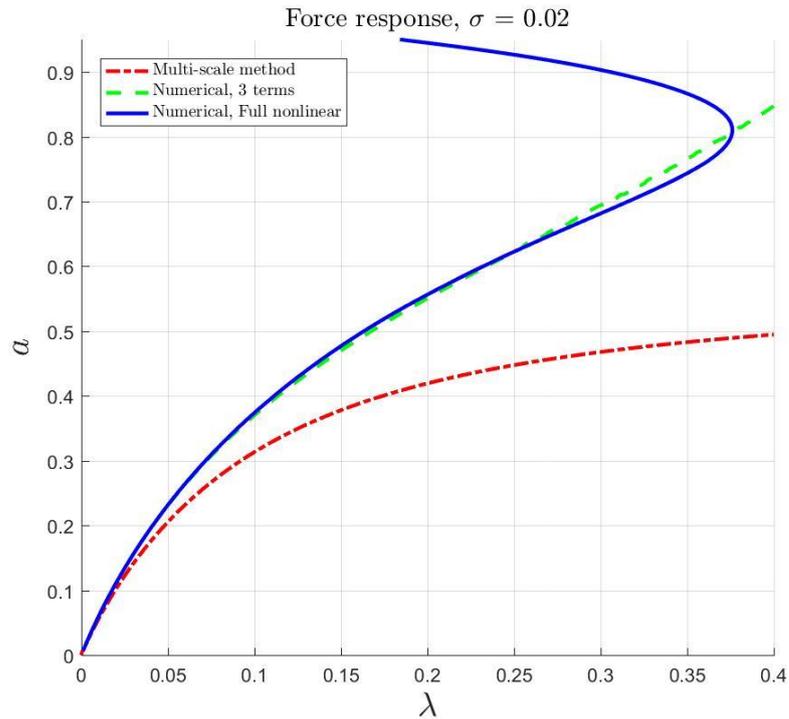


Рисунок 2.6 – Зависимость амплитуды колебаний от  $\lambda$ ,  $\sigma = -0,05$ Рисунок 2.7 – Зависимость амплитуды колебаний от  $\lambda$ ,  $\sigma = 0,02$ 

Как видно из рисунка 2.6, при частотах, меньших резонансной ( $\sigma < 0$ ), зависимость амплитуды колебаний от  $\lambda$  по форме совпадает с полученной ранее диаграммой ветвления форм равновесия (п. 1.2.1, рисунок 1.7) системы и характеризуется наличием критического значения параметра  $\lambda$ , ограничивающего сверху область существования стационарных режимов колебаний. При этом максимальная амплитуда устойчивых периодических движений не превышает величины 0,5.

Согласно рисунку 2.7, в зарезонансной зоне ( $\sigma > 0$ ) характер зависимости амплитуды  $a$  от параметра  $\lambda$  иной: существенно возрастают как критическое значение  $\lambda \cong 0,37$ , так и максимальная амплитуда устойчивых колебаний  $a \cong 0,8$ . Для сравнения, критическое значение  $\lambda$  при статическом анализе («*static pull-in*»), согласно п. 1.2.1, составляет  $\lambda_* \cong 0,148$  при соответствующей величине статического перемещения  $a_* \cong 0,32$ . Таким образом, в зарезонансной зоне возможны устойчивые колебания с амплитудами, значительно превышающими возможные амплитуды устойчивых положений равновесия.

Как видно из рисунков 2.6, 2.7, приближенное аналитическое решение совпадает с численным лишь при малых значениях  $\lambda$ , что соответствует исходным предположениям примененного метода многих масштабов.

Перейдем к исследованию второго метода возбуждения, в котором переменное напряжение с амплитудой  $V_{AC}$  накладывается на стационарное напряжение  $V_{DC}$ .

Соответствующая одномерная динамическая модель имеет вид:

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + x = \lambda \frac{(1 + v \cos \Omega t)^2}{(1 - x)^2}. \quad (2.23)$$

Данное уравнение решается численно в программном комплексе *MATCONT*. На рисунках 2.8, 2.9 представлены амплитудно-частотные характеристики системы для различных значений  $\lambda$  в окрестности главного резонанса, определяемого соотношением  $\Omega = 1 + \sigma$ , где  $\sigma$  – расстройка частоты. Безразмерная амплитуда переменной компоненты напряжения  $v = 0,01$ ; коэффициент диссипации  $\mu = 0,005$ .

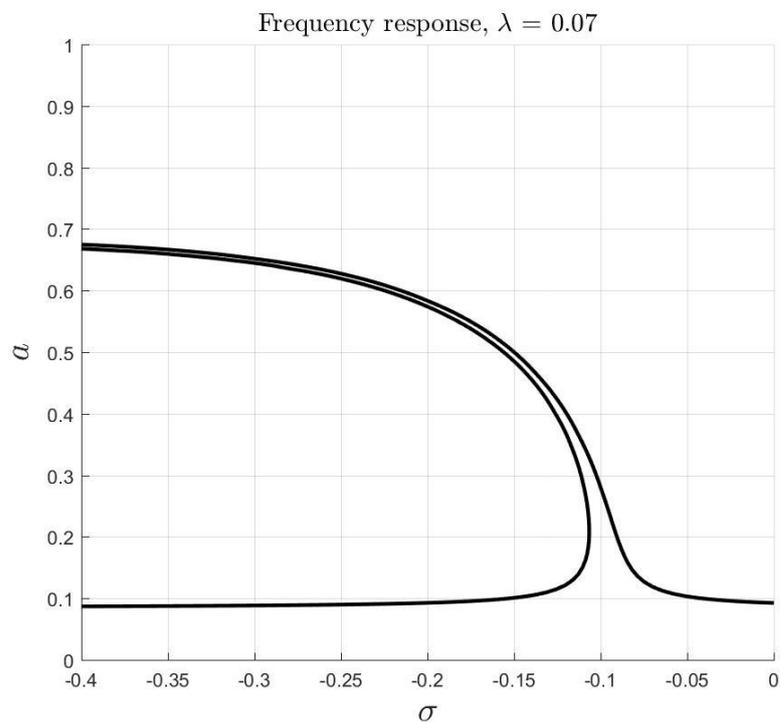


Рисунок 2.8 – АЧХ в окрестности главного резонанса,  $\lambda = 0,07$

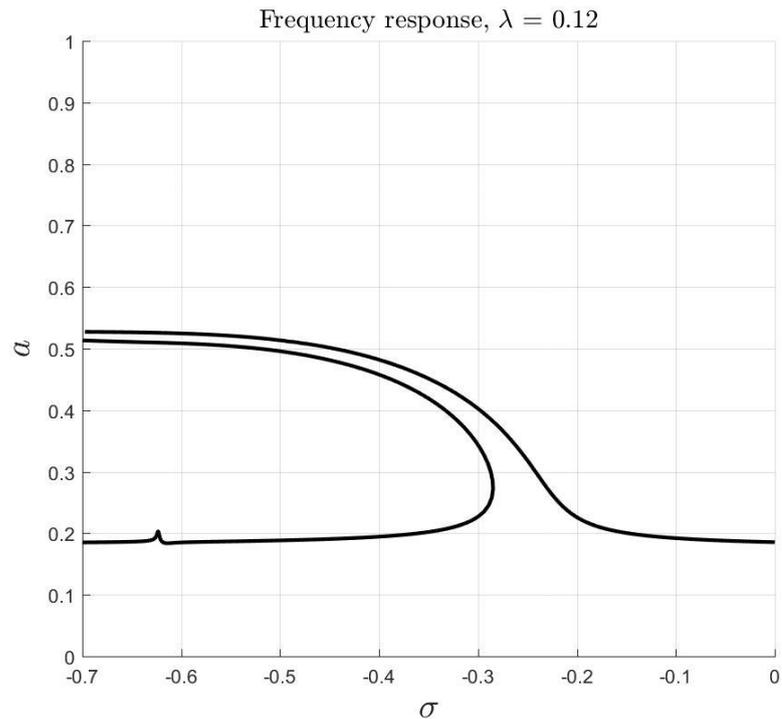


Рисунок 2.9 – АЧХ в окрестности главного резонанса,  $\lambda = 0,12$

Как видно из рисунков, при заданных значениях параметров в системе не наблюдается возможность выхода из режима стационарных периодических колебаний. Малый резонансный пик на рисунке 2.9 при  $\Omega \cong \frac{1}{3}$  соответствует вторичному резонансу, вызванному наличием кубического слагаемого в разложении правой части уравнения (2.23) в ряд Тейлора.

На рисунках 2.10, 2.11 показаны зависимости амплитуды стационарных колебаний от амплитуды переменного внешнего возбуждения  $\nu$  при различных значениях частотной расстройки  $\sigma$ .

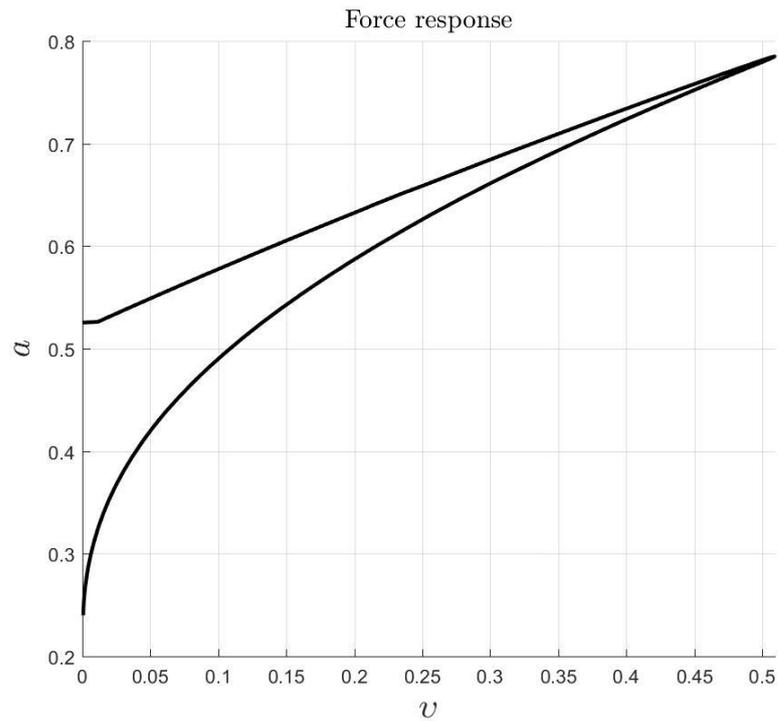


Рисунок 2.10 – Зависимость  $a(v)$ ,  $\lambda = 0,12$ ,  $\mu = 0,005$ ,  $\sigma = -0,25$

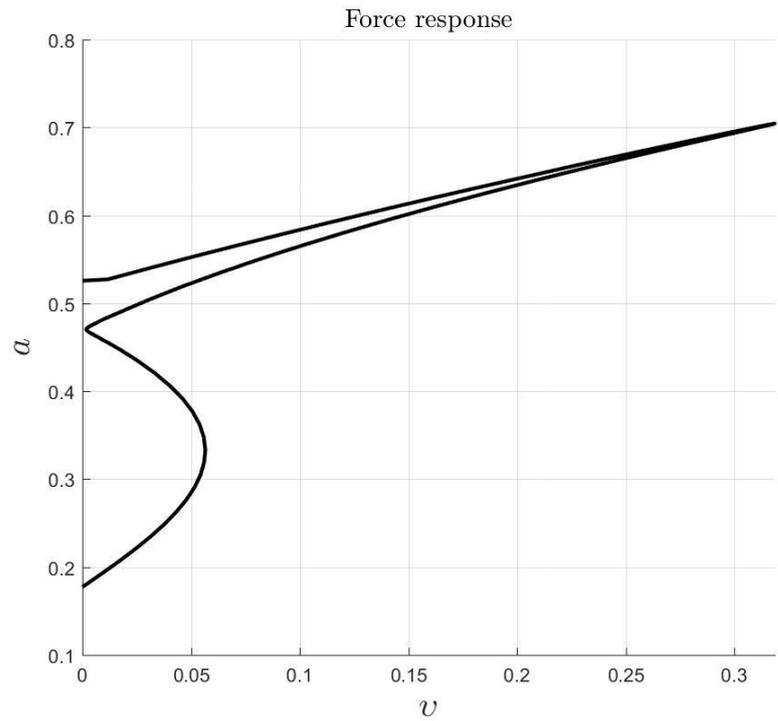


Рисунок 2.11 – Зависимость  $a(v)$ ,  $\lambda = 0,12$ ,  $\mu = 0,005$ ,  $\sigma = -0,4$

### 2.1.2 Система с двумя неподвижными электродами

Приступим к исследованию режимов движения микромеханического осциллятора в поле двух электродов. Прежде чем рассматривать задачу о вынужденных колебаниях, изучим качественную структуру фазовой плоскости системы при наличии диссипации, определяемой коэффициентом  $\mu > 0$ . Уравнение движения в постоянном электрическом поле примет вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \mu \frac{dx}{d\tau} + x = \lambda \left[ \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \right], \quad (2.24)$$

На рисунке 2.12 показаны фазовые портреты системы при различных значениях параметра  $\lambda$  и фиксированном  $\mu$ .

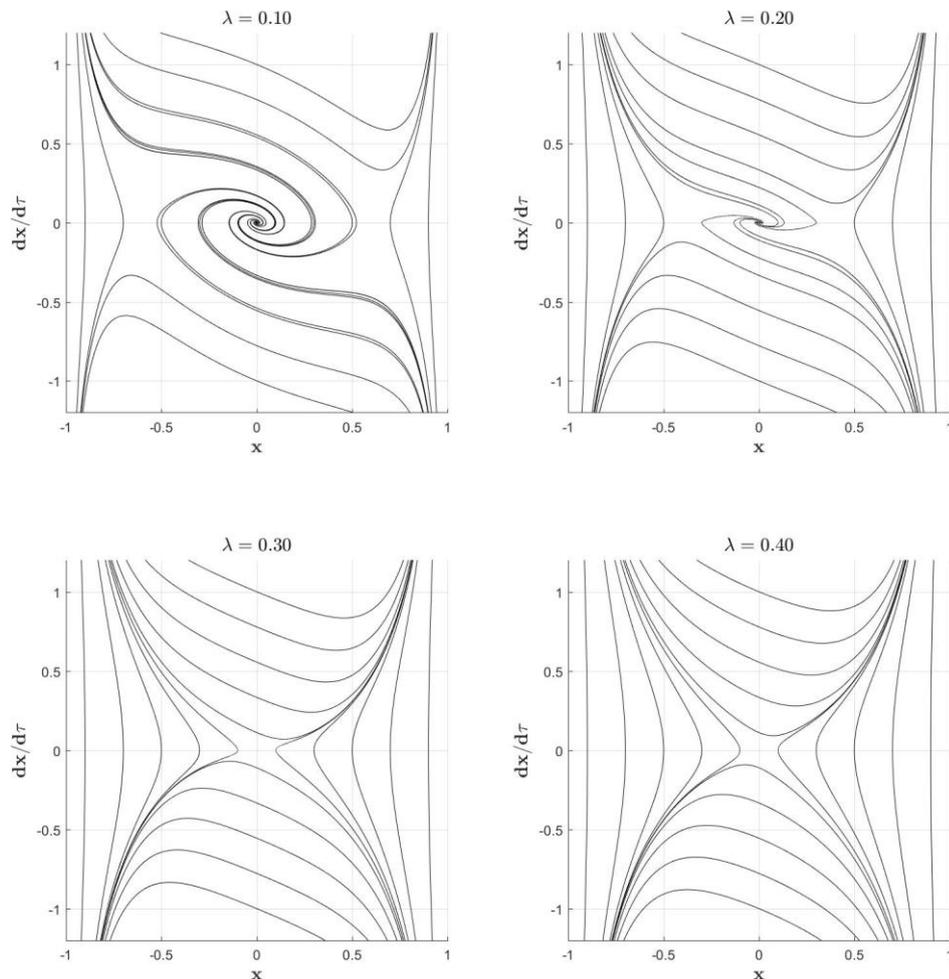


Рисунок 2.12 – Фазовые портреты МЭМС-осциллятора с учетом демпфирования ( $\mu = 0,05$ )

Как видно из рисунка, при  $\lambda < 0,25$  в системе имеется три особые точки – устойчивый фокус и два седла, расположенных симметрично относительно точки  $(0,0)$ . При  $\lambda = 0,25$  особые точки сливаются и образуют одно седло.

Еще одним важным шагом, предворяющим исследование динамической задачи, является построение диаграммы ветвления положений равновесия системы с двумя электродами при наличии кубического слагаемого в выражении упругой силы:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x + \beta x^3 = \lambda \left[ \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \right]. \quad (2.25)$$

Как было показано ранее при исследовании форм равновесия круглой пластинки в поле двух электродов (п. 1.3.3.2), учет геометрической нелинейности согласно уравнениям Кармана (1.155) приводит к качественному изменению бифуркационной диаграммы при достаточно больших значениях параметра  $\beta$ , характеризующего соотношение между зазором конденсатора и толщиной пластинки. А именно, как видно из рисунка 1.34, при увеличении  $\beta$  тип бифуркации изменяется с субкритического на суперкритический, что влечет за собой ответвление от нулевого решения устойчивых нетривиальных форм равновесия. Соответствующая форме уравнений Кармана одномерная модель имеет вид (2.25). На рисунке 2.13 показаны вычисленные с помощью программного комплекса *MATCONT* диаграммы ветвления положений равновесия данной системы для различных значений  $\beta$ .

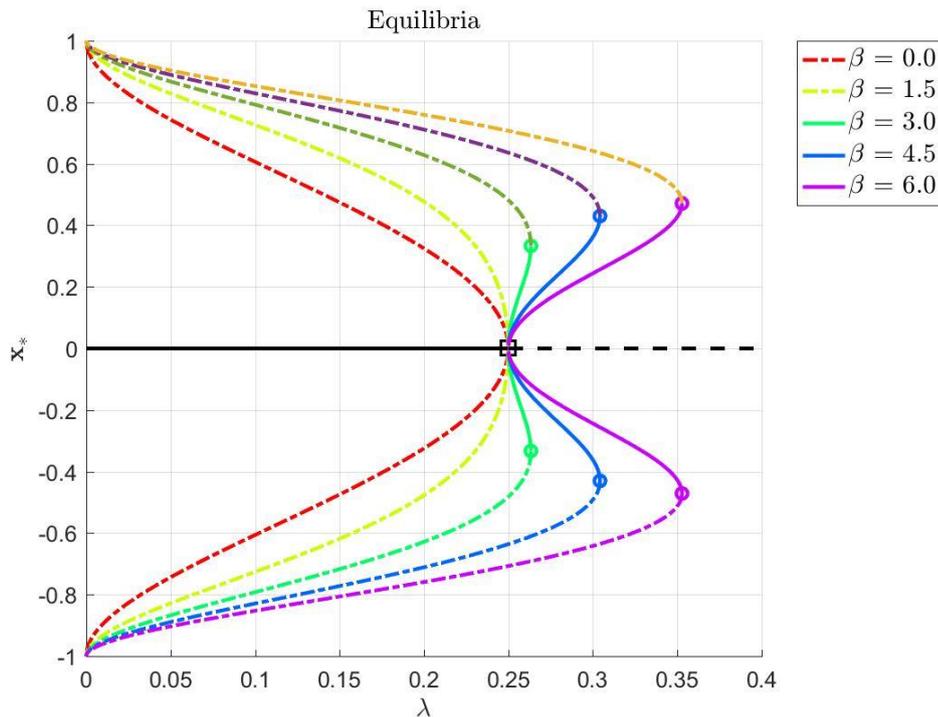


Рисунок 2.13 – Диаграмма ветвления положений равновесия

Как видно из рисунка, учет кубического слагаемого в выражении для нелинейной восстанавливающей силы позволяет качественно описать возможность возникновения нетривиальных положений равновесия упругих элементов микросистемной техники в поле двух электродов.

Перейдем к исследованию движений микроэлектромеханического осциллятора под действием периодического возбуждения. С учетом вышесказанного, уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x} + \varepsilon\mu\dot{x} + x + \varepsilon\beta x^3 = \varepsilon\lambda \cos^2 \Omega t \cdot \left[ \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \right], \quad (2.26)$$

где для удобства безразмерное время обозначено буквой  $t$ , а также введен малый параметр  $\varepsilon$  при нелинейных слагаемых. Разложим правую часть (2.26) в ряд Тейлора и оставим слагаемые до третьей степени включительно. Получим следующее приближенное уравнение:

$$\ddot{x} + \varepsilon\mu\dot{x} + [1 - 4\varepsilon\lambda \cos^2 \Omega t]x + \varepsilon[\beta - 8\lambda \cos^2 \Omega t]x^3 = 0. \quad (2.27)$$

Таким образом, в отличие от системы с одним электродом (2.3), возбуждение имеет чисто параметрический характер. Решение данного нелинейного уравнения с периодическими коэффициентами будем искать с помощью асимптотических методов.

С целью определения резонансных частот применим метод прямого разложения по параметру  $\varepsilon$ . Решение будем искать в виде

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots, \quad (2.28)$$

где  $x_i(t), i = 0, 1, 2, \dots$  - искомые функции времени.

Подставляя ряд (2.28) в (2.27) и группируя слагаемые по степеням малого параметра  $\varepsilon$ , получим следующую систему уравнений для функций  $x_i$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= -\mu\dot{x}_0 + 4\lambda(x_0 + 2x_0^3) \cos^2 \Omega t - \beta x_0^3, \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для «нулевого приближения»  $x_0$  имеем однородное уравнение, общее решение которого запишем в виде

$$x_0 = a \cos(t + \varphi), \quad (2.30)$$

где  $a, \varphi$  – константы, определяемые начальными условиями. Подставив (2.30) в правую часть уравнения для  $x_1(t)$ , найдем:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= \mu a \sin(t + \varphi) + 2\lambda a \cos(t + \varphi) + \lambda a \cos[(1 + 2\Omega)t + \varphi] \\ &+ \lambda a \cos[(1 - 2\Omega)t + \varphi] + 3\lambda a^3 \cos(t + \varphi) \\ &+ \frac{3\lambda a^3}{2} \cos[(1 + 2\Omega)t + \varphi] + \frac{3\lambda a^3}{2} \cos[(1 - 2\Omega)t + \varphi] \\ &+ \lambda a^3 \cos(3t + 3\varphi) + \frac{\lambda a^3}{2} \cos[(3 + 2\Omega)t + 3\varphi] \\ &+ \frac{\lambda a^3}{2} \cos[(3 - 2\Omega)t + 3\varphi] - \frac{3\beta a^3}{4} \cos(t + \varphi) \\ &- \frac{\beta a^3}{4} \cos(3t + 3\varphi). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Решение линейного неоднородного уравнения (2.31) содержит секулярные слагаемые, а также слагаемые с малыми знаменателями, возникающие при близости частоты изменения электрического поля  $\Omega$  к одной из резонансных частот системы. Построенное прямое разложение становится непригодным в резонансных зонах системы по причине наличия неограниченно возрастающих слагаемых в решении. Анализ правой части уравнения (2.31) показывает, что в первом приближении малые знаменатели появляются при  $\Omega \cong 1$ , т.е. в окрестности главного параметрического резонанса.

С целью построения равномерно пригодного разложения применим асимптотический метод многих масштабов. Решение уравнения (2.27) будем искать в виде

$$x = x_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, \dots) + \dots, \quad (2.32)$$

где  $T_k = \varepsilon^k t$  – различные масштабы времени,  $x_i, i = 0, 1, 2, \dots$  – искомые функции.

Построим первое приближение. Подставляя (2.32) в (2.27) и группируя члены по степеням параметра  $\varepsilon$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_0 + x_0 &= 0, \\ D_0^2 x_1 + x_1 &= -2D_0 D_1 x_0 - \mu D_0 x_0 + 4\lambda \cos^2 \Omega T_0 [x_0 + 2x_0^3] - \beta x_0^3, \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

где дифференциальные операторы  $D_k$  определены по формулам (2.10).

Решение однородного уравнения для  $x_0$  запишем в комплексной форме

$$x_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{iT_0} + (\text{к. с.}), \quad (2.34)$$

где введено краткое обозначение для комплексно сопряженных слагаемых. Комплексная амплитуда колебаний определяется как

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\varphi(T_1)}, \quad (2.35)$$

где  $a$  и  $\varphi$  – искомые функции медленного времени  $T_1$ .

Рассмотрим главный параметрический резонанс, при котором частота внешнего возбуждения  $\Omega \approx 1$ . Введем параметр расстройки  $\sigma$  по формуле

$$\Omega = 1 + \varepsilon\sigma. \quad (2.36)$$

Подставляя (2.34), (2.36) в правую часть уравнения (2.33)<sub>2</sub> и записывая условие отсутствия секулярных слагаемых, получим следующее уравнение для комплексной амплитуды:

$$\begin{aligned} -2iA' - \mu iA + 2\lambda A + \lambda \bar{A} e^{2i\sigma T_1} + 3A^2 \bar{A} (4\lambda - \beta) + 2\lambda A^3 e^{-2i\sigma T_1} \\ + 3A \bar{A}^2 e^{2i\sigma T_1} = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Переходя к экспоненциальной форме записи (2.35) и отделяя вещественную и мнимую части в уравнении (2.37), получим следующую систему дифференциальных уравнений для медленно меняющихся амплитуды и фазы колебаний:

$$2 \frac{da}{dT_1} = -\mu a + \left[ \lambda a \left( 1 - \frac{a^2}{2} \right) + \frac{3a^2}{4} \right] \sin \gamma, \quad (2.38)$$

$$a \frac{d\gamma}{dT_1} = 2a\sigma + 2\lambda a + \frac{3a^3}{4} (4\lambda - \beta) + \left[ \lambda a \left( 1 + \frac{a^2}{2} \right) + \frac{3a^3}{4} \right] \cos \gamma.$$

Здесь введено обозначение

$$\gamma = 2\sigma T_1 - 2\varphi. \quad (2.39)$$

Стационарным колебаниям соответствуют особые точки автономной системы (2.38), определяемые уравнениями

$$\mu a = \left[ \lambda a \left( 1 - \frac{a^2}{2} \right) + \frac{3a^2}{4} \right] \sin \gamma, \quad (2.40)$$

$$-2a\sigma - 2\lambda a - \frac{3a^3}{4} (4\lambda - \beta) = \left[ \lambda a \left( 1 + \frac{a^2}{2} \right) + \frac{3a^3}{4} \right] \cos \gamma.$$

Исключение переменной  $\gamma$  приводит к следующему уравнению, неявно определяющему зависимость амплитуды установившихся колебаний от частотной расстройки  $a(\sigma)$ :

$$\left[ \frac{\mu a}{\lambda a \left( 1 - \frac{a^2}{2} \right) + \frac{3a^3}{4}} \right]^2 + \left[ \frac{2a\sigma + 2\lambda a + \frac{3a^3}{4} (4\lambda - \beta)}{\lambda a \left( 1 + \frac{a^2}{2} \right) + \frac{3a^3}{4}} \right]^2 = 1. \quad (2.41)$$

На рисунке 2.14 показаны амплитудно-частотные характеристики, вычисленные по формуле (2.41) для различных значений параметра геометрической нелинейности  $\beta$  при фиксированных значениях  $\lambda = 0,1$ ,  $\mu = 0,005$ ,  $\varepsilon = 1$ .

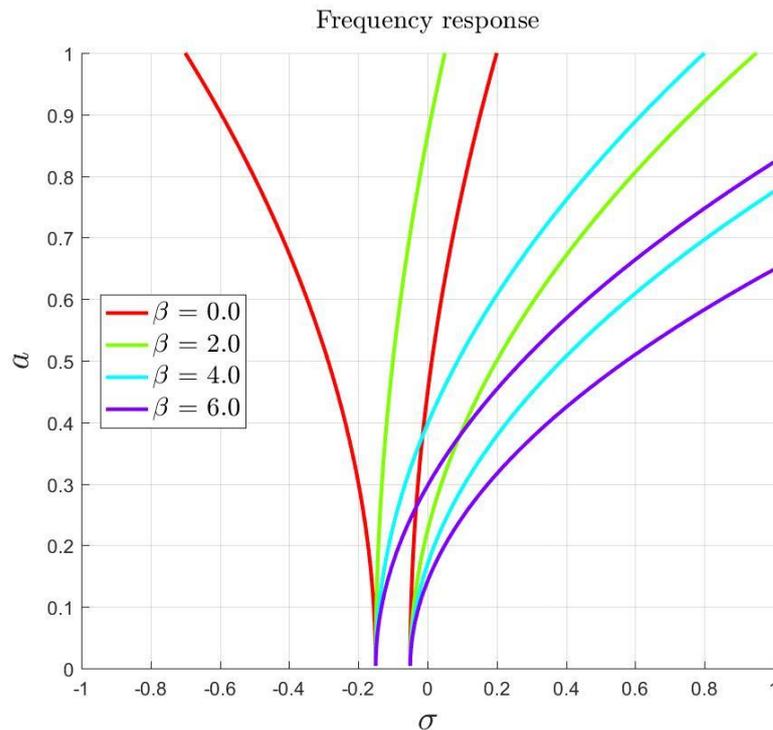


Рисунок 2.14 – АЧХ в окрестности главного параметрического резонанса

Наблюдаемый характер зависимости амплитуды установившихся колебаний  $a$  от частотной расстройки  $\sigma$  соответствует общим свойствам параметрических колебаний [5]: вне «зоны синхронизации» колебания, вызванные возмущением в начальных условиях, затухают по причине наличия диссипативных сил; внутри зоны синхронизации нулевое положение равновесия становится неустойчивым, и характер движения определяется нелинейными членами в уравнении (2.27). В отличие от линейных систем с периодическими коэффициентами, для которых, согласно теории Флоке-Ляпунова, периодические колебания лишь отделяют области ограниченных и неограниченных решений, для рассматриваемой нелинейной системы (2.27) зона синхронизации может представлять собой область существования стационарных периодических движений. На рисунке 2.15 показаны режимы движения исходной нелинейной системы (2.26) при различных значениях частотной расстройки  $\sigma$  и параметра геометрической нелинейности  $\beta$ . Другие параметры фиксированы:  $\lambda = 0.1, \mu = 0.005, \varepsilon = 1$ .

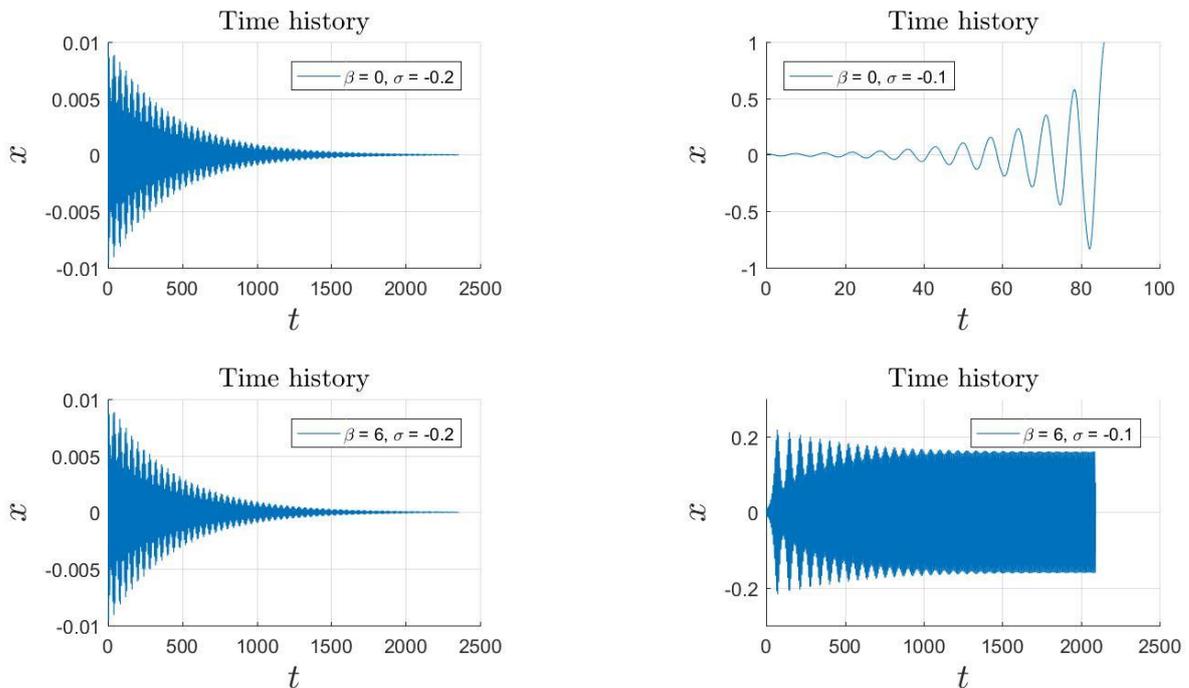


Рисунок 2.15 – Режимы движения системы (2.26)

Как видно из рисунка, при  $\beta = 0$  и  $\sigma = -0,1$  амплитуда колебаний неограниченно возрастает, что качественно соответствует явлению параметрического резонанса в линейных системах. При  $\beta = 6$  в зоне синхронизации ( $\sigma = -0,1$ ) наблюдаются стационарные колебания с амплитудой  $a \cong 0,17$ ; вне данной зоны ( $\sigma = -0,2$ ) колебания затухают. Таким образом, характер движений исходной нелинейной системы (2.26) соответствует приближенным аналитическим результатам, полученным методом многих масштабов для системы (2.27) (см. рисунок 2.14). Согласно полученным результатам, фактор геометрической нелинейности

определяет возможность или невозможность схлопывания обкладок конденсатора (*“pull-in”*) при параметрическом возбуждении упругого элемента НМСТ.

## 2.2 Нелинейная динамика упругих мембран и пластинок

### 2.2.1 Математическая постановка динамической задачи для пластинки электрическом поле

При рассмотрении задач устойчивости и колебаний упругих пластинок будем использовать геометрически нелинейные уравнения теории гибких пластинок, основанные на гипотезе недеформируемых нормалей Кирхгофа-Лява [15,65]. В обозначениях п. 1.3.1 (формула (1.52)) данные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} + 2\hat{c} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + D \hat{\nabla}^4 \hat{w} &= \hat{L}(\hat{w}, \hat{\Phi}) + T \hat{\nabla}^2 \hat{w} + \hat{F}(\hat{t}), \\ \hat{\nabla}^4 \hat{\Phi} &= -\frac{Eh}{2} \hat{L}(\hat{w}, \hat{w}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Здесь  $\rho$  – объемная плотность материала пластинки; остальные обозначения введены ранее.

### 2.2.2 Круглая мембрана в переменном электрическом поле

Приведем уравнения (2.42) к безразмерному виду, удобному при исследовании пластинок с малой изгибной жесткостью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial w}{\partial t} + \delta \nabla^4 w &= \beta L(w, \Phi) + \nabla^2 w + \tilde{F}_e(t), \\ \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где

$$\begin{aligned} r = \frac{\hat{r}}{R}, \quad t = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{T}{\rho h}} \hat{t}, \quad w = \frac{\hat{w}}{d}, \quad \Phi = \frac{\hat{\Phi}}{Ehd^2}, \\ c = \frac{R}{\sqrt{\rho h T}} \hat{c}, \quad \delta = \frac{D}{R^2 T}, \quad \beta = \frac{Eh}{T} \left(\frac{d}{R}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Пондеромоторную силу  $\tilde{F}_e(t)$  будем считать периодической функцией времени. Как и ранее, будем рассматривать два режима возбуждения (см. п. 2.1): при наличии и отсутствии ненулевого стационарного значения разности потенциалов между обкладками  $V_{DC}$ . Будем обозначать первый режим возбуждения «DC-AC», второй – «AC». В случае режима «DC-AC» для системы с одним неподвижным электродом сила  $\tilde{F}_e(t)$  имеет вид

$$\tilde{F}_e = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 R^2}{2d^3 T} \cdot \frac{(V_{DC} + V_{AC} \cos \hat{\Omega} \hat{t})^2}{(1-w)^2} = \lambda \frac{(1 + v \cos \Omega t)^2}{(1-w)^2}, \quad (2.45)$$

где  $V_{DC}, V_{AC}$  – постоянная и переменная компоненты напряжения, и

$$\lambda = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 R^2 V_{DC}^2}{2d^3 T}, \quad v = \frac{V_{AC}}{V_{DC}}, \quad \Omega = R \sqrt{\frac{\rho h}{T}} \hat{\Omega}. \quad (2.46)$$

Для системы с двумя электродами

$$\tilde{F}_e = \lambda_1 \frac{(1 + v_1 \cos \Omega_1 t)^2}{(1-w)^2} - \lambda_2 \frac{(1 + v_2 \cos \Omega_2 t)^2}{(1+w)^2}, \quad (2.47)$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 R^2 (V_{DC}^{(1,2)})^2}{2d^3 T}, \quad v_{1,2} = \frac{V_{AC}^{(1,2)}}{V_{DC}^{(1,2)}}. \quad (2.48)$$

В случае режима «АС» для системы с одним неподвижным электродом сила  $\tilde{F}_e(t)$  имеет вид

$$\tilde{F}_e = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 R^2}{2d^3 T} \cdot \frac{V_{AC}^2 \cos^2 \hat{\Omega} \hat{t}}{(1-w)^2} = \lambda \frac{\cos^2 \Omega t}{(1-w)^2}, \quad (2.49)$$

где

$$\lambda = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 R^2 V_{AC}^2}{2d^3 T}, \quad \Omega = R \sqrt{\frac{\rho h}{T}} \hat{\Omega}. \quad (2.50)$$

Для системы с двумя электродами

$$\tilde{F}_e = \lambda_1 \frac{\cos^2 \Omega_1 t}{(1-w)^2} - \lambda_2 \frac{\cos^2 \Omega_2 t}{(1+w)^2}, \quad (2.51)$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 R^2 (V_{AC}^{(1,2)})^2}{2d^3 T}, \quad \Omega_{1,2} = R \sqrt{\frac{\rho h}{T}} \hat{\Omega}_{1,2}. \quad (2.52)$$

### 2.2.2.1 Система с одним неподвижным электродом

Исследуем осесимметричные колебания круглой мембраны в поле одного электрода в режиме возбуждения «АС». Пренебрежем в уравнении (2.43) изгибной жесткостью упругого элемента ( $\delta = 0$ ). В этом случае уравнение движения мембраны и граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\lambda \cos^2 \Omega t}{(1-w)^2},$$

$$r = 0: \quad w - \text{огр.},$$

$$r = 1: \quad w = 0.$$
(2.53)

Уравнение (2.53) представляет собой нелинейное уравнение в частных производных гиперболического типа. Рассматриваемая задача не имеет точного аналитического решения. Основными методами получения приближенных решений подобных задач являются следующие: метод Галеркина (в англоязычной литературе – «*reduced order modelling*», ROM [65]; иначе – «*truncation method*» [94]), приводящий уравнение в частных производных к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, и метод построения асимптотического разложения по малому параметру для исходного уравнения в частных производных. Известно, что применение названных методов приводит, вообще говоря, к различным результатам [65,94], однако, по причине некоторых математических трудностей, связанных с построением решений операторных уравнений, в большинстве работ по нелинейной динамике упругих элементов НМСТ применяется метод Галеркина. В связи с этим, представляет интерес построение и сравнение двух решений рассматриваемой задачи.

Применим асимптотический метод многих масштабов. Разложим нелинейное слагаемое в правой части (2.53)<sub>1</sub> в ряд Тейлора, удержав члены до кубического включительно. Введя малый параметр  $\varepsilon$  при коэффициенте диссипации  $c$  и характерном физическом параметре  $\lambda$ , получим:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\varepsilon c \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \varepsilon \lambda \cos^2 \Omega t \cdot (1 + 2w + 3w^2 + 4w^3). \quad (2.54)$$

Решение данного уравнения будем искать в виде

$$w(r, t) = w_0(r, T_0, T_1, \dots) + \varepsilon w_1(r, T_0, T_1, \dots) + \dots, \quad (2.55)$$

где  $w_i$  – искомые функции, и для различных масштабов времени введены обозначения  $T_k = \varepsilon^k t$ . Производные по реальному времени  $t$  выражаются через производные по  $T_k$  следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots, \quad (2.56)$$

где  $D_k = \partial / \partial T_k$ .

Подставляя (2.55), (2.56) в (2.54) и группируя слагаемые по степеням  $\varepsilon$ , получим следующую систему уравнений для определения  $w_i$ :

$$D_0^2 w_0 = \nabla^2 w_0,$$

$$D_0^2 w_1 + 2D_0 D_1 w_0 + 2c D_0 w_0$$

$$= \nabla^2 w_1 + \frac{\lambda}{2} (1 + \cos 2\Omega t) \cdot (1 + 2w_0 + 3w_0^2 + 4w_0^3), \dots, \quad (2.57)$$

где для краткости введен оператор  $\nabla$ . Таким образом, для функции  $w_0$  получено уравнение свободных колебаний мембраны с граничными условиями (2.53)<sub>2,3</sub>, решение которого в комплексной форме имеет вид

$$w_0(r, T_0, T_1) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(T_1)e^{i\omega_m T_0} + \bar{A}_m(T_1)e^{-i\omega_m T_0}] J_0(\omega_m r), \quad (2.58)$$

где  $A_m$  – комплексная амплитуда, зависящая от «медленного» времени  $T_1$ :

$$A_m(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)}. \quad (2.59)$$

Частоты свободных колебаний  $\omega_m$ , согласно (1.91)-(1.93), являются корнями функции Бесселя нулевого порядка:

$$J_0(\omega_m) = 0. \quad (2.60)$$

Рассмотрим движение системы в окрестности  $k$ -й собственной частоты:  $2\Omega \approx \omega_k$ . При наличии трения все формы, которые не возбуждаются извне непосредственно, затухают со временем [65]. В дальнейшем этот факт будет подтвержден прямым аналитическим исследованием нелинейной системы с двумя степенями свободы. С учетом этого обстоятельства общее решение принимает вид

$$w_0(r, T_0, T_1) = [A_k(T_1)e^{i\omega_k T_0} + \bar{A}_k(T_1)e^{-i\omega_k T_0}] J_0(\omega_k r). \quad (2.61)$$

Для определения функции первого приближения  $w_1$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} D_0^2 w_1 - \nabla^2 w_1 = & (-2i\omega_k A'_k e^{i\omega_k T_0} - 2ic\omega_k A_k e^{i\omega_k T_0}) J_0(\omega_k r) \\ & + \frac{\lambda}{4} [2 + e^{i2\Omega T_0} + e^{-i2\Omega T_0}] \\ & \cdot \left[ \frac{1}{2} + 2J_0(\omega_k r) A_k e^{i\omega_k T_0} + 3J_0^2(\omega_k r) (A_k^2 e^{2i\omega_k T_0} + A_k \bar{A}_k) \right. \\ & \left. + 4J_0^3(\omega_k r) (A_k^3 e^{3i\omega_k T_0} + 3A_k^2 \bar{A}_k e^{i\omega_k T_0}) \right] + (\text{к. с.}), \end{aligned} \quad (2.62)$$

где штрихом  $()'$  обозначена производная по  $T_1$ . Условие разрешимости линейного операторного уравнения (2.62) является ортогональность правой части уравнения решениям сопряженной однородной задачи [32]. Волновой оператор  $D_0^2 - \nabla^2$  с заданными граничными условиями является самосопряженным, и поэтому условие разрешимости сводится к ортогональности правой части (2.62) выражению (2.61). Таким образом, правая часть уравнения (2.62) после умножения на  $rJ_0(\omega_k r)$  и интегрирования по  $r$  приводится к виду

$$\begin{aligned} -2ig_2\omega_k(A'_k + cA_k)e^{i\omega_k T_0} + \frac{\lambda}{4} [2 + e^{i2\Omega T_0} + e^{-i2\Omega T_0}] \\ \cdot \left[ \frac{1}{2} g_1 + 2g_2 A_k e^{i\omega_k T_0} + 3g_3 (A_k^2 e^{2i\omega_k T_0} + A_k \bar{A}_k) \right. \\ \left. + 4g_4 (A_k^3 e^{3i\omega_k T_0} + 3A_k^2 \bar{A}_k e^{i\omega_k T_0}) \right] + (\text{к. с.}), \end{aligned} \quad (2.63)$$

где  $g_n = \int_0^1 r J_0^n(\omega_k r) dr$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ . Запишем условие близости частоты возбуждения к собственной частоте  $\omega_k$ :

$$2\Omega = \omega_k + \varepsilon\sigma, \quad (2.64)$$

где  $\sigma$  – параметр частотной расстройки. Условие отсутствия секулярных членов в уравнении (2.62), с учетом (2.63), приводит к дифференциальному уравнению для определения комплексной амплитуды  $A_k(T_1)$ :

$$\begin{aligned} -2ig_2\omega_k(A'_k + cA_k) + \lambda g_2 A_k + 6\lambda g_4 A_k^2 \bar{A}_k + \frac{\lambda}{4} g_1 e^{i\sigma T_1} \\ + \frac{3\lambda g_3}{2} A_k \bar{A}_k e^{i\sigma T_1} + \frac{3\lambda g_3}{4} A_k^2 e^{-i\sigma T_1} = 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Переходя к экспоненциальной форме записи (2.59) и отделяя вещественную и мнимую части в полученном уравнении, приходим к следующей системе уравнений относительно амплитуды колебаний  $a(T_1)$  и сдвига фазы  $\beta(T_1)$ :

$$\begin{aligned} \omega_k g_2 \frac{da}{dT_1} &= -\omega_k g_2 c a + \frac{\lambda}{4} \left[ g_1 + \frac{3}{4} g_3 a^2 \right] \sin(\sigma T_1 - \beta), \\ \omega_k g_2 a \frac{d\beta}{dT_1} &= -\frac{\lambda a}{2} \left[ g_2 + \frac{3}{2} g_4 a^2 \right] - \frac{\lambda}{4} \left[ g_1 + \frac{9}{4} g_3 a^2 \right] \cos(\sigma T_1 - \beta). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Произведем замену переменной

$$\gamma(T_1) = \sigma T_1 - \beta(T_1) \quad (2.67)$$

и окончательно получим систему уравнений первого приближения

$$\begin{aligned} \omega_k g_2 \frac{da}{dT_1} &= -\omega_k g_2 c a + \frac{\lambda}{4} \left[ g_1 + \frac{3}{4} g_3 a^2 \right] \sin \gamma, \\ \omega_k g_2 a \frac{d\gamma}{dT_1} &= \omega_k g_2 a \sigma + \frac{\lambda a}{2} \left[ g_2 + \frac{3}{2} g_4 a^2 \right] + \frac{\lambda}{4} \left[ g_1 + \frac{9}{4} g_3 a^2 \right] \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Стационарные режимы колебаний определяются из условия равенства нулю правых частей уравнений (2.68); после исключения  $\gamma$  это условие приводит к следующему соотношению между амплитудой  $a$  и расстройкой частоты  $\sigma$ :

$$\left[ \frac{\omega_k g_2 c a}{g_1 + \frac{3}{4} g_3 a^2} \right]^2 + \left[ \frac{\omega_k g_2 a \sigma + \frac{\lambda a}{2} \left( g_2 + \frac{3}{4} g_4 a^2 \right)}{g_1 + \frac{9}{4} g_3 a^2} \right]^2 = \frac{\lambda^2}{16}. \quad (2.69)$$

Уравнение (2.69) с точностью до обозначений и проекционных коэффициентов  $g_n$  совпадает с уравнением (2.19). Таким образом, установлено, что асимптотический метод многих масштабов, примененный к нелинейному уравнению в частных производных (2.54) в области  $k$ -го резонанса, приводит к тем же выражениям для стационарных колебаний, что и при исследовании одномерной модели микроэлектромеханического осциллятора (2.2) с соответствующими массовой, диссипативной и жесткостной характеристиками.

Содержательным отличием вышеприведенных результатов от одномерной модели является наличие в аналитической зависимости (2.69) коэффициентов  $g_k$  и частот  $\omega_k$ , что позволяет исследовать конкретные области резонансных колебаний мембраны.

На рисунках 2.16-2.18 показаны вычисленные по формуле (2.69) амплитудно-частотные характеристики системы (2.54) в областях первого, второго и третьего главных резонансов соответственно для различных значений коэффициента диссипации  $c$ ; значения остальных параметров фиксированы:  $\varepsilon = 1, \lambda = 0,1$ .

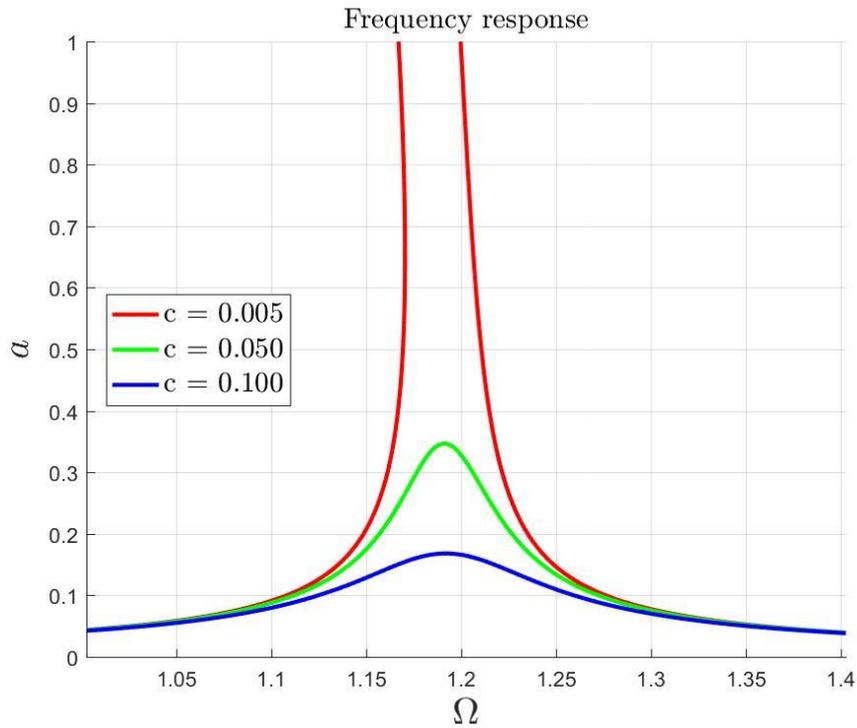


Рисунок 2.16 – АЧХ в области первого главного резонанса ( $k = 1$ )

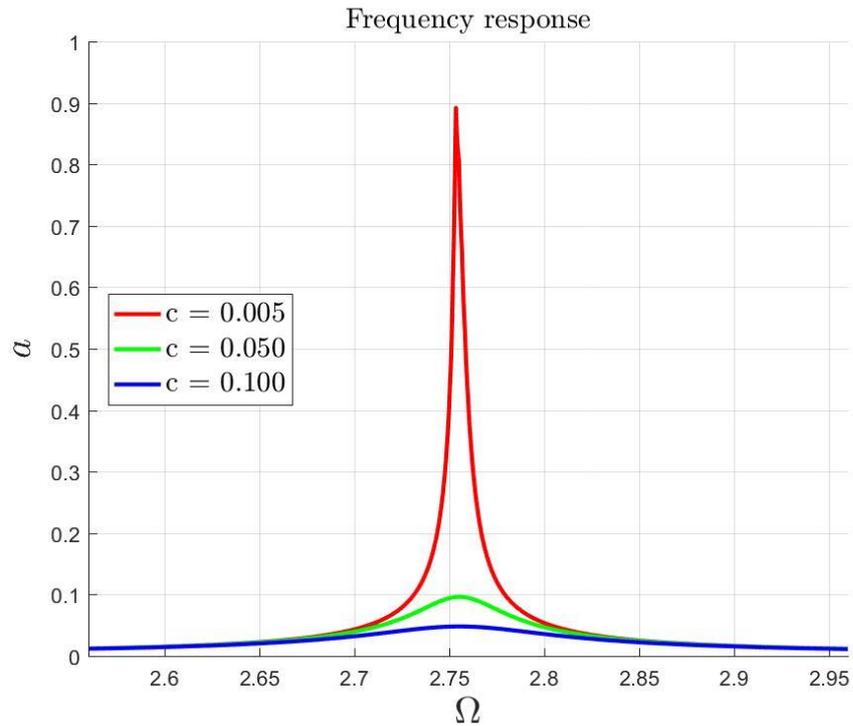


Рисунок 2.17 – АЧХ в области второго главного резонанса ( $k = 2$ )

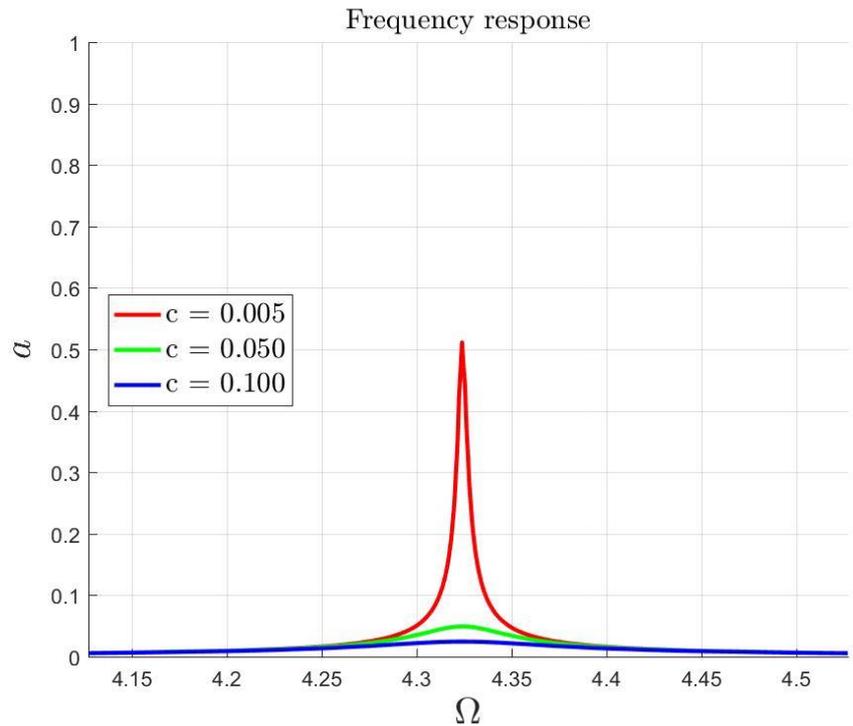


Рисунок 2.18 – АЧХ в области третьего главного резонанса ( $k = 3$ )

Как видно из рисунков, вид амплитудно-частотных характеристик с качественной стороны совпадает с АЧХ, полученными при исследовании одномерной модели (п. 2.1.1).

Перейдем к построению решения задачи (2.53) с помощью метода Галеркина, приводящего рассматриваемое уравнение в частных производных к системе нелинейных

обыкновенных дифференциальных уравнений с целью дальнейшего применения к данной системе асимптотических методов нелинейной механики. Данное исследование представляет интерес в двух отношениях. Во-первых, оно позволяет определить, приводит ли изначальная дискретизация системы методом Галеркина к иным результатам, чем в случае непосредственного применения асимптотических методов к исходному уравнению в частных производных. Во-вторых, здесь возникает возможность исследовать вопрос о взаимном влиянии колебаний по различным собственным формам в конкретной резонансной области получаемой многомерной нелинейной динамической системы. В частности, будет обосновано высказанное ранее утверждение о том, что при наличии трения все формы колебаний системы (2.54), которые не возбуждаются извне непосредственно, затухают со временем.

Разложив нелинейное слагаемое в уравнении (2.53) в ряд Тейлора, получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \lambda \cos^2 \Omega t \cdot (1 + 2w + 3w^2 + 4w^3),$$

$$r = 0: \quad w - \text{огр.},$$

$$r = 1: \quad w = 0.$$
(2.70)

Представим искомую функцию прогиба  $w(r, t)$  в виде ряда по собственным формам свободных колебаний заземленной по краю мембраны:

$$w(r, t) = \sum_{m=1}^n \eta_m(t) \phi_m(r),$$
(2.71)

где, как и ранее,

$$\phi_m(r) = J_0(\gamma_{0m} r),$$
(2.72)

а числа  $\gamma_{0m}$  являются корнями уравнения

$$J_0(\gamma) = 0$$
(2.73)

и представляют собой безразмерные частоты свободных колебаний  $\omega_m$ :

$$\gamma_{0m} = \omega_m.$$
(2.74)

Функции формы  $\phi_m(r)$  удовлетворяют соотношению

$$\nabla^2 \phi_m = -\omega_m^2 \phi_m.$$
(2.75)

Имея в виду дальнейшее построение приближенных аналитических решений задачи (2.53), рассмотрим нелинейное взаимодействие двух собственных форм с индексами  $k$  и  $m$  (таким образом,  $n = 2$ ).

Подстановка (2.71) в (2.70) и запись проекционных условий приводит к следующему дифференциальному уравнению для  $\eta_k(t)$ :

$$\begin{aligned}
& \ddot{\eta}_k + 2\varepsilon c \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k \\
& = \frac{\varepsilon \lambda}{g_{20}} \cos^2 \Omega t \\
& \cdot [g_{10} + 2g_{20}\eta_k + 3g_{30}\eta_k^2 + 6g_{21}\eta_k\eta_m + 3g_{12}\eta_m^2 \\
& + 4g_{40}\eta_k^3 + 12g_{31}\eta_k^2\eta_m + 12g_{22}\eta_k\eta_m^2 + 4g_{13}\eta_m^3],
\end{aligned} \tag{2.76}$$

где введен малый параметр  $\varepsilon$  при коэффициенте диссипации  $c$  и амплитуде внешнего возбуждения  $\lambda$ , а коэффициенты  $g_{ij}$  определяются как

$$g_{ij} = \int_0^1 r \phi_k^i(r) \phi_m^j(r) dr. \tag{2.77}$$

Уравнение для  $\eta_m$  получается переменной мест индексов коэффициентов  $g_{ij}$  и взаимной заменой индексов  $k$  и  $m$ :

$$\begin{aligned}
& \ddot{\eta}_m + 2\varepsilon c \dot{\eta}_m + \omega_m^2 \eta_m \\
& = \frac{\varepsilon \lambda}{g_{02}} \cos^2 \Omega t \\
& \cdot [g_{01} + 2g_{02}\eta_m + 3g_{03}\eta_m^2 + 6g_{12}\eta_k\eta_m + 3g_{21}\eta_k^2 \\
& + 4g_{04}\eta_m^3 + 12g_{13}\eta_k\eta_m^2 + 12g_{22}\eta_k^2\eta_m + 4g_{31}\eta_k^3].
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Для решения полученной системы двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка (2.76), (2.78) применим метод усреднения [5,63].

Порождающее решение системы имеет вид

$$\eta_i = a_i \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad i = k, m. \tag{2.79}$$

Решение возмущенной системы будем искать в форме (2.79), где  $a$  и  $\varphi$  – функции времени, подлежащие определению. Из условия на вид производных функций  $\eta$

$$\dot{\eta}_i = -a_i \omega_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad i = k, m \tag{2.80}$$

найдем следующие соотношения, связывающие  $a$  и  $\varphi$ :

$$\dot{a}_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) - a_i \dot{\varphi}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) = 0, \quad i = k, m. \tag{2.81}$$

Дифференцируя равенства (2.80) для определения  $\dot{\eta}_i$  и подставляя полученные выражения в (2.76), (2.78), приходим к системе четырех дифференциальных уравнений (включая (2.81)) для определения  $a_k, \varphi_k, a_m, \varphi_m$ . Данные уравнения можно разрешить относительно первых производных функций  $a$  и  $\varphi$ , получив таким образом нормальную систему ОДУ. Соответствующие символьные операции выполняются с помощью модуля *Symbolic Math Toolbox* программной системы *MATLAB* [118]. Полученная система уравнений является громоздкой и поэтому далее не приводится.

Рассмотрим область главного резонанса на частоте  $\omega_k$ :  $2\Omega \cong \omega_k + \varepsilon\sigma$ . Следуя методу усреднения, оставим в правой части нормальной системы ОДУ только постоянные и медленно

меняющиеся слагаемые, т.е. члены с частотой изменения во времени, близкой или равной нулю.

В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 a'_k &= -ca_k - \frac{\lambda}{4g_{20}\omega_k} \left[ g_{10} + \frac{3g_{12}a_m^2}{2} + \frac{3g_{30}a_k^2}{4} \right] \sin(\varphi_k - \sigma T_1), \\
 \varphi'_k &= -\frac{\lambda}{2g_{20}\omega_k} \left[ g_{20} + 3g_{22}a_m^2 + \frac{3g_{40}a_k^2}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( 9g_{30}a_k + \frac{g_{10}}{a_k} + \frac{3g_{12}a_m^2}{a_k^2} \right) \cos(\varphi_k - \sigma T_1) \right], \\
 a'_m &= -ca_m, \\
 \varphi'_m &= -\frac{\lambda}{2g_{02}\omega_m} \left[ g_{02} + \frac{3g_{04}a_m^2}{2} + 3g_{22}a_k^2 + \frac{3g_{12}a_k}{2} \cos(\varphi_k - \sigma T_1) \right],
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

где  $T_1 = \varepsilon t$  – медленное время, и штрихом обозначена производная по  $T_1$ .

Из формулы (2.82)<sub>3</sub> видно, что при положительной диссипации  $c > 0$  амплитуда колебаний  $a_m$  стремится к нулю:  $a_m \rightarrow 0$ . Следовательно, стационарные колебания в рассматриваемой резонансной зоне представляют собой колебания по  $k$  – й форме, определяемые следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 \omega_k g_{20} \frac{da_k}{dT_1} &= -\omega_k g_{20} ca_k + \frac{\lambda}{4} \left[ g_{10} + \frac{3}{4} g_{30} a_k^2 \right] \sin \gamma_k, \\
 \omega_k g_{20} a_k \frac{d\gamma_k}{dT_1} &= \omega_k g_{20} a_k \sigma + \frac{\lambda a_k}{2} \left[ g_{20} + \frac{3}{2} g_{40} a_k^2 \right] + \frac{\lambda}{4} \left[ g_{10} + \frac{9}{4} g_{30} a_k^2 \right] \cos \gamma_k,
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

где

$$\gamma_k = \sigma T_1 - \varphi_k. \tag{2.84}$$

Уравнения (2.83) с точностью до обозначений совпадают с уравнениями (2.68). Таким образом, установлено, что дискретизация системы с помощью метода Галеркина приводит к тем же формулам первого приближения для движений мембраны в резонансных зонах, что и при непосредственном применении асимптотических методов (в рассмотренном случае, метода многих масштабов) к уравнению в частных производных (2.54). Кроме того, показано, что на главном резонансе  $2\Omega \cong \omega_k$  формы колебаний мембраны, которые напрямую не возбуждаются извне, затухают со временем и не оказывают влияния на стационарные колебания системы.

Отметим, что исследование вторичных резонансов  $\Omega \cong \omega_k$ ,  $\Omega \cong \frac{3}{2}\omega_k$  и построение в этих случаях уравнений первого приближения, аналогичных (2.82), также приводит к выводу об отсутствии в рассматриваемой системе нелинейного модального взаимодействия в стационарных режимах колебаний.

Представленные выше два метода решения задачи (2.53) позволили найти приближенные аналитические выражения для режимов движения мембраны в переменном

электрическом поле. При этом были сделаны два допущения. Во-первых, введение в уравнение движения малого параметра  $\varepsilon$  и применение асимптотических методов соответствует предположению о малости диссипации в системе и амплитуды внешнего возбуждения. Во-вторых, разложение нелинейного слагаемого, отвечающего пондеромоторной силе, в ряд Тейлора до членов третьей степени подразумевает допущение о малости безразмерных прогибов мембраны  $w$  по сравнению с единицей. При этом анализ форм равновесия мембраны в поле одного электрода, выполненный в п. 1.3.2, показал, что для достаточно точного описания форм равновесия с амплитудами, близкими к единице, требуется учет не менее семи членов в ряде Тейлора (см. рисунок 1.23). Кроме того, утверждение об отсутствии нелинейного модального взаимодействия в системе на резонансе, допускающее в конечном итоге рассмотрение одномерной модели, было доказано выше лишь в первом приближении по параметру  $\varepsilon$  и, вообще говоря, не выполняется для сильно нелинейной системы. Таким образом, проведенный анализ движений мембраны не является достаточно полным.

В связи с этим, представляет интерес применение метода Галеркина («*reduced order modelling*») к исходному нелинейному уравнению (2.53)<sub>1</sub>. Аналогичный прием был использован в п. 1.3 при исследовании форм равновесия мембран и пластинок.

Умножим уравнение (2.53)<sub>1</sub> на  $(1 - w)^2$ , подставим вместо  $w$  ряд (2.71) и запишем проекционные условия. Получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\int_0^1 r \phi_s \left( 1 - \sum_{m=1}^n \eta_m \phi_m \right)^2 \left[ \sum_{p=1}^n (\dot{\eta}_p + 2c\dot{\eta}_p + \gamma_{0p}^2 \eta_p) \phi_p \right] dr = \lambda \cos^2 \Omega t \int_0^1 r \phi_s dr, \quad s = 1, \dots, n. \quad (2.85)$$

Данная система является линейной относительно старших производных  $\dot{\eta}_p$  и может быть разрешена относительно них. При учете нескольких форм колебаний возникающие здесь выражения являются достаточно громоздкими и не выписываются явно. Выполнение необходимых символьных операций в программной системе *MATLAB* приводит систему (2.85) к нормальной стандартной форме, допускающей дальнейшее применение программного комплекса *MATCONT*. Метод сведения неавтономной системы ОДУ к автономной динамической системе – тот же, что и при исследовании одномерной модели в п. 2.1.1. Таким образом, возникает возможность численного продолжения по параметрам  $\Omega$  и  $\lambda$  установившихся периодических движений мембраны с учетом произвольного числа  $n$  координатных функций  $\phi_i(r)$  и, соответственно, степеней свободы  $\eta_i(t)$ .

На рисунках 2.19, 2.20 показано сравнение зависимостей амплитуды стационарных колебаний от частоты в области первого главного резонанса  $2\Omega \approx \omega_1$ , полученных методом многих масштабов (*MMS*) и методом Галеркина (*ROM*) для различных значений параметра диссипации  $c$ .

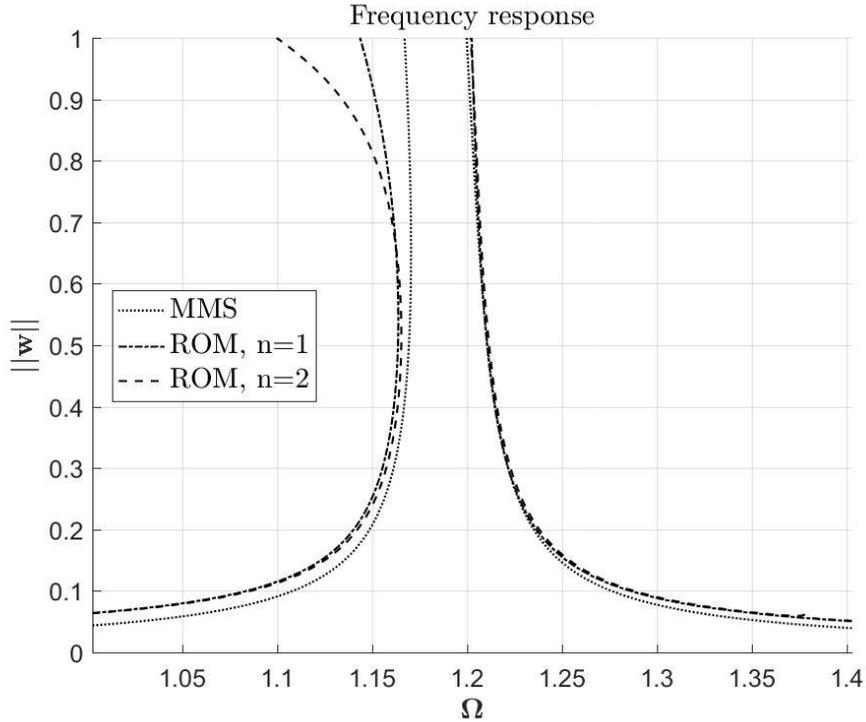


Рисунок 2.19 – АЧХ в области первого главного резонанса  $2\Omega \approx \omega_1$ ;  $\lambda = 0.1, c = 0.005$

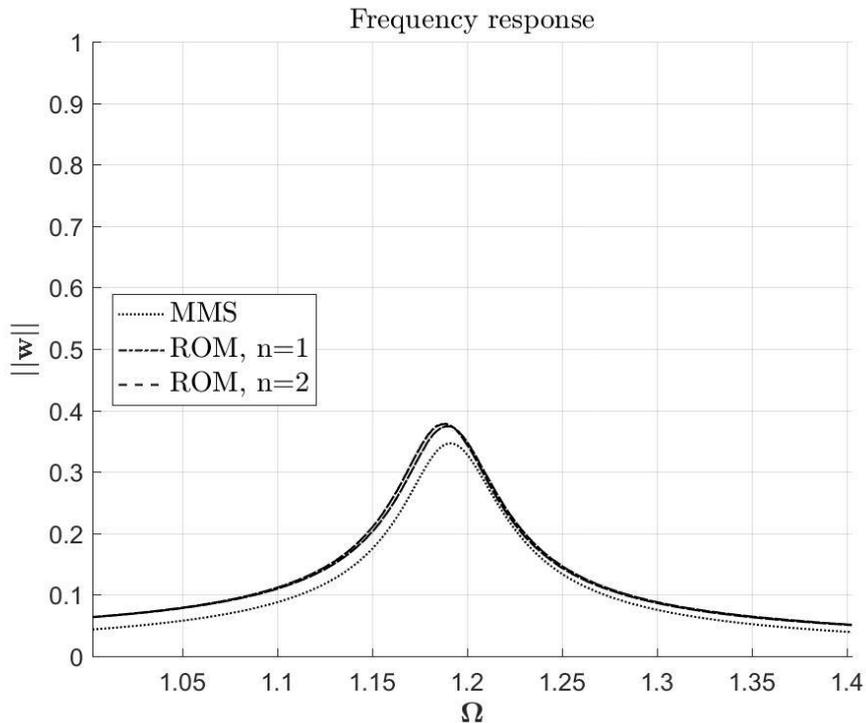


Рисунок 2.20 – АЧХ в области первого главного резонанса  $2\Omega \approx \omega_1$ ;  $\lambda = 0.1, c = 0.05$

Как видно из рисунков, асимптотическое разложение дает хорошее приближение к прямому численному решению методом Галеркина лишь при достаточно малых по сравнению с единицей амплитудах колебаний; при увеличении добротности системы влияние нелинейного модального взаимодействия, не учтенного в приближенном аналитическом решении (2.83), в резонансной области становится все более значительным. Данный результат согласуется с проведенным в п. 1.3.2 исследованием форм равновесия мембраны, где было показано, что для точного описания состояния системы при больших амплитудах прогиба необходим учет не менее двух координатных функций.

### 2.2.2.2 Система с двумя неподвижными электродами

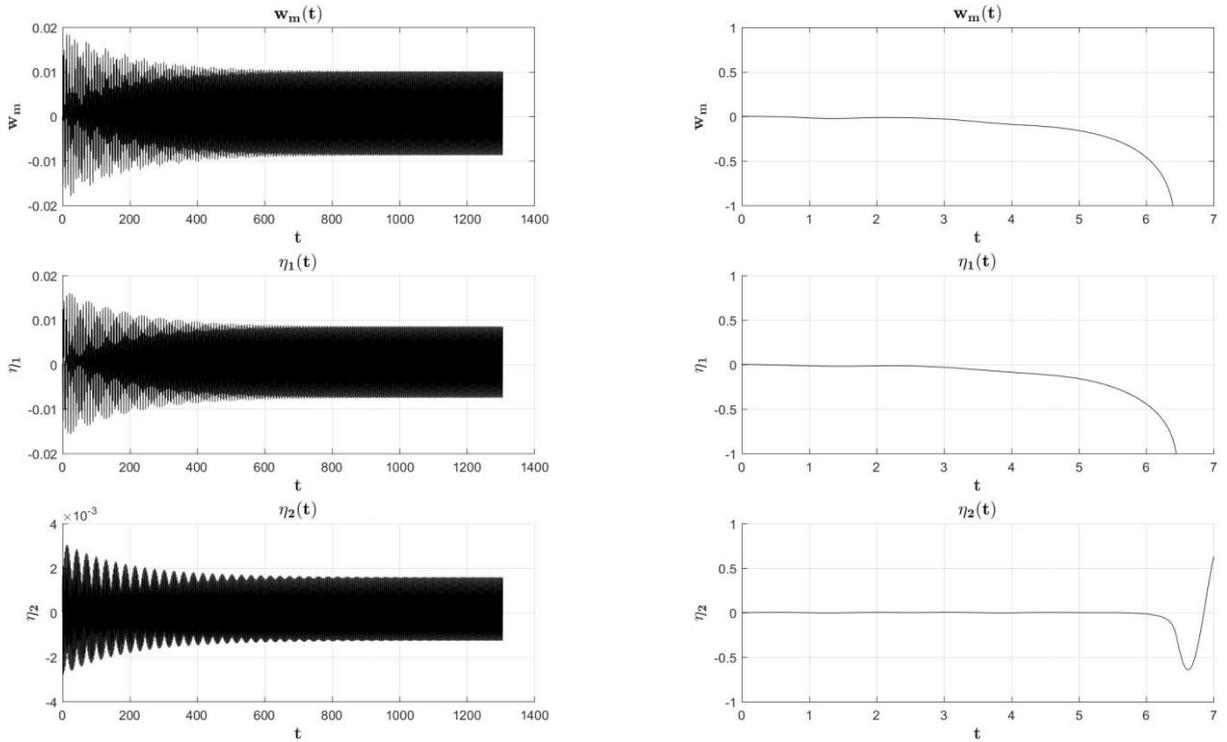
Исследуем осесимметричные колебания круглой мембраны в поле двух электродов в режиме возбуждения «DC-AC». Согласно п. 2.2.1, уравнение движения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \\ = \lambda_1 \frac{(1 + v_1 \cos \Omega_1 t)^2}{(1 - w)^2} - \lambda_2 \frac{(1 + v_2 \cos \Omega_2 t)^2}{(1 + w)^2}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Применение метода Галеркина приводит к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений для модальных коэффициентов  $\eta_i(t)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 r \phi_s \left\{ \left[ 1 - \left( \sum_{m=1}^n \eta_m \phi_m \right)^2 \right]^2 \left[ \sum_{p=1}^n (\ddot{\eta}_p + 2c\dot{\eta}_p + \gamma_{0p}^2 \eta_p) \phi_p \right] \right. \\ \left. - \lambda_1 \left( 1 + \sum_{m=1}^n \eta_m \phi_m \right)^2 (1 + v_1 \cos \Omega_1 t)^2 \right. \\ \left. + \lambda_2 \left( 1 - \sum_{m=1}^n \eta_m \phi_m \right)^2 (1 + v_2 \cos \Omega_2 t)^2 \right\} dr = 0, \\ s = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.87)$$

На рисунке 2.21 показаны зависимости прогиба в центре мембраны  $w_m$  от времени при значениях физического параметра  $\lambda$ , близких к бифуркационному значению  $\frac{\gamma_{01}^2}{4}$ , в котором нейтральное положение равновесия теряет устойчивость (п. 1.3.2.2.5, рисунок 1.26). Кроме того, на рисунке приведены зависимости от времени модальных коэффициентов  $\eta_{1,2}(t)$  при учтенных координатных функциях  $\phi_{1,2}(r)$  ( $n = 2$ ). Значения других параметров следующие:  $c = 0.005, v_1 = 0.01, v_2 = 0.02, \Omega_1 = \Omega_2 = \gamma_{01}$ .



$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.9 \cdot \frac{\gamma_{01}^2}{4}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.1 \cdot \frac{\gamma_{01}^2}{4}$$

Рисунок 2.21 – Зависимость прогиба в центре мембраны от времени

Как видно из рисунков, при прохождении через критическое значение  $\lambda$  колебания мембраны около нейтрального положения равновесия перестают быть устойчивыми, что приводит к схлопыванию упругого элемента с одним из неподвижных электродов («pull-in»).

### 2.2.3 Круглая пластинка в переменном электрическом поле

Приведем уравнения (2.42) к безразмерному виду, удобному при исследовании пластинок с малой мембранной жесткостью:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla^4 w = \beta L(w, \Phi) + \delta \nabla^2 w + \tilde{F}_e, \quad (2.88)$$

$$\nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w),$$

где

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\hat{r}}{R}, & t &= \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \hat{t}, & w &= \frac{\hat{w}}{d}, & \Phi &= \frac{\hat{\Phi}}{Ehd^2}, \\
c &= \frac{R^2}{\sqrt{\rho h D}} \hat{c}, & \delta &= \frac{R^2 T}{D}, & \beta &= \frac{12d^2(1-\nu^2)}{h^2}.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Рассмотрим осесимметричные колебания круглой пластинки в поле одного неподвижного электрода. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla^4 w &= \frac{\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \delta \nabla^2 w + \lambda \frac{(1 + \nu \cos \Omega t)^2}{(1 - w)^2}, \\
\nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial w}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

В случае заземленной по краю пластинки граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
r = 0: & \quad w, \Phi - \text{огр.}; \\
r = 1: & \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Для решения нелинейной динамической краевой задачи (2.90)-(2.91) применим метод Галеркина. Искомую функцию прогиба  $w(r, t)$  будем искать в виде ряда по формам свободных колебаний для линейного уравнения изгиба пластинок:

$$w(r, t) = \sum_{m=1}^n \eta_m(t) \phi_m(r), \tag{2.92}$$

где координатные функции  $\phi_m$  определены по формуле (1.142). Следуя методу, примененному в п. 0 при исследовании форм равновесия пластинки, будем искать функцию напряжений в виде

$$\Phi(r, t) = \sum_{m,p=1}^n \eta_m(t) \eta_p(t) \psi_{mp}(r), \tag{2.93}$$

где функции  $\psi_{mp}(r)$  удовлетворяют соотношению (1.153). Подстановка (2.92), (2.93) в (2.90) приводит к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
\left( 1 - \sum_{l=1}^n \eta_l \phi_l \right)^2 \cdot \left[ \sum_{p=1}^n (\ddot{\eta}_p + 2c \dot{\eta}_p + \gamma_{0p}^4 \eta_p) \phi_p \right] &= \left( 1 - \sum_{l=1}^n \eta_l \phi_l \right)^2 \cdot \\
\cdot \left\{ \frac{\beta}{r} \frac{d}{dr} \left[ \left( \sum_{m=1}^n \eta_m \phi_m' \right) \cdot \left( \sum_{p,q=1}^n \eta_p \eta_q \psi_{pq}' \right) \right] + \frac{\delta}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \left( \sum_{m=1}^n \eta_m \phi_m' \right) \right] \right\} &+ \lambda (1 + \nu \cos \Omega t)^2.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Путем умножения (2.94) на  $r \phi_i(r)$ ,  $i = 1, \dots, n$  и интегрирования по  $r$  от 0 до 1 получим систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка для определения искомых

функций времени  $\eta_1, \dots, \eta_n$ . Как видно из (2.94), данная система является линейной относительно  $\ddot{\eta}_i$  и поэтому может быть сведена к стандартной форме. Соответствующие символьные операции и вычисления проекционных коэффициентов для произвольного числа  $n$  учитываемых координатных функций выполняются в модуле «*Symbolic Math Toolbox*» программной системы *MATLAB*. Параметрами полученной системы дифференциальных уравнений являются  $\lambda, \nu$  и  $\Omega$ . Применение модуля *MATCONT* позволяет выполнять продолжение стационарных периодических движений системы по указанным параметрам.

На рисунке 2.22 показано сравнение вычисленных амплитудно-частотных характеристик системы (2.90) для различного числа координатных функций  $n$  в окрестности первого главного резонанса  $2\Omega \approx \gamma_{01}^2$ . Для остальных параметров приняты следующие значения:  $\beta = 0, \delta = 0, c = 0.005, \lambda = 10, \nu = 0.01$ .

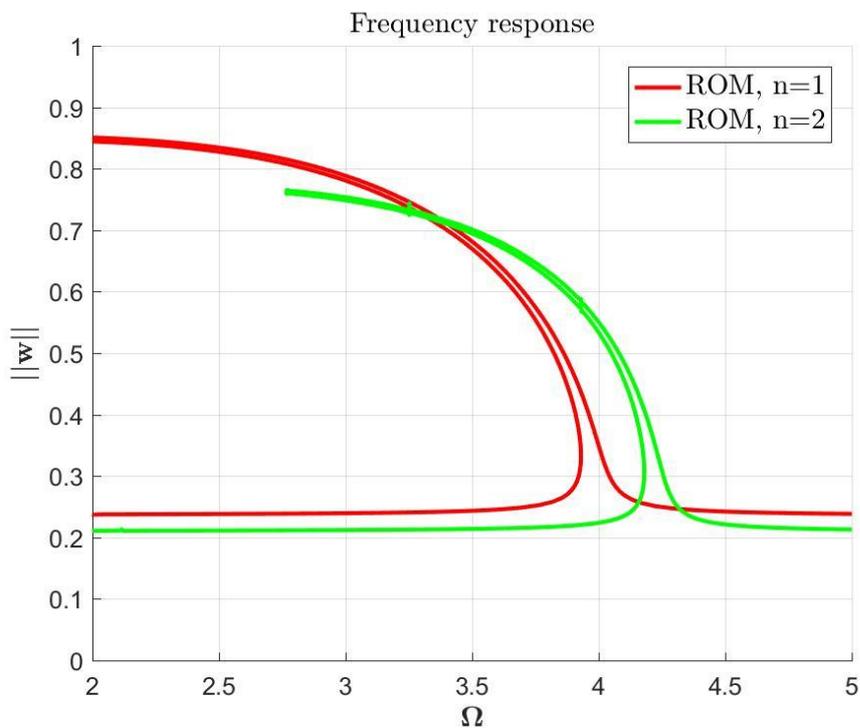


Рисунок 2.22 – Резонансные кривые для различного числа учтенных координатных функций

Как видно из рисунка, число учтенных координатных функций заметно влияет как на расположение скелетной кривой, так и на амплитуду колебаний вдали от резонанса. Расхождения тем больше, чем больше величина прогиба пластинки, что согласуется с результатами проведенного в п. 1.3 анализа сходимости метода Галеркина по числу координатных функций. Кроме количественных отличий, наблюдается качественное отличие, состоящее в отсутствии для системы с  $n = 2$  стационарных режимов колебаний с большой амплитудой при низких частотах (в данном случае, меньших  $\approx 2.75$ ). При этом при частотах, меньших резонансной, но достаточно близких к скелетной кривой, действительно существуют устойчивые стационарные режимы колебаний с большой амплитудой. Область притяжения по

начальным условиям для данных режимов существенно меньше, чем для режимов с малой амплитудой колебаний. В целом, нужно отметить, что для точного анализа динамики пластинки при амплитудах колебаний, близких к единице, необходимо учитывать не менее трех координатных функций. В связи со значительными трудностями, связанными как с вычислением проекционных коэффициентов при формировании динамической системы больших порядков ( $n > 2$ ), так и с её численным интегрированием, далее параметрический анализ динамики пластинки выполняется при учете одной (первой) координатной функции.

На рисунке Рисунок 2.23 показаны резонансные кривые для различных значений параметра геометрической нелинейности  $\beta$ . Для остальных параметров приняты следующие значения:  $\delta = 0$ ,  $c = 0.005$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\nu = 0.01$ .

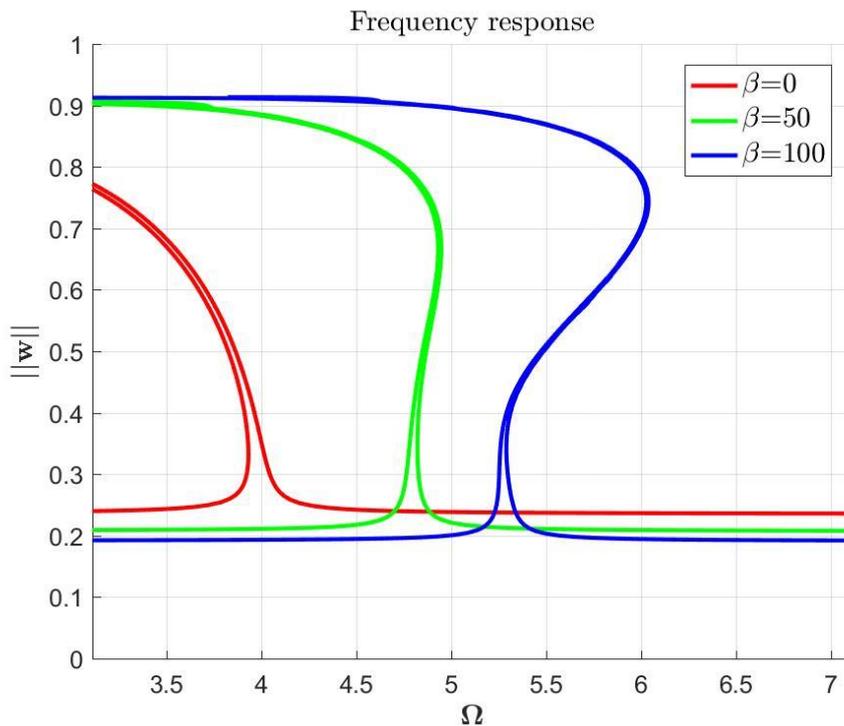


Рисунок 2.23 – Резонансные кривые для различных значений параметра  $\beta$

Как видно из рисунка, при увеличении  $\beta$  возникает интервал прогибов, для которых фактор «жесткой» (геометрической) нелинейности резонансной кривой преобладает над «мягкой» нелинейностью, связанной с пондеромоторными силами электрического поля. Это приводит к появлению в зарезонансной зоне второго устойчивого стационарного режима колебаний с большой амплитудой.

Данный результат продемонстрирован на рисунках 2.24-2.25, где показаны зависимости прогиба в центре пластинки от времени для различных начальных условий при следующих значениях параметров:  $c = 0.005$ ,  $\beta = 100$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $\Omega = 5.5$ .

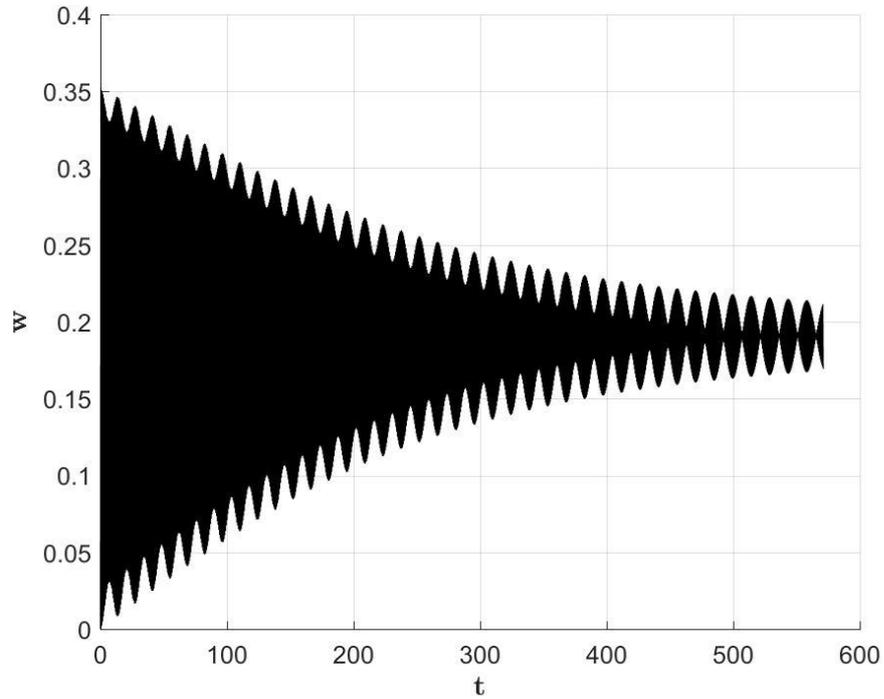


Рисунок 2.24 – Зависимость прогиба в центре пластинки от времени,  $\eta_1(0) = 0, \dot{\eta}_1(0) = 0$

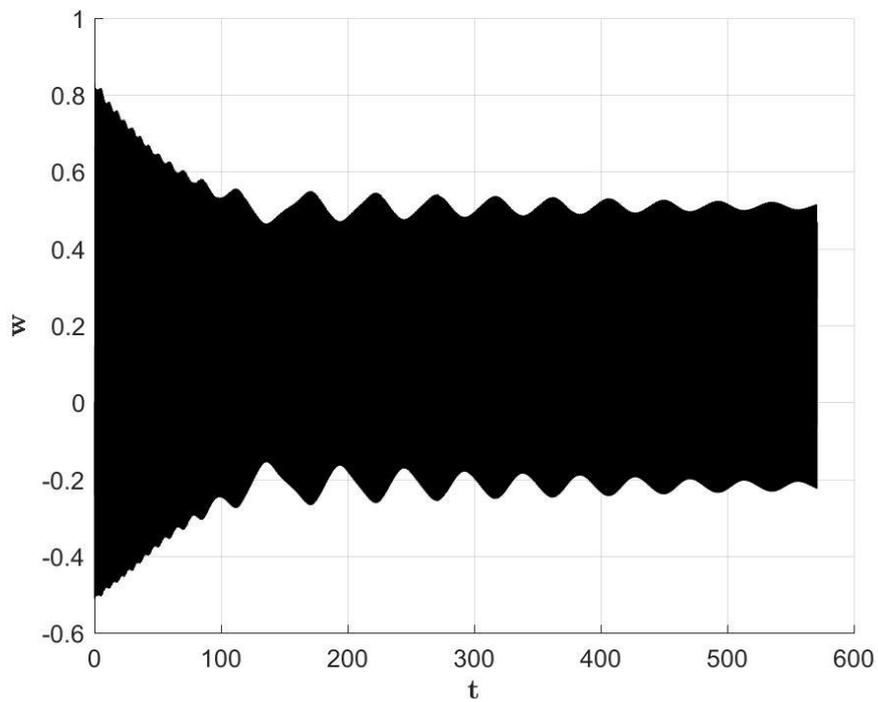


Рисунок 2.25 – Зависимость прогиба в центре пластинки от времени,  $\eta_1(0) = 0, \dot{\eta}_1(0) = 2.3$

Как видно из рисунков, при заданных параметрах в системе возможен выход на два стационарных режима: режим малых колебаний в окрестности положения равновесия (рисунок 2.24) и режим колебаний с большой амплитудой (рисунок 2.25). При этом область притяжения по начальным условиям для второго режима существенно меньше, чем для первого, что

означает малую вероятность реализации данного режима при случайных воздействиях на систему. Отметим, что, согласно рисунку 2.23, в вышеуказанном частотном диапазоне существует и третий устойчивый режим стационарных колебаний, связанный с действием пондеромоторных сил электрического поля. Однако данный режим практически нереализуем в связи с малостью его области притяжения.

На рисунке 2.26 показана резонансная кривая для различных значений параметра  $v$ . Для остальных параметров приняты следующие значения:  $c = 0.005$ ,  $\beta = 100$ ,  $\lambda = 10$ .

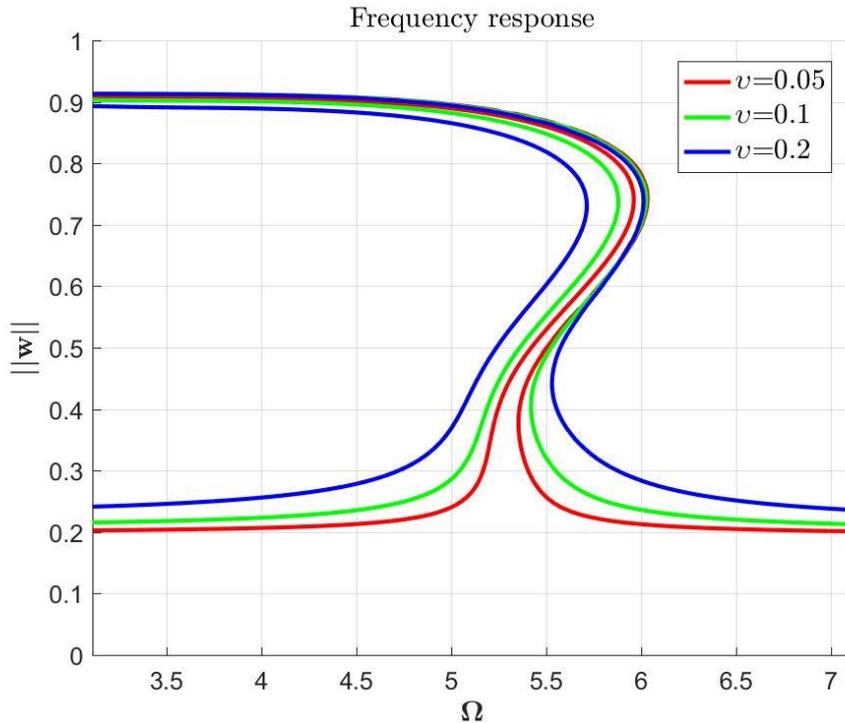


Рисунок 2.26 – Резонансные кривые для различных значений параметра  $v$

Как видно из рисунка, при росте  $v = \frac{V_{AC}}{V_{DC}}$  увеличивается ширина резонансной зоны.

На рисунке 2.27 показана зависимость амплитуды стационарных колебаний от величины параметра  $v$  при частоте, превышающей резонансную ( $\Omega = 5.5$ ), для различных значений параметра  $\beta$ . Для остальных параметров приняты следующие значения:  $c = 0.005$ ,  $\lambda = 10$ .

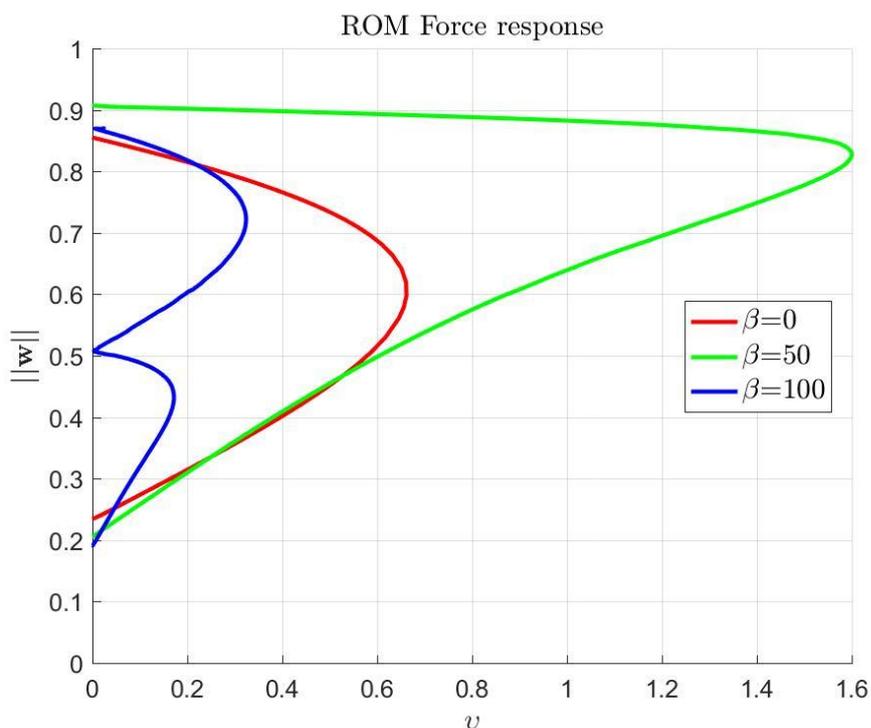


Рисунок 2.27 – Зависимость амплитуды колебаний от  $\nu$  при различных  $\beta$

Как видно из рисунка, при  $\beta = 100$  в системе существует два устойчивых режима колебаний. Примечательно, что при промежуточном значении  $\beta = 50$  в системе существуют устойчивые режимы колебаний при больших значениях параметра  $\nu$ , характеризующего величину переменной составляющей электростатического возбуждения. Таким образом, наблюдается существенно нелинейная зависимость качественной картины возможных режимов движения от параметра геометрической нелинейности  $\beta$ . На рисунке 2.28 показан пример вышеописанного режима колебаний при следующих значениях параметров:  $\beta = 50$ ,  $c = 0.005$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\nu = 1$ ,  $\Omega = 5.5$ .

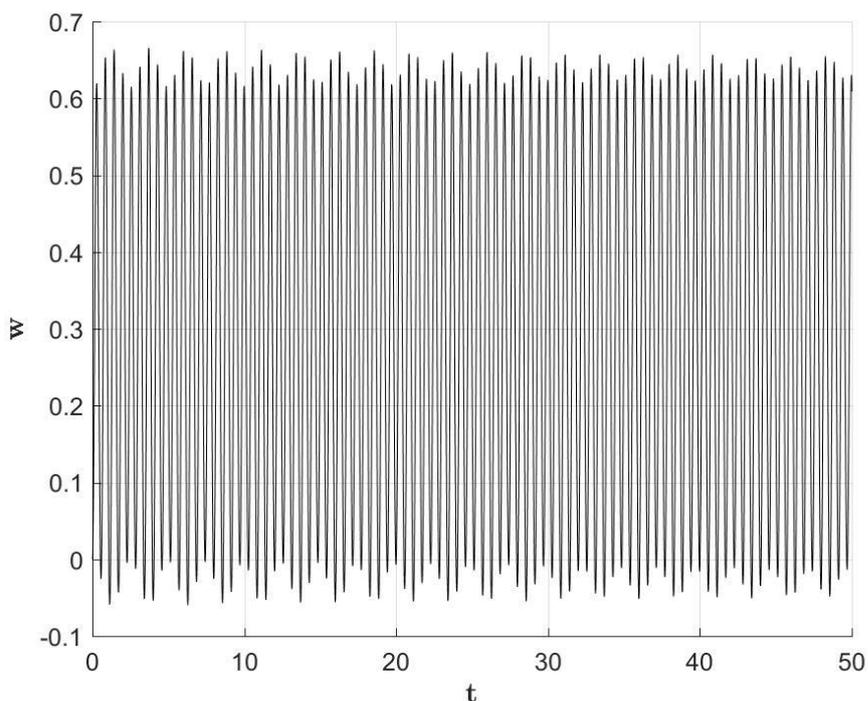


Рисунок 2.28 – Устойчивый режим колебаний при  $\nu = 1$

На рисунке 2.29 показана зависимость амплитуды стационарных колебаний от величины параметра  $\nu$  при частоте, меньшей резонансной ( $\Omega = 4$ ), для различных значений параметра  $\beta$ . Для остальных параметров приняты следующие значения:  $c = 0.005$ ,  $\lambda = 10$ .

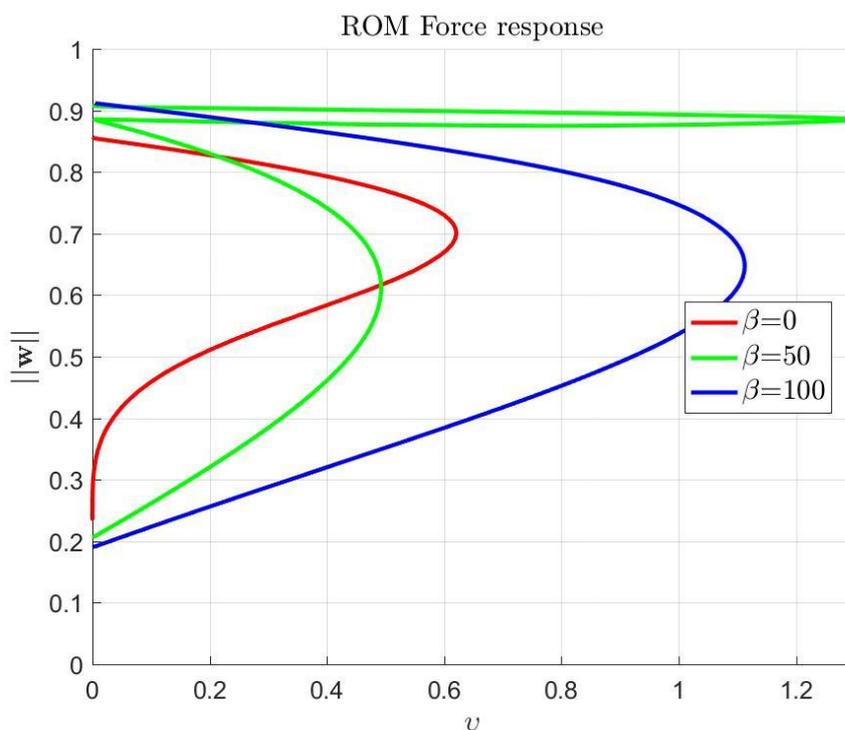


Рисунок 2.29 – Зависимость амплитуды колебаний от  $\nu$  при различных  $\beta$

Как видно из рисунка, увеличение жесткости, вызванное фактором геометрической нелинейности, приводит к увеличению значений параметра  $\nu$ , при которых происходит

исчезновение стационарных периодических режимов колебаний. Наблюдаемое при  $\beta = 50$  существование двух устойчивых режимов движения в некотором диапазоне значений  $\nu$  является скорее математической, чем физической особенностью, вызванной неточностью одномодального приближения Галеркина при амплитудах прогиба пластинки, близких к единице.

На рисунке 2.30 показана зависимость прогиба в центре пластинки от времени при следующих значениях параметров:  $c = 0.005$ ,  $\beta = 50$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\Omega = 4$ .

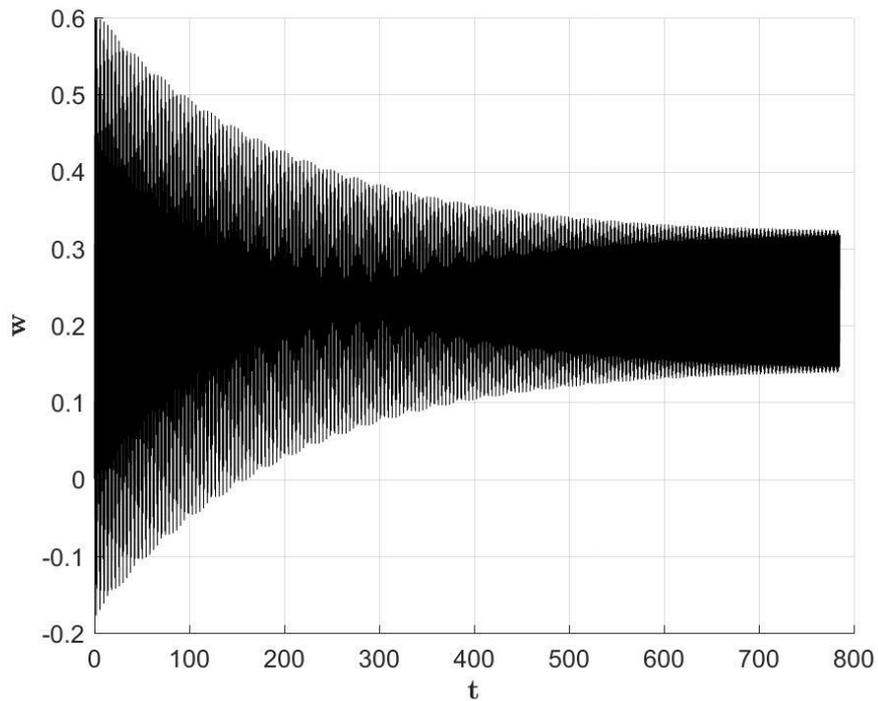


Рисунок 2.30 – Зависимость прогиба в центре пластинки от времени

### **3 Динамика упругих элементов нано- и микросистемной техники в термоэлектрических полях**

В связи с интенсивным развитием микро- и наносистемной технологии большое внимание научного сообщества стало направляться на изучение новых физически нелинейных связанных задач (электро-, магнито-, термоупругости и др.), описывающих сложные процессы работы различных приборов и устройств на базе НЭМС/МЭМС. В большинстве исследований рассматриваются математические постановки с совместным учетом двух физических полей (например, механического и температурного). В первых двух главах работы были представлены решения ряда статических и динамических задач электроупругости мембран и пластинок, входящих в состав детектирующих и исполнительных устройств. Значительно реже встречаются работы, в которых исследуется совместное действие трех и более физических полей. В ряде случаев подобное исследование является необходимым для точного определения эксплуатационных характеристик и возможных режимов работы проектируемых систем.

В настоящей главе рассматриваются нелинейные задачи термо-электроупругости для элементов нано- и микросистемной техники. В первой части выполняется анализ влияния термоупругой диссипации на добротность нано- и микроэлектромеханических резонаторов. Во второй части исследуется динамика и устойчивость электростатического преобразователя под действием теплового импульса.

### 3.1 Термоупругая диссипация в нано- и микроэлектромеханических резонаторах

Важнейшей характеристикой широкого класса объектов нано- и микросистемной техники (узкополосные высокочастотные фильтры, акселерометры, высокоточные актуаторы и др.) является добротность резонансных свойств. Стремление к увеличению рабочих частот приводит к миниатюризации данных устройств. Однако экспериментальные исследования показывают, что добротность резонаторов значительно уменьшается вместе с их размерами, в том числе и для монокристаллических материалов [91]. Изучение различных механизмов диссипации и степени их влияния на добротность нано- и микромасштабных систем представляет большой практический интерес. Среди причин диссипации можно выделить две группы: внешние (связанные с параметрами окружающей среды) и внутренние [85]. Большинство внешних механизмов диссипации могут быть эффективно минимизированы. Например, диссипация за счет взаимодействия упругого элемента со слоем жидкости может быть минимизирована путем увеличения расстояния между обкладками конденсатора и герметизации устройства [69]. Потери в опорах могут быть нивелированы путем оптимизации конструкции и метода монтажа. Напротив, внутренние механизмы диссипации являются фундаментальными, т.к. они связаны со свойствами материала резонатора и, таким образом, определяют верхнюю границу для величины добротности.

Одной из важнейших составляющих внутренних потерь для микро- и нано-масштабных механических резонаторов являются необратимые процессы, связанные с термоупругой диссипацией – процессом рассеяния механической энергии упругих колебаний путем её превращения в тепло [91]. К примеру, если стержень испытывает изгибные колебания, то его волокна попеременно то нагреваются, то охлаждаются. При этом от нагретых (сжатых) волокон к охлажденным (растянутым) волокнам устремляется тепловой поток, который вследствие периодичности изменения температуры также оказывается периодическим. Процесс передачи тепла от более холодной части к нагретой является необратимым, и, как результат, колебания сопровождаются рассеянием механической энергии.

Впервые механизм термоупругой диссипации был исследован в работах Зинера [19,109,110], где были получены приближенные аналитические формулы для добротности металлических балок при изгибных колебаниях.

В основе т.н. стандартной модели Зинера обобщенно упругого тела лежит линейная реологическая модель Кельвина-Фойгта [34,38], связывающая напряжения и деформации, а также их производные:

$$\sigma + \tau_\epsilon \dot{\sigma} = E_R (\epsilon + \tau_\sigma \dot{\epsilon}). \quad (3.1)$$

Здесь  $\tau_\epsilon$  – время релаксации напряжения при постоянной деформации;  $\tau_\sigma$  – время релаксации деформации при постоянном напряжении;  $E_R$  – модуль упругости после релаксации (изотермический модуль упругости).

Поиск периодического решения в виде

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}, \epsilon = \epsilon_0 e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

приводит к зависимости между амплитудами напряжения  $\sigma_0$  и деформации  $\epsilon_0$  посредством комплексного упругого модуля. Величина диссипации (внутреннего трения) тела  $Q^{-1}$  определяется как часть энергии, рассеиваемой за радиан колебаний. В случае малой диссипации, её значение определяется формулой

$$Q^{-1} = 2 \left| \frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} \right|, \quad (3.3)$$

что для модели (3.1) дает

$$Q^{-1} = \Delta_E \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad (3.4)$$

где  $\tau = \sqrt{\tau_\sigma \tau_\epsilon}$ ,  $E_S = E_R(\tau_\sigma/\tau_\epsilon)$  – адиабатический модуль упругости и  $\Delta_E = \frac{E_S - E_R}{\sqrt{E_S E_R}}$  – модуль релаксации.

Из выражения (3.4) следует, что максимальное значение коэффициента диссипации равно  $\Delta_E/2$ , и оно принимается при  $\omega\tau = 1$ . Качественное объяснение наличия пика на зависимости затухания от частоты состоит в следующем. Если частота колебаний много меньше эффективной скорости релаксации  $1/\tau$ , то состояние системы близко к термодинамическому равновесию и рассеяние механической энергии незначительно. В противоположном случае, когда частота колебаний существенно выше скорости релаксации ( $\omega \gg 1/\tau$ ), диссипация энергии также невелика по причине недостаточности времени для значительного теплопереноса. Лишь при совпадении порядков величин  $\omega$  и  $1/\tau$  возникают условия для существенного рассеяния механической энергии.

Из термодинамических соображений известно [27], что модуль релаксации  $\Delta_E$  может быть следующим образом выражен через характеристики материала:

$$\Delta_E = \frac{E_S - E}{E} = \frac{E\alpha_T^2 T_0}{C_p}, \quad (3.5)$$

где  $T_0$  – температура отсчетной конфигурации,  $C_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\alpha_T$  – коэффициент линейного температурного расширения. В формуле (3.5) принято, что различие между адиабатическим и изотермическим модулями упругости мало:  $\sqrt{E_S E_R} \cong E_R \equiv E$ . Данное соотношение с высокой точностью выполняется для материалов, используемых в НМСТ.

В работах Зинера вычислены времена релаксации  $\tau$ , соответствующие различным формам изгибных колебаний тонких балок. Показано, что для балок прямоугольного поперечного сечения 98,6% рассеяния происходит при колебаниях по первой форме, причем время релаксации  $\tau_Z$  равно

$$\tau_Z = \frac{\rho C_p h^2}{\pi^2 k}, \quad (3.6)$$

где  $h$  - толщина балки,  $\rho$  – объемная плотность,  $k$  – коэффициент теплопроводности.

Таким образом, согласно (3.4)-(3.6), приближенное выражение для величины диссипации имеет вид

$$Q_Z^{-1} = \frac{E \alpha_T^2 T_0}{C_p} \frac{\omega \tau_Z}{1 + (\omega \tau_Z)^2}, \quad (3.7)$$

где  $\omega$  – частота изгибных колебаний балки по первой форме.

Полученная оценка для добротности  $Q_Z$  имеет широкое применение при проектировании современных нано- и микроэлектромеханических резонаторов в виде балок, однако она непосредственно неприменима к геометрически более сложным конструкциям, таким как пластинки и оболочки. Кроме того, данная оценка не учитывает влияние электрического поля на характер колебаний системы, которое было детально рассмотрено в первых двух главах безотносительно к тепловым процессам.

Как было показано, действие постоянного электрического поля заключается в изменении равновесной конфигурации упругого элемента и его собственного спектра колебаний. Пондеромоторная сила электрического поля в рассматриваемом приближении является консервативной (см. п. 1.3.1), и поэтому при увеличении напряжения между обкладками собственные частоты уменьшаются, оставаясь вещественными. В то же время, учет связанных термомеханических процессов приводит к выходу спектра свободных колебаний с вещественной оси на комплексную плоскость, в чем и выражается факт наличия диссипации механической энергии. В связи с этим, представляет интерес изучение совместного влияния температурного и электрического полей на динамику упругих элементов нано- и микросистемной техники.

Целью настоящего исследования является анализ влияния тепловых и электрических факторов на добротность резонансных свойств круглых упругих пластинок – электростатических преобразователей.

### 3.1.1 Математическая постановка связанной задачи термоупругости пластинок во внешнем электрическом поле

В настоящей главе будут рассматриваться динамические уравнения термоупругости гибких пластинок, основанные на линейной теории недеформируемых нормалей Кирхгофа-Лява [65]:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\nabla^2 M^T + F_e, \\ k\nabla^2 T + q &= \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha_T T}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь  $w$  – прогиб пластинки;  $T$  – температура;  $\rho, E, \nu, \alpha_T, C_p, k$  – физико-механические характеристики материала: объемная плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного температурного расширения, удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности;  $h$  – толщина пластинки;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – модуль изгибной жесткости;  $q$  – объемное тепловыделение;  $F_e$  – распределенная внешняя сила;  $e = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$  – объемная деформация. В предположении наличия установившегося по толщине пластинки распределения температуры мембранное усилие  $N^T$  и изгибающий момент  $M^T$ , вызванные температурным расширением материала, определяются по формулам

$$\begin{aligned} N^T &= \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T - T_0) dz, \\ M^T &= \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z(T - T_0) dz, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $T_0$  – отсчетная температура [16,41]. Поперечная сила, вызванная действием мембранного усилия  $N^T$ , представляет собой нелинейное слагаемое относительно  $w$  и по этой причине отсутствует в уравнении поперечных колебаний пластинки (3.8)<sub>1</sub>.

Компоненты тензора деформаций  $\epsilon_{ii}$  могут быть выражены через компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ii}$  с помощью закона Дюамеля-Неймана [33]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) + \alpha_T(T - T_0), \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) + \alpha_T(T - T_0), \\ \epsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha_T(T - T_0), \end{aligned} \quad (3.10)$$

откуда находим

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{1-\nu} [-\nu(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + (1+\nu)\alpha_T(T - T_0)]. \quad (3.11)$$

Согласно теории гибких пластинок Кирхгофа-Лява, в декартовых координатах компоненты деформации в плоскости пластинки связаны с прогибом  $w$  соотношениями

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= -zw_{xx}, \\ \epsilon_{22} &= -zw_{yy}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Подстановка (3.12) в (3.11) приводит к следующему выражению для объемной деформации:

$$e = -\frac{1-2\nu}{1-\nu}z\nabla^2w + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T(T-T_0).\quad (3.13)$$

Таким образом, уравнение (3.8)<sub>2</sub> может быть записано в виде

$$k\nabla^2T + q = \left(\rho C_p + \frac{E\alpha_T^2T_0(1+\nu)}{(1-2\nu)(1-\nu)}\right)\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{E\alpha_T T}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial t}(z\nabla^2w).\quad (3.14)$$

Для рассматриваемых материалов первое слагаемое в скобках в правой части равенства (3.14) значительно больше второго:

$$\frac{E\alpha_T^2T_0(1+\nu)}{(1-2\nu)(1-\nu)} \ll \rho C_p.\quad (3.15)$$

К примеру, для кремния при  $T_0 = 300\text{ K}$ ,  $\rho C_p \cong 1,6 \cdot 10^6$ ,  $\frac{E\alpha_T^2T_0(1+\nu)}{(1-2\nu)(1-\nu)} = 1,4 \cdot 10^3$  [59].

Пренебрегая вторым слагаемым и считая, что амплитуда изменения температуры в процессе колебаний мала ( $T \cong T_0$ ), приходим к связанным уравнениям термоупругости в виде:

$$\begin{aligned}D\nabla^4w + \rho h \frac{\partial^2w}{\partial t^2} &= -\nabla^2M^T + F_e, \\ k\nabla^2T + q &= \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{E\alpha_T T_0}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial t}(z\nabla^2w).\end{aligned}\quad (3.16)$$

### 3.1.2 Резонансные свойства круглой пластинки в поле одного неподвижного электрода

Рассмотрим задачу о малых колебаниях круглой проводящей пластинки в поле одного неподвижного электрода с учетом термоупругой диссипации. Основной интерес здесь представляет определение характера затухания свободных колебаний в зависимости от геометрических (масштабных) параметров системы, а также температурных и электрических факторов. Согласно п.1.3 и 3.1, исследуемые связанные уравнения термо-электроупругости пластинки имеют вид

$$\begin{aligned}D\nabla^4w + \rho h \frac{\partial^2w}{\partial t^2} &= -\nabla^2M^T + \frac{\epsilon_r\epsilon_0V^2}{2(d-w)^2}, \\ k\nabla^2T &= \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{E\alpha_T T_0}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial t}(z\nabla^2w),\end{aligned}\quad (3.17)$$

где, как и ранее,  $d$  – расстояние между недеформированными обкладками электростатического преобразователя,  $V$  – заданная разность потенциалов.

Будем считать, что резонатор в виде круглой пластинки радиуса  $R$  осуществляет малые осесимметричные колебания в окрестности нетривиальной формы равновесия  $w_s(r; V)$ , определяемой нелинейной краевой задачей

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w_s &= \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V^2}{2(d - w_s)^2}, \\ r = 0: \quad w_s &- \text{огр.}; \\ r = R: \quad w_s &= 0, \quad \frac{dw_s}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Решение данной задачи было получено в главе 1, п. 1.3.3, где путем введения безразмерных величин

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tilde{w}_s = \frac{w_s}{d}, \quad \lambda = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 R^4 V^2}{2d^3 D} \quad (3.19)$$

задача (3.18) была сведена к виду

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \tilde{w}_s &= \frac{\lambda}{(1 - \tilde{w}_s)^2}, \\ \tilde{r} = 0: \quad \tilde{w}_s &- \text{огр.}; \\ \tilde{r} = 1: \quad \tilde{w}_s &= 0, \quad \frac{d\tilde{w}_s}{d\tilde{r}} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для исследования малых колебаний около формы равновесия  $w_s(r; V)$  построим уравнение в возмущениях  $w_d(r, t)$ :

$$w(r, t) = w_s(r; V) + w_d(r, t). \quad (3.21)$$

Подстановка (3.21) в (3.17) и линеаризация полученных уравнений по  $w_d$  приводит к следующей задаче о малых колебаниях:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w_d + \rho h \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2} &= -\nabla^2 M^T + \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V^2}{(d - w_s)^3} w_d, \\ k\nabla^2 T &= \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{E\alpha_T T_0}{1 - \nu} \frac{\partial}{\partial t} (z\nabla^2 w_d). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Решение задачи (3.22) будем искать в виде

$$\begin{aligned} w_d(r, t) &= \phi(r) e^{i\omega t}, \\ T(r, z, t) - T_0 &= \theta(r, z) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где  $\phi, \theta$  – искомые собственные формы колебаний и распределения температуры,  $\omega$  – собственная частота колебаний. Подстановка (3.23) в (3.22) приводит к системе уравнений

$$D\nabla^4\phi + \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\nabla^2\theta dz - \frac{\epsilon_r\epsilon_0V^2}{(d-w_s)^3}\phi = \rho h\omega^2\phi, \quad (3.24)$$

$$k \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - i\omega\rho C_p\theta = -i\omega \frac{E\alpha_T T_0}{1-\nu} z\nabla^2\phi,$$

где во втором уравнении не учтено слагаемое  $k \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}$ , что соответствует предположению о преимущественном переносе тепла по толщине пластинки (от сжатых слоев к растянутым).

Общее решение уравнения (3.24)<sub>2</sub> имеет вид

$$\theta = \frac{E\alpha_T T_0}{(1-\nu)\rho C_p} z\nabla^2\phi + A_1 \sin K_p z + A_2 \cos K_p z, \quad (3.25)$$

где  $A_1, A_2$  – константы, определяемые из граничных условий, а величина  $K_p$  определяется равенством

$$K_p(\omega) = (1-i) \sqrt{\frac{\rho C_p \omega}{2k}}. \quad (3.26)$$

В качестве граничных выберем условия теплоизоляции на верхней и нижней поверхностях пластинки:

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0 \text{ при } z = \pm \frac{h}{2}. \quad (3.27)$$

С учетом данных граничных условий распределение температуры  $\theta$  приобретает вид

$$\theta(r, z) = \frac{E\alpha_T T_0}{(1-\nu)\rho C_p} \nabla^2\phi \left( z - \frac{\sin K_p z}{K_p \cos\left(\frac{K_p h}{2}\right)} \right). \quad (3.28)$$

Подстановка (3.28) в (3.24)<sub>1</sub> приводит к следующей задаче на собственные значения для форм колебаний пластинки:

$$D^T(\omega)\nabla^4\phi - \frac{\epsilon_r\epsilon_0V^2}{[d-w_s(r;V)]^3}\phi = \rho h\omega^2\phi, \quad (3.29)$$

$$r = 0: \quad \phi - \text{огр.};$$

$$r = R: \quad \phi = 0, \quad \frac{d\phi}{dr} = 0,$$

где модифицированный модуль изгибной жесткости  $D^T(\omega)$  определяется выражением

$$D^T(\omega) = D + \frac{E^2\alpha_T^2 T_0}{(1-\nu)^2\rho C_p} \left( \frac{h^3}{12} + \frac{h}{K_p^2} - \frac{2 \tan\left(\frac{K_p h}{2}\right)}{K_p^3} \right). \quad (3.30)$$

Решение нелинейной спектральной задачи (3.29) будем искать в виде ряда Галеркина по формам свободных колебаний круглой защемленной по контуру пластинки:

$$\phi(r) = \sum_{m=1}^n C_m \phi_m(r), \quad (3.31)$$

где

$$\phi_m(r) = \frac{J_0(k_m r)}{J_0(\gamma_m)} - \frac{I_0(k_m r)}{I_0(\gamma_m)}, \quad (3.32)$$

и параметры  $k_m = \frac{\gamma_m}{R}$  определяются корнями уравнения

$$J_0(\gamma)I_1(\gamma) + J_1(\gamma)I_0(\gamma) = 0. \quad (3.33)$$

Подстановка (3.31) в (3.29) и запись проекционных условий приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $C_j$ :

$$\sum_{m=1}^n \left[ (D^T(\omega)\gamma_m^4 - \rho h R^4 \omega^2) \|\phi_m\|^2 \delta_{mj} - \epsilon_r \epsilon_0 V^2 \int_0^R \frac{r \phi_m \phi_j}{(d - w_s(r, V))^3} dr \right] C_j = 0, \quad (3.34)$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Условие равенства нулю определителя системы (3.34) дает нелинейное уравнение, позволяющее вычислить собственные частоты колебаний пластинки  $\omega$  (вообще говоря, комплексные), в зависимости от физических и геометрических параметров системы.

Добротность колебаний по рассматриваемой форме определяется соотношением (3.3):

$$Q^{-1} = 2 \left| \frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} \right|.$$

Далее представлены результаты расчетов добротности круглых кремниевых пластинок со следующими базовыми значениями физических и геометрических параметров:  $R = 18$  мкм,  $h = 0.9$  мкм,  $d = 0.11$  мкм,  $\rho = 2300 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $E = 160$  ГПа,  $k = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ ,  $C_p = 700 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ,  $V = 10$  В.

На рисунках 3.1-3.2 показаны зависимости добротности колебаний по первой и второй собственным формам от толщины пластинки и её радиуса соответственно.

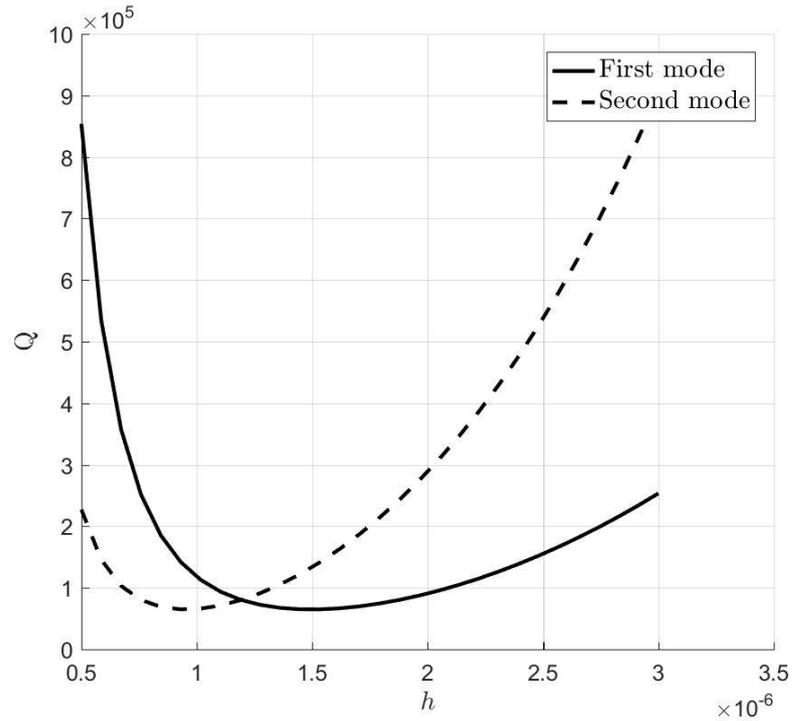


Рисунок 3.1 – Зависимость добротности от толщины пластинки

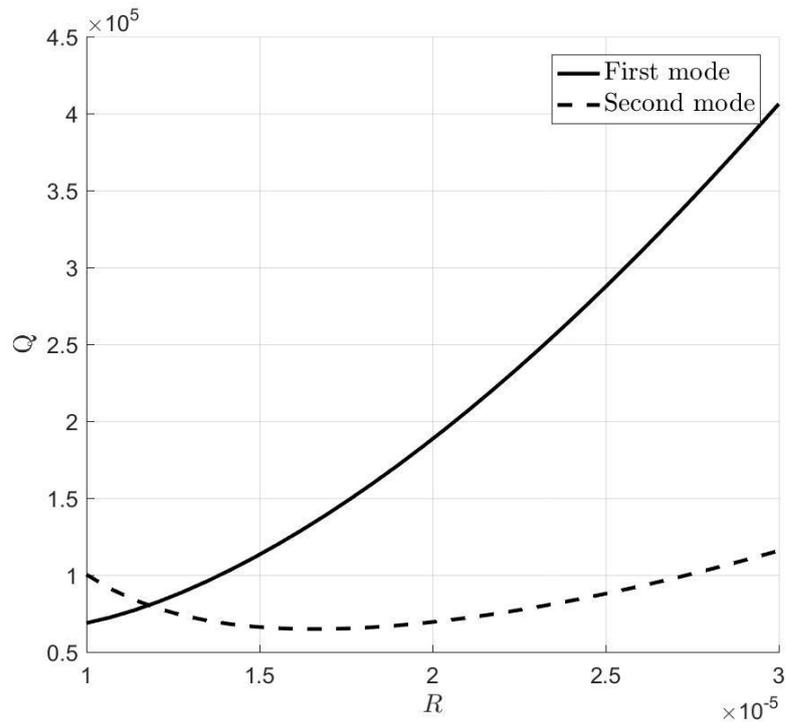


Рисунок 3.2 – Зависимость добротности от радиуса пластинки

Как видно из рисунков, зависимость добротности от геометрических параметров пластинки не является монотонной, что с качественной стороны согласуется с оценкой (3.7), полученной Зинером: максимальное затухание в системе наблюдается при совпадении частоты колебаний с эффективной скоростью релаксации. При этом с уменьшением геометрических

масштабов системы пик затухания также смещается в область высоких частот. К примеру, уменьшение радиуса пластинки  $R$  приводит к увеличению собственных частот колебаний  $\omega$ , однако неизбежное при этом уменьшение толщины пластинки  $h$  приводит к уменьшению времени релаксации  $\tau$  (см. формулу (3.7)), так что величина  $\omega\tau$  может оставаться близкой к единице. Таким образом, аналитическое вычисление пиков затухания, представленное на рисунках 3.1-3.2, позволяет максимизировать добротность резонансных свойств объекта НМСТ, исходя из допустимого диапазона его геометрических параметров.

Кроме того, из приведенных результатов следует, что соотношение между добротностями колебаний по различным формам существенно зависит от геометрических параметров системы. Так, в зависимости от толщины пластинки целесообразно возбуждать колебания резонатора либо по первой ( $h < 1,2$  мкм на рисунке 3.1), либо по второй ( $h > 1,2$  мкм) форме.

На рисунках 3.3-3.4 показаны зависимости вещественных частей первой и второй собственных частот от силы электрического поля  $V$ .

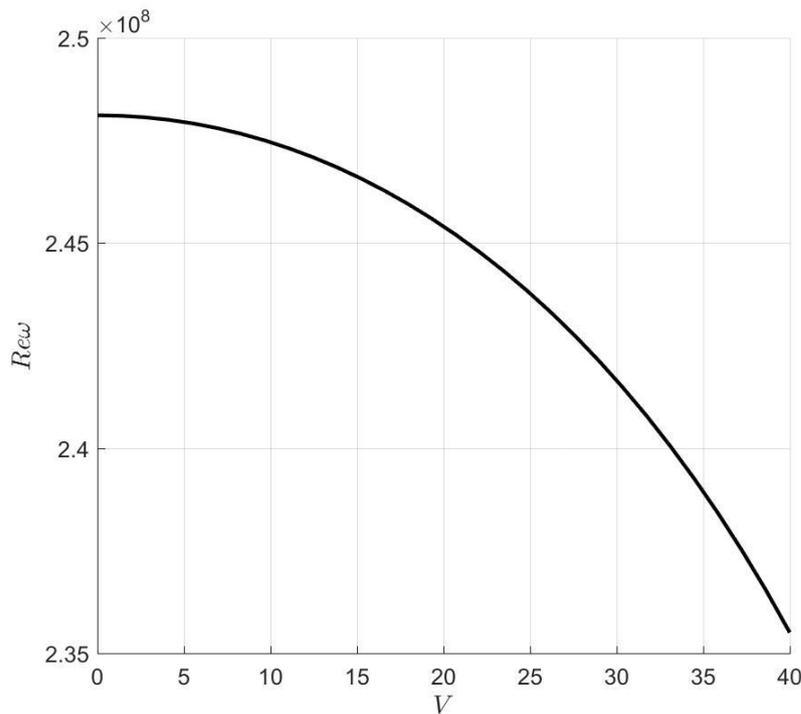


Рисунок 3.3 – Зависимость  $Re\omega_1$  от силы электрического поля  $V$

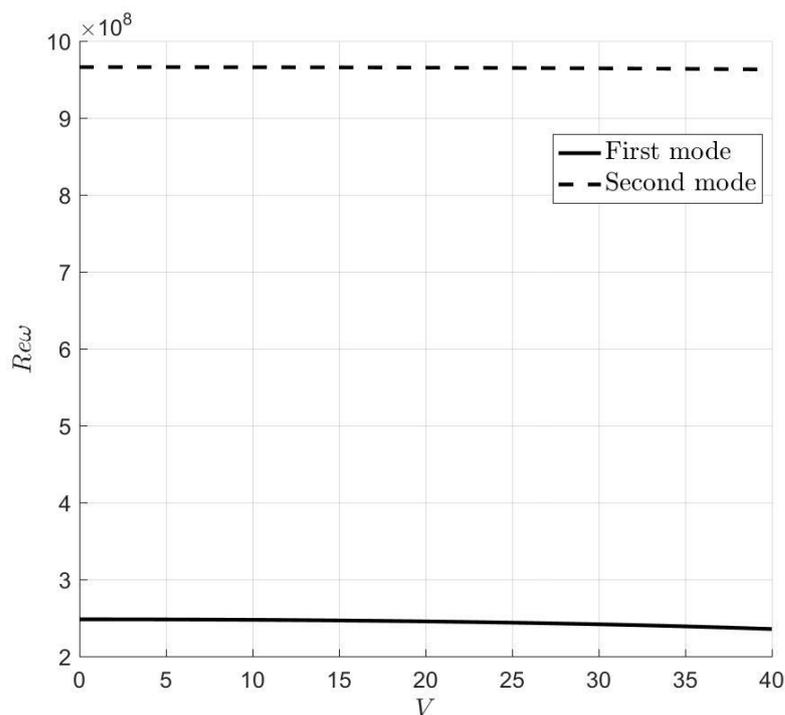


Рисунок 3.4 – Зависимость  $Re\omega_{1,2}$  от силы электрического поля  $V$

Как видно из рисунков, учет термоупругой диссипации не оказывает качественного влияния на характер зависимости вещественной части частот колебаний от напряжения  $V$ : при увеличении силы электрического поля частоты уменьшаются; при достижении полем критического значения  $V \cong 40$  В нетривиальная форма равновесия теряет устойчивость по сценарию дивергенции («*pull-in instability*», см. п. 1.3).

На рисунке Рисунок 3.5 показана зависимость добротности колебаний по первой и второй собственным формам от силы электрического поля  $V$ .

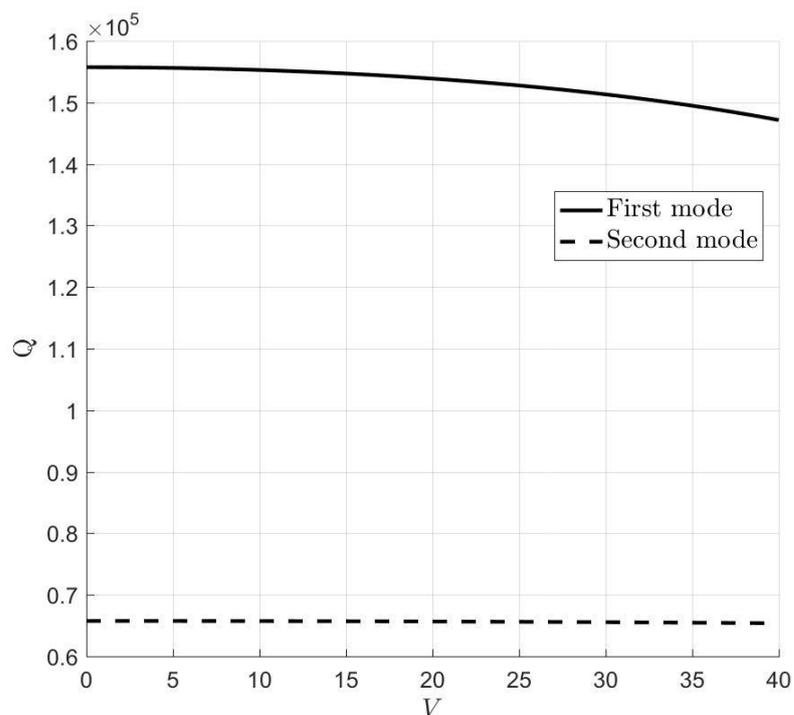


Рисунок 3.5 – Зависимость добротности от силы электрического поля  $V$

Как видно из рисунка, с ростом напряжения между обкладками добротность уменьшается.

На рисунке 3.6 показана зависимость добротности колебаний по первой и второй собственным формам от отсчетной температуры  $T_0$ .

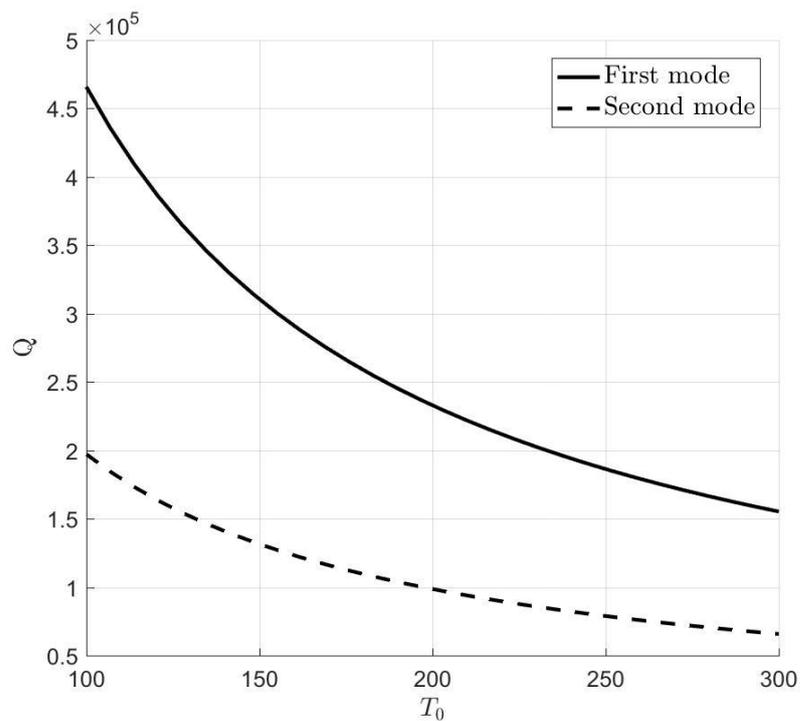


Рисунок 3.6 – Зависимость добротности от отсчетной температуры  $T_0$

Как видно из рисунка, добротность колебаний существенно растет при уменьшении отсчетной температуры.

В заключение данного пункта отметим, что выполненный анализ параметров внутреннего механизма диссипации, связанного с тепловым рассеянием механической энергии, дает оценку сверху для возможных значений добротности нано- и микроэлектромеханических резонаторов. Результаты получены путем построения детальной математической модели, учитывающей как геометрию пластинки, так и влияние электрического поля, что позволяет использовать вычисленные зависимости для добротности при проектировании конкретных приборов НМСТ, таких как емкостные ультразвуковые преобразователи, датчики давления, системы автономного энергообеспечения и др.

## 3.2 Динамика и устойчивость электростатического преобразователя под действием теплового импульса

### 3.2.1 Актуальность проблемы

Проблема динамической устойчивости тонких элементов конструкций представляет собой практически важную и далеко не полностью изученную область исследований. К примеру, в работах [6,15,44,48,51] показано, что критические значения усилий, при которых происходит потеря устойчивости, могут существенно отличаться от известных статических (Эйлеровых) значений. Причиной этому может служить неучет дополнительных динамических степеней свободы в выбранной модели элемента конструкции, большое значение динамических свойств воздействий, начальных геометрических и физико-механических несовершенств рассматриваемых систем, а также важность взаимодействия различных физических полей (механического, температурного, электромагнитного и др.). В указанных выше работах учет продольных волн сжатия-растяжения приводит к явлению параметрического резонанса, что существенно меняет всю картину динамической потери устойчивости.

Вызывает интерес присутствие указанной выше проблемы динамической устойчивости в ряде весьма актуальных задач науки и техники. Прежде всего, указанное явление встречается при применении лазерных технологий для неразрушающего контроля конструкций и изучения физических свойств материалов на микро- и наномасштабном уровне, а также при осуществлении технологических процессов производства элементов нано- и микросистемной техники (сварка, фрезерование, сверление и др) [92,100,105]. Кроме того, подобные задачи возникают при обеспечении работоспособности нано- и микроэлектромеханических систем в условиях внешних нестационарных (в т.ч., ударных и импульсных тепловых) воздействий [46-47,52,68]. Именно, в работах [80,93] на примере модели балки Бернулли-Эйлера отмечается, что большое влияние на динамику микро- и наномасштабных конструкций при лазерном импульсном воздействии оказывают изгибающие моменты, вызванные неравномерным распределением температуры по объему упругого элемента.

В настоящей работе показано, что действие температурного изгибающего момента менее важно с точки зрения динамики и устойчивости рассматриваемого упругого элемента, чем действие ранее не учитываемых осевых (мембранных) усилий, имеющих тепловую природу. Установлено, что их эффект существенно усиливается при наличии начальных деформаций и напряжений в конструкции, вызванных технологическими факторами или действием электростатического поля, в условиях которого работает широкий класс объектов нано- и микросистемной техники. Предложен метод расчета критических значений тепловых и

электрических воздействий, при которых происходит потеря устойчивости начальной формы равновесия.

### 3.2.2 Постановка задачи

Рассматривается задача об импульсном лазерном воздействии на упругий элемент электростатического преобразователя (рисунок 3.7).

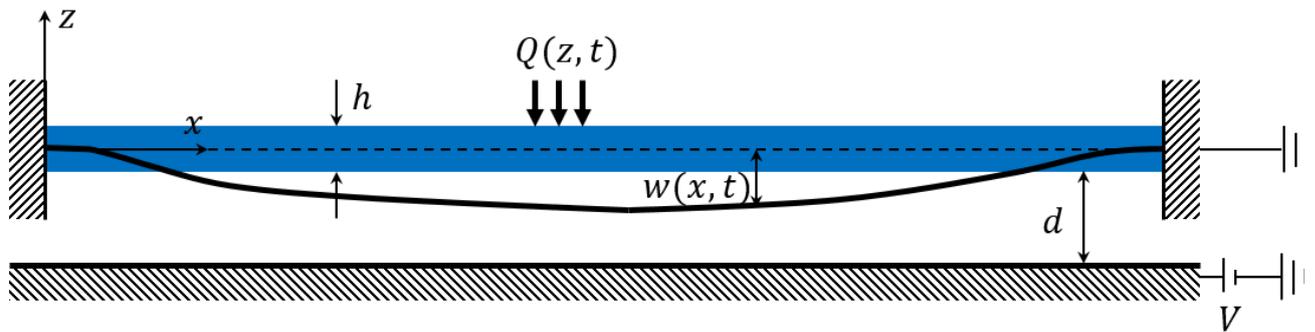


Рисунок 3.7 – . Схема электростатического преобразователя

В качестве модели, описывающей динамику данного элемента, выберем модель балки Бернулли-Эйлера. Особенностью её поведения в настоящей задаче является необходимость учета предварительного напряженно-деформированного состояния. Последнее вызвано двумя факторами. Во-первых, технология сборки такова, что исходная длина недеформированной балки может быть больше расстояния между опорами, что создает дополнительное сжимающее усилие. Во-вторых, балке как подвижному электроду электростатического преобразователя сообщается стационарная разность потенциалов  $V$  с неподвижным электродом, что создает предварительный прогиб  $w_s(x)$  под действием сил притяжения в электростатическом поле.

Примем, что действие лазерного импульса  $Q(x, z, t)$  на поверхность балки сводится в основном к появлению теплового фронта, распространяющегося по её объёму [104]. Неравномерность и нестационарность поля температуры как по толщине, так и по длине балки в общем случае приводит к появлению изгибающего момента [80,93] и осевого усилия, ответственных за возможную потерю устойчивости.

Основные уравнения рассматриваемой физически нелинейной связанной задачи термо-электроупругости, описывающие динамический изгиб балки, имеют вид:

$$\begin{aligned}
& EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E b \alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dz \\
& + \left[ P + E b \alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta dz - \frac{E b h}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 b V^2}{2(d-w)^2}, \\
& k \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + Q(z, t) = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta T_0 \frac{\partial e}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Здесь  $x, z$  – продольная и вертикальная координаты соответственно;  $t$  – время;  $w(x, t)$  – поперечное перемещение геометрического центра сечения балки;  $\theta(x, z, t) = T(x, z, t) - T_0$  – изменение температуры относительно отсчетной температуры  $T_0$ ;  $b, h, L, d$  – геометрические параметры системы: ширина, высота, длина балки и начальный зазор между электродами соответственно;  $I = \frac{bh^3}{12}$  – момент инерции сечения;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\rho$  – плотность материала;  $\alpha_T$  – коэффициент линейного температурного расширения;  $\epsilon_r \epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость среды в зазоре между электродами;  $k$  – коэффициент теплопроводности материала балки;  $c_v$  – удельная теплоемкость;  $\beta = \frac{E \alpha_T}{1-2\nu}$  – коэффициент, связывающий приращение температуры со скоростью изменения объема деформируемого тела  $e = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ;  $P$  – внешняя осевая сила, вызванная конструктивными или технологическими факторами.

В целях некоторого упрощения задачи будем считать лазерное воздействие равномерным по длине балки. Примем, что объемное тепловыделение при действии лазера имеет вид [104]

$$Q(z, t) = \frac{R_a L_0}{\delta t_p^2} t \cdot \exp\left(\frac{z - \frac{h}{2}}{\delta} - \frac{t}{t_p}\right), \tag{3.36}$$

где  $L_0$  – параметр, характеризующий мощность воздействия;  $R_a$  – коэффициент поглощения облучаемой поверхности;  $\delta$  – характерная глубина проникновения импульса в материал;  $t_p$  – длительность импульса.

Поясним физический смысл силовых и моментных факторов, присутствующих в уравнении (3.35)<sub>1</sub>. Третье слагаемое в левой части уравнения описывает действие «температурного момента» - изгибающего момента, вызванного неравномерным по длине балки температурным расширением материала. В случае равномерного по длине объемного тепловыделения единственной причиной возникновения этого момента является факт

связанности механического и температурного полей по закону Дюамеля-Неймана [33]. Слагаемые в квадратных скобках в уравнении (3.35)<sub>1</sub> описывают осевые усилия различной природы, оказывающие влияние на динамику системы. Так, наряду с внешней силой технологического происхождения  $P$ , в модели учитывается осевая сила, вызванная температурным расширением материала, а также внутренняя сила упругости, связанная с сопротивлением балки растяжению (удлинению своей центральной линии) при поперечных деформациях. В правой части уравнения (3.35)<sub>1</sub> стоит пондеромоторная сила электростатического поля, имеющая существенно нелинейный характер [112]. Действие данного нелинейного фактора детально изучено в первых двух главах настоящей работы.

### 3.2.3 Определение формы равновесия балки в электрическом поле

Известно, что задача нахождения форм равновесия упругих элементов нано- и микросистемной техники в электростатическом поле приводит к существенно нелинейным краевым задачам в частных производных, не допускающим точного аналитического решения. При этом высокую эффективность показали приближенные аналитические методы, среди которых наиболее широко применяется метод Галеркина, приводящий к системе нелинейных алгебраических уравнений, зависящих от параметров [49,50] (см. также гл. 1,2).

На рисунке 3.8 показана постановка задачи о формах равновесия заземленной микробалки в электростатическом поле одного неподвижного электрода.

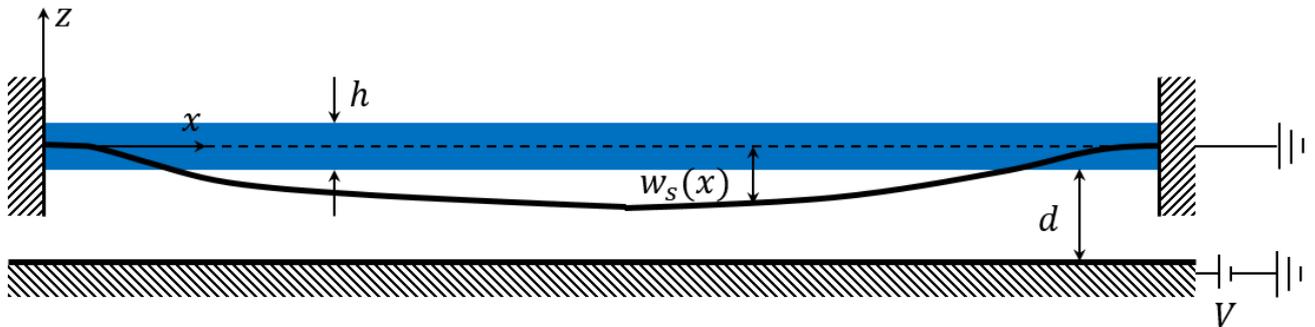


Рисунок 3.8 – Постановка задачи

Краевая задача для нахождения статического прогиба  $w_s(x)$  получается из общей системы уравнений (3.35) отбрасыванием инерционных членов в условиях отсутствия теплового воздействия:

$$EI \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \left[ P - \frac{Ebh}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 b V^2}{2(d - w_s)^2}, \quad (3.37)$$

$$w_s(0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(0) = w_s(L) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(L) = 0.$$

Выполняя переход к безразмерным величинам

$$\widehat{w}_s = \frac{w_s}{d}, \quad \widehat{x} = \frac{x}{L} \quad (3.38)$$

и опуская в дальнейших выкладках символ  $\widehat{\phantom{x}}$ , приходим к следующей нелинейной краевой задаче:

$$\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \left[ P_{non} - \alpha_1 \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{(1 - w_s)^2}, \quad (3.39)$$

$$w_s(0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(0) = w_s(1) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(1) = 0,$$

где введены следующие безразмерные параметры:

$$\alpha_1 = 6 \left( \frac{d}{h} \right)^2, \quad \lambda = \frac{6\epsilon_r \epsilon_0 L^4 V^2}{E h^3 d^3}, \quad P_{non} = \frac{12PL^2}{E b h^3}. \quad (3.40)$$

Параметр  $\alpha_1$  характеризует степень геометрической нелинейности задачи и связанной с этим важности фактора сопротивления осевой линии балки удлинению при изгибе; параметр  $\lambda$  определяется соотношением между упругими свойствами материала и величиной электрического поля;  $P_{non}$  есть безразмерная осевая сила внешнего происхождения.

Решение краевой задачи (3.35) ищется в виде ряда

$$w_s(x) = \sum_{j=1}^{N_s} C_j \phi_j(x) \quad (3.41)$$

по собственным функциям сжатой заземленной балки в отсутствие электрического поля:

$$\frac{\partial^4 w_c}{\partial x^4} + P_{non} \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_c}{\partial t^2} = 0, \quad (3.42)$$

$$w_c(0) = \frac{\partial w_c}{\partial x}(0) = w_c(1) = \frac{\partial w_c}{\partial x}(1) = 0.$$

Представление решения задачи (3.42) в виде

$$w_c = \text{Re}[\phi(x)e^{i\omega t}] \quad (3.43)$$

приводит к граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + P_{non} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \omega^2 \phi = 0, \quad (3.44)$$

$$\phi(0) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(0) = \phi(1) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(1) = 0,$$

точное аналитическое решение которой дает набор координатных функций (собственных форм)  $\phi_j$  и соответствующих им собственных частот  $\omega_j$ .

Подстановка ряда (3.41) в (3.39) и запись проекционных условий процесса Бубнова-Галеркина приводит к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $C_j$ :

$$\int_0^1 \phi_s \left\{ \left[ 1 - \sum_{i=1}^{N_s} C_i \phi_i \right]^2 \cdot \left[ \sum_{j=1}^{N_s} C_j \omega_j^2 \phi_j - \alpha_1 \int_0^1 \left( \sum_{m=1}^{N_s} C_m \phi_m \right)^2 dx \cdot \sum_{n=1}^{N_s} C_n \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} \right] - \lambda \right\} dx = 0, \quad s = 1, \dots, N_s. \quad (3.45)$$

Здесь  $N_s$  – число учтенных координатных функций.

Решение системы (3.45) в зависимости от параметра  $\lambda$  находится с помощью программного комплекса *MATCONT*, реализующего численные методы продолжения по параметрам решений нелинейных операторных уравнений [116].

На рисунке 3.9 показана диаграмма ветвления положений равновесия в зависимости от значений параметра  $\lambda$ . По оси ординат откладывается прогиб в центральном сечении балки. Значения остальных параметров приняты равными  $\alpha_1 = 0, P_{non} = 0$ .

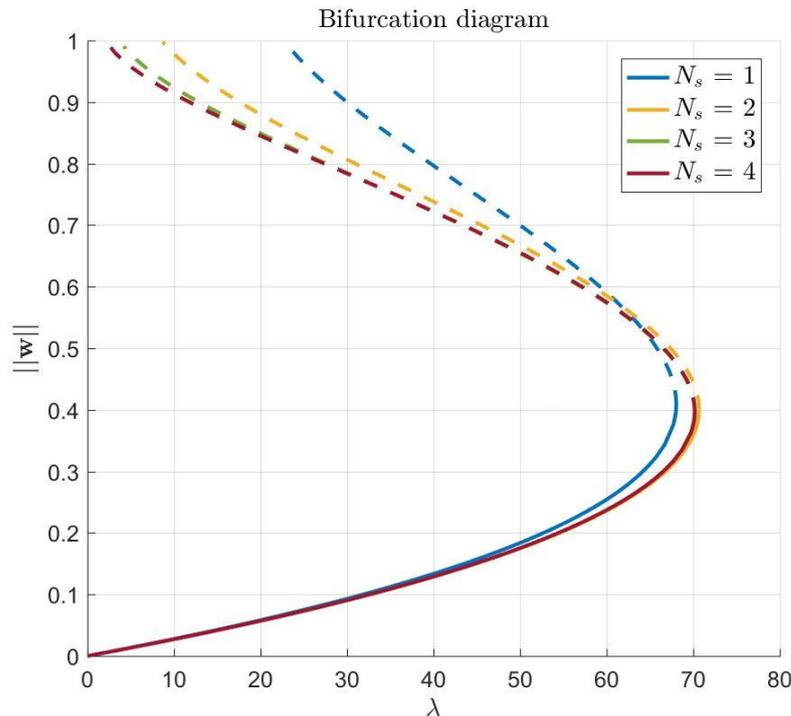


Рисунок 3.9 – Исследование сходимости по числу координатных функций

Как видно из рисунка, нижняя (устойчивая) ветвь форм равновесия достаточно точно вычисляется уже при учете двух координатных функций. Для точного определения неустойчивых форм равновесия требуется учет не менее трех координатных функций. Дальнейшие результаты в данном пункте получены при  $N_s = 3$ . Отметим, что, согласно виду

диаграммы, в системе наблюдается известная катастрофическая бифуркация с исчезновением форм равновесия при достижении параметром  $\lambda$  определенного критического значения (регулярная экстремальная точка, «*pull-in instability*», [112]).

На рисунке 3.10 показаны диаграммы ветвления положений равновесия в зависимости от значений параметра  $\alpha_1$  при  $P_{non} = 0$ .

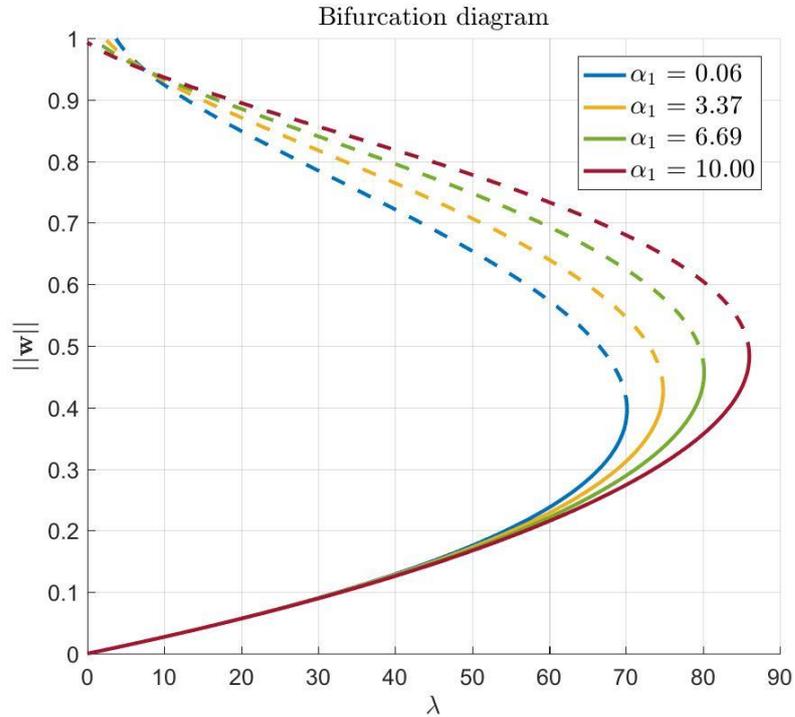


Рисунок 3.10 – Исследование влияния увеличения жесткости балки при изгибе

Как видно из рисунка, увеличение отношения расстояния между электродами  $d$  к высоте балки  $h$  (см. (3.41)) и связанный с этим рост влияния фактора ужесточения балки при деформировании приводит к росту максимальных устойчивых прогибов и соответствующих им величин силы электрического поля.

На рисунке 3.11 показаны диаграммы ветвления положений равновесия в зависимости от величины внешней осевой силы  $P_{non}$  при  $\alpha_1 = 0.5$ .

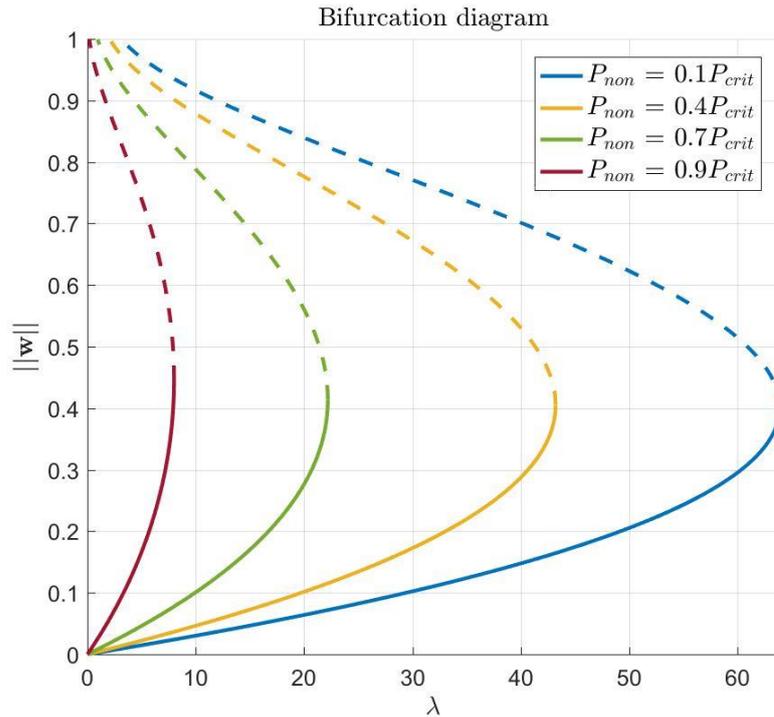


Рисунок 3.11 – Исследование влияния сжимающей осевой силы

Как видно из рисунка, рост внешней сжимающей силы приводит к уменьшению критического значения силы электрического поля, при которой происходит катастрофическая бифуркация. Отметим, что значение осевой силы  $P_{non}$ , при котором бифуркационным становится значение  $\lambda = 0$ , отвечает величине  $P_{crit}$  Эйлеровой критической силы для сжатого стержня.

Определив исходное напряженно-деформированное состояние балки в электростатическом поле, перейдем к исследованию отклика системы на лазерное импульсное воздействие.

### 3.2.4 Решение нестационарной задачи теплопроводности

Рассмотрим задачу о температурном состоянии балки под действием лазерного импульса. Считая пренебрежимо малой генерацию тепла, вызванную изменением во времени объемной деформации  $\epsilon$  (принимая параметр  $\beta$  в (3.35)<sub>2</sub> равным нулю), приходим к следующей нестационарной задаче теплопроводности:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + Q(z, t) &= \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = \pm \frac{h}{2}, \\ \theta(z, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где в качестве граничного принято условие отсутствия теплообмена с окружающей средой.

На рисунке 3.12 показана зависимость от времени объемного тепловыделения  $Q(z, t)$ , характеризующего лазерный импульс (см. (3.36)), на верхней поверхности балки ( $z = \frac{h}{2}$ ).

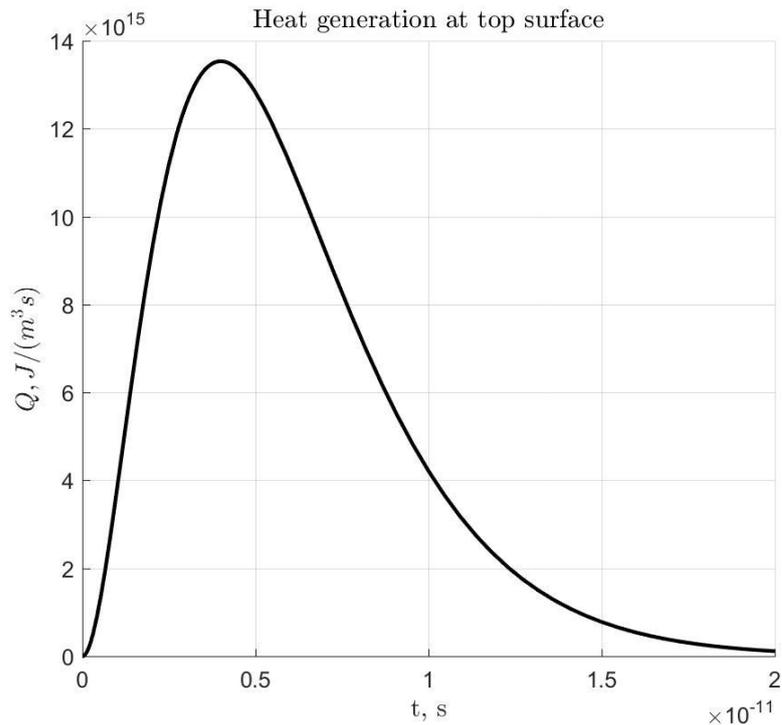


Рисунок 3.12 – Зависимость от времени тепловыделения на верхней поверхности балки

На рисунке 3.13 показано тепловыделение по высоте балки в различные моменты времени.

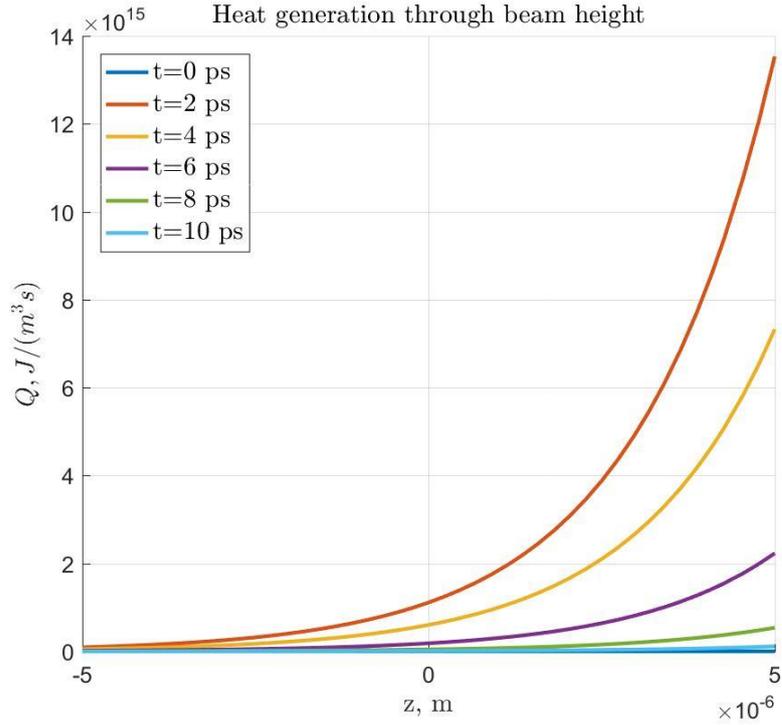


Рисунок 3.13 – Тепловыделение по высоте балки в различные моменты времени

Решение смешанной (гранично-начальной) задачи (3.46) находится с помощью метода Фурье разложения по собственным функциям однородной задачи [13] и имеет вид

$$\theta(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{\kappa_n^2} [e^{-\lambda_n^2 t} - (\kappa_n t + 1)e^{-t/t_p}] Z_n(z), \quad (3.47)$$

где

$$Z_n(z) = \begin{cases} \cos \frac{\pi n z}{h}, & n = 0, 2, 4, \dots \\ \sin \frac{\pi n z}{h}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases},$$

$$\kappa_n = \frac{1}{t_p} - \lambda_n^2, \quad \lambda_n = \frac{\pi n a}{h}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{\rho c_v}},$$

$$g_0 = \frac{\tilde{Q} \delta}{h} \left(1 - e^{-\frac{h}{\delta}}\right), \quad \tilde{Q} = \frac{R_a L_0}{\delta t_p^2 \rho c_v}, \quad (3.48)$$

$$g_n = \begin{cases} \sin \frac{\pi n}{2} \cdot \frac{2\tilde{Q} \delta h \left(1 + e^{-\frac{h}{\delta}}\right)}{\pi^2 \delta^2 n^2 + h^2}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ \cos \frac{\pi n}{2} \cdot \frac{2\tilde{Q} \delta h \left(1 - e^{-\frac{h}{\delta}}\right)}{\pi^2 \delta^2 n^2 + h^2}, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}.$$

На рисунке 3.14 показано изменение температуры на верхней поверхности балки с геометрическими параметрами  $h = 10$  мкм,  $L = 100$  мкм,  $b = 5$  мкм для различного числа  $N_t$

учтенных членов ряда (3.47). В качестве материала балки взят кремний, теплофизические свойства которого приняты следующими:  $\rho = 2330 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $c_v = 713 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$ ,  $k = 156 \frac{\text{В}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ ,  $T_0 = 293 \text{ К}$ . Для параметров лазерного импульса заданы следующие значения:  $L_0 = 1 \cdot 10^{11} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$ ,  $t_p = 2 \cdot 10^{-12} \text{ с}$ ,  $R_a = 0.5$ ,  $\delta = 2 \text{ мкм}$ .

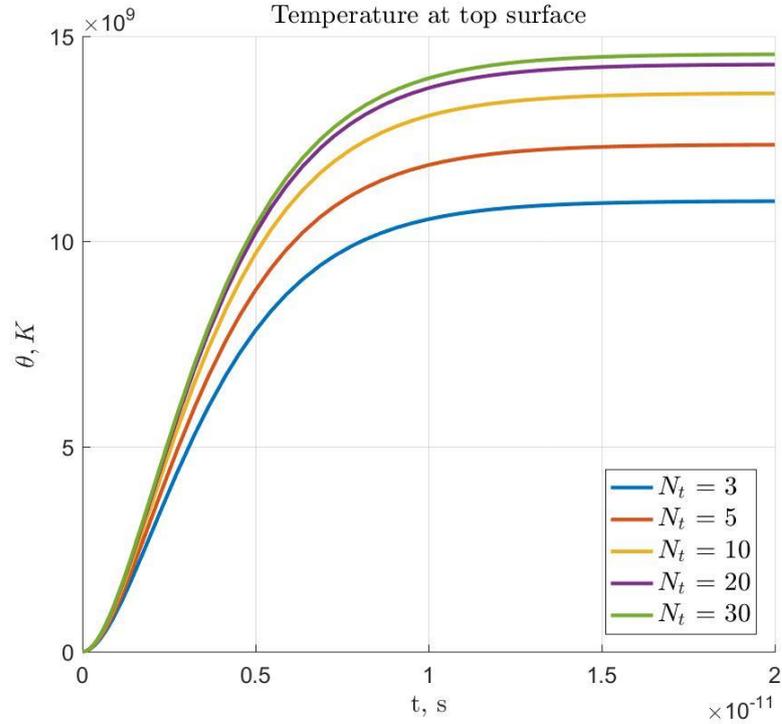


Рисунок 3.14 – Зависимость от времени температуры на верхней поверхности балки

Как видно из рисунка, сходимость ряда, описывающего решение, не является быстрой: для точного определения установившейся в материале температуры необходим учет не менее 20 членов ряда.

На рисунке 3.15 показано распределение температуры по высоте балки в различные моменты времени.

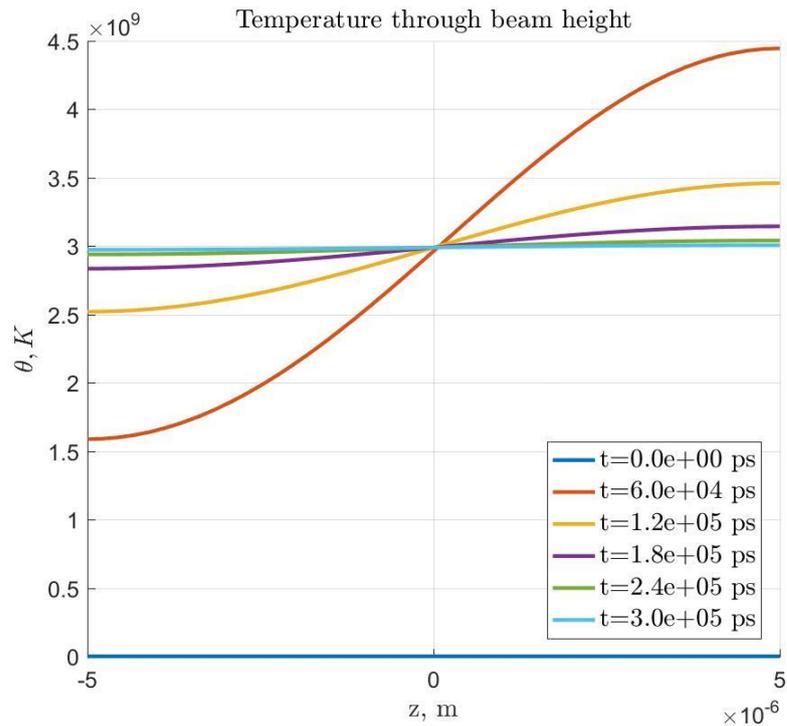


Рисунок 3.15 – Распределение температуры по высоте балки

Как видно из рисунка, с течением времени происходит выравнивание температуры по высоте балки, что естественным образом вытекает из вида граничных условий.

Найденное температурное распределение позволяет вычислить динамические силовые факторы, действующие на упругий элемент электростатического преобразователя в его предварительном напряженно-деформированном состоянии.

Отметим, что температурная осевая сила, входящая в уравнение (3.35)<sub>1</sub>, не зависит от особенностей распределения температуры в конструкции и определяется её интегралом по высоте балки.

### 3.2.5 Исследование устойчивости балки при лазерном воздействии

Перейдем к исследованию динамики балки с начальной погибью  $w_s(x)$  в электростатическом поле под действием лазерного импульса. Решение уравнения (3.35)<sub>1</sub> представим в виде

$$w(x, t) = w_s(x) + w_d(x, t), \quad (3.49)$$

где  $w_s(x)$  есть найденное решение краевой задачи (3.37).

Для искомой функции  $w_d(x, t)$  получаем следующую нелинейную динамическую задачу в частных производных:

$$EI(w_s^{IV} + w_d^{IV}) + \rho b h \ddot{w}_d + \left[ P + E b \alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta(z, t) dz - \frac{E b h}{2L} \int_0^L (w_s' + w_d')^2 dx \right] \cdot (w_s'' + w_d'') = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 b V^2}{2(d - w_s - w_d)^2}, \quad (3.50)$$

$$w_d(0, t) = \frac{\partial w_d}{\partial x}(0, t) = w_d(L, t) = \frac{\partial w_d}{\partial x}(L, t) = 0.$$

В данном уравнении отсутствует температурный изгибающий момент, т.к. в сделанных предположениях температурное поле однородно по длине балки. Действие теплового импульса выражается в наличии динамической осевой силы, определяемой интегралом от температуры  $\theta(z, t)$  по высоте балки.

Исчерпывающее исследование динамики системы требует решения нелинейной начально-граничной задачи (3.50), что может быть выполнено с помощью приближенных аналитических методов. В частности, метод Галеркина приведет к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящей от параметров. Решение подобных систем может быть получено с помощью численных методов теории бифуркаций, как это показано в главах 1,2.

Основной задачей настоящей работы является определение влияния параметров лазерного импульса на устойчивость нетривиальной формы равновесия упругого элемента электростатического преобразователя. По крайней мере, оценку сверху критических параметров воздействия можно получить, проведя анализ линеаризованного уравнения движения, получаемого из (3.50) разложением нелинейных слагаемых в ряд Тейлора по  $w_d$  и отбрасыванием старших степеней искомой функции. Таким образом, приходим к следующему линейному уравнению движения балки в окрестности положения равновесия  $w_s(x)$ :

$$\begin{aligned}
EI \frac{\partial^4 w_d}{\partial x^4} + \rho b h \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2} + \left[ P + Eb\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta(z, t) dz - \frac{Ebh}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} \\
- \frac{Ebh}{L} \int_0^L \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_d}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \frac{\epsilon_r \epsilon_0 b V^2}{(d - w_s)^3} w_d \\
= -Eb\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta(z, t) dz \cdot \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Отметим, что при наличии электрического поля (и связанного с этим ненулевого статического прогиба  $w_s$ ) уравнение движения (3.51) является неавтономным: нестационарное температурное распределение приводит к появлению поперечной силы, действующей на балку.

Решение динамической задачи (3.51) ищется в виде ряда Галеркина по собственным формам колебаний защемленной с двух концов балки с учетом осевого сжатия силой  $P$ :

$$w_d(x, t) = \sum_{j=1}^{N_d} \eta_j(t) \phi_j(x), \tag{3.52}$$

где  $N_d$  – число учтенных координатных функций.

Запись проекционных условий приводит к следующей системе линейных уравнений с переменными коэффициентами относительно координатных множителей  $\eta_j(t)$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N_d} \left\{ \rho b h \delta_{jm} \frac{d^2 \eta_j}{dt^2} \right. \\
+ \left[ EIA_{jm} + [P + Eb\alpha_T \frac{g_0 h}{\kappa_0^2} (1 - (\kappa_0 t + 1)e^{-\kappa_0 t}) \right. \\
\left. \left. - \frac{Ebh}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx \right] B_{jm} - \frac{Ebh}{L} C_{jm} - \epsilon_r \epsilon_0 b V^2 D_{jm} \right] \eta_j \left. \right\} = H_m(t), \\
m = 1, \dots, N_d,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

где введены следующие обозначения для проекционных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
A_{jm} &= (\phi_j^{IV}, \phi_m), & B_{jm} &= (\phi_j'', \phi_m), & C_{jm} &= \int_0^L w_s' \phi_j' dx \cdot \int_0^L w_s'' \phi_m dx, \\
D_{jm} &= \int_0^L \frac{\phi_j \phi_m}{(d - w_s)^3} dx, \\
H_m(t) &= -Eba_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta(z, t) dz \cdot \int_0^L w_s'' \phi_m dx.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

В матричной форме система (3.53) принимает вид

$$M\dot{\eta} + [N + L(t)]\eta = H(t), \tag{3.55}$$

где  $M$  и  $N$  – определенные постоянные матрицы;  $L(t)$  – матрица с коэффициентами, зависящими от времени;  $H(t)$  – вектор-столбец правых частей.

Представляет интерес нахождение областей в пространстве параметров лазерного воздействия, соответствующих устойчивости в смысле Ляпунова решения неоднородной системы (3.55). Из теории устойчивости движения известно [18], что решение неоднородной линейной системы устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво тривиальное решение соответствующей однородной системы. Таким образом, задача сводится к исследованию системы (3.55) с нулевой правой частью. В стандартной форме данная система имеет вид

$$\dot{x} = Ax + B(t)x, \tag{3.56}$$

где  $x(t)$  – новый вектор-столбец искомых функций времени;  $A, B(t)$  – матрицы, однозначно определяемые по матрицам  $M, N, L(t)$ .

Для линейных систем с переменными коэффициентами вида (3.56) справедлива теорема [67], согласно которой решение  $x \equiv \mathbf{0}$  устойчиво по Ляпунову, если (а) собственные значения матрицы  $A$  имеют неположительную вещественную часть, а чисто мнимые собственные значения различны; (б) интеграл  $\int_0^\infty \|B(t)\| dt$  ограничен, где  $\|B(t)\| = \sum_{i,j=1}^{2N_d} |b_{ij}|$ .

Как видно из (3.47), в рассматриваемом случае матрица  $B(t)$  удовлетворяет условиям теоремы, и поэтому для определения устойчивости достаточно знать знак вещественной части собственных значений матрицы  $A$ . В общем случае для этого требуется построить соответствующий характеристический многочлен и применить к нему, к примеру, критерий Гурвица [18]. При учете большого числа  $N_d$  координатных функций эта процедура может быть выполнена с помощью компьютерных программ символьных вычислений, но является весьма трудоемкой. Анализ конкретного вида системы (3.53) показывает, что перекрестные слагаемые в уравнениях значительно меньше диагональных, т.е. система является слабо связанной. Этот факт позволяет рассматривать входящие в систему уравнения как независимые. В этом

предположении условие устойчивости решения состоит в положительности квадрата частоты эквивалентного осциллятора, соответствующего рассматриваемой координатной функции  $\phi_j$  (т.е. форме колебаний, по которой ожидается потеря устойчивости):

$$\rho b h \frac{d^2 \eta_j}{dt^2} + \left[ E I A_{jj} + [P + E b \alpha_T \frac{g_0 h}{\kappa_0^2} (1 - (\kappa_0 t + 1) e^{-\kappa_0 t}) - \frac{E b h}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx] B_{jj} - \frac{E b h}{L} C_{jj} - \epsilon_r \epsilon_0 b V^2 D_{jj} \right] \eta_j = H_j(t). \quad (3.57)$$

С учетом (3.48) приходим к следующему выражению для критического значения мощности лазерного импульса (максимального по времени тепловыделения на верхней поверхности балки) в зависимости от его длительности  $t_p$  и глубины проникновения в материал  $\delta$ :

$$Q_{crit} = \frac{\rho c_v}{E b \alpha_T t_p \delta (1 - e^{-h/\delta}) e} \cdot \left\{ \frac{E I A_{jj} - \frac{E b h}{L} C_{jj} - \epsilon_r \epsilon_0 b V^2 D_{jj}}{-B_{jj}} - P + \frac{E b h}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx \right\}. \quad (3.58)$$

Отметим, что найденное условие устойчивости формы равновесия микробалки зависит от геометрических параметров системы, физико-механических свойств материала, осевой силы конструкционного происхождения, а также внешних факторов, связанных с действием лазерного импульса и электростатического поля.

На рисунке 3.16 показана граница области устойчивости в пространстве параметров  $(t_p, \delta, Q_{max})$ .

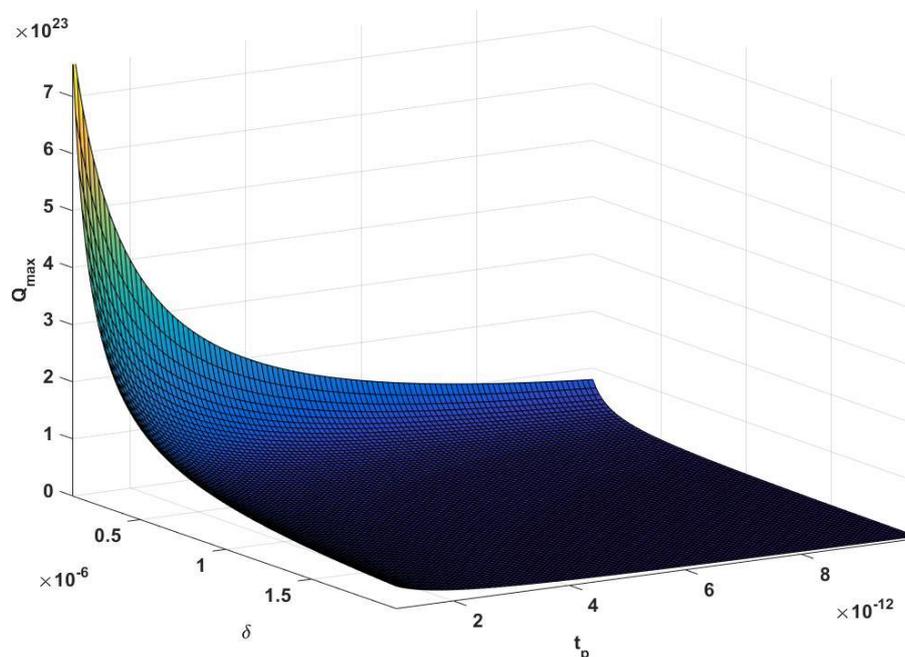


Рисунок 3.16 – Граница области устойчивости балки в пространстве параметров лазерного воздействия

Сравнение результатов работ [80,93] с полученными выше значениями критической мощности лазерного импульса указывает на то, что потеря устойчивости начальной формы равновесия балки Бернулли-Эйлера в связи с наличием сжимающей осевой силы температурного происхождения происходит значительно раньше, чем достижение опасных прогибов за счет изгибающего момента. Последнее необходимо учитывать при практических расчетах упругих элементов нано- и микросистемной техники, а также других конструкций, находящихся под действием импульсных тепловых нагрузок.

## Заключение

В заключение работы представим основные результаты выполненного исследования.

1. Поставлена и решена задача об устойчивости положений равновесия для одномерной нелинейной модели электростатического преобразователя в электрических полях различных конфигураций. Построены диаграммы ветвления положений равновесия микроэлектромеханического осциллятора в поле одного и двух неподвижных электродов.
2. Сформулирована математическая постановка физически нелинейной связанной задачи электроупругости гибких пластинок и мембран в рамках геометрически нелинейной механической модели Кармана.
3. Для круглой мембраны в поле одного электрода реализован аналитический метод сведения исходного уравнения к уравнению Эмдена-Фаулера, что позволило целиком восстановить диаграмму ветвления форм равновесия мембраны в зависимости от характерного физического параметра системы. Исследована устойчивость найденных форм равновесия. На основе полученного точного решения были верифицированы как прямые численные методы решения нелинейных граничных задач, так и приближенные численно-аналитические методы (различные варианты применения метода Галеркина к исходному нелинейному уравнению). В частности, разработан алгоритм решения нелинейных граничных задач с помощью численных методов продолжения по параметрам решений нелинейных операторных уравнений. Показана невозможность существования кососимметричных форм равновесия мембраны в поле одного электрода.
4. С помощью численных и приближенных аналитических методов найдены как осесимметричные, так и кососимметричные формы равновесия мембраны в поле двух неподвижных симметрично расположенных электродов. Построена соответствующая диаграмма ветвления форм равновесия и исследована их устойчивость.
5. Задача о ветвлении форм равновесия решена также для круглых пластинок в поле одного и двух электродов. Исследовано качественное влияние параметров геометрической нелинейности системы и величины мембранных усилий на структуру диаграммы ветвления. Показано, что в случае системы с двумя неподвижными электродами, расположенными симметрично относительно упругой пластинки, учет геометрической нелинейности и связанного с ней эффекта повышения жесткости системы при деформировании приводит к качественному изменению структуры положений равновесия – возникновению устойчивых нетривиальных форм прогиба. Подобные мультистабильные системы (системы с переключениями) могут иметь различные применения в нано- и микросистемной технике (ВЧ-переключатели, сенсоры и др.).

6. Получены аналитические и численные решения связанной динамической задачи для микроэлектромеханического осциллятора в переменном электрическом поле различных конфигураций. Исследована применимость асимптотических методов к описанию движений в существенно нелинейных динамических системах. Прямое численное решение нелинейных уравнений динамики получено с помощью методов продолжения по параметрам стационарных периодических режимов. Показано, что при частотах возбуждения, превышающих главную резонансную частоту, реализуются устойчивые колебания с амплитудами, значительно превышающими возможные амплитуды устойчивых положений равновесия.

7. Решен ряд задач нелинейной динамики упругих мембран и пластинок в переменном электрическом поле для систем с одним и двумя электродами. С помощью асимптотических методов нелинейной механики (метод многих масштабов, метод усреднения) получены приближенные аналитические зависимости характеристик установившихся периодических режимов от внутренних параметров системы и параметров возбуждения. Исследован вопрос о нелинейном модальном взаимодействии в резонансных зонах. С помощью разработанных численных алгоритмов выполнено продолжение по параметрам прямого численного решения нелинейных динамических систем со многими степенями свободы. Показано, что для точного описания движений рассматриваемых систем при колебаниях с большими амплитудами необходим учет не менее трех координатных функций метода Галеркина.

8. Сформулирована математическая постановка связанной задачи термо-электроупругости пластинок во внешнем электрическом поле. Поставлена задача о влиянии теплового рассеяния механической энергии на добротность нано- и микроэлектромеханических резонаторов.

9. Исследована зависимость добротности резонансных свойств круглой пластинки в поле одного неподвижного электрода от физических и геометрических параметров системы. Выполненный анализ параметров внутреннего механизма диссипации, связанного с тепловым рассеянием механической энергии, определяет оценку сверху для возможных значений добротности нано- и микроэлектромеханических резонаторов. Построена детальная математическая модель, учитывающая как геометрию пластинки, так и влияние электрического поля, что позволяет использовать полученные результаты при проектировании конкретных приборов НМСТ, таких как емкостные ультразвуковые преобразователи, датчики давления, системы автономного энергообеспечения и др.

10. Рассмотрена задача об устойчивости равновесия заземленной с двух концов балки Бернулли-Эйлера, находящейся в электростатическом поле, при импульсном лазерном воздействии. Получено исходное положение равновесия под действием электростатического

поля. Показано, что таких положений равновесия либо два, устойчивое и неустойчивое, либо ни одного при достаточно сильном электрическом поле. Найдено поле температуры в балке при действии лазерного импульса. Указано на возможность потери устойчивости положения равновесия при нагреве элемента лазерным импульсом. Определены области в пространстве параметров импульса, соответствующие устойчивости и неустойчивости указанного положения равновесия.

### Список литературы

1. Антман С., Келлер Дж. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения – М.: Мир, 1974
2. Аппель П. Теоретическая механика: В 2-х т. – М.: Физматгиз, 1960
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения – М.: МЦНМО, 2012
4. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М., ИЛ, 1954
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Николай Николаевич Боголюбов. Собрание научных трудов в двенадцати томах, том III – М. Наука, 2005
6. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956
7. Болотин В.В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости – М.: ГИФМЛ, 1961
8. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов – М.: ГИТТЛ, 1956
9. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие – УМН, 1962, том 17, вып. 2(104)
10. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений – М.: Наука, 1969
11. Варадан В., Виной К., Джозе К. ВЧ МЭМС и их применение // М.: Техносфера, 2004
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики – изд. 4-е. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
13. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 520 с.
14. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем – М.: Наука, 1967
15. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек – М.: Наука, 1972
16. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач – Львов, издательское объединение «Вища школа», 1978, 192 с
17. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы – М.: Наука, 1977
18. Демидович Б.П. Лекции по теории устойчивости движения – М.: Наука, 1967
19. Зинер К., Упругость и неупругость металлов, Сб. статей «Упругость и неупругость металлов», ИЛ, 1954
20. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций – М.: Мир, 1983
21. Калиткин Н.Н. Численные методы - М.: Наука, 1978
22. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006
23. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений – М.: ГИТТЛ, 1956
24. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа – М.: Наука, 1975
25. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т.1 – М.: ГИТТЛ, 1951
26. Курант Р. Уравнения с частными производными – М.: Мир, 1964
27. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VII. Теория упругости. – 5-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 264 с.
28. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения – М.: Наука, 1966

29. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения – М.: Наука, 1987
30. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике – М.: Наука, 1970. – 512 с.
31. Найфэ А.Х. Методы возмущений – М.: Мир, 1976. – 456 с.
32. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений – М.: Мир, 1984. – 535 с.
33. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости – М.: Мир, 1970
34. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. — М.: Изд-во Наука, 1976. — 328 с.
35. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем – М.: Наука, 1987
36. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения – М.: Наука, 1974
37. Распопов В.Я. Микромеханические приборы: учебное пособие. – М.: Машиностроение, 2007
38. Рейнер М. Реология. — М.: Изд-во Наука, 1965. — 223 с.
39. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения – М., ИЛ, 1953
40. Скубов Д.Ю., Ходжаев К.Ш., Нелинейная электромеханика – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003
41. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны – Л.: Судостроение, 1976, 376 с
42. Тамм И.Е. Основы теории электричества: Учеб. пособие для вузов. – 11-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 616 с.
43. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения – М.: Наука, 1972
44. Беляев А.К., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Параметрические резонансы в задаче о продольном ударе по тонкому стержню. Вестник С.Петербург. ун-та. Сер.1. 2016
45. Беляев Я.В. Методы снижения порога чувствительности микромеханического гироскопа. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. ЦНИИ «Электроприбор», 2010 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://elektroprigor.spb.ru/ru/diss/belyaev.pdf>, свободный. Яз. рус. (дата обращения 08.08.2017)
46. Евстифеев М.И., Челпанов И.Б. Вопросы обеспечения стойкости микромеханических гироскопов при механических воздействиях // Гироскопия и навигация. 2013. № 1 (80). С. 119–133.
47. Евстифеев М.И., Елисеев Д.П., Челпанов И.Б. Методы повышения стойкости микромеханических гироскопов к механическим воздействиям // Гироскопия и навигация. 2014. № 4 (87). С. 56-68
48. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 776–782
49. Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Исследование устойчивости и ветвления форм равновесия упругих элементов микросистемной техники / В сб. Нелинейная динамика машин - SCHOOL-NDM 2017. Москва, 2017. С. 313–322.
50. Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Нелинейная динамика и устойчивость элементов микросистемной техники // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики, Том 17, № 6, 2017
51. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О динамической потере устойчивости стержня при продольной нагрузке, меньшей эйлеровой. Доклады РАН, 2013. Т.453. №3. 282-285
52. Некрасов Я.А., Моисеев Н.В., Беляев Я.В., Павлова С.В., Локшонков Р.Г. Влияние поступательных вибраций, ударов и акустических помех на характеристики микромеханического гироскопа // Гироскопия и навигация. 2016. № 2 (93). С. 56–67.

53. Acar C., Shkel A. MEMS Vibratory Gyroscopes. Structural Approaches to Improve Robustness – Springer, 2009
54. Allgower E.L., Georg K. Numerical Continuation Methods: An Introduction – Springer-Verlag, 1990
55. Blokhina E., Galayko D. et. al. Nonlinearity in Energy Harvesting Systems. Micro- and Nanoscale Applications – Springer, 2016
56. MEMS : introduction and fundamentals / edited by Mohamed Gad-El-Hak // Taylor & Francis Group, LLC, 2006
57. Jackson J.D. Classical Electrodynamics – New York: Wiley, 1999
58. Keller H.B. Numerical Methods in Bifurcation Problems – Springer-Verlag, Tata Institute of Fundamental Research, 1986
59. Korvink J.D. MEMS: A Practical Guide to Design, Analysis and Applications – Springer, 2006
60. Kuznetsov Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory – New York: Springer Verlag, 2004
61. MEMS/NEMS Handbook Techniques and Applications / edited by Cornelius T. Leondes // Springer Science, 2006
62. Lyshevski, Sergey Edward MEMS and NEMS : systems, devices, and structures // CRC Press LLC, 2002
63. Mitropolsky Yu.A., Nguen V.D. Applied Asymptotic Methods in Nonlinear Oscillations – Springer Science, 1997
64. Na T.Y. Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems – Academic Press, 1979
65. Nayfeh A.H., Pai P.F. Linear and Nonlinear Structural Mechanics – New York: Wiley, 2004
66. Pelesko, John A. Modeling MEMS and NEMS // Chapman & Hall/CRC, 2003
67. Verhulst F. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems – Springer Verlag, 1990
68. Younnis M.I. MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics – Springer Science, 2011
69. Minhang Bao, HengYang Squeeze film air damping in MEMS / Sensors and Actuators A 136 (2007) 3–27
70. Barham M. et.al. Finite deformation of a pressurized magnetoelastic membrane in a stationary dipole field // Acta Mechanica 191, 2007, pp. 1-19
71. Bouchaala A., Nayfeh A.H. et.al. Mass and position determination in MEMS mass sensors: A theoretical and an experimental investigation – Journal of Micromechanics and Microengineering, 26 (2016)
72. Brubaker N.D., Pelesko J.A. Non-linear effects on canonical MEMS models // European Journal of Applied Mathematics, 22(5), 2011, pp. 455-470
73. Brubaker N.D., Lindsay A.E. Analysis of the singular solution branch of a prescribed mean curvature equation with singular nonlinearity modeling a MEMS capacitor // arXiv:1110.0890v4 [math.AP] 1 Nov 2011
74. Brubaker N.D. et.al. Refinements to the study of electrostatic deflections: theory and experiment // European Journal of Applied Mathematics, 24, 2013, pp. 343-370
75. Caliano G, Galanello F, Caronti A, Carotenuto R and Pappalardo M 2000 Micromachined ultrasonic transducers using silicon nitride membrane fabrication in PECVD technology IEEE Ultrasonics Symp. (San Juan, Puerto Rico) vol 1 pp 963–8
76. Dumitru I. Caruntu, Reynaldo Oyervides, Primary Resonance Voltage Response of Electrostatically Actuated M/NEMS Circular Plate Resonators // Proceedings of the ASME 2014 Dynamic Systems and Control Conference

77. Dumitru I. Caruntu, Le Luo – Bifurcation and pull-in voltages of primary resonance of electrostatically actuated SWCNT cantilevers to include van der Waals effect // *Meccanica* (2016), pp.1-11
78. Dumitru I. Caruntu, Reynaldo Oyervides, Frequency Response Reduced Order Model of Primary Resonance of Electrostatically Actuated Mems Circular Plate Resonators // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* (2016)
79. Kilho Eom, Harold S. Park, Dae Sung Yoon, Taeyun Kwon Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detections: Nanomechanics principles// *Physical Reports* 2011 V.503 -2011, pp.115-163
80. Daining Fang, A.K. Soh Laser-induced vibrations of microbeams under different boundary conditions – *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008) 1993-2013
81. B.Gidas, Wei-Ming Ni, L. Nirenberg – Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle – *Commun. Math. Phys.* 68. 209-243 (1979)
82. Zhanzhe Guo et. al. Research development of silicon MEMS gyroscopes: a review // *Microsystem Technologies* 21(10), 2015
83. Haller M I and Khuri-Yakub B T 1994 A surface micromachined electrostatic ultrasonic air transducer *IEEE Ultrasonics Symp. (Cannes, France)* vol 2 pp 1241–4
84. Haller M I and Khuri-Yakub B T 1996 A surface micromachined electrostatic ultrasonic air transducer *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* 43 1–6
85. Electromechanical models of nanoresonators, D.A. Indeitsev, L.V. Shtukin, D. Yu Skubov et.al. // *Physical Mesomechanics* 19(3):248-254 · July 2016
86. Jin X C, Ladabaum I and Khuri-Yakub B T 1998 Surface micromachined capacitive ultrasonic immersion transducers *Proc. of the 11th Annual IEEE Int. Workshop on Micro Electro Mechanical Systems (Heidelberg, Germany)* pp 649–54
87. Khodzhaev K. Nonlinear problems on the deformation of elastic bodies by a magnetic field – *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 34, issue 4, pp. 622-641 (1970)
88. Slava Krylov et. al. Symmetry breaking in an initially curved pre-stressed micro beam loaded by a distributed electrostatic force // *International Journal of Solids and Structures*, 51, 2014
89. Ladabaum I, Khuri-Yakub B T, Spoliansky D and Haller M I 1995 Micromachined ultrasonic transducers (MUTs) *IEEE Ultrasonics Symp. (Seattle, WA)* vol 1 pp 501–4
90. Lee T.H. et.al. Capacitive Micromachined Ultrasonic Transducers: Next-Generation Arrays for Acoustic Imaging? – *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 49, No. 11
91. Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems. Ron Lifshitz and M. L. Roukes. *Condensed Matter Physics* 114-36, California Institute of Technology, 1999
92. Jx Ma et.al. Analytical solution of transient heat conduction in bi-layered circular plate irradiated by laser pulse – *Canadian Journal of Physics*, 2016
93. Jx Ma et. al. Thermoelastic response of a simply supported beam irradiated by a movable laser pulse – *Canadian Journal of Physics*, 2017
94. Malookani R.A., van Horssen W.T., On resonances and the applicability of Galerkin's truncation method for an axially moving string with time-varying velocity, *Journal of Sound and Vibration*, 344, 2015, p 1-17
95. Lior Medina, Rivka Gilat, Slava Krylov, Bistable behavior of electrostatically actuated initially curved micro plate // *Sensors & Actuators: A. Physical* (2016)

96. Muldavin J, Rebeiz G. 30 GHz Tuned MEMS Switches – IEEE, MTT-S Digest, 1999; Rebeiz Gabriel M. RF MEMS. Theory, design and technology – John Willey, 2003
97. Ali H. Nayfeh et.al. A reduced-order model for electrically actuated microplates // Journal of Micromechanics and Microengineering, 14 (2004), pp. 900-906
98. Ali H. Nayfeh, Gregory W. Vogl – A reduced-order model for electrically actuated clamped circular plates // Journal of Micromechanics and Microengineering, 15 (2005), pp. 684-690
99. Ali H. Nayfeh et. al., Dynamic pull-in phenomenon in MEMS resonators // Nonlinear Dynamics (2007) 48, pp.153-163
100. Poletkin K., Kulish V. et. al. Thermal properties of thin films studied by ultrafast laser spectroscopy: Theory and experiment. – International Journal of Heat and Mass Transfer, April, 2014
101. Yu. L. Raikher et.al. Deformation of a circular ferroelastic membrane in a uniform magnetic field // Technical Physics 53(9), 2008
102. Shampine L.F., Kierzenka J., Reichelt M.W. Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in MATLAB with bvp4c – Dallas, SMU, Math.Dept., 2000
103. Shampine L.F. Singular Boundary Value Problems for ODEs – Dallas, SMU, Math. Dept., 2002
104. Tang D.W., Araki N. Wavy, wavelike, diffusive thermal responses of finite rigid slabs to high-speed heating of laser pulses – International Journal of Heat and Mass Transfer 42 (1999) 855-860
105. Xinwei Wang, Xiafan Xu Thermoelastic waves in metal induced by ultrafast laser pulses – Journal of Thermal Stresses, 25, pp. 457-473, 2002
106. K.F. Wang et.al., Small scale effect on the pull-in instability and vibration of graphene sheets // Microsystem Technologies (2016), pp. 1-9
107. Zhiping Xu Heat transport in low-dimensional materials: A review and perspective // Theoretical and Applied Mechanics Letters 6(2016) 113-121
108. Y.T. Yang et.al. Zeptogram-Scale Nanomechanical Mass Sensing // Nano letters, 6(4), 2006
109. C. Zener, “Internal Friction in Solids I: Theory of Internal Friction in Reeds,” Physical Review, vol. 52, pp. 90–99, 1937
110. C. Zener, “Internal Friction in Solids II: General Theory of Thermoelastic Internal Friction,” Physical Review, vol. 53, pp. 230–235, 1938
111. W. Zhang et. al., Review Stability, Nonlinearity and Reliability of Electrostatically Actuated MEMS Devices // Sensors 7(5), 2007
112. Wen-Ming Zhang et.al. Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: A review // Sensors and Actuators A 214 (2014) 187-218
113. Zhang W. et. al. A measurement criterion for accurate mass detection using vibrating suspended microchannel resonators – Journal of Sound and Vibration, 403 (2017)
114. Chun Zhao et.al. A review on MEMS Coupled Resonators for Sensing Applications Utilizing Mode Localization // Sensors and Actuators A Physical, 2016
115. Yong Zhu, Tzu-Hsuan Chang A review of microelectromechanical systems for nanoscale mechanical characterization // Journal of Micromechanics and Microengineering 25(9), 2015
116. W. Govaerts, Yu. A. Kuznetsov et.al., MATCONT and CL\_MATCONT: Continuation toolboxes in MATLAB // Utrecht University, 2011
117. Doedel E.J. and Oldeman B.E. AUTO-07P: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations, 2009, Concordia University, Montréal, Canada.
118. Matlab Documentation, The MathWorks, Inc., 2016