

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

ПАПКОВ СТАНИСЛАВ ОЛЕГОВИЧ

МЕТОД СПЕКТРАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ В ЗАДАЧАХ  
КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Севастополь - 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
ГЛАВА 1. КЛАССИЧЕСКИЕ И СОВРЕМЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ .....	22
1.1. Поперечные колебания прямоугольных пластин.....	22
1.2. Собственные колебания прямоугольника в случае плоской задачи.....	30
1.3. Метод динамической жесткости исследования колебаний и устойчивости ансамблей прямоугольных пластин .....	33
ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	38
2.1. Предварительные сведения.....	38
2.2. Обобщение теории лимитант Б.М. Кояловича для регулярных бесконечных систем с неотрицательной матрицей.....	46
2.3. Достаточные условия существования ограниченного решения у квазирегулярной бесконечной системы.....	55
2.4. Краткие выводы по главе 2.....	59
ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН.....	61
3.1. Поперечные свободные колебания прямоугольной пластины.....	61
3.1.1. Постановка задачи и общее решение.....	61
3.1.2. Анализ регулярности бесконечной системы. Определение собственных частот колебаний.....	67
3.1.3. Асимптотика решения бесконечной системы. Определение собственных форм колебаний.....	70
3.1.4. Численные результаты.....	76

3.2. Поперечные сложные колебания прямоугольной заземленной пластины.....	84
3.2.1. Сведение к бесконечной системе линейных уравнений.....	84
3.2.2. Анализ бесконечной системы. Определение собственных частот и собственных форм колебаний.....	89
3.2.3. Численные результаты.....	95
3.3. Устойчивость прямоугольной заземленной пластины.....	99
3.3.1. Общее решение уравнения сложных колебаний пластины.....	99
3.3.2. Алгоритм вычисления критических сил. Построение форм потери устойчивости.....	103
3.3.3. Численные результаты и сравнение с приближенными решениями.....	104
3.4. Краткие выводы по главе 3.....	109
<b>ГЛАВА 4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ АНСАМБЛЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН.....</b>	<b>110</b>
4.1. Взаимная зависимость произвольных граничных силовых и кинематических характеристик пластины.....	110
4.1.1. Построение замкнутого аналитического решения уравнения колебаний для структурного элемента .....	110
4.1.2. Бесконечная система линейных уравнений, связывающая граничные силовые и кинематические характеристики пластины в случае изотропного материала.....	115
4.1.3. Бесконечная система линейных уравнений, связывающая граничные силовые и кинематические характеристики пластины в случае ортотропного материала.....	122
4.2. Спектральная матрица жесткости элемента.....	126
4.2.1. Матричная запись бесконечных систем .....	126

4.2.2. Построение спектральной матрицы жесткости для различных случаев симметрии .....	128
4.2.3. Алгоритм построения спектральной динамической матрицы жесткости элемента <b>K</b> в общем случае.....	131
4.3. Процедура стыковки элементов структуры.....	134
4.4. Численные результаты.....	138
4.5. Краткие выводы к главе 4.....	148
<b>ГЛАВА 5. АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОЛЕБАНИЙ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛ .....</b>	<b>150</b>
5.1. Установившиеся вынужденные колебания прямоугольной изотропной пластины в случае силовых граничных условий .....	150
5.1.1. Постановка краевой задачи и бесконечная система линейных алгебраических уравнений.....	150
5.1.2. Преобразование к оценкам решений регулярной бесконечной системы.....	153
5.1.3. Улучшение сходимости рядов в представлении решения.....	162
5.2. Вынужденные установившиеся гармонические колебания изотропной пластины в случае первой основной граничной задачи...	168
5.2.1. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений в случае первой основной граничной задачи .....	168
5.2.2. Исследование бесконечной системы. Асимптотика неизвестных	170
5.2.3. Улучшение сходимости рядов в решении .....	175
5.3. Планарные колебания ортотропной прямоугольной пластины с защемленными и свободными краями .....	178

5.3.1. Общее решение дифференциальных уравнений. Бесконечные системы уравнений в случае свободных и защемленных краев пластины .....	178
5.3.2. Исследование бесконечных систем. Асимптотика нетривиального решения на собственных частотах колебаний...	189
5.4. Спектр собственных частот планарных колебаний прямоугольной пластины.....	199
5.4.1. Пластина с защемленными краями.....	200
5.4.2. Пластина со свободными краями.....	206
5.5. Продольные колебания пластины крестообразного сечения.....	212
5.5.1. Постановка задачи и общее решение уравнений Ламе.....	213
5.5.2. Сведение к бесконечной системе линейных уравнений.....	215
5.5.3. Асимптотика решения бесконечной системы.....	220
5.5.4. Примеры численной реализации.....	224
5.6. Асимптотически точное решение задачи о колебаниях прямоугольного параллелепипеда в трехмерной постановке.....	225
5.6.1. Постановка задачи. Метод суперпозиции для параллелепипеда..	225
5.6.2. Анализ и решение бесконечной системы.....	234
5.6.3. Улучшение сходимости. Численные результаты.....	246
5.6.4. Спектр собственных частот симметричных колебаний упругого параллелепипеда.....	253
5.7. Краткие выводы к главе 5.....	256

ГЛАВА 6. ФЛАТТЕР ЗАЦЕМЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ .....	258
6.1. Постановка задачи и общее решение.....	258
6.2. Метод Бубнова – Галеркина в задаче о флаттере заземленной пластины.....	260
6.2.1. Общая схема метода Бубнова – Галеркина.....	260
6.2.2. Базисные функции и особенности численной реализации.....	261
6.2.3. Сходимость метода .....	267
6.3. Численные результаты.....	270
6.4. Краткие выводы по главе 6.....	274
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	276
ЛИТЕРАТУРА.....	278

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность**

На сегодняшний день появилось достаточно большое количество практически значимых задач в авиа- и машиностроении, в микро- и наноэлектронике, которые требуют анализа колебаний и динамической устойчивости элементов конструкций на средних и высоких частотах. К таким задачам можно отнести как исследование элементов конструкций на прочность при ударных нагрузках, при высокочастотных колебаниях, анализ динамической устойчивости, анализ влияния упругих колебаний в полупроводниковых пластинах в электронике. Как известно, метод конечных элементов (МКЭ) является общепринятым и универсальным инструментом в структурном анализе сложных конструкций. МКЭ основывается на дискретизации структуры на малые элементы, на которых динамические характеристики выражаются через аппроксимирующие функции. Как следствие, при увеличении частоты колебаний увеличивается и количество аппроксимирующих элементов, что приводит к тому, что в некоторых отраслях, таких как машиностроение и авиастроение, использование МКЭ практически ограничено диапазоном низких частот. В связи с этим, для моделирования механических структур в области средних и высоких частот разрабатываются методы, основанные как на методах теории вероятностей (например, Statistical Energy Analysis method [194]), так и на использовании точных решений применительно к отдельным элементам структуры (Continuous Element method [153], Spectral Element method [185], Dynamic Stiffness method или DSM [135-143], [227]). В частности, для анализа колебаний и устойчивости ансамблей пластин эффективно себя зарекомендовал DSM. Данный метод, используя точные решения теории упругости для шарнирно-опертой пластины, позволяет получить значения собственных частот ансамбля пластин в широком частотном диапазоне. Однако для иных форм граничных условий пластин точное решение уравнения колебаний отсутствует, что существенно сужает область применимости такого подхода.

Преодоление данного ограничения связано с новыми аналитическими решениями для динамических элементов, то есть с разработкой подхода к решению задач колебания и устойчивости для тел полигонального сечения,

дающего возможность описать поведение динамического элемента в любом требуемом диапазоне частот. В этом контексте новые решения для структурных элементов дают возможность к более эффективному по времени анализу практически значимых задач, в том числе и на основе метода спектральной динамической жесткости.

Обобщение метода спектральной динамической жесткости на ансамбли пластин с произвольными граничными условиями открывает возможность для его приложения к исследованию задач динамической устойчивости. В частности, в задачах панельного флаттера, система собственных форм колебаний панели в вакууме, построенная на основе DSM, может служить в качестве базиса для метода Бубнова – Галеркина, что позволяет провести анализ динамической устойчивости для нового класса задач.

### **Степень разработанности темы исследования**

Точные решения задач о колебаниях и устойчивости в механике твердого тела встречаются достаточно редко. Практически большинство известных решений были получены еще на этапе становления теории упругости и играют на сегодняшний день роль эталона, с которым сверяются численные и аналитико-численные методы. Вопросам построения эффективных аналитических решений для пластин, которые не имеют заделки в виде шарнирного опирания, посвящено большое количество исследований. Дискуссия о возможности построения точных решений продолжается до сих пор. Так, например, в работах Y. Xing и B. Li [228] предлагается спорный метод «dual separation of variables», которым авторы строят замкнутое аналитическое решение задачи о колебаниях полностью защемленной прямоугольной пластины. В статье X. Liu и J.R. Banerjee [193] делается вывод о невозможности построения аналитического решения для пластин, не имеющих шарнирно опертых краев.

Приближенное решение в аналитической форме обычно строится на основе вариационного подхода. Заметим, что при возрастании частоты колебаний приходится увеличивать и число базисных функций, вовлекаемых в решение, в итоге порядок системы линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов достаточно быстро возрастает. При анализе отдельной пластины данная трудность легко преодолима, однако, использование подобных решений



для описания структурного элемента в рамках практически любого из вышеперечисленных методов (например, DSM) оказывается неэффективным. В этой связи возникает потребность в получении новых аналитических решений, которые смогли бы обеспечить требуемый компромисс между точностью решения для элемента и эффективностью численной реализации при расчете ансамбля пластин.

В частности, в недавних работах [201], [202] представлено развитие DSM для элементов в форме прямоугольных пластин, где для этих целей используется метод суперпозиции, предложенный D.J. Gorman [164-170]. Однако при использовании данного подхода ряды, представляющие решения, усекаются, следовательно, с возрастанием частоты колебаний приходится удерживать большее число членов ряда. Таким образом, возникает та же проблема, что и при использовании вариационного подхода. Одним из путей к преодолению данной проблемы лежит в исследовании асимптотического поведения коэффициентов рядов, представляющих искомое решение. В таком случае получается фактически точное решение с инженерной точки зрения в любом диапазоне частот. С математической точки зрения данное решение можно рассматривать как асимптотически точное. Построение таких асимптотик связано с исследованием поведения решений соответствующих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений при неограниченном возрастании номера.

Для упругих тел полигонального сечения, в частности параллелепипеда, задачи колебания в трехмерной постановке не имеют эффективного аналитического решения в случае первой и второй основных краевых задач. Построение новых аналитических решений для данных объектов представляет безусловный интерес, как с точки зрения эталонных решений, так и при описании структурного элемента.

### **Цели и задачи**

Цель диссертации – разработка эффективного метода для анализа колебаний и устойчивости пластин и их ансамблей при произвольных граничных условиях на основе новых асимптотически точных решений для структурного элемента.

Эта цель предполагает решение следующих задач:

- Разработка DSM для анализа ансамблей пластин в случае, когда на сторонах элементов структуры заданы граничные условия защемления, шарнирного опирания или свободного края.
- Построение новых аналитических решений для структурных элементов.
- Развитие новых аспектов теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, которая позволяла бы эффективно строить новые аналитические решения.
- Анализ особенностей напряжений, возникающих при подходе к внешним и внутренним угловым точкам.
- Разработка метода определения с гарантированной точностью собственных частот колебаний тел.
- Построение решения задачи о панельном флаттере защемленной пластины.
- Построение эффективного аналитического решения задачи о колебаниях упругого параллелепипеда в трехмерной постановке.

### **Научная новизна**

Впервые получены новые аналитические решения для ряда задач колебания и устойчивости пластин, прямоугольного параллелепипеда в трехмерной постановке. Рассмотрены случаи практически важных краевых условий, в частности, для ортотропных пластин анализируются случаи полностью свободного края и полностью защемленного края. Решения указанных задач сводятся к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов в общем решении. Используя авторское обобщение закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича, для неизвестных в бесконечных системах находятся степенные асимптотики, которые позволяют найти всю последовательность неизвестных коэффициентов и получить асимптотически точное решение краевой задачи.

Используя полученные решения для задачи колебания пластин, строится спектральная матрица жесткости, связывающая значения граничных усилий и смещений пластины. Данный результат получен впервые для произвольных граничных условий. На основе матрицы жесткости элемента в виде отдельной пластины, строится алгоритм их объединения в общую DSM матрицу ансамбля пластин. Таким образом, построен новый метод спектральной динамической

жесткости, подобный к DSM, эффективность которого численно подтверждена на примере ряда задач для пластин полигонального сечения.

Сформулирован и доказан достаточный признак существования ограниченного решения у квазирегулярной бесконечной системы, который позволяет с высокой точностью найти значение собственного значения (собственной частоты или критической силы) без численного решения бесконечной системы. Данный признак позволяет впервые достоверно найти собственные частоты колебания для пластин со свободным и заземленным краем, в том числе и при гибких колебаниях.

В задаче о флаттере прямоугольной ортотропной панели в сверхзвуковом потоке газа впервые предлагается использовать в качестве базисных функций метода Бубнова - Галеркина новые аналитические представления собственных форм колебаний прямоугольной ортотропной пластины в вакууме. Представлен алгоритм определения критического значения параметра скорости, форм потери динамической устойчивости. Исследуется сходимость метода Бубнова – Галеркина при варьировании параметров задачи. Представлены примеры численной реализации, анализируется влияние ортотропии материала и планарных усилий.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Полученные с использованием новых результатов из теории бесконечных систем аналитические решения задач теории упругости для продольных и поперечных колебаний пластин, бруса с сечением в виде крестообразной области, прямоугольного параллелепипеда имеют самостоятельное теоретическое значение, так как данные решения впервые дают возможность для эффективного анализа соответствующих краевых задач. Решения этих задач имеют также и самостоятельное практическое значение, состоящее в том, что высокочастотные колебания перечисленных выше объектов встречаются в различных прикладных задачах технического характера. В частности, пластинки прямоугольной формы представляют особый интерес в микро- и наноэлектронике, в задачах строительной механики, при моделировании технических систем, в геофизике и др. Данные решения могут быть использованы для параметрической оптимизации, для анализа устойчивости к вибрации технических систем.

Развитая в работе асимптотическая теория квазирегулярных бесконечных систем линейных уравнений допускает применение также и во многих смежных дисциплинах (например, механика жидкости, гидроакустика, радиотехника) при анализе и решении краевых задач, которые до сих пор имели лишь приближенное или численное решение.

Предложенный новый аналитико-численный метод спектральной динамической жесткости (DSM) дает возможность для эффективного анализа колебания и устойчивости ансамблей пластин. Данный метод, прежде всего, будет востребован при моделировании сложных технических систем в таких отраслях как авиастроение, автомобилестроение.

### **Методология и методы исследования**

При решении поставленных задач использовались методы механики деформируемого твердого тела, в частности метод суперпозиции. При помощи данного метода краевые задачи колебания и устойчивости для пластин, брусьев и прямоугольного параллелепипеда сводились к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов в общем решении, которое *a priori* удовлетворяет разрешающим дифференциальным уравнениям. Для построения эффективного алгоритма отыскания собственных чисел краевых задач (собственных частот колебаний или критических нагрузок) и соответствующих им нетривиальных решений однородных бесконечных систем, была разработана соответствующая теория для квазирегулярных бесконечных систем. При помощи построенного достаточного признака существования ограниченного решения для квазирегулярных бесконечных систем во всех рассмотренных случаях находятся собственные числа. Признак оказывается достаточно эффективным для определения собственных значений с наперед заданной точностью без численного решения бесконечной системы. Предложенное обобщение закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича позволяет найти для рассматриваемых задач степенную асимптотику нетривиального решения бесконечной системы и, как следствие, в любом диапазоне частот удастся получить замкнутое аналитическое представление собственных форм. При этом использовались методы

математического анализа и асимптотические разложения для улучшения сходимости рядов.

Полученные решения для отдельных пластин использовались для разработки DSM при произвольных граничных условиях на основе методов структурной механики и теории пластин. Алгоритм объединения локальных матриц жесткости в единую структуру осуществлялся на основе методов матричной алгебры.

### **Положения, выносимые на защиту**

На защиту выносится новый спектральный метод динамической жесткости, который позволяет исследовать задачи колебания и устойчивости ансамблей пластин при произвольных граничных условиях, методика построения спектральной матрицы жесткости, ее анализ и эффективная редукция, алгоритм стыковки отдельных элементов в единую структуру.

На защиту также выносится общий подход к отысканию аналитических решений ряда краевых задач, описывающих задачи колебания и устойчивости пластин, брусьев полигонального сечения и прямоугольного параллелепипеда в трехмерной постановке.

В частности, в диссертации впервые представлены новые аналитические (асимптотически точные) решения в случае

- гибких (свободных) поперечных колебаний защемленной (свободной) ортотропной прямоугольной пластины;
- планарных колебаний в случае обобщенного напряженного состояния защемленной или полностью свободной ортотропной прямоугольной пластины;
- вынужденных установившихся колебаний параллелепипеда под действием приложенных к его граням нормальных нагрузок в трехмерной постановке.

Представленные в диссертации задачи сводились при помощи метода суперпозиции к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, для которых не было подходящей теории для эффективного решения. Поэтому на защиту выносится ряд теоретических результатов из теории бесконечных систем, разработанных для решения поставленных выше задач теории упругости. В частности, выносится достаточный признак существования ненулевого предела у

решения бесконечной системы, позволяющий находить степенные асимптотики неизвестных коэффициентов рядов, представляющих силовые и кинематические характеристики. Также выносятся на защиту признак существования ограниченного решения у квазирегулярной бесконечной системы, позволяющий без численного решения бесконечной системы находить собственные частоты колебаний и критические силы в исследуемых задачах.

На защиту выносятся исследование динамической устойчивости прямоугольной защемленной ортотропной пластины на основе метода Бубнова – Галеркина, качественные зависимости о влиянии материала панели и планарных нагрузок на критическую скорость.

Закономерности деформирования и свободных колебаний ряда составных пластин, прямоугольного параллелепипеда при механическом нагружении. Анализ спектра собственных частот данных тел. Аналитическое описание особенностей напряжений в окрестностях внутренних угловых точек, устранение особенностей в представлении решения в окрестности внешних угловых точек.

**Достоверность результатов** обусловлена строгостью постановки задач, построением аналитических решений в рамках сформулированных моделей. Строгим математическим доказательством представленных новых теорем из теории бесконечных систем, строгим анализом полученных бесконечных систем и их решений. Результаты исследований на эталонных примерах сверялись как с известными в литературе результатами, так и проверялись на достоверность и эффективность в сравнении с численными методами.

#### **Апробация результатов исследования**

Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих рецензируемых зарубежных и отечественных научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК России [64, 75, 78 - 80, 82 – 93, 142, 207 - 211, 213, 214]. Результаты подтверждаются также публикациями в научных сборниках и трудах конференций [63, 65, 76 - 77, 81, 94 -105, 190, 212]. Все результаты, которые выносятся на защиту, были получены автором диссертации самостоятельно. Данные результаты, включая математические постановки и решения задач, разработанную теорию бесконечных систем линейных уравнений и алгоритм

DSM при произвольных граничных условиях, представлены в перечисленных выше публикациях.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на международной научной конференции «Dynamical system modelling and stability investigation» (May, 2005. Kiev, Kiev University), на IV межд. науч. конф. «Актуальные проблемы механики твердого деформируемого тела» (2006. Донецк: ДонНУ), на восьмой и десятой Крымской международной математической школе (2006 г., 2010 г., Симферополь: ТНУ), на международных научных конференциях «Прикладные задачи математики и механики» XV – XXV (Севастополь, СевНТУ, СевГУ 2007 – 2017 гг.), на акустических симпозиумах «Консонанс-2007», «Консонанс-2009» (Киев, Институт гидромеханики), на XIV межд. конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (2010 г., Ростов-на-Дону), на международной научной конференции «Моделирование, управление и устойчивость (MCS)» (Крым, Севастополь, 10-14 сентября, 2012), на международной научной конференции «Advances in Computational&Experimental Engineering and Sciences (ICCES 2012)» (Crete, Greece), на международной научной конференции «Twelfth Int. Conf. on Computational Structures Technology» (Stirlingshire, Scotland, 2014). Обсуждались на семинаре отдела динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины (2011). В 2013 году основные положения по применению аналитических решений теории пластин к разработке DSM были обсуждены на научном семинаре кафедры структурной динамики (Cardiff University). Выносимые на защиту результаты также обсуждались на научном семинаре под руководством профессора J.R. Banerjee, директора центра аэродинамики School of Engineering and Mathematical Sciences at City University London (2014 г.). В 2016 г. основные результаты работы были представлены на Городском семинаре по механике ИПМаш РАН ( г. Санкт-Петербург).

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель исследования, положения, выносимые на защиту, научная новизна и практическая значимость, представлена структура диссертации.

В **первой главе** подробно проанализированы литературные данные, посвященные исследованию вопросов, связанных с построением аналитических решений в теории тонких пластин, в задачах установившихся колебаний упругих прямоугольных брусьев. Описаны основные классические и современные подходы к построению точных решений для прямоугольных пластин. Дано краткое описание метода суперпозиции. Проанализированы возможности и ограничения указанных подходов к построению аналитических решений, показана необходимость построения эффективной асимптотической теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Дается описание метода динамической жесткости в случае анализа поперечных колебаний ансамблей прямоугольных пластин с шарнирно-опертыми сторонами. Описаны его преимущества и недостатки в сравнении с другими подходами.

Представлена постановка основных задач и обоснован выбор объектов исследования. Выбрано основное направление исследований: построение асимптотически точных решений задач колебания и устойчивости тонких прямоугольных пластин, брусьев полигонального сечения, прямоугольного параллелепипеда.

**Вторая** глава посвящена развитию теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. В частности, в п. 2.3. данной главы на основе теории лимитант Б.М. Кояловича формулируется и доказывается достаточный признак существования ненулевого предела у единственного ограниченного решения бесконечной системы. Представленная в диссертации теория значительно расширяет возможности асимптотического анализа решений бесконечных систем, т.к. во-первых, позволяет рассматривать системы с произвольной неотрицательной матрицей, во-вторых, находить при помощи замены переменных степенную асимптотику решения.

В п. 2.2 впервые формулируются и доказываются достаточные условия существования ограниченного решения квазирегулярной бесконечной системы,



математически строго доказываются достаточные условия существования тривиального решения у квазирегулярной системы. Данный признак в последующих главах используются для локализации и нахождения с заданной точностью собственных чисел поставленных краевых задач.

**Третья глава** посвящена построению аналитических решений для прямоугольной пластины в двух практически важных случаях граничных условий – полностью защемленных краев и полностью свободных краев. Так в п. 3.1 исследуются свободные колебания ортотропной пластины в различных случаях симметрии решения. Здесь, в зависимости от типа симметрии, предлагается комбинированная система тригонометрических функций, допускающая единообразные выкладки, что дает возможность для сведения данных задач к квазирегулярным бесконечным системам. Таким образом, впервые для всех случаев симметрии строится единое аналитическое решение и бесконечная система. Анализ разрешимости бесконечных систем позволяет найти собственные частоты колебаний, а приложение достаточного признака существования ненулевого предела у ограниченного решения полученных бесконечных систем позволяет найти степенные асимптотики данных решений и провести эффективную редукцию систем. На основе полученных результатов, исследуются собственные формы пластины (фигуры Хладни) в зависимости от упругих свойств материала.

В п.3.2. представлено решение задачи о гибких колебаниях защемленной ортотропной прямоугольной пластины. Все результаты, полученные в п. 3.1, остаются верными: собственные числа задачи – собственные частоты колебаний и критические силы, находятся согласно выведенному во втором разделе признаку, а собственные формы колебаний находятся с использованием асимптотики соответствующей бесконечной системы. Следующий п.3.3 посвящен решению задачи о статической устойчивости и гибких колебаниях ортотропной пластины. Используя представление решения через тригонометрическую систему функций, задача решается тем же способом. Получена асимптотика нетривиального решения однородной бесконечной системы. Проводится параметрическое исследование собственных чисел и критических сил пластины.

В **четвертой главе** диссертации разработан метод спектральной динамической жесткости для анализа поперечных колебаний ансамбля прямоугольных пластин в случае произвольных граничных условий. Ключевым моментом в реализации данного метода является использование построенных в третьей главе диссертации асимптотически точных решений теории тонких пластин. В 4.1 описывается постановка задачи в общем случае, строится зависимость между коэффициентами разложения по тригонометрической системе функций кинематических граничных характеристик элемента (граничных значений прогиба и углов поворота) и силовых характеристик (моментов и опорных реакций). Данная зависимость записывается в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, связывающей указанные коэффициенты, при этом входящие в нее блоки бесконечных матриц оказываются в точности теми, что уже проанализированы в случае пластин с заземленными или свободными краями. Это позволяет в п.4.2. на основе известных асимптотик построить явную зависимость между граничными кинематическими характеристиками и граничными силовыми характеристиками, т.е. получить спектральную динамическую матрицу жесткости элемента.

В п.4.3. описывается алгоритм стыковки отдельных матриц элементов в генеральную матрицу ансамбля пластин. Представленный подход иллюстрируется в п.4.4. на примере ряда модельных задач, проводится анализ эффективности предлагаемого подхода в сравнении с коммерческими программными продуктами, написанными на основе метода конечных элементов.

**В пятой главе** на основе сформулированного подхода строятся решения плоских задач теории упругости для изотропных и ортотропных пластин (продольные колебания прямоугольной пластины в рамках обобщенного напряженного состояния или колебания бесконечного бруса прямоугольного сечения в рамках плоской деформации). В п.5.1. и п.5.2. исследуются краевые задачи для изотропного прямоугольника в случае возбуждения колебаний напряжениями (п.5.1) или смещениями (п.5.2). При помощи метода суперпозиции получено общее решение уравнений колебаний в форме двух тригонометрических рядов, обладающее достаточной полнотой для удовлетворения данным краевым условиям. В обоих случаях доказывается квазирегулярность полученных

бесконечных систем, строится степенная асимптотика их решений, что позволяет, в отличие от подхода D.J. Gorman, свернуть остатки рядов и получить аналитическое представление для смещений и напряжений. Приводятся решения модельных задач.

В разделе 5.3. используется модифицированный тригонометрический базис для решения задач о планарных колебаниях ортотропных прямоугольных пластин со свободными и защемленными краями. Полученные в предыдущих двух разделах результаты обобщаются на случай ортотропного материала, строится трансцендентное уравнение для определения степенной асимптотики нетривиального решения полученных бесконечных систем. Также как и в третьей главе диссертации, собственные частоты колебаний вычислялись на основе сформулированного во второй главе признака, который впервые дает возможность для эффективного определения верхних и нижних границ собственных частот пластины. Показывается, что данный подход является эффективным и в области высоких частот.

Полученные аналитические решения дают возможность провести анализ спектра собственных частот колебаний в случае первой и второй основных граничных задач для прямоугольника. Проведено параметрическое исследование зависимости спектральных кривых от упругих констант. Показан механизм возникновения эффекта краевого резонанса для симметричных мод колебаний и его отсутствие в случае косо́й симметрии.

В п.5.5. представлено решение плоской задачи для крестообразной области в случае установившихся вынужденных колебаний под действием граничных напряжений. Декомпозиция области креста на прямоугольники позволяет свести данную задачу к бесконечной системе линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов в общем решении. Известный закон сингулярности напряжений во внутренней угловой точке креста, а также найденный ранее асимптотический закон поведения неизвестных в задачах для прямоугольника, позволяет найти двухчленную асимптотику для решения бесконечной системы и провести ее редукцию к конечной системе. Дополнительно исследован случай вырождения равнобокого креста к

прямоугольнику, показано, что в данном случае концентраторы напряжений в углах области существенно влияют на спектр собственных частот.

В п.5.6. диссертации представлено решение классической задачи теории упругости о колебаниях прямоугольного параллелепипеда. Данная задача, несмотря на то, что была впервые поставлена в трехмерной постановке еще Ламе в середине XIX столетия, до сих пор имеет лишь решения, полученные на основе вариационного принципа. В п.5.6.1 строится общее решение уравнений Ламе на основе метода суперпозиции. В отличие от плоских задач, здесь решение представляется в виде суммы трех двойных тригонометрических рядов с неопределенными коэффициентами. Таким образом, полученная из граничных условий бесконечная система в п.5.6.2. связывает три бесконечные матрицы неопределенных коэффициентов.

Для преодоления проблемы размерности разработана методика аналитического отображения элементов бесконечной матрицы на последовательность, которая позволяет записать полученную бесконечную систему в каноническом виде. Далее, используя известную в математическом анализе асимптотику коэффициентов ряда Фурье для гладкой функции, в предположении гладкости граничных напряжений находится асимптотика неизвестных в бесконечной системе, позволяющая описывать элементы искомым бесконечных матриц, как по строкам, так и по столбам. Это, в свою очередь, позволяет построить эффективный алгоритм определения всех неопределенных коэффициентов. Показано, что при вырождении трехмерной задачи в плоскую задачу, найденные в п. 5.6.2 асимптотики переходят в асимптотики для плоской задачи. Для системы также доказана квазирегулярность. Показано, что достаточные условия существования решения у квазирегулярной системы, доказанные во второй главе, и здесь позволяют локализовать собственные частоты.

На основе найденных асимптотик остатки двойных рядов сворачиваются, что позволяет найти замкнутое аналитическое представление для всех характеристик напряженно-деформированного состояния. Это, в свою очередь, позволяет провести исследование спектра собственных частот упругого параллелепипеда в зависимости от упругих характеристик и линейных размеров.

Впервые построены таблицы собственных значений параллелепипеда в случае для симметричных по осям нагрузок. Анализ спектра собственных значений и собственных форм показывает, что для конечного параллелепипеда также характерен эффект краевого резонанса.

**В шестой главе** диссертации представлено решение задачи о флаттере заземленной ортотропной прямоугольной пластины в сверхзвуковом потоке газа. Предлагается использовать в качестве базисных функций метода Бубнова - Галеркина новые аналитические представления собственных форм колебаний прямоугольной ортотропной пластины в вакууме. Представлен как алгоритм построения базисных функций, так и алгоритм определения критического значения параметра скорости, форм потери динамической устойчивости. Исследуется сходимость метода Бубнова – Галеркина при варьировании параметров задачи. Представлены примеры численной реализации, анализируется влияние ортотропии материала и планарных усилий.

По каждой главе представлены краткие выводы.

**В Заключении** изложены основные результаты диссертации.

Количество страниц в диссертации – 295, в том числе иллюстраций – 56 и таблиц - 61. Список литературы содержит 228 наименований.

\*\*\*

## ГЛАВА 1. КЛАССИЧЕСКИЕ И СОВРЕМЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### 1.1. Поперечные колебания прямоугольных пластин

Пластины широко используются как структурные элементы в дизайне и анализе конструкций, возникающих в различных отраслях промышленности, по этой причине исследованию их статических и динамических характеристик посвящено большое количество публикаций, начиная с работ В. Ритца [218] и заканчивая современными исследованиями. В частности, в фундаментальных работах С.П. Тимошенко [125 - 127], С.Г. Лехницкого [60, 61], С.А. Амбарцумяна [5, 6] представлены основные результаты, описывающие постановку задачи и аналитические подходы к ее решению. Классические методы, используемые для построения решений в теории пластин можно найти, например, в справочнике под редакцией И.А. Биргер и Я.Г. Пановко [114], монографии W.Leissa [188], обзорах [31, 37] и многих других источниках.

Различные аспекты теории пластин и их приложение в задачах механики твердого деформируемого тела освещены в исследованиях советских и российских ученых. Эти работы, в частности, представлены в академических журналах АН СССР и РАН [7, 10, 11, 12, 18, 25, 28, 50, 72, 107, 110, 112, 113] и др., сборниках тематических статей (например, «Исследования по теории пластин и оболочек» издательство Казанского ун-та 1961- 1992 под ред. К.З.Галимова) и монографиях [3, 5, 6, 8, 9, 16, 22, 26 – 27, 29, 32 – 34, 38 – 41, 43 – 48, 55, 60 – 62, 69 – 71, 73 – 74, 106, 109, 111, 114, 115 – 120, 123, 127, 131 - 132].

Задачи динамики и устойчивости пластин тесно связаны с более общим вопросом развития математических методов исследования динамических проблем теории упругости. Основной вклад в развитие этих методов внесли ученые: В.А.Бабешко и соавторы [10, 11], В.В. Болотин и соавторы [17 - 23], Б.Ф. Власов [25], В.З. Власов [26 - 28], И.И. Ворович и соавторы [31 - 34], Э.И. Григолюк [37, 38], В.Т.Гринченко и соавторы [39 - 42], А.Н. Гузь и соавторы [43 - 45], А.А. Ильюшин [48, 49], Ю.В. Немировский [8, 68], О.Д.Петрашень [107, 108], Г.И. Пшеничнов [112, 113], В.Л. Рвачев [117], А.Я.Сагомоян [118], И.Т. Селезов [121, 122], А.Ф. Улитко [24], Я.С. Уфлянд [128], И.Г. Филиппов [131, 132] и

другие. Развитие теории анизотропных пластин, а также широкий анализ влияния анизотропии на динамику и устойчивость представлены в работах С.А. Амбарцумяна [5 - 7], Н.А. Алфутова [3, 4], В.И. Андреева [8], И.И. Гольденבלата [13], Э.И. Григолюка [37, 38], О.О. Егорычева [46], А.С. Космодамианского [182], С.Г. Лехницкого [60, 61], В.В.Новожилова [70, 71], А.W. Leissa [186 - 188], J.N. Reddy [216]. Развитию численных методов исследования посвящены работы В.А. Андреева, И.А.Бригера, Я.М. Григоренко, Б.Е. Победря, J.R. Banerjee, N.S. Bardell, J.N. Reddy и многих других [8, 109, 135- 143, 145 - 146, 150, 223 - 225].

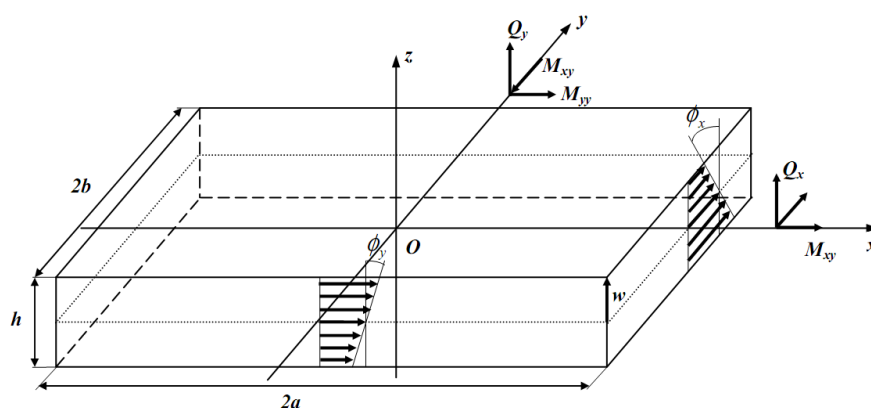


Рис. 1.1 Координатная система и обозначения для смещений и сил

На рис. 1. представлена прямоугольная ортотропная пластина  $\{(x, y) \in [-a; a] \times [-b; b]\}$  толщины  $h$ . Согласно [60] упругие свойства материала можно описать при помощи четырех упругих констант. В частности, с помощью модуля Юнга  $E_1$  вдоль направления оси  $x$ , модуля сдвига  $G$  и двух коэффициентов Пуассона  $\nu_{12}$  и  $\nu_{21}$ . Тогда уравнение установившихся сложных колебаний пластины в приближении классической теории Кирхгофа - Лява может быть записано относительно прогиба пластины  $w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t}$ :

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - D_1 \Omega^4 W = 0 \quad (1.1)$$

где  $\Omega = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho h}{D_1}}$  - безразмерный частотный параметр,  $\rho$  - плотность материала,  $\omega$  -

круговая частота;  $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$ ;  $D_2 = \frac{\nu_{21} E_1 h^3}{12\nu_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$ ;  $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$ ;

$$D_{66} = \frac{Gh^3}{12}; D_{12} = \nu_{12}D_2.$$

Заметим, что в случае анализа устойчивости пластины, инерциальный член уравнения (1.1) полагается равным нулю  $\Omega = 0$  и задача сводится к нахождению критических значений нагрузок  $N_x$  и  $N_y$ , при которых возможны положения равновесия, отличные от начального. При  $N_x = N_y = 0$  уравнение (1.1) описывает свободные колебания пластины.

На стороне пластины  $x = a$  выделяют следующие четыре основных типа граничных условий:

условие полного защемления -

$$W = 0; \quad \phi_y = \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

условие шарнирно опертого края -

$$W = 0; \quad M_x = -\left( D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.3)$$

или эквивалентная запись

$$W = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (1.4)$$

условие свободного края -

$$\begin{cases} M_x = -\left( D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0; \\ -V_x + N_x \phi_y = \left( D_1 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (D_3 + 2D_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) - N_x \frac{\partial W}{\partial x} = 0; \end{cases} \quad (1.5)$$

условие упруго опертого края -

$$W + \alpha V_x = 0; \quad \phi_y + \beta M_x = 0; \quad (1.6)$$



где  $\alpha, \beta$  - некоторые константы.

Известно, что даже в приближении классической теории пластин [13, 114, 188], точное решение задачи может быть получено только, когда две противоположные стороны пластины являются шарнирно-опертыми (решение Навье в случае, когда все стороны пластины шарнирно-оперты, и решение Леви в более общем случае). Лишь в этом случае уравнение колебаний (1.1) допускает разделение переменных и позволяет получить решение в виде тригонометрического ряда. Эти случаи точного решения уравнения (1.1) наиболее детально представлены в [188] наряду с большим количеством других типов граничных условий, для которых представлен обзор результатов.

Действительно, легко увидеть, что решение вида

$$W = (A \operatorname{ch} p_1(\alpha)y + B \operatorname{ch} p_2(\alpha)y) \cos \alpha x \quad (1.7)$$

где  $p_1(\alpha)$  и  $p_2(\alpha)$  - линейно-независимые корни характеристического биквадратного уравнения вида

$$D_2 p^4 + (N_y - 2D_3 \alpha^2) p^2 + D_1 \alpha^4 - 2N_x \alpha^2 - D_1 \Omega^4 = 0 \quad (1.8)$$

дает возможность выполнить условие шарнирно опертого края (1.4) для четной составляющей решения, если выбрать  $\alpha_n = \frac{\pi}{a}(n - 1/2)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Тогда одно из условий для смежных сторон прямоугольника позволяет связать константы  $A, B$ , второе условие дает дисперсионное уравнение для определения собственных частот колебаний.

Попытки преодолеть данное препятствие и найти точное решение задачи для граничных условий отличных от шарнирного опирания не прекращаются и сегодня. Здесь следует отметить недавнюю работу Y. Xing и B. Liu [228], где предлагается метод “dual separation of variables” применительно к задаче о свободных колебаниях полностью защемленной ортотропной пластины. Основная идея авторов заключается в том, чтобы найти моды колебаний в форме

$$W = \phi(x)\psi(y) \quad (1.9)$$

где  $\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)$ ,  $\psi(y) = \psi_1(y) + \psi_2(y)$ ,

$$\phi_1(x) = A_1 \cos \alpha_1 x + B_1 \sin \alpha_1 x, \quad \phi_2(x) = C_1 \operatorname{ch} \beta_1 x + H_1 \operatorname{sh} \beta_1 x$$

$$\psi_1(y) = A_2 \cos \alpha_2 y + B_2 \sin \alpha_2 y, \quad \psi_2(y) = C_2 \operatorname{ch} \beta_2 y + H_2 \operatorname{sh} \beta_2 y$$

При этом предполагается, что подходящие величины  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  могут быть найдены на комплексной плоскости.

Однако, можно показать, что не существуют нетривиальные значения величин  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ . Действительно, предполагаемое решение задачи (1.9), после подстановки в уравнение (1.1) (рассматривается случай свободных колебаний  $N_x = N_y = 0$ ) дает следующие равенства:

$$D_1 \alpha_1^4 + 2D_3 \alpha_1^2 \alpha_2^2 + D_2 \alpha_2^4 - \Omega^4 = 0 \quad (1.10)$$

$$D_1 \alpha_1^4 - 2D_3 \alpha_1^2 \beta_2^2 + D_2 \beta_2^4 - \Omega^4 = 0 \quad (1.11)$$

$$D_1 \beta_1^4 - 2D_3 \beta_1^2 \alpha_2^2 + D_2 \alpha_2^4 - \Omega^4 = 0 \quad (1.12)$$

$$D_1 \beta_1^4 + 2D_3 \beta_1^2 \beta_2^2 + D_2 \beta_2^4 - \Omega^4 = 0 \quad (1.13)$$

Далее, вычтем из (1.12) уравнение (1.10), что дает

$$D_1(\beta_1^4 - \alpha_1^4) - 2D_3(\beta_1^2 + \alpha_1^2)\alpha_2^2 = 0; \quad \text{или} \quad (\beta_1^2 + \alpha_1^2)(D_1(\beta_1^2 - \alpha_1^2) - 2D_3\alpha_2^2) = 0; \quad (1.14)$$

Откуда следует, что возможны два случая:

- 1)  $\beta_1 = i\alpha_1$ , тогда функции  $\phi_1(x)$  и  $\phi_2(x)$  совпадают, в этом случае получаем классический метод разделения переменных, что приводит к уже известным решениям.

$$2) \quad D_1(\beta_1^2 - \alpha_1^2) - 2D_3\alpha_2^2 = 0 \quad (1.15)$$

Аналогично, вычитая (1.11) и (1.13) получаем

$$-(\beta_1^2 + \alpha_1^2)(D_1(\beta_1^2 - \alpha_1^2) + 2D_3\beta_2^2) = 0;$$

или

$$D_1(\beta_1^2 - \alpha_1^2) + 2D_3\beta_2^2 = 0 \quad (1.16)$$

Далее, вычитая (1.10) и (1.11) находим, что или  $\alpha_2 = i\beta_2$ , что приводит к классической схеме разделения переменных, или

$$D_2(\alpha_2^2 - \beta_2^2) + 2D_3\alpha_1^2 = 0 \quad (1.17)$$

Разность (1.12) и (1.13) приводит к равенству

$$D_2(\alpha_2^2 - \beta_2^2) - 2D_3\beta_1^2 = 0 \quad (1.18)$$

Равенства (1.15) – (1.18) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\alpha_1^2, \beta_1^2, \alpha_2^2, \beta_2^2$ :

$$\begin{cases} D_1\alpha_1^2 + 2D_3\alpha_2^2 - D_1\beta_1^2 = 0 \\ -D_1\alpha_1^2 + D_1\beta_1^2 + 2D_3\beta_2^2 = 0 \\ 2D_3\alpha_1^2 + D_2\alpha_2^2 - D_2\beta_2^2 = 0 \\ D_2\alpha_2^2 - 2D_3\beta_1^2 - D_2\beta_2^2 = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Определитель этой системы выражается через упругие постоянные и, вообще говоря, отличен от нуля

$$\begin{vmatrix} D_1 & 2D_3 & -D_1 & 0 \\ -D_1 & 0 & D_1 & 2D_3 \\ 2D_3 & D_2 & 0 & -D_2 \\ 0 & D_2 & -2D_3 & -D_2 \end{vmatrix} = 16D_3^2(D_3^2 - D_1D_2) \neq 0$$

Таким образом, однородная система (1.19) имеет лишь тривиальное решение  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ , и решение в форме (1.9) не существует.

Проблемы в построении точных решений для пластин, даже в случае простейшей прямоугольной геометрии, привели к развитию многочисленных математических методов. Одним из наиболее эффективных подходов для построения аналитического решения в теории пластин на сегодняшний день является метод Ритца, который был впервые предложен для решения проблемы гармонических колебаний изотропной пластины со свободными краями [218]. Как известно, согласно данному методу приближенное решение задачи строится в форме суммы базисных функций с некоторыми неопределенными весовыми коэффициентами, при этом граничные условия выполняются подбором соответствующих базисных функций. Дифференциальное уравнение колебаний (устойчивости) выполняется приближенно, на основе минимизации функционала энергии. Данный подход позволил получить эффективные решения для пластин разной геометрии (см. справочник [114]), и получил развитие в многочисленных модификациях. Так, например, применительно к пластинам сложной конфигурации, в работах Р.Л. Рвачева и его учеников [117] развит метод  $R$  – функций. Применительно к задачам колебания и устойчивости прямоугольных пластин под действием сосредоточенных сил в плоскости пластины, данный

метод использовался в работе А. W. Leissa и E.F. Ayoub [186]. Р. А. А. Laura и L.E.Luisoni [184], М.М. Kaldas и S.M. Dickinson [180], D.J. Dawe и T. J. Craig [157] также использовали модификации вариационного подхода для исследования гибких колебаний прямоугольных ортотропных пластин. Свободные колебания ортотропных прямоугольных пластин исследовались также на основе метода конечных элементов [145, 146, 223], на основе метода Канторовича [147, 179, 219], метода функции Грина [174]. Упомянутые подходы, как правило, показывают быструю сходимость в низком диапазоне частот. Асимптотический метод [17], развитый для исследования прямоугольных пластин, является исключением из этого правила – погрешность метода тем меньше, чем выше частота колебаний, поэтому на высоких частотах данный метод фактически остается единственным аналитическим подходом к исследованию колебаний прямоугольных пластин. Тем не менее, в области средних и высоких частот по-прежнему остается актуальным построение решений для пластин, точно удовлетворяющих разрешающему уравнению колебаний и дающих результат с заданной точностью.

Классическая техника разделения переменных позволяет построить общее решение уравнения колебаний пластины (1.1) в форме ряда по частным решениям, которое для граничных условий отличных от (1.3), приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов при частных решениях. Данные бесконечные системы относительно неизвестной последовательности  $x_k$  могут быть записаны в следующей канонической форме [51]:

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} x_n + b_k \quad (k = 1, 2, \dots) . \quad (1.20)$$

где  $c_{kn}$  и  $b_k$  - коэффициенты и свободные члены системы. Подобные бесконечные системы уравнений впервые появились при решении задачи об изгибе тонкой прямоугольной пластины. В ретроспективе, в работах E. Mathieu [196], H. Hencky [172], Б.М. Кояловича [57, 58] и С. П. Тимошенко [125], посвященных изгибу пластины, разрабатывались различные аспекты указанной идеи. В обзорной статье В.В.Мелешко [198] представлено подробное описание и сравнение этих решений. Как правило, традиционным путем к численному решению бесконечных систем

вида (1.20) является метод редукции, который заключается в отбрасывании неизвестных и уравнений больших некоторого выбранного номера  $N$ . Таким образом, бесконечная система (1.20) может рассматриваться как предельная форма последовательности конечных систем вида

$$x_k^R = \sum_{n=1}^N c_{kn} x_n^R + b_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.21)$$

В случае, когда порядок  $N$  конечной системы (1.21) возрастает, ее решение  $x_k^R$ , рассматривается как приближенное решение бесконечной системы (1.20). Сходимость метода редукции при  $N \rightarrow \infty$  строго доказывается при выполнении некоторых дополнительных ограничений на коэффициенты и свободные члены бесконечной системы [51 - 52, 57], в противном же случае сходимость метода оценивается численно. Следует заметить, что единственность ограниченного решения также представляет собой принципиальный вопрос, выходящий за рамки строгого обоснования метода решения. Примером этого может служить дискуссия относительно единственности решения задачи изгиба тонкой пластины развернувшаяся на страницах Proc. Royal Soc. между V.V. Meleshko [197] и A.M.Davis [156].

Одной из ранних работ, использующей данный подход применительно к задаче о колебаниях прямоугольной пластины, является статья Iguchi [177], в которой было получено характеристическое уравнение для определения собственных частот пластины со свободными краями в форме определителя редуцированной системы. Данный подход к исследованию прямоугольных пластин при различных граничных условиях был существенно развит в ряде работ D. J. Gorman [164 - 170]. В данных работах решение изначально конструируется в форме конечной суммы частных решений с неопределенными коэффициентами. Однако следует заметить, что если бы общее решение искусственным образом не усекалось, то вместо конечных систем линейных уравнений, при данном подходе также получались бы бесконечные системы. Следуя работам D. J. Gorman [165], задача о полностью защемленной ортотропной прямоугольной пластине под действием сосредоточенной гармонической нагрузки была решена N.Li [189]. K.Bhaskar и A.Sivaram [148] также использовали метод суперпозиции для

исследования гибких колебаний ортотропных пластин при произвольных граничных условиях, выбирая общее решение уравнения колебаний в виде полных рядов по решениям типа Levy.

## 1.2. Собственные колебания прямоугольника в случае плоской задачи

Как известно, планарные колебания пластины описываются в рамках плоского обобщенного напряженного состояния таким же образом, что и колебания бесконечного бруса при плоской деформации. Так в прямоугольной декартовой системе координат  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , смещения при планарных колебаниях ортотропной пластины, могут быть представлены в следующем виде:

$$U(x, y, z, t) = u^0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t), \quad V(x, y, z, t) = v^0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t),$$

$$W(x, y, z, t) = w^0(x, y, t)$$

где, следуя гипотезе плоского обобщенного напряженного состояния, изгибные составляющие  $\phi_x(x, y, t)$ ,  $\phi_y(x, y, t)$  и  $w^0(x, y, t)$  предполагаются достаточно малыми и полагаются нулю.

Разрешающее дифференциальное уравнение колебаний для компонентов тензора напряжений имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2} \quad (1.22)$$

В случае ортотропного материала, зависимости между напряжениями и компонентами смещений могут быть описаны при помощи пяти упругих постоянных:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1}\sigma_{xx} &= \frac{\partial u^0}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial v^0}{\partial y} \\
\frac{1-\nu_1\nu_2}{E_2}\sigma_{yy} &= \nu_1 \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} \\
\frac{1}{G}\sigma_{xy} &= \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

где  $\nu_1$  и  $\nu_2$  - коэффициенты Пуассона,  $E_1$  и  $E_2$  - модули Юнга в направлениях координатных осей,  $G$  - модуль сдвига.

При гармонических колебаниях, т.е. когда  $u^0(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega t}$  и  $v^0(x, y, t) = v(x, y)e^{i\omega t}$ , где  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  - амплитуды смещений, а  $\omega$  - круговая частота колебаний, уравнения (1.22) и (1.23) приводят к хорошо известной системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left( G + \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \Omega^2 G u = 0 \tag{1.24}$$

$$\left( G + \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \Omega^2 G v = 0 \tag{1.25}$$

где обозначено  $\Omega^2 = \frac{\rho\omega^2}{G}$ .

Выделяют следующие основные граничные условия для уравнений колебания пластины (1.24)-(1.25) на стороне пластины  $x = a$ :

кинематические граничные условия (защемленный край) -

$$u = v = 0 \tag{1.26}$$

силовые граничные условия (свободный край) -

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0 \tag{1.27}$$

смешанные граничные условия вида

$$u = \sigma_{xy} = 0 \tag{1.28}$$

Заметим, что граничные условия вида (1.26) являются аналогией условиям полного защемления (1.2) в случае поперечных колебаний и сокращенно обозначаются в англоязычной литературе как С (clamped), условия (1.27) аналогия

условий (1.5), обозначаются как F (free), и условия (1.28) – аналогия условиям шарнирно опертого края (1.3), которые обозначают как S (simple support).

Интерес к задачам о планарных колебаниях ортотропных пластин, в частности к колебаниям прямоугольных ортотропных пластин, возник значительно позднее по сравнению с задачами о поперечных колебаниях. Так, например, случаи точного решения для прямоугольной пластины были полностью описаны D.J. Gorman [168] лишь в 2006 году. Опять, аналогично поперечным колебаниям, задача имеет решение в рядах в тех случаях, когда на двух противоположных сторонах пластины реализуются условия вида (1.28). Этот сравнительно невысокий и достаточно поздний интерес к задачам планарных колебаний пластин, по-видимому, объясняется тем фактом, что эффект от таких колебаний проявляется на сравнительно высоких частотах и во многих технических конструкциях можно ограничиться анализом только поперечных колебаний. Тем не менее, на современном уровне развития науки и техники, учет планарных колебаний становится все более и более востребован, особенно при высокоскоростном касательном обтекании пластины потоком жидкости или при исследовании колебаний трансмиссии встроенных структур.

N.S. Bardell и др. [146] внесли значительный вклад в анализ планарных колебаний прямоугольных пластин при различных граничных условиях. Авторы использовали метод Рэлея-Ритца для вычисления собственных частот колебаний. G.Wang и N.M. Wereley [225] использовали метод Канторовича для исследования колебаний прямоугольных ортотропных пластин при смешанных граничных условиях. Метод рядов Фурье был использован [159] как для пластин с классическими граничными условиями, так и в случае упругой заделки краев пластины. Метод суперпозиции был предложен D.J. Gorman [169, 170] для анализа планарных колебаний изотропных и ортотропных пластин со свободными и защемленными краями. Метод Ритца, использующий тригонометрические функции как базис, был развит L.Dozio [158] для изучения планарных собственных колебаний изотропных прямоугольных пластин при упругой заделке краев пластины.

Следует заметить, что сравнительно небольшое число указанных публикаций, может быть увеличено за счет работ, относящихся к задачам о



колебаниях упругих тел конечных размеров в постановке плоской деформации. Здесь сформировались два основных аналитических подхода для исследования проблемы колебаний: метод однородных решений и метод суперпозиции. Первый из данных подходов был развит в работах R.D. Mindlin [199, 200] для анализа прямоугольных пластин и круглых плит. Второй подход – метод суперпозиции, сводящий задачу к исследованию бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, представлен в монографии В.Т. Гринченко и В.В. Мелешко [39]. Идеино, упомянутый метод суперпозиции [39] и «method superposition», предложенный D.J. Gorman, имеют одни и те же истоки [183], и фактически различаются лишь в одном в том, что в монографии [39] акцент делается на исследование бесконечных систем на основе изучения асимптотических свойств их решений, в то время как D.J. Gorman использует урезанные ряды, пренебрегая их остатками.

### 1.3. Dynamic stiffness method исследования колебаний и устойчивости ансамблей прямоугольных пластин

Dynamic Stiffness method (сокращенно DSM) был предложен как один из альтернативных подходов к проблеме моделирования механических структур. DSM основывается на точном решении краевой задачи о гармонических колебаниях для элемента. Так для поперечных колебаний прямоугольной пластины таким решением является решение типа Levy, которое обобщается на случай анизотропии и для уточненных теорий пластин. Данное решение позволяет построить точные аналитические соотношения между векторами нагрузок и соответствующими векторами смещений на границах элемента, которые определяют динамическую матрицу жесткости элемента (Dynamic stiffness matrix - DSM). Объединение элементов в единую структуру позволяет на основе DSM матриц для элементов построить глобальную DSM матрицу всего объекта. Существенно сужает область применимости данного метода тот факт, что при использовании формы решения типа Levy на двух противоположных сторонах пластины обязательно реализуются условия шарнирного опирания. Преодоление

данного ограничения связано с новыми аналитическими решениями для динамических элементов.

В оригинальной статье [227] была развита идея DSM, а также представлены динамические матрицы жесткости для прямоугольных пластин в случае, когда две противоположные стороны пластины являются шарнирно опертыми. Напомним, что только для этого случая граничных условий имеется точное решение для поперечных колебаний прямоугольной пластины в виде тригонометрического ряда. Конечно же, данное условие существенно ограничивает круг приложений DSM. J.R. Banerjee значительно расширил круг применения DSM. В статьях [135 – 141, 143] рассматривается развитие данного метода для различных балочных элементов. В статьях J.R. Banerjee и M. Boskolo [150 - 152] развит DSM для анализа продольных колебаний и уточненной теории поперечных колебаний прямоугольных пластин. В [205] была предложена эффективная модификация данного метода для анализа колебаний тонкостенных конструкций и многослойных пластин. Анализ многослойных балок при помощи DSM представлен в работе [155], в [160] показано применение метода для анализа колебаний поперечного слоя ламинированной цилиндрической и сферической оболочки.

В недавних работах [163, 203] представлено развитие DSM для элементов в форме прямоугольных пластин. Хотелось бы заметить, что преодолеть существенное ограничение метода для прямоугольных пластин – шарнирное опирание противоположных сторон, можно лишь на основе новых аналитических решений теории упругости. В [163, 203] для этих целей используется метод суперпозиции, развитый D.J.Gorman. Однако, при использовании данного подхода ряды, представляющие решения усекаются, следовательно, с возрастанием частоты колебаний приходится удерживать большее число членов ряда.

Для того чтобы показать основные черты DSM, ниже представлено краткое описание данного метода для анализа гармонических поперечных колебаний ансамбля элементов в форме тонкой изотропной прямоугольной пластины с двумя шарнирно опертыми противоположными краями [150].

Первый шаг состоит в построении динамической матрицы жесткости для пластины  $\{(x,y) \in [0;a] \times [0;b]\}$ . Как известно, в случае гармонических колебаний изотропной пластины, уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \Omega^4 W = 0 \quad (1.29)$$

где  $\Omega = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho h}{D}}$ ,  $D$  – цилиндрическая жесткость пластины.

Условия шарнирного опирания (1.4) на сторонах пластины  $y = 0$  и  $y = b$  будут выполнены тождественно при выборе решения в форме

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) \sin \alpha_m y \quad (1.30)$$

где  $\alpha_m = \frac{\pi m}{b}$ .

Подстановка (1.30) в (1.29) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функций  $W_m(x)$ :

$$\frac{d^4 W_m}{dx^4} - 2\alpha_m^2 \frac{d^2 W_m}{dx^2} + (\alpha_m^4 - \Omega^4) W_m = 0, \quad m=1, 2, \dots \quad (1.31)$$

Данное дифференциальное уравнение имеет точное решение в гиперболических функциях вида:

$$W_m(x) = A_m \operatorname{ch} r_{1m} x + B_m \operatorname{sh} r_{1m} x + C_m \operatorname{ch} r_{2m} x + D_m \operatorname{sh} r_{2m} x \quad (1.32)$$

где  $r_{1m} = \sqrt{\alpha_m^2 + \Omega^2}$ ,  $r_{2m} = \sqrt{\alpha_m^2 - \Omega^2}$  – корни характеристического уравнения.

Очевидно, что при  $\alpha_m^2 < \Omega^2$  вторая пара корней  $\pm r_{2m}$  становится чисто мнимой.

Таким образом, соответствующие им гиперболические функции в (1.32) переходят в тригонометрические функции.

Формулы (1.30) и (1.32) позволяют найти для каждой моды кинематические и силовые характеристики:

$$\phi_y(x, y) = -(r_{1m} A_m \operatorname{sh} r_{1m} x + r_{1m} B_m \operatorname{ch} r_{1m} x + r_{2m} C_m \operatorname{sh} r_{2m} x + r_{2m} D_m \operatorname{ch} r_{2m} x) \sin \alpha_m y;$$

$$V_{xm}(x, y) = -D \left( A_m (r_{1m}^3 - (2-\nu)\alpha_m^2 r_{1m}) \operatorname{sh} r_{1m} x + B_m (r_{1m}^3 - (2-\nu)\alpha_m^2 r_{1m}) \operatorname{ch} r_{1m} x + \right. \\ \left. + C_m (r_{2m}^3 - (2-\nu)\alpha_m^2 r_{2m}) \operatorname{sh} r_{2m} x + D_m (r_{2m}^3 - (2-\nu)\alpha_m^2 r_{2m}) \operatorname{ch} r_{2m} x \right) \sin \alpha_m y;$$

$$M_{xm}(x, y) = D \left( A_m (r_{1m}^2 - \nu \alpha_m^2) \operatorname{ch} r_{1m} x + B_m (r_{1m}^2 - \nu \alpha_m^2) \operatorname{sh} r_{1m} x + \right. \\ \left. + C_m (r_{2m}^2 - \nu \alpha_m^2) \operatorname{ch} r_{2m} x + D_m (r_{2m}^2 - \nu \alpha_m^2) \operatorname{sh} r_{2m} x \right) \sin \alpha_m y;$$

что позволяет связать граничные кинематические и силовые характеристики для каждой моды в решении (1.30).

Действительно, пусть на сторонах пластины известны значения прогибов и углов поворота

$$x = 0: \quad W(0, y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_1(m) \sin \alpha_m y; \quad \phi_y(0, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{y1}(m) \sin \alpha_m y;$$

$$x = a: \quad W(a, y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_2(m) \sin \alpha_m y; \quad \phi_y(a, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{y2}(m) \sin \alpha_m y,$$

а также сил и моментов

$$x = 0: \quad V_x(0, y) = -\sum_{m=1}^{\infty} V_1(m) \sin \alpha_m y; \quad M_x(0, y) = -\sum_{m=1}^{\infty} M_1(m) \sin \alpha_m y;$$

$$x = a: \quad V_x(a, y) = \sum_{m=1}^{\infty} V_2(m) \sin \alpha_m y; \quad M_x(a, y) = \sum_{m=1}^{\infty} M_2(m) \sin \alpha_m y.$$

Вычисляя затем данные величины согласно полученному общему решению, и сравнивая его заданными граничными значениями, можно найти

$$\begin{pmatrix} W_1(m) \\ \phi_{y1}(m) \\ W_2(m) \\ \phi_{y2}(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -r_{1m} & 0 & -r_{2m} \\ C_{h1} & S_{h1} & C_{h2} & S_{h2} \\ -r_{1m} S_{h1} & -r_{1m} C_{h1} & -r_{2m} S_{h2} & -r_{2m} C_{h2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \\ D_m \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

или сокращенно

$$\delta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1.34)$$

где  $\mathbf{C}$  – столбец неопределенных коэффициентов,  $S_{hi} = \operatorname{sh} r_{im} a$ ;  $C_{hi} = \operatorname{ch} r_{im} a$ .

Аналогичным образом можно выразить коэффициенты Фурье силовых характеристик через неопределенные коэффициенты:

$$\begin{pmatrix} V_1(m) \\ M_1(m) \\ V_2(m) \\ M_2(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R_1 & 0 & R_2 \\ L_1 & 0 & L_2 & 0 \\ -R_1 S_{h1} & -R_1 C_{h1} & -R_2 S_{h2} & -r_2 C_{h2} \\ -L_1 C_{h1} & -L_1 S_{h1} & -L_2 C_{h2} & -L_2 S_{h2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \\ D_m \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

т.е.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \quad (1.36)$$

где  $R_i = D(r_{im}^3 - (2-\nu)r_{im}\alpha_m^2)$ ,  $L_i = D(r_{im}^2 - \nu\alpha_m^2)$ .

Используя матричные равенства (1.34) и (1.36) можно явно выразить динамическую матрицу жесткости для данной пластины

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \delta \quad (1.37)$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} s_{vv} & s_{vm} & f_{vv} & f_{vm} \\ s_{vm} & s_{mm} & -f_{vm} & f_{mm} \\ f_{vv} & -f_{vm} & s_{vv} & -s_{vm} \\ f_{vm} & f_{mm} & -s_{vm} & s_{mm} \end{pmatrix}.$$

Можно увидеть, что данная матрица является симметричной и может быть записана при помощи шести независимых элементов. Для отдельной пластины данная матрица позволяет описать собственные частоты колебаний при любых граничных условиях на сторонах пластины, которые не являются шарнирно-опертыми.

Для ансамбля пластин вида, изображенного на рис.2., сшивка решения по линиям соединения пластин дает возможность построить глобальную матрицу ансамбля пластин и использовать ее для анализа свободных колебаний структуры.

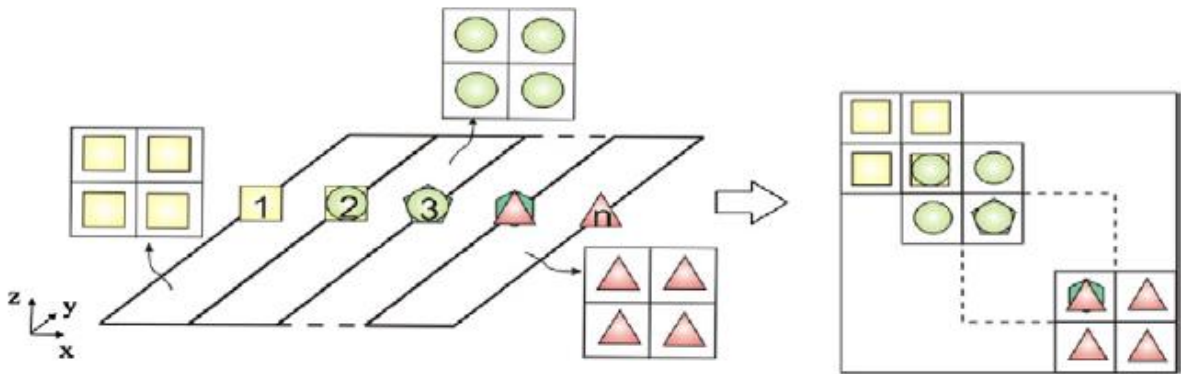


Рис. 1.2 Схема объединения отдельных DSM в общую матрицу структуры

## ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

### 2.1. Предварительные сведения

Развитию теории регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений посвящены работы Ф. Рисса [217], Е. Хеллингера и О. Теплица [171], Л. В. Канторовича [51 - 53], Б.М. Кояловича [57, 58], П.С.Бондаренко [15]. Здесь, в основном, обсуждаются вопросы существования решения, его единственности, сходимости методов редукции и итераций. Исключение составляют исследования Б.М. Кояловича [57], А.М. Гомилко [36] где акцент делается на изучение асимптотических свойств решений бесконечных систем. Среди отечественных изданий некоторые общие положения теории бесконечных систем можно найти в монографиях Л.В.Канторовича и В.И. Крылова [53], Л.В. Канторовича и Г.П. Акилова [52], А. Д. Мышкиса [67], В.Т. Гринченко [41], Ф. М. Федорова [129].

Бесконечной системой линейных алгебраических уравнений с бесконечным множеством неизвестных называется система уравнений:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n + \dots = b_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n + \dots = b_2 \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + \dots + c_{3n}x_n + \dots = b_3 \\ \dots \\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + c_{k3}x_3 + \dots + c_{kn}x_n + \dots = b_k \\ \dots \end{cases}$$

где  $c_{kn}$  - известные коэффициенты,  $b_k$  - свободные члены и  $x_k$  - неизвестные.

Бесконечную систему линейных алгебраических уравнений обычно записывают [53], выделяя в  $m$ -ом уравнении неизвестную  $x_k$  в левой части уравнения:

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn}x_n + b_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.1)$$

Система величин  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  называется решением системы (2.1), если после подстановки этих значений в левую и правую части равенств (2.1) мы получим сходящиеся ряды, и все эти равенства будут удовлетворены.

При исследовании и решении бесконечной системы возникают три основные задачи:

- установить, существует ли решение бесконечной системы, удовлетворяющее данным условиям (обычно это условие ограниченности решения);
- установить, единственно ли решение системы;
- оценить значения величин  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

Бесконечную систему уравнений с неотрицательными коэффициентами:

$$X_k = \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} X_n + B_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.2)$$

называют [43, 57] мажорантной для системы (2.1) если выполнены следующие неравенства:

$$|c_{kn}| \leq C_{kn}; \quad |b_k| \leq B_k \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots)$$

Классическая теория бесконечных систем, во многом строится на теоремах, полученных с использованием мажорантных систем (2.2). Так, например, ответить на первый вопрос для широкого класса систем позволяет теорема сравнения.

**Теорема 2.1.** (теорема сравнения). Если мажорантная система (2.2) имеет неотрицательное решение  $X'_k \geq 0$ , то данная система (2.1) имеет решение  $\tilde{x}_k$ , которое может быть найдено методом последовательных приближений и для которого справедливо неравенство

$$|\tilde{x}_k| \leq X'_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.3)$$

Заметим, что *главным решением* бесконечной системы (2.1) называют решение, которое может быть вычислено методом последовательных приближений с нулевым начальным приближением:

$$\tilde{x}_k = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{x}_k^{(m)}; \quad \tilde{x}_k^{(0)} = 0; \quad \tilde{x}_k^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} \tilde{x}_k^{(m-1)} + b_k$$

Таким образом, если существует неотрицательное решение для мажорантной системы, то для системы (2.1) существует главное решение. Причем,

если коэффициенты и свободные члены бесконечной системы (2.1) неотрицательны, то неотрицательно и главное решение.

Бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (2.1) называют *регулярной*, если сумма модулей коэффициентов в каждой строке меньше единицы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}| = 1 - \rho_k < 1, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.4)$$

Если эта сумма не превосходит постоянного числа, меньшего единицы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}| = 1 - \rho_k \leq 1 - \theta < 1, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.5)$$

то систему называют *вполне регулярной*.

В монографии [52] показано, что регулярные (вполне регулярные) бесконечные системы могут рассматриваться как функциональные уравнения в пространстве ограниченных последовательностей  $\ell^\infty$ . Заметим, что для бесконечных систем, возникающих в задачах динамики, как правило, условия регулярности не выполняются на всем частотном диапазоне, так как на собственных частотах колебания ограниченное решение системы отсутствует. Для подобных систем вводится следующее обобщение понятия регулярности.

Бесконечная система линейных алгебраических уравнений называется *квазирегулярной*, если существует  $N_R$  такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}| < 1 \quad (k = N_R + 1, N_R + 2, \dots); \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}| < \infty \quad (k = 1, 2, \dots, N_R)$$

В дальнейшем будем рассматривать только регулярные и квазирегулярные бесконечные системы.

Теорема сравнения позволяет сформулировать для регулярных бесконечных систем достаточный признак существования ограниченного главного решения.

**Теорема 2.2.** (теорема существования решения). Если существует положительная константа  $K$ , такая что для любого номера  $k$  выполняется оценка:

$$|b_k| \leq K \rho_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.6)$$

то существует  $\tilde{x}_k$  – ограниченное главное решение регулярной бесконечной системы (2.1), допускающее оценку

$$|\tilde{x}_k| \leq K. \quad (2.7)$$



Действительно, в этом случае мажорантная система

$$X_k = \sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}| X_n + K\rho_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

имеет неотрицательное решение  $X_k = K > 0$ , откуда в силу теоремы 2.1. получается утверждение теоремы 2.2. Условие (2.6) также получило название условия Пелле-Кояловича [57].

Важность теоремы 2.2, кроме установления факта существования решения, заключается еще и в том, что она дает оценки для главного решения системы.

Заметим, что если бесконечная система вполне регулярна, то для выполнения условия теоремы 2.2. достаточно требования ограниченности свободных членов системы:

$$|b_k| \leq P,$$

тогда для решения бесконечной системы справедлива следующая оценка:

$$|x_k| \leq \frac{P}{\theta}$$

Вопрос о единственности ограниченного решения бесконечной системы рассматривался в работах [15, 51 - 53, 57 - 58]. Можно показать [52, 57], что ограниченное решение вполне регулярной бесконечной системы является единственным. Для регулярных бесконечных систем, которые не являются вполне регулярными, метод установления единственности ограниченного решения дает теорема, предложенная П. С. Бондаренко [15].

**Теорема 2.3.** Регулярная бесконечная система линейных алгебраических уравнений может иметь не более чем одно решение, стремящееся к нулю, то есть такое, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ . При этом, если коэффициенты и свободные члены системы неотрицательны, то неотрицательное ее решение, стремящееся к нулю, есть непременно главное ее решение.

Следствие. Если при некоторой подстановке вида

$$x_k = F_k z_k, \quad (F_k \neq 0), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F_k = \infty \quad (2.8)$$

в регулярной системе (2.1), получившаяся в результате система относительно неизвестных  $z_k$ :

$$z_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{kn} F_n}{F_k} z_n + \frac{b_k}{F_k}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

окажется снова регулярной, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_{kn} F_n}{F_k} \right| = 1 - \rho'_k < 1, \quad \text{и} \quad |b_k| \leq K' F_k \rho'_k,$$

то данная система имеет единственное ограниченное решение.

В работах Б.М. Кояловича [57, 58] рассматривались парные регулярные бесконечные системы с положительными коэффициентами вида

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} y_n + b_k; \quad y_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} x_n + \beta_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.9)$$

Условие регулярности (2.4) для системы (2.9) имеют следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} = 1 - \varphi_k < 1; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} = 1 - \psi_k < 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Вводя [53] новые неизвестные  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  согласно  $z_{2k-1} = x_k; z_{2k} = y_k$ , парную бесконечную систему (2.9) можно записать в виде (2.1), при этом все результаты, сформулированные выше для систем вида (2.1), переносятся на систему (2.9).

Коялович Б. М. ввел понятие лимитант – особых выражений, позволяющих по первым  $N$  известным значениям  $x_k$  и  $y_k$  главного (единственного) решения системы (2.9) оценить значения остальных компонент главного решения. Для системы (2.9) лимитанты имеют вид:

$$V_k^N = \frac{\sum_{n=1}^N a_{kn} y_n + b_k}{\sum_{n=1}^N a_{kn} + \varphi_k}; \quad W_k^N = \frac{\sum_{n=1}^N \alpha_{kn} x_n + \beta_k}{\sum_{n=1}^N \alpha_{kn} + \psi_k}, \quad (k = N + 1, N + 2, \dots) \quad (2.10)$$

Пусть  $h_N = \inf_{k>N} \{V_k^N, W_k^N\}$ ;  $H_N = \sup_{k>N} \{V_k^N, W_k^N\}$ , тогда для точных верхней и

нижней граней лимитант справедливы следующие два утверждения:

1. Свойство монотонности:  $h_N \leq h_{N+1}$ ;  $H_N \geq H_{N+1}$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$
2. Основное свойство лимитант:

$$h_N \leq x_k \leq H_N; \quad h_N \leq y_k \leq H_N, \quad k > N, \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

В силу основного свойства лимитант, точные верхняя и нижняя грани лимитант являются ограниченными монотонными величинами, которые, как известно, имеют предел. То есть существуют пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h_N = h; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} H_N = H.$$

Для системы (2.9) в [57] формулируется достаточный признак существования общего ненулевого предела для решения парной бесконечной системы.

**Теорема 2.4.** (Закон асимптотических выражений Б.М. Кояловича)

Чтобы существовал общий положительный предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = a_0 > 0,$$

единственного (главного) решения парной регулярной бесконечной системы (2.9) с положительными коэффициентами и свободными членами, кроме условия существования решения (теорема 2.2), достаточно выполнения двух условий:

- а)  $\exists L \geq l > 0: \forall k, n \in \mathbf{N} (n < k) \quad l \leq a_{kn} / \varphi_k \leq L; \quad l \leq \alpha_{kn} / \psi_k \leq L;$
- б)  $\exists \theta > 0: \forall p, k \in \mathbf{N} \quad (p < k \leq 2p) \quad (\varphi_k + \sum_{n=1}^p a_{kn}) \geq \theta; \quad (\psi_k + \sum_{n=1}^p \alpha_{kn}) \geq \theta.$

Доказательство теоремы строится на том, что при  $0 < h = H$ , из основного свойства лимитант следует существование общего ненулевого предела для решения системы (2.9). Хотелось бы отметить, что требование единственности ограниченного (главного) решения системы является существенным как для выполнения основного свойства лимитант, так и для доказательства теоремы 2.4. Этот факт был замечен Л. В. Канторовичем в [53], и был подчеркнут в статье [83].

В [53] Л.В. Канторович сформулировал достаточное условие существования ненулевого предела для единственного решения бесконечной системы вида (2.1) с положительными коэффициентами и свободными членами.

**Теорема 2.5.** Для существования положительного предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a_0 > 0,$$

единственного (главного) решения регулярной бесконечной системы (2.1) с положительными коэффициентами и свободными членами, кроме условия

существования решения (теорема 2.2), достаточно выполнения следующего условия:

$$\exists L \geq l > 0: \forall k, n \in \mathbf{N} (n < k) \quad l \leq c_{k,n} / \rho_k \leq L .$$

Там же было указано, что условие подобное условию (б) теоремы 2.4, для таких систем является излишним.

В [41] предложено следующее обобщение условия (а) теоремы 2.4:

$$\text{а) } \exists L \geq l > 0: \forall k, n \in \mathbf{N} (n < k) \quad l \leq a_{kn} q_k \leq L; l \leq \alpha_{kn} \xi_k \leq L .$$

Здесь вводятся две вспомогательные последовательности  $\{q_k\}$  и  $\{\xi_k\}$ , такие что

$$q_k \varphi_k \leq A, q_k b_k \leq A, \xi_k \psi_k \leq A, \xi_k \beta_k \leq A,$$

где  $A$  – некоторая положительная константа.

А.М.Гомилко [36] предложил обобщение закона асимптотических выражений в рамках теории функциональных уравнений в  $K_\sigma$  - пространствах. Данное обобщение распространяет результаты теорем 2.4, 2.5 на парные системы интегральных уравнений, на смешанные системы интегрально -алгебраических уравнений.

Аппарат лимитант, теорема 2.4 и их обобщения нашли свое практическое применение, в частности, в ряде работ В.Т. Гринченко [41], В.Н Чехова. [133, 134, 154] при построении аналитического решения некоторых задач статики и динамики для упругих тел конечных размеров.

Для регулярной бесконечной системы (2.1), удовлетворяющей теореме 2.2. существования решения, гарантируется возможность построить главное решение системы методом последовательных приближений. Однако, так как процесс итерации для  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  в явном виде для большинства бесконечных систем реализовать не удастся, то на практике обычно пользуются методом редукции, или комбинируют метод последовательных приближений с методом редукции. Применение метода редукции обосновывается следующим утверждением [53].

**Теорема 2.6.** (О методе редукции для регулярной бесконечной системы).  
Главное решение  $\tilde{x}_k$  регулярной системы (2.1), удовлетворяющей теореме 2.2

существования решения, может быть найдено методом редукции, то есть если  $x_k^N$  – решение конечной системы

$$x_k^N = \sum_{n=1}^N c_{k,n} x_n^N + b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

то  $\tilde{x}_k = \lim_{N \rightarrow \infty} x_k^N$ .

В условии теоремы 2.6 можно говорить просто о решении конечной системы линейных алгебраических уравнений, а не о главном решении, так как решение этой системы единственно [52, 53]. Из теоремы сравнения следует, что для систем с неотрицательными коэффициентами и свободными членами выполняется:

$$x_k^N \leq \tilde{x}_k \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

Одним из недостатков метода редукции является то, что давая приближенные значения для первых  $N$  компонент главного решения, остальные  $\tilde{x}_k$  ( $k = N + 1, N + 2, \dots$ ) полагаются тождественно равными нулю. Это может привести к появлению неустраняемой погрешности в решении некоторых задач теории упругости, сводящихся к таким бесконечным системам, например [1, 39 – 42, 64, 65]. В таких задачах требуется отыскание всей последовательности неизвестных, что указывает на необходимость анализа асимптотического поведения компонент главного решения с ростом их номера. Для решения регулярных бесконечных систем, главное решение которых имеет ненулевой предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k = a_0 \neq 0$$

был предложен [41] метод улучшенной редукции. Для определения этим методом приближенных значений первых  $N$  компонент главного решения и предельного значения  $a_0$  решается следующая конечная система уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{x}_k = \sum_{n=1}^N c_{kn} \tilde{x}_n + a_0 \sum_{n=N+1}^{\infty} c_{kn} + b_k, & (k = 1, 2, \dots, N) \\ a_0 = \tilde{x}_N \end{cases}$$

К недостаткам методов редукции, улучшенной редукции и их комбинаций с методом последовательных приближений следует отнести достаточно сложную оценку погрешности полученного приближенного решения. Поэтому одним из

критериев качества решения бесконечной системы этими методами является точность выполнения граничных условий в соответствующих бесконечным системам задачах теории упругости.

Для систем, имеющих единственное ограниченное решение, в работах, представленных в монографии [1], были построены оценки решения системы при помощи теоремы сравнения. Если регулярная бесконечная система с неотрицательными коэффициентами и свободными членами имеет единственное ограниченное решение, то оценить решение системы можно при помощи алгоритма лимитант [41, 57] (или метода ступеней [57]).

## 2.2. Обобщение теории лимитант Б.М. Кояловича для регулярных бесконечных систем с неотрицательной матрицей

Рассмотрим бесконечную систему уравнений с неотрицательными коэффициентами и свободными членами, записанную в форме

$$x_m^i = \sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{ij} x_n^j + b_m^i, \quad (m=1,2,3,\dots; i=1, 2, \dots, s) \quad (2.11)$$

Элементарный блок бесконечной матрицы  $A_{mn} = \{a_{mn}^{ij}\}_1^s$  - символическая матрица порядка  $s$ . Если  $A_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & a_{mn}^{12} \\ a_{mn}^{21} & 0 \end{pmatrix}$ , где  $a_{mn}^{ij} > 0$  то для исследования асимптотических свойств решения бесконечной системы (2.11) можно применить признак в известной формулировке для парной системы (теоремы 2.4, 2.5), для других случаев результаты отсутствуют.

Условия регулярности для системы (2.11) имеет вид

$$\sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{ij} = 1 - \phi_m^i < 1, \quad (m=1,2,3,\dots; i=1,2,\dots,s) \quad (2.12)$$

Далее предполагается, что у рассматриваемой бесконечной системы существует единственное ограниченное решение. При практическом применении единственность ограниченного решения может быть доказана с помощью следствия из теоремы 2.3.

Оговорим расположение нулевых элементов в матрице  $A_{mn}$ , исключая случай расщепления системы на несколько независимых систем. Для этого потребуем, чтобы направленный граф матрицы  $A_{mn}$  был сильно связан. Действительно, в этом случае для любого множества строк  $I_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  ( $1 \leq k \leq s-1$ ) матрицы  $A_{mn}$  существует  $a_{mn}^{ij} \neq 0$  при  $i \in I_k, j \notin I_k$ .

Перед формулировкой и доказательством теоремы введем в рассмотрение лимитанты для системы вида (2.11), по аналогии с выражениями лимитант (2.10) для парной системы:

$$V_{s(m-1)+i}^{sN} = \frac{\sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^N a_{mn}^{ij} x_n^j + b_m^i}{\sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^N a_{mn}^{ij} + \varphi_m^i}, \quad (m > N).$$

Пусть  $H_N = \sup_{m>N} V_{s(m-1)+i}^{sN}$ ,  $h_N = \inf_{m>N} V_{s(m-1)+i}^{sN}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), тогда для точных граней лимитант будут справедливы:

- 1) Основное свойство лимитант:  $h_N \leq x_m^i \leq H_N$  ( $m > N, i = 1, 2, \dots, s$ )
- 2) Свойство монотонности:  $h_N \geq h_{N-1}; H_N \leq H_{N-1}$  ( $N = 1, 2, 3, \dots$ )

Из свойства монотонности, в силу ограниченности решения (2.11), получаем существование

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h_N = h, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} H_N = H.$$

**Теорема 2.7.** (Обобщение закона асимптотических выражений).

Если в каждой  $i$ -ой строке матрицы  $A_{mn}$  все ненулевые элементы допускают оценку при  $n < m$ :

$$lr_n^i \leq a_{mn}^{ij} \xi_m^i \leq Lr_n^i, \quad (L \geq l > 0, j \in \Omega(i)), \quad (2.13)$$

где  $\Omega(i)$  - множество номеров столбцов ненулевых элементов  $i$ -ой строки  $A_{mn}$ ; а последовательности  $\xi_m^i$  и  $r_n^i$  таковы, что

$$\exists P > 0: \quad b_m^i \xi_m^i \leq P, \quad \varphi_m^i \xi_m^i \leq P \quad (m = 1, 2, \dots);$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N r_n^i \right)^{-1} = 0; \quad \xi_m^i = O\left(\sum_{n=1}^{m-1} r_n^i\right), \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Тогда существует общий ненулевой предел:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m^i = G > 0, \quad (i=1,2,\dots,s).$$

**Доказательство.** Доказательство теоремы проведем в два этапа. На первом докажем, что  $h > 0$ ; на втором, что  $H = h$ .

1°. В силу монотонности  $h_N$  достаточно показать, что при некотором  $N^*$ :  $h_{N^*} > 0$ . Пусть свободные члены системы (2.11) таковы, что  $b_{m_0}^{i_0} > 0$ . Так как единственное решение системы совпадает с главным (которое неотрицательно), то  $x_{m_0}^{i_0} > 0$ . Разобьем теперь множество номеров  $\{1,2,\dots,s\} = I_0 \cup \bar{I}_0$ , ( $\bar{I}_0 = \{i_0\}$ ). Так как направленный граф матрицы  $A_{mn}$  сильно связан, то существует номер  $i_1 \in I_0$  для которого  $a_{m_1 m_0}^{i_1 i_0} > 0$ . Тогда из оценки (2.13) следует, что существует номер  $m_1 > m_0$ :  $a_{m_1 m_0}^{i_1 i_0} x_{m_0}^{i_0} > 0$ , а значит  $x_{m_1}^{i_1} > 0$ . Далее определяем как  $\bar{I}_1 = \{i_0, i_1\}$ , тогда существует  $a_{m_2 m_1}^{i_2 j} > 0$ ,  $i_2 \in I_1, j \in \bar{I}_1$ . Из оценки (2.13) следует, что найдется  $m_2 > m_1$ :  $a_{m_2 m_1}^{i_2 j} x_{m_1}^{i_2 j} > 0$  ( $j \in \bar{I}_1$ ), откуда  $x_{m_2}^{i_2} > 0$  и т. д. Продолжая этот процесс, получаем, что  $x_{m_p}^{i_p} > 0$  ( $p=0,1,\dots,s-1$ ), при этом  $\bigcup_{p=0}^{s-1} i_p = \{1,2,\dots,s\}$ ,  $m_0 < m_1 < \dots < m_{s-1}$ .

Оценим лимитанты  $V_{s(m-1)+i}^{sN}$  при  $m > N^* > m_{s-1}$  ( $i=1,2,\dots,s$ ) снизу:

$$V_{s(m-1)+i}^{sN^*} \geq \frac{l \sum_{j \in \Omega(i)} \sum_{n=1}^{N^*} r_n^i x_n^j}{L \sum_{j \in \Omega(i)} \sum_{n=1}^{N^*} r_n^i + P} \geq \frac{lr_{m_p^*}^i \min_p x_{m_p}^{i_p}}{Ls \sum_{n=1}^{N^*} r_n^i + P} > 0.$$

Существование  $p^*=p^*(i)$  обеспечивается тем, что для любой строки  $i$  матрицы  $A_{mn}$  найдется хотя бы один ненулевой элемент. Очевидно, что тогда нижняя грань  $h_{N^*} > 0$ .



2°. Рассмотрим верхние грани  $H_{N_1} \leq H_{N_0}$ . Пусть  $H_{N_1}$  достигается на  $V_{s(m^*-1)+i^*}^{sN_1}$ , если  $\sup$  достигается в точке сгущения, то  $m^*$  и  $i^*$  можно выбрать конечными и такими, что значение отличается от  $H_{N_1}$  на величину пренебрежимо малую по сравнению с величинами, участвующими в дальнейших оценках.

Представим лимитант в виде разности

$$V_{s(m-1)+i}^{sN_1} = D(m, i) - \eta(m, i) \quad (m > N_1, \quad i = 1, 2, \dots, s), \quad (2.14)$$

где

$$D(m, i) = \frac{\sum_{j \in \Omega(i)} \sum_{n=1}^{N_0} a_{mn}^{ij} x_n^j + b_m^j + H_{N_0} \sum_{j \in \Omega(i)} \sum_{n=N_0+1}^{N_1} a_{mn}^{ij}}{\sum_{j \in \Omega(i)} \sum_{n=1}^{N_1} a_{mn}^{ij} + \varphi_m^i}, \quad \eta(m, i) = \frac{\sum_{j \in \Omega(i)} \sum_{n=N_0+1}^{N_1} a_{mn}^{ij} (H_{N_0} - x_n^j)}{\sum_{j \in \Omega(i)} \sum_{n=1}^{N_1} a_{mn}^{ij} + \varphi_m^i}.$$

Из (2.14) можно заметить, что  $D(m, i) \leq H_{N_0}$ . Тогда, учитывая оценку

$$H_{N_1} = D(m^*, i^*) - \eta(m^*, i^*) \leq H_{N_0} - \eta(m^*, i^*),$$

находим, что

$$\eta(m^*, i^*) \leq H_{N_0} - H_{N_1} \leq H_{N_0} - H \leq \varepsilon(N_0) \quad (2.15)$$

Из (2.15) можно получить следующую оценку:

$$\varepsilon(N_0) \geq \eta(m^*, i^*) \geq \frac{l \sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=N_0+1}^{N_1} r_n^{i^*} (H_{N_0} - x_n^j)}{P + L \sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=1}^{N_1} r_n^{i^*}}, \quad (2.16)$$

или

$$\frac{\sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=N_0+1}^{N_1} r_n^{i^*} (H_{N_0} - x_n^j)}{\sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=1}^{N_1} r_n^{i^*}} \leq \frac{\varepsilon(N_0)}{l} \left( L + \frac{P}{\min_{i=1..s} r_1^i} \right).$$

Используя последнее неравенство, можно оценить  $\eta(m, i^*)$  сверху:

$$\eta(m, i^*) \leq \frac{L \sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=N_0+1}^{N_1} r_n^{i^*} (H_{N_0} - x_n^j)}{l \sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=1}^{N_1} r_n^{i^*}} \leq \frac{L}{l^2} \varepsilon(N_0) \left( L + \frac{P}{\min_{i=1..s} r_1^i} \right).$$

Получаем, что величина  $\eta(m, i^*)$  - является бесконечно малой вне зависимости от  $N_1$ . Для других значений  $i \neq i^*$  не удастся оценить  $\eta(m, i)$  при помощи (2.16) из-за наличия нулей  $A_{mn}$ , которые не удовлетворяют (2.13).

Оценим теперь  $D(m, i^*)$ , поделив числитель и знаменатель дроби на выражение  $\sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=N_0+1}^{N_1} a_{mn}^{i^* j}$ .

Знаменатель этой дроби можно сделать сколь угодно близким к единице соответствующим выбором  $N_1$ :

$$1 \leq 1 + \frac{\sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=1}^{N_0} a_{mn}^{i^* j} + \Phi_m^{i^*}}{\sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=N_0+1}^{N_1} a_{mn}^{i^* j}} \leq 1 + \frac{sL \sum_{n=1}^{N_0} r_n^{i^*} + P}{l \sum_{n=N_0+1}^{N_1} r_n^{i^*}} \leq 1 + \varepsilon_1(N_1),$$

а числитель  $D(m, i^*)$  соответственно к  $H_{N_0}$ . Значит,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$ :

$$|V_{s(m-1)+i^*}^{sN} - H| < \varepsilon \quad (m > N > N_\varepsilon). \quad (2.17)$$

Если при некотором номере  $N_1$  значение  $\inf$  достигается на лимитанте  $V_{s(m-1)+i'}^{sN_1}$ , то подобным же образом можно показать, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$ :

$$|V_{s(m-1)+i'}^{sN} - h| < \varepsilon \quad (m > N > N_\varepsilon) \quad (2.18)$$

В случае  $s = 1$  (нулевые элементы отсутствуют) получаем  $i^* \equiv i'$ , и в силу единственности предела  $H = h$ , что доказывает теорему, в общем же случае пока полагаем, что  $i^* \neq i'$  и  $H - h > 0$ .

Из монотонности граней лимитант следует, что  $\forall \varepsilon > 0$  найдется номер  $N > N_\varepsilon$ , такой что  $h_N \geq h - \varepsilon$ ,  $H_N \leq H + \varepsilon$ . При этом из основного свойства лимитант следует  $h - \varepsilon \leq x_m^i \leq H + \varepsilon$ , ( $m > N$ ;  $i = 1, 2, \dots, s$ ).

Из (2.17) получаем, что при  $m = N + 1$  справедлива оценка:

$$H - \varepsilon \leq V_{s(m-1)+i^*}^{s(m-1)} \leq H + \varepsilon.$$

Оценим  $x_m^{i^*}$  при  $m > N$ :

$$\begin{aligned} x_m^{i^*} &= \sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{i^*j} x_n^j + b_m^{i^*} \equiv V_{s(m-1)+i^*}^{s(m-1)} \left( \sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i^*j} + \varphi_m^{i^*} \right) + \sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=m}^{\infty} a_{mn}^{i^*j} x_n^j \geq \\ &\geq (H - \varepsilon) \left( \sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i^*j} + \varphi_m^{i^*} \right) + (h - \varepsilon) \sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=m}^{\infty} a_{mn}^{i^*j} = h - \varepsilon + (H - h) \left( \sum_{j \in \Omega(i^*)} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i^*j} + \varphi_m^{i^*} \right) \geq \\ &\geq h - \varepsilon + \frac{(H - h)l}{\xi_m^{i^*}} \sum_{n=1}^{m-1} r_n^{i^*}. \end{aligned}$$

Заметим, что из условия теоремы следует, что найдется такой номер

$N = N(i)$ , что при любом  $m > N(i)$ :  $\xi_m^i \leq C_i \sum_{n=1}^{m-1} r_n^i$ . Далее, если положить данный

номер  $N > \max_{i=1..s} N(i)$  и выбрать константу  $\delta \leq \min_{i=1..s} (C_i)^{-1}$ , то получаем для  $m > N$ :

$$\frac{1}{\xi_m^i} \sum_{n=1}^{m-1} r_n^i \geq \delta > 0 \quad (i = 1..s).$$

Тогда оценка  $x_m^{i^*}$  принимает вид:

$$x_m^{i^*} \geq h - \varepsilon + (H - h)l\delta, \quad (m > N). \quad (2.19)$$

Обозначим  $\overline{U}_0 = \{i^*\}$ ,  $U_0 = \{1, 2, \dots, s\} / \{i^*\}$ , тогда существует элемент  $a_{mn}^{i_1} > 0$  ( $i_1 \in U_0$ ). Оценим снизу лимитант  $V_{s(m-1)+i_1}^{sN_1}$  при некотором  $N_1 > N$ , для этого представим лимитант в виде:

$$V_{s(m-1)+i_1}^{sN_1} = \frac{\sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=1}^N a_{mn}^{i_1j} x_n^j + b_m^{i_1} + (h - \varepsilon) \sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=N+1}^{N_1} a_{mn}^{i_1j}}{\sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{N_1} a_{mn}^{i_1j} + \varphi_m^{i_1}} + \frac{\sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=N+1}^{N_1} a_{mn}^{i_1j} (x_n^j - h + \varepsilon)}{\sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{N_1} a_{mn}^{i_1j} + \varphi_m^{i_1}}.$$

Из этого представления можно заметить на основе (2.19), что

$$\begin{aligned}
V_{s(m-1)+i_1}^{sN_1} &\geq h - \varepsilon + \frac{\sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=N+1}^{N_1} a_{mn}^{i_1 j} (x_n^j - h + \varepsilon)}{\sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{N_1} a_{mn}^{i_1 j} + \varphi_m^{i_1}} \geq \\
&\geq h - \varepsilon + \frac{\sum_{n=N+1}^{N_1} a_{mn}^{i_1 i^*} (x_n^{i^*} - h + \varepsilon)}{\sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{N_1} a_{mn}^{i_1 j} + \varphi_m^{i_1}} \geq h - \varepsilon + \frac{(H-h)l\delta \sum_{n=N+1}^{N_1} a_{mn}^{i_1 i^*}}{\sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{N_1} a_{mn}^{i_1 j} + \varphi_m^{i_1}}.
\end{aligned}$$

По условию теоремы  $r_n^i$  таковы, что можно выбрать номер  $N_1$  ( $m > N_1$ ):

$$\frac{\sum_{n=N+1}^{N_1} a_{mn}^{i_1 i^*}}{\sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{N_1} a_{mn}^{i_1 j} + \varphi_m^{i_1}} \geq \frac{l \sum_{n=N+1}^{N_1} r_n^{i_1}}{sL \sum_{n=1}^{N_1} r_n^{i_1} + P} \geq \theta > 0. \quad (2.20)$$

Здесь,  $\theta < 1$  – некоторая постоянная, существование которой обеспечивается тем, что предел последней дроби в (2.10) равен  $\frac{l}{sL}$ . Таким образом,

$$V_{s(m-1)+i_1}^{sN_1} \geq h - \varepsilon + (H-h)l\delta\theta, \quad (2.21)$$

в частности, эта оценка верна при  $m = N_1 + 1$ , то есть  $V_{s(m-1)+i_1}^{s(m-1)} \geq h - \varepsilon + (H-h)l\delta\theta$ .

Оценим  $x_m^{i_1}$  ( $m > N_1$ ) снизу:

$$\begin{aligned}
x_m^{i_1} &= \sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{i_1 j} x_n^j + b_m^{i_1} = V_{s(m-1)+i_1}^{s(m-1)} \left( \sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i_1 j} + \varphi_m^{i_1} \right) + \sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=m}^{\infty} a_{mn}^{i_1 j} x_n^j \geq \\
&\geq (h - \varepsilon + (H-h)l\delta\theta) \left( \sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i_1 j} + \varphi_m^{i_1} \right) + (h - \varepsilon) \sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=m}^{\infty} a_{mn}^{i_1 j} = \\
&= h - \varepsilon + (H-h)l\delta\theta \left( \sum_{j \in \Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i_1 j} + \varphi_m^{i_1} \right) \geq \\
&\geq h - \varepsilon + (H-h)l^2\delta\theta \frac{1}{\xi_m^{i_1}} \sum_{n=1}^{m-1} r_n^{i_1} \geq h - \varepsilon + (H-h)(l\delta)^2\theta.
\end{aligned} \quad (2.22)$$

Пусть  $\bar{U}_1 = \{i^*, i_1\}$ , так как  $\delta$  можно выбрать таким, что  $l\delta < 1$ , то оценка для  $x_m^{i_1}$  будет верна и для всех

$$x_m^i \geq h - \varepsilon + (H - h)(l\delta)^2 \theta, \quad i \in \overline{U_1}, m > N_1. \quad (2.23)$$

Тогда найдется  $i_2 \in U_1$ , что  $a_{mn}^{i_2 j} > 0 (j \in \overline{U_1})$ . Строим, аналогично (2.21) оценку снизу для  $V_{s(m-1)+i_2}^{sN_2}$ , из принципа Архимеда следует, что найдется  $N_2 > N_1$ :

$$V_{s(m-1)+i_2}^{sN_2} \geq h - \varepsilon + (H - h)(l\delta\theta)^2 \quad (2.24)$$

Тогда, аналогично (2.22) получаем оценку для  $x_m^{i_2}$  ( $m > N_2$ ):

$$x_m^{i_2} \geq h - \varepsilon + (H - h)(l\delta)^3 \theta^2.$$

Пусть  $\overline{U_p} = \{i^*, i_1, \dots, i_p\}$ , предположим, что справедливы оценки

$$x_m^i \geq h - \varepsilon + (H - h)(l\delta)^{p+1} \theta^p, \quad i \in \overline{U_p}, m > N_p \quad (N_{p+1} \geq N_p), \quad (2.25)$$

$$V_{s(m-1)+i}^{sN_p} \geq h - \varepsilon + (H - h)(l\delta\theta)^p \quad (2.26)$$

Тогда найдется  $i_{p+1} \in U_p$ , что  $a_{mn}^{i_{p+1} i} > 0 (i \in \overline{U_p})$ . Выбираем  $N_{p+1} > N_p$  таким, что выполняется

$$V_{s(m-1)+i_{p+1}}^{sN_{p+1}} \geq h - \varepsilon + \frac{(H - h)(l\delta)^{p+1} \theta^p \sum_{n=N_p+1}^{N_{p+1}} a_{mn}^{j_{p+1} i}}{\sum_{j \in \Omega(i_{p+1})} \sum_{n=1}^{N_{p+1}} a_{mn}^{i_{p+1} i} + \varphi_m^{i_{p+1}}} \geq h - \varepsilon + (H - h)(l\delta\theta)^{p+1}. \quad (2.27)$$

При  $m > N_{p+1}$  из (2.27) следует, что  $V_{s(m-1)+i_{p+1}}^{s(m-1)} \geq h - \varepsilon + (H - h)(l\delta\theta)^{p+1}$ .

Оценим  $x_m^{i_{p+1}}$  ( $m > N_{p+1}$ ):

$$\begin{aligned} x_m^{i_{p+1}} &= \sum_{j \in \Omega(i_{p+1})} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{i_{p+1} j} x_n^j + b_m^{i_{p+1}} = V_{s(m-1)+i_{p+1}}^{s(m-1)} \left( \sum_{j \in \Omega(i_{p+1})} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i_{p+1} j} + \varphi_m^{i_{p+1}} \right) + \\ &+ \sum_{j \in \Omega(i_{p+1})} \sum_{n=m}^{\infty} a_{mn}^{i_{p+1} j} x_n^j \geq h - \varepsilon + (H - h)(l\delta\theta)^{p+1} \left( \sum_{j \in \Omega(i_{p+1})} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i_{p+1} j} + \varphi_m^{i_{p+1}} \right) \geq \\ &\geq h - \varepsilon + (H - h)(l\delta)^{p+2} \theta^{p+1}. \end{aligned}$$

Можно утверждать, согласно математической индукции, что при  $p = s - 1$ ;  $\overline{U_{s-1}} = \{1, 2, \dots, s\}$  и при  $m > N_{s-1}$  будет справедливой оценка

$$V_{s(m-1)+i}^{s(m-1)} \geq h - \varepsilon + (H - h)(l\delta\theta)^{s-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Но выбирая  $\varepsilon$  достаточно малым, получаем что  $V_{s(m-1)+i}^{s(m-1)}$  оказывается вне  $\varepsilon$ -окрестности  $h$ , в том числе и для  $i'$ , для которого выполняется (2.18). Указанное противоречие доказывает, что пределы точных граней лимитант совпадают  $H = h$ , в силу основного свойства лимитант получаем утверждение теоремы.

**Следствие.** Бесконечная система (2.11), удовлетворяющая условиям теоремы 2.7, не является вполне регулярной, то есть

$$\lim_{m \rightarrow 0} \varphi_m^i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (2.28)$$

Действительно, в силу условий регулярности (2.12) выполняется

$$\varphi_m^i + \sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^N a_{mn}^{ij} < 1,$$

тогда из (2.13) и  $\varphi_m^i \xi_m^i \leq P$  следует оценка сверху

$$\varphi_m^i \equiv \frac{\xi_m^i \varphi_m^i \left( \varphi_m^i + \sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^N a_{mn}^{ij} \right)}{\xi_m^i \varphi_m^i + \sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^N \xi_m^i a_{mn}^{ij}} \leq \frac{P}{l \sum_{n=1}^N r_n^i},$$

учитывая условие  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N r_n^i \right)^{-1} = 0$ , получаем (2.28).

Заметим, что главное отличие представленного обобщения закона асимптотических выражений от предыдущих обобщений [36, 41, 53] заключается в том, что введенные в условие теоремы 2.7 последовательности  $r_n^i$  впервые дают возможность приводить путем замены переменной бесконечные системы произвольного вида к виду, подходящему под условия предлагаемой теоремы. Таким образом, появляется возможность для определения асимптотики решения бесконечной системы. В последующих разделах диссертации этот прием применяется для исследования степенных асимптотик квазирегулярных бесконечных систем, возникающих в задачах динамики упругого тела.

### 2.3. Достаточные условия существования ограниченного решения у квазирегулярной бесконечной системы

Для исследования разрешимости квазирегулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.1) в монографии [53] предлагается сводить их при помощи замены переменной

$$x_k = \chi_k^0 + \sum_{j=1}^{N_R} \chi_k^j x_j, \quad (k = N_R + 1, N_R + 2, \dots) \quad (2.29)$$

где  $N_R$  – номер, начиная с которого выполняется условие квазирегулярности

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}| = 1 - \rho_k < 1 \quad (k = N_R + 1, N_R + 2, \dots); \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}| < \infty \quad (k = 1, 2, \dots, N_R), \quad (2.30)$$

к совокупности регулярных бесконечных систем относительно  $\{\chi_k^j\}_{k=N_R+1}^{\infty}$  ( $j = 0, 1, \dots, N_R$ ) с одинаковой матрицей

$$\chi_k^0 = \sum_{n=N_R+1}^{\infty} c_{kn} \chi_n^0 + b_k, \quad (2.31)$$

$$\chi_k^j = \sum_{n=N_R+1}^{\infty} c_{kn} \chi_n^j + c_{kj}, \quad (k = N_R + 1, N_R + 2, \dots; j = 1, 2, \dots, N_R) \quad (2.32)$$

Так как для систем (2.32) теорема 2.2 существования решения выполняется заведомо в силу очевидной оценки

$$|c_{kj}| < \rho_k + \sum_{n=1}^{N_R} |c_{kn}|,$$

то при свободных членах, также удовлетворяющих теореме 2.2, каждая из регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.31), (2.32) имеет ограниченное решение, и вопрос о существовании ограниченного решения для квазирегулярной системы эквивалентен вопросу существования решения конечной системы относительно первых  $\{x_k\}_{k=1}^{N_R}$ , которую можно получить, подставив (2.29) в (2.1) при  $k = 1, 2, \dots, N_R$ :

$$x_k = \sum_{j=1}^{N_R} Q_{kj} x_j + P_j, \quad (j = 1, 2, \dots, N_R) \quad (2.33)$$

где  $Q_{kj} = c_{kj} + \sum_{n=N_R+1}^{\infty} c_{kn}\chi_n^j$  и  $P_k = b_k + \sum_{n=N_R+1}^{\infty} c_{kn}\chi_n^0$ .

Таким образом, описанный подход позволяет свести исследование разрешимости квазирегулярной бесконечной системы к исследованию конечной системы (2.33). Данный подход носит качественный характер и не дает возможности гарантировать наличие ограниченного решения системы на основе вычисления простого критерия. Как можно заметить, ключевым моментом здесь является неявное исключение неизвестных из системы.

Ниже предлагается теорема о существовании ограниченного решения квазирегулярной бесконечной системы, которая позволяет без численных оценок решений бесконечной системы (2.31), (2.32) ответить на вопрос о существовании ограниченного решения. Здесь также основной результат удастся получить на основе анализа бесконечной системы после исключения первых неизвестных. Однако исключение неизвестных предлагается проводить уже явным образом. Для этого перепишем первые  $N$  уравнений системы в виде

$$x_k - \sum_{n=1}^N c_{kn}x_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_{kn}x_n + b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (2.34)$$

откуда в предположении что

$$\det\{\delta_{kn} - c_{kn}\}_{k,n=1}^N \neq 0 \quad (2.35)$$

исключим первые  $N$  неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_N$  с помощью (2.34). После этого оставшиеся уравнения бесконечной системы преобразуются к виду:

$$x_k = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( c_{kn} + \sum_{i,j=1}^N c_{kj}\sigma_{ji}c_{in} \right) x_n + b_k + \sum_{i,j=1}^N \gamma_{kj}\sigma_{ji}b_i, \quad (k = N+1, N+2, \dots) \quad (2.36)$$

где  $\{\sigma_{k,n}\}_{k,n=1}^N$  - матрица обратная к матрице  $\{\delta_{kn} - c_{kn}\}_{k,n=1}^N$ ;  $\delta_{kn}$  - символы Кронекера.

**Теорема 2.8.** Квазирегулярная бесконечная система, коэффициенты и свободные члены которой при заданном значении  $N$  удовлетворяют условиям:



$$\text{а) } \det\{\delta_{kn} - c_{kn}\}_{k,n=1}^N \neq 0; \quad \text{б) } \max_{j=1..N} \sum_{i=1}^N |\sigma_{ji}| \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_{in}| < 1 + f_N;$$

$$\text{в) } |b_k| \leq B_N \sum_{n=1}^N |c_{kn}| \quad (k = N+1, N+2, \dots),$$

имеет ограниченное решение

$$|x_k| \leq \frac{B_N + m_N}{\ell_N} (1 + f_N) + m_N, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.37)$$

$$|x_k| \leq \frac{B_N + m_N}{\ell_N}, \quad k = N+1, N+2, \dots \quad (2.38)$$

где

$$f_N = \inf_{k>N} \frac{\rho_k}{\sum_{n=1}^N |c_{kn}|}; \quad \rho_k = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}|; \quad m_N = \max_{j=1..N} \sum_{i=1}^N |\sigma_{ji} b_i|;$$

$$\ell_N = 1 + f_N - \max_{j=1..N} \sum_{i=1}^N |\sigma_{ji}| \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_{in}|. \quad (2.39)$$

**Доказательство.** Условие (а) обеспечивает однозначную разрешимость конечной системы (2.34) и существование не особой обратной матрицы  $\{\sigma_{k,n}\}_{k,n=1}^N$ ,

Оценим регулярность системы (2.36)

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_{kn}^*| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| c_{kn} + \sum_{i,j=1}^N c_{kj} \sigma_{ji} c_{in} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_{kn}| + \sum_{j=1}^N |c_{kj}| \sum_{i=1}^N |\sigma_{ji}| \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_{in}| \quad (2.40)$$

Учитывая условие (б) и обозначения величин (2.39), строим верхнюю оценку для (2.40):

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_{kn}^*| < \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_{kn}| + (1 + f_N) \sum_{j=1}^N |c_{kj}| = \sum_{j=1}^{\infty} |c_{kj}| + f_N \sum_{j=1}^N |c_{kj}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |c_{kj}| + \rho_k = 1.$$

Таким образом, условие (б) обеспечивает регулярность системы (2.36).

Воспользовавшись теоремой 2.2 существования ограниченного решения регулярной бесконечной системы, можно обеспечить существование ограниченного решения системы (2.36), что в силу однозначной разрешимости

системы (2.34) приведет к ограниченному решению для исходной системы. Условие (в) позволяет доказать этот факт. Действительно, если обозначить свободные члены бесконечной системы (2.36) как  $\{b_k^*\}_{k=N+1}^\infty$ , то для справедливости теоремы 2.2 необходимо выполнение условия

$$|b_k^*| \leq B\rho_k^* \quad (k = N + 1, N + 2, \dots), \quad (2.41)$$

где  $\rho_k^* = 1 - \sum_{n=N+1}^\infty |c_{kn}^*|$ .

Чтобы найти  $B > 0$  из условия (2.41), преобразуем неравенство (2.40) с помощью введенных выражений (2.39)

$$1 - \rho_k^* \leq \sum_{n=N+1}^\infty |c_{kn}| + (1 + f_N + \ell_N) \sum_{n=1}^N |c_{kn}|$$

Решение этого неравенства относительно  $\rho_k^*$  с учетом выражения  $f_N$  в (2.39) принимает вид

$$\rho_k^* \geq \ell_N \sum_{n=1}^N |c_{kn}|, \quad (k = N + 1, N + 2, \dots), \quad (2.42)$$

Из неравенства (2.42) и выражения  $m_N$  в (2.39) находим постоянную  $B$ :

$$\frac{|b_k^*|}{\rho_k^*} = \frac{|b_k + \sum_{i,j=1}^N c_{kj} \sigma_{ji} b_i|}{\rho_k^*} \leq \frac{|b_k| + \sum_{i,j=1}^N |c_{kj}| |\sigma_{ji} b_i|}{\ell_N \sum_{n=1}^N |c_{kn}|} \leq \frac{B_N + m_N}{\ell_N} = B. \quad (2.43)$$

Следовательно, существует главное решение регулярной системы (2.36), ограниченное постоянной  $B$ . Этот факт представлен неравенством (2.38). Неравенство (2.37) получается из оценки решения конечной системы (2.34) на основе (2.38).

**Следствие.** Квазирегулярная однородная бесконечная система линейных алгебраических уравнений вида

$$x_k = \sum_{n=1}^\infty c_{kn} x_n, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.44)$$

для которой регулярная часть уравнений удовлетворяет условиям вполне регулярности:

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}| = 1 - \theta < 1, \quad (k = N_R + 1, N_R + 2, \dots) \quad (2.45)$$

будет иметь единственное тривиальное решение  $x_k \equiv 0$ , если при некотором номере  $N$  существует обратная матрица  $\{\sigma_{k,n}\}_{k,n=1}^N$  к матрице  $\{\delta_{kn} - c_{kn}\}_{k,n=1}^N \neq 0$  и справедлива оценка:

$$T_N = 1 - \max_{j=1..N} \sum_{i=1}^N |\sigma_{ji}| \left( S_i - \sum_{n=1}^N |c_{in}| \right) + \inf_{k>N} \frac{1 - \theta - S_k}{\sum_{n=1}^N |c_{kn}|} > 0, \quad (2.46)$$

где  $0 < \theta < 1$ .

Представленное следствие из теоремы 2.8 используется в последующих главах диссертации для локализации собственных значений краевых задач (собственных частот колебаний и критических сил) на основе проверки критерия (2.46). Заметим, что с практической точки зрения, реализация вычислений согласно (2.46), сводится к аналитическому суммированию рядов в условиях регулярности (2.45) и обращению конечной матрицы порядка  $N$ .

#### 2.4. Краткие выводы по главе 2

Во второй главе диссертации представлены и систематизированы основные сведения из теории регулярных (квазирегулярных) бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрены три различных формулировки закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича [57], позволяющего установить факт стремления главного решения бесконечной системы к ненулевому пределу по достаточным условиям на коэффициенты и свободные члены системы.

В разделе 2.2 диссертации представлено с доказательством обобщение закона асимптотических выражений на системы с неотрицательными матрицами (теорема 2.7). Кроме этого в условия данной теоремы введены

последовательности  $r_n^i$ , которые впервые дают возможность при помощи замены переменной приводить бесконечные системы к виду, в котором их главное решение имеет ненулевой предел. Таким образом, впервые получен эффективный метод для отыскания асимптотик решения регулярных бесконечных систем. Учитывая, что согласно (2.29) – (2.33) квазирегулярную бесконечную систему всегда можно разложить на совокупность регулярных систем, представленная теорема 2.7 также дает возможность для исследования асимптотик квазирегулярных бесконечных систем.

В разделе 2.3 представлены достаточные условия существования ограниченного решения квазирегулярной бесконечной системы (теорема 2.8). Данный результат впервые дает возможность установить существование ограниченного решения бесконечной системы по ее коэффициентам и свободным членам. Здесь также представлен критерий (2.46), который позволяет найти диапазон изменения параметров задачи (частоты или критических сил в задачах теории упругости), где однородная бесконечная система имеет только нулевое решение. Данный критерий используется как инструмент для определения собственных частот колебаний пластин в последующих главах диссертации.

Результаты данной главы были представлены на международных конференциях [96, 100, 102, 212] и опубликованы в статьях [64, 65, 75, 83, 211, 213].

## ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

### 3.1. Поперечные свободные колебания прямоугольной пластины.

Задача о свободных поперечных колебаниях прямоугольной пластины относится к числу старейших классических проблем. Еще в начале XIX века опыты с демонстрацией фигур Хладни [221], благодаря эстетическому аспекту, привлекли внимание широкой общественности к проблеме колебания пластин. Попытки математического описания проблемы, в свою очередь, дали мощный толчок к развитию аппарата математической физики. Чрезвычайная важность прямоугольной пластины как элемента в структурной механике и инженерных приложениях привела к появлению большого числа работ, где проблема колебаний изучалась на основе различных подходов, обзор этих работ представлен в первой главе диссертации.

Ниже задача о колебаниях ортотропной прямоугольной пластины со свободными (защемленными) краями сводится к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. На основе авторского обобщения закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича (теорема 2.7) найден степенной закон убывания нетривиального решения данной системы, что позволяет построить эффективный алгоритм вычисления собственных частот и форм пластины.

#### 3.1.1 Постановка задачи и общее решение

Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластину  $\{(x, y) \in [-a; a] \times [-b; b]\}$  толщины  $h$ . Согласно [60] упругие свойства материала можно описать при помощи четырех упругих констант. В частности, с помощью модуля Юнга  $E_1$  вдоль направления оси  $x$ , модуля сдвига  $G$  и двух коэффициентов Пуассона  $\nu_{12}$  и  $\nu_{21}$ . Тогда уравнение свободных поперечных колебаний пластины в приближении классической теории Кирхгофа -Лява может быть записано относительно прогиба

пластины  $w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t}$  в форме (1.1) при отсутствии нагрузок в плоскости пластины  $N_x = N_y = 0$ :

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - D_1 \Omega^4 W = 0 \quad (3.1)$$

где  $\Omega = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho h}{D_1}}$  - безразмерный частотный параметр,  $\rho$  - плотность материала,  $\omega$  -

круговая частота;  $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$ ;  $D_2 = \frac{\nu_{21} E_1 h^3}{12\nu_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$ ;  $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$ ;

$$D_{66} = Gh^3/12; D_{12} = \nu_{12} D_2.$$

Граничные условия свободного края на сторонах  $x = \pm a$  имеют вид

$$M_x = -\left( D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0; \quad V_x = -\left( D_1 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (D_3 + 2D_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) = 0; \quad (3.2)$$

на сторонах  $y = \pm b$ :

$$M_y = -\left( D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0; \quad V_y = -\left( D_2 \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (D_3 + 2D_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right) = 0; \quad (3.3)$$

В случае защемленных краев пластины получаем на сторонах  $x = \pm a$

$$W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

на сторонах  $y = \pm b$ :

$$W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

Общее решение задачи может быть представлено в виде суммы четных и нечетных составляющих по каждой из координат

$$W = \sum_{k,j=0}^1 W_{kj} \quad (3.6)$$

где  $W_{00}$  - четная по обеим координатам,  $W_{01}$  - четная по  $x$  и нечетная по  $y$ , и т.п.

Используя стандартную технику разделения переменных, общее решение уравнения колебаний (3.1) для каждого случая симметрии может быть записано в форме суммы двух рядов Фурье с неопределенными коэффициентами

$$W_{kj} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n H_j(p_{nk}y) + B_n H_j(\bar{p}_{nk}y)) T_k(\alpha_{nk}x) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n H_k(q_{nj}x) + D_n H_k(\bar{q}_{nj}x)) T_j(\beta_{nj}y) \quad (3.7)$$

где тригонометрические и гиперболические функции обозначены как

$$T_j(z) = \begin{cases} \cos z, & j=0 \\ \sin z, & j=1 \end{cases}; \quad H_j(z) = \begin{cases} \operatorname{ch} z, & j=0 \\ \operatorname{sh} z, & j=1 \end{cases}.$$

Константы разделения выбираются в форме, обеспечивающей полноту решения (3.7) на границе пластины

$$\alpha_{nj} = \frac{\pi}{a} \left( n - 1 + \frac{j}{2} \right), \quad \beta_{nj} = \frac{\pi}{b} \left( n - 1 + \frac{j}{2} \right), \quad (3.8)$$

Величины  $p_{nk}, \bar{p}_{nk}$  и  $q_{hj}, \bar{q}_{hj}$  являются корнями следующих характеристических уравнений

$$D_2 p^4 - 2D_3 \alpha^2 p^2 + D_1 (\alpha^4 - \Omega^4) = 0, \quad (3.9)$$

$$D_1 q^4 - 2D_3 \beta^2 q^2 + D_2 \beta^4 - D_1 \Omega^4 = 0, \quad (3.10)$$

которые легко выражаются аналитически

$$p = \sqrt{\frac{D_3 \alpha^2 + \sqrt{(D_3^2 - D_1 D_2) \alpha^4 + D_1 D_2 \Omega^4}}{D_2}}, \quad \bar{p} = \sqrt{\frac{D_3 \alpha^2 - \sqrt{(D_3^2 - D_1 D_2) \alpha^4 + D_1 D_2 \Omega^4}}{D_2}}, \quad (3.11)$$

$$q = \sqrt{\frac{D_3 \beta^2 + \sqrt{(D_3^2 - D_1 D_2) \beta^4 + D_1^2 \Omega^4}}{D_2}}, \quad \bar{q} = \sqrt{\frac{D_3 \beta^2 - \sqrt{(D_3^2 - D_1 D_2) \beta^4 + D_1^2 \Omega^4}}{D_2}}. \quad (3.12)$$

В зависимости от знаков подкоренных выражений величины (3.11)-(3.12) могут быть, вообще говоря, комплексными. Однако в силу соотношений теоремы Виета для уравнений (3.9)-(3.10) выражения

$$\begin{aligned} D_1 (\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2) (\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2) &= D_2 (\beta_{mj}^2 + p_{nk}^2) (\beta_{mj}^2 + \bar{p}_{nk}^2) = \\ &= D_1 \alpha_{nk}^4 + 2D_3 \alpha_{nk}^2 \beta_{mj}^2 + D_2 \beta_{mj}^4 - D_1 \Omega^4 \end{aligned} \quad (3.13)$$

обязательно являются действительными.

Общее решение (3.7) точно удовлетворяет уравнению колебаний (3.1) и имеет достаточный произвол для выполнения любых заданных граничных условий. В случае свободных краев пластины, условия (3.2) и (3.3) на нормальные

реакции  $V_x$  и  $V_y$  могут быть выполнены точно. Действительно из (3.8) следует, что для любого типа симметрии

$$T'_k(\alpha_{nk}a) = T'_j(\beta_{nj}b) = 0.$$

Тогда при выборе неопределенных коэффициентов в форме

$$A_n = \frac{(-1)^n b \sqrt{D_1} (D_2 \bar{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2)}{2D_2 p_{nk} H'_j(p_{nk}b) (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} X_n^f; B_n = \frac{(-1)^{n+1} b \sqrt{D_1} (D_2 p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2)}{2D_2 \bar{p}_{nk} H'_j(\bar{p}_{nk}b) (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} X_n^f$$

$$C_n = \frac{(-1)^n a \sqrt{D_2} (D_1 \bar{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2)}{2D_1 q_{nj} H'_k(q_{nj}a) (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} Y_n^f; D_n = \frac{(-1)^{n+1} a \sqrt{D_2} (D_1 q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2)}{2D_1 \bar{q}_{nj} H'_k(\bar{q}_{nj}a) (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} Y_n^f,$$

указанные условия выполняются тождественно.

Условия на моменты  $M_x$  и  $M_y$  дают два функциональных уравнения вида

$$\frac{b \sqrt{D_1}}{D_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^f}{\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2} \left( \frac{(D_2 \bar{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2)(D_{12} p_{nk}^2 - D_1 \alpha_{nk}^2)}{p_{nk}} \cdot \frac{H_j(p_{nk}y)}{H'_j(p_{nk}b)} - \frac{(D_2 p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2)(D_{12} \bar{p}_{nk}^2 - D_1 \alpha_{nk}^2)}{\bar{p}_{nk}} \cdot \frac{H_j(\bar{p}_{nk}y)}{H'_j(\bar{p}_{nk}b)} \right) = \frac{a \sqrt{D_2}}{D_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m Y_m^f}{\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2} \times$$

$$\times \left( \frac{(D_1 \bar{q}_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{mj}^2)(D_1 q_{mj}^2 - D_{12} \beta_{mj}^2)}{q_{mj}} \cdot \frac{H_k(q_{mj}a)}{H'_k(q_{mj}a)} - \frac{(D_1 q_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{mj}^2)(D_1 \bar{q}_{mj}^2 - D_{12} \beta_{mj}^2)}{\bar{q}_{mj}} \cdot \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{H'_k(\bar{q}_{mj}a)} \right) T_j(\beta_{mj}y), \quad y \in [-b; b]$$

$$\frac{a \sqrt{D_2}}{D_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^f}{\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2} \left( \frac{(D_1 \bar{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2)(D_{12} q_{nj}^2 - D_2 \beta_{nj}^2)}{q_{nj}} \cdot \frac{H_k(q_{nj}x)}{H'_k(q_{nj}a)} - \frac{(D_1 q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2)(D_{12} \bar{q}_{nj}^2 - D_2 \beta_{nj}^2)}{\bar{q}_{nj}} \cdot \frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{H'_k(\bar{q}_{nj}a)} \right) = \frac{b \sqrt{D_1}}{D_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m X_m^f}{\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2} \times$$

$$\times \left( \frac{(D_2 \bar{p}_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{mk}^2)(D_2 p_{mk}^2 - D_{12} \alpha_{mk}^2)}{p_{mk}} \cdot \frac{H_j(p_{mk}b)}{H'_j(p_{mk}b)} - \frac{(D_2 p_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{mk}^2)(D_2 \bar{p}_{mk}^2 - D_{12} \alpha_{mk}^2)}{\bar{p}_{mk}} \cdot \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H'_j(\bar{p}_{mk}b)} \right) T_k(\alpha_{mk}x), \quad x \in [-a; a]$$

Данные равенства, после разложения входящих в них гиперболических функций по тригонометрическим



$$\frac{H_k(qx)}{H'_k(qa)} = \frac{q}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (2 - \delta_{k0} \delta_{1m})}{\alpha_{mk}^2 + q^2} T_k(\alpha_{mk}x); \quad (3.14)$$

$$\frac{H_j(py)}{H'_j(pb)} = \frac{p}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (2 - \delta_{j0} \delta_{1m})}{\beta_{mj}^2 + p^2} T_j(\beta_{mj}y), \quad (3.15)$$

и перестановки порядка суммирования в левой части равенств, приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно последовательностей  $\{X_n^f\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{Y_n^f\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\begin{aligned} Y_m^f &= \frac{2 - \delta_{j0} \delta_{1m}}{2a\Delta_m^3 \sqrt{D_1 D_2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4D_{66}^2 + D_1 D_2 - D_3^2) \beta_{mj}^2 \alpha_{nk}^2 + D_{12} D_1 \Omega^4}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} X_n^f; \\ X_m^f &= \frac{2 - \delta_{k0} \delta_{1m}}{2b\Delta_m^7 \sqrt{D_1 D_2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4D_{66}^2 + D_1 D_2 - D_3^2) \beta_{nj}^2 \alpha_{mk}^2 + D_{12} D_1 \Omega^4}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} Y_n^f; \quad (m=1,2,\dots) \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $\delta_{mn}$  - символ Кронекера,

$$\begin{aligned} \Delta_m^3 &= \frac{H_k(q_{mj}a)}{H'_k(q_{mj}a)} \cdot \frac{(D_1 \bar{q}_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{mj}^2)(D_1 q_{mj}^2 - D_{12} \beta_{mj}^2)}{2D_1 q_{mj} (\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} - \\ &\quad - \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{H'_k(\bar{q}_{mj}a)} \cdot \frac{(D_1 q_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{mj}^2)(D_1 \bar{q}_{mj}^2 - D_{12} \beta_{mj}^2)}{2D_1 \bar{q}_{mj} (\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)}; \\ \Delta_m^7 &= \frac{H_j(p_{mk}b)}{H'_j(p_{mk}b)} \cdot \frac{(D_2 \bar{p}_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{mk}^2)(D_2 p_{mk}^2 - D_{12} \alpha_{mk}^2)}{2D_2 p_{mk} (\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} - \\ &\quad - \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H'_j(\bar{p}_{mk}b)} \cdot \frac{(D_2 p_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{mk}^2)(D_2 \bar{p}_{mk}^2 - D_{12} \alpha_{mk}^2)}{2D_2 \bar{p}_{mk} (\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)}. \end{aligned}$$

Заметим, что выражения  $\Delta_m^3, \Delta_m^7$  обязательно являются действительными для любой комбинации параметров задачи. Таким образом, коэффициенты системы (3.16) в силу тождества (3.13) также действительны. Нетривиальное решение данной системы на собственной частоте колебаний позволяет получить явное аналитическое выражение для собственных форм колебаний

В случае заземленных краев пластины (3.4) – (3.5) условия на углы поворота могут быть выполнены точно. Тогда при выборе неопределенных коэффициентов в форме

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1} b \bar{p}_{nk}}{p_{nk} H'_j(p_{nk} b) (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} X_n^c; B_n = \frac{(-1)^n b}{H'_j(\bar{p}_{nk} b) (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} X_n^c$$

$$C_n = \frac{(-1)^{n+1} a \bar{q}_{nj}}{q_{nj} H'_k(q_{nj} a) (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} Y_n^c; D_n = \frac{(-1)^n a}{H'_k(\bar{q}_{nj} a) (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} Y_n^c,$$

указанные условия выполняются тождественно.

Выкладки, приведенные выше для пластины со свободными краями, приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений в данном случае:

$$Y_m^c = \frac{2 - \delta_{j0} \delta_{1m}}{2a \Delta_m^2 D_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^c}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)}$$

$$X_m^c = \frac{2 - \delta_{k0} \delta_{1m}}{2b \Delta_m^6 D_2} \frac{2}{\Delta_m^6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^c}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.17)$$

где  $\Delta_m^2 = \frac{1}{2D_1(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} \left( q_{mj} \frac{H'_k(q_{mj} a)}{H_k(q_{mj} a)} - \bar{q}_{mj} \frac{H'_k(\bar{q}_{mj} a)}{H_k(\bar{q}_{mj} a)} \right),$

$$\Delta_m^6 = \frac{1}{2D_2(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} \left( p_{mk} \frac{H'_j(p_{mk} b)}{H_j(p_{mk} b)} - \bar{p}_{mk} \frac{H'_j(\bar{p}_{mk} b)}{H_j(\bar{p}_{mk} b)} \right).$$

Заметим, что благодаря схожести разложения в предложенных обозначениях гиперболических функций  $H_k(z)$  по системе тригонометрических функций  $\{T_j(z)\}$ , оказывается возможным рассматривать все четыре случая симметрии вместе.

Таким образом, получены асимптотически точные решения для свободных колебаний ортотропной прямоугольной пластины в случае полностью свободных и полностью защемленных краев пластины. При этом функция прогиба может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
W = & \sum_{k,j=0}^1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{H_j(p_{nk}y)}{p_{nk}H'_j(p_{nk}b)} \left[ (D_2\bar{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{nk}^2) \frac{\phi_{bn}^{+k} - (-1)^j \phi_{bn}^{-k}}{2} + \frac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2} \right] - \right. \\
& - \frac{H_j(\bar{p}_{nk}y)}{\bar{p}_{nk}H'_j(\bar{p}_{nk}b)} \left[ (D_2p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{nk}^2) \frac{\phi_{bn}^{+k} - (-1)^j \phi_{bn}^{-k}}{2} + \frac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2} \right] \left. \right\} \frac{T_k(\alpha_{nk}x)}{D_2(\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} + \\
& + \left\{ \frac{H_k(q_{nj}x)}{q_{nj}H'_j(q_{nj}a)} \left[ (D_1\bar{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2) \frac{\phi_{an}^{+j} - (-1)^k \phi_{an}^{-j}}{2} + \frac{V_{an}^{+j} - (-1)^k V_{an}^{-j}}{2} \right] - \right. \\
& - \frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{\bar{q}_{nj}H'_j(\bar{q}_{nj}a)} \left[ (D_1q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2) \frac{\phi_{an}^{+j} - (-1)^k \phi_{an}^{-j}}{2} + \frac{V_{an}^{+j} - (-1)^k V_{an}^{-j}}{2} \right] \left. \right\} \frac{T_j(\beta_{nj}y)}{D_1(\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где неизвестные в бесконечных системах (3.16), (3.17) могут быть представлены через коэффициенты разложений в тригонометрические ряды по системе  $\{T_j(z)\}$  углов поворота и нормальных реакций

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_{bn}^{+k} - (-1)^j \phi_{bn}^{-k}}{2} &= b\sqrt{D_1}X_n^f; & \frac{\phi_{an}^{+j} - (-1)^k \phi_{an}^{-j}}{2} &= a\sqrt{D_2}Y_n^f \\
\frac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2} &= -bX_n^c; & \frac{V_{an}^{+j} - (-1)^k V_{an}^{-j}}{2} &= aY_n^c
\end{aligned}$$

3.1.2. Анализ регулярности бесконечной системы. Определение собственных частот колебаний.

Следуя теории бесконечных систем [53], запишем систему (3.16) в канонической форме при помощи замены переменных  $Z_{2m-1} = Y_m^f$ ,  $Z_{2m} = X_m^f$

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} Z_n \quad (m=1,2,\dots) \tag{3.19}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{2m-1,2n-1} &= 0; & F_{2m-1,2n} &= \frac{2 - \delta_{j0}\delta_{1m}}{2a\Delta_m^3 \sqrt{D_1 D_2}} \frac{(4D_{66}^2 + D_1 D_2 - D_3^2)\beta_{mj}^2 \alpha_{nk}^2 + D_{12} D_1 \Omega^4}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)}; \\
F_{2m,2n-1} &= \frac{2 - \delta_{k0}\delta_{1m}}{2b\Delta_m^7 \sqrt{D_1 D_2}} \frac{(4D_{66}^2 + D_1 D_2 - D_3^2)\beta_{nj}^2 \alpha_{mk}^2 + D_{12} D_1 \Omega^4}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)}; & F_{2m,2n} &= 0.
\end{aligned}$$

Для исследования регулярности системы (3.15) используем известные значения рядов [111]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n0}^2 + q^2} = \frac{1}{q^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n/a)^2 + q^2} = \frac{a}{2q} \operatorname{cth} qa + \frac{1}{2q^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n1}^2 + q^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi(n-1/2)/a)^2 + q^2} = \frac{a}{2q} \operatorname{th} qa.$$

Объединяя эти формулы с учетом введенных обозначений, можно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{nk}^2 + q^2} = \frac{a}{2q} \frac{H_k(qa)}{H'_k(qa)} + \frac{1-k}{2q^2}, \quad (3.20)$$

Аналогично, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{nj}^2 + p^2} = \frac{b}{2p} \frac{H_j(pb)}{H'_j(pb)} + \frac{1-j}{2p^2}. \quad (3.21)$$

В силу того, что коэффициенты системы (3.19) являются знакопеременными лишь для первых строк и столбцов бесконечной матрицы, ряды в условиях регулярности можно вычислить точно на основе формул (3.20), (3.21):

$$S_{2m-1} = \sum_{n=1}^N (|F_{2m-1,n}| - F_{2m-1,n}) + \frac{2 - \delta_{j0}\delta_{1m}}{4a\sqrt{D_1 D_2} |\Delta_m^3|} \left\{ (D_1 D_2 + 4D_{66}^2 - D_3^2) \beta_{mj}^2 \left( \frac{a}{\bar{q}_{mj}} \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{H'_k(\bar{q}_{mj}a)} + \frac{1-k}{\bar{q}_{mj}^2} \right) - \right.$$

$$\left. + \frac{(D_1 D_2 + 4D_{66}^2 - D_3^2) \beta_{mj}^2 q_{mj}^2 - D_{12} D_1 \Omega^4}{\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2} \left( \frac{a}{q_{mj}} \frac{H_k(q_{mj}a)}{H'_k(q_{mj}a)} - \frac{a}{\bar{q}_{mj}} \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{H'_k(\bar{q}_{mj}a)} + \frac{1-k}{q_{mj}^2 \bar{q}_{mj}^2} (\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2) \right) \right\};$$

$$S_{2m} = \sum_{n=1}^N (|F_{2m,n}| - F_{2m,n}) + \frac{2 - \delta_{k0}\delta_{1m}}{4b\sqrt{D_1 D_2} |\Delta_m^7|} \left\{ (D_1 D_2 + 4D_{66}^2 - D_3^2) \alpha_{mk}^2 \left( \frac{b}{\bar{p}_{mk}} \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H'_j(\bar{p}_{mk}b)} + \frac{1-j}{2\bar{p}_{mk}^2} \right) - \right.$$

$$\left. + \frac{(D_1 D_2 + 4D_{66}^2 - D_3^2) \alpha_{mk}^2 p_{mk}^2 - D_{12} D_1 \Omega^4}{\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2} \left( \frac{b}{p_{mk}} \frac{H_j(p_{mk}b)}{H'_j(p_{mk}b)} - \frac{b}{\bar{p}_{mk}} \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H'_j(\bar{p}_{mk}b)} + \frac{1-j}{p_{mk}^2 \bar{p}_{mk}^2} (\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2) \right) \right\}.$$

Здесь номер  $N = N(\Omega)$  выбирается таким образом, чтобы обеспечить положительность  $F_{mn}$  ( $n > N$ ). Переходя к асимптотике при  $m \rightarrow \infty$  и учитывая, что

$$\Delta_m^3 = \frac{D_1 D_2 + 4D_{66} \sqrt{D_1 D_2} - D_{12}^2}{2\sqrt{2} \sqrt{D_2 (D_3 + \sqrt{D_1 D_2})}} \beta_{mj} + O\left(\frac{1}{\beta_{mj}}\right);$$

$$\Delta_m^7 = \frac{D_1 D_2 + 4D_{66} \sqrt{D_1 D_2} - D_{12}^2}{2\sqrt{2} \sqrt{D_1 (D_3 + \sqrt{D_1 D_2})}} \alpha_{mk} + O\left(\frac{1}{\alpha_{mk}}\right),$$

получаем, что четные и нечетные суммы стремятся к одному и тому же постоянному пределу

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = \frac{D_1 D_2 - D_{12}^2 - 4D_{66} D_{12}}{D_1 D_2 - D_{12}^2 + 4D_{66} \sqrt{D_1 D_2}} = \theta < 1. \quad (3.22)$$

Формула (3.18) указывает, что всегда найдется номер  $N_R$ , начиная с которого ряды в условиях регулярности становятся меньше единицы, то есть система (3.19) является квазирегулярной. На рис. 3.1 показана зависимость данного номера от частоты колебаний квадратной изотропной пластины при  $\nu = 0.225$  в случае антисимметрии по обеим осям. Можно заметить, что на графике есть интервалы изменения  $\Omega$ , для которых  $N_R = 0$ . Это означает, система (3.19) является здесь вполне регулярной, то есть согласно теории бесконечных систем [52, 53] имеет единственное нулевое решение. Такой предварительный анализ позволяет сразу заключить, что собственная частота колебаний должна быть расположена на интервале [1.84; 2.23] (если конечно существует собственная частота при  $\Omega < 4$ ). Приведенные рассуждения равносильны проверке условия (2.46) для системы (3.19) при  $N = 0$ . Увеличением параметра  $N$  удается сузить интервал настолько, что с некоторой точностью получаем значение собственной частоты. Следующая таблица демонстрирует вычисление первой собственной частоты для квадратной пластины при  $\nu = 0.225$ , значение которой в [188] дается как  $\Omega_1 = 1.878$ .

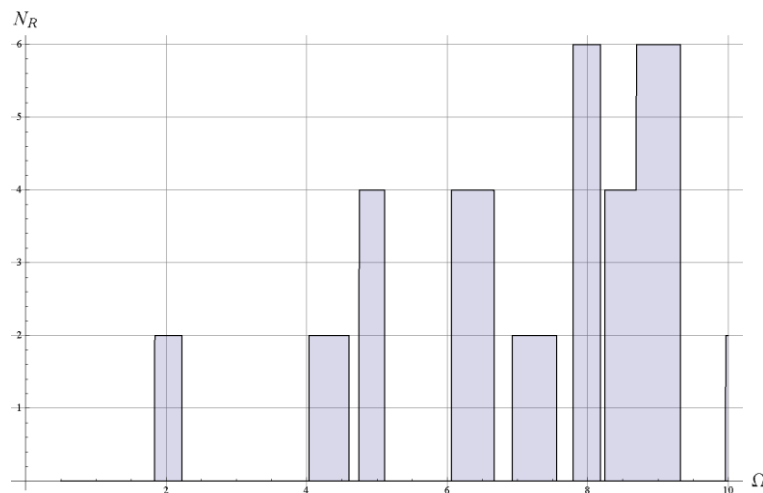


Рис. 3.1 Зависимость  $N_R(\Omega)$  для квадратной изотропной пластины со свободными краями при  $\nu = 0.225$

Таблица 3.1 Проверка  $T_N(\Omega) > 0$  критерия (2.46) для изотропной квадратной пластины при  $\nu = 0.225$ .

$N$	1	5	25
Интервал для собственной частоты	1.877 – 1.880	1.8780 – 1.8793	1.8783 – 1.8788

Как можно заметить, уже при  $N = 1$  удается найти значение собственной частоты с удовлетворительной точностью. Представленный пример показывает, что увеличением значения  $N$  можно сделать оценки настолько близкими, что в значении собственной частоты оказываются совпадающими первые значащие цифры, что дает возможность найти ее значение с требуемой точностью.

Проводя подобные выкладки для системы (3.17), получаем при  $m \rightarrow \infty$  и учитывая, что

$$\Delta_m^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{D_2(D_3 + \sqrt{D_1 D_2})}} \frac{1}{\beta_{mj}^3} + O\left(\frac{1}{\beta_{mj}^4}\right);$$

$$\Delta_m^6 = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{D_1(D_3 + \sqrt{D_1 D_2})}} \frac{1}{\alpha_{mk}^3} + O\left(\frac{1}{\alpha_{mk}^4}\right)$$

получаем, что четные и нечетные суммы стремятся к одному и тому же постоянному пределу

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = 1. \quad (3.23)$$

То есть и в данном случае система является квазирегулярной.

### 3.1.3. Асимптотика решения бесконечной системы. Определение собственных форм колебаний.

Заменой вида

$$Z_m = \sum_{l=1}^{N_R} \chi_m^l Z_l \quad (m > N_R) \quad (3.24)$$

бесконечная система (3.19) сводится к совокупности вполне регулярных бесконечных систем относительно  $\{\chi_m^l\}_{m=N_R+1}^\infty$  ( $l = 1, 2, \dots, N_R$ ) с одинаковой матрицей:

$$\chi_m^l = \sum_{n=N_R+1}^{\infty} F_{mn} \chi_n^l + F_{ml}, \quad (m = N_R + 1, N_R + 2, \dots) \quad (3.25)$$

При этом из ограниченности свободных членов данных систем следует, что каждая из них имеет единственное ограниченное решение. Таким образом, вопрос о существовании ограниченного решения для исходной квазирегулярной системы (3.19) оказывается эквивалентен вопросу существования решения у конечной системы относительно первых неизвестных  $\{Z_m\}_{m=1}^{N_R}$ , которую можно получить согласно (2.29) – (2.33) при  $m = 1, 2, \dots, N_R$ :

$$Z_m = \sum_{n=1}^{N_R} Q_{mn}^F Z_n, \quad (3.26)$$

где  $Q_{mn}^F = F_{mn} + \sum_{l=N_R+1}^{\infty} F_{ml} \chi_l^n$ .

Таким образом, равенство нулю определителя конечной системы (3.26) дает дисперсионное уравнение для определения собственных частот пластины:

$$\det \|\delta_{mn} - Q_{mn}^F\| = 0,$$

которое дает достаточное условие для верификации значения собственной частоты, найденной на основе критерия (2.46).

Для построения эффективного алгоритма решения систем (3.25) найдем аналитически асимптотику их решений. С этой целью проведем замену переменных вида

$$\chi_{2m-1}^l = D_1^{\frac{\lambda+1}{4}} 2^{\frac{\lambda}{2}} \beta_{mj}^{-(2+\lambda)} y_m^l; \quad \chi_{2m}^l = D_2^{\frac{\lambda+1}{4}} 2^{\frac{\lambda}{2}} \alpha_{mk}^{-(2+\lambda)} x_m^l;$$

где  $\lambda$  найдем из условия, что преобразованные системы

$$\begin{aligned}
y_m^l &= \frac{\beta_{mj}^{2+\lambda}}{aD_1\Delta_m^1} \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\lambda/4} \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{(4D_{66}^2 + D_1D_2 - D_3^2)\beta_{mj}^2\alpha_{nk}^{-\lambda} + D_{12}D_1\Omega^4\alpha_{nk}^{-2-\lambda}}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} x_n^l + \frac{F_{2m-1,l}\beta_{mj}^{2+\lambda}}{D_1^{1/2+\lambda/4}}; \\
x_m^l &= \frac{\alpha_{mk}^{2+\lambda}}{b\Delta_m^2} \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\lambda/4} \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{(4D_{66}^2 + D_1D_2 - D_3^2)\alpha_{mk}^2\beta_{nj}^{-\lambda} + D_{12}D_1\Omega^4\beta_{nj}^{-2-\lambda}}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} y_n^l + \frac{F_{2m,l}\alpha_{mk}^{2+\lambda}}{D_2^{1/2+\lambda/4}}; \quad (3.27) \\
&\quad (2N_r = N_R; \quad m = N_r + 1, N_r + 2, \dots)
\end{aligned}$$

удовлетворяют представленному во второй главе диссертации обобщению закона асимптотических выражений (теорема 2.7).

Обязательным условием существования общего ненулевого предела у решения каждой из систем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m^l = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m^l = K_l > 0 \quad (3.28)$$

является тот факт, что данные системы должны оставаться регулярными, но уже не удовлетворять условию вполне регулярности (см. замечание к теореме 2.7), то есть ряды в условиях регулярности должны стремиться к единице снизу. Это и дает уравнение для вычисления  $\lambda$ .

Для реализации данной идеи оценим регулярность систем (3.27) при произвольном значении параметра  $\lambda$ . Для этого используем значение следующего ряда, полученного на основе формулы Эйлера - Маклорена [130]:

$$\begin{aligned}
S_N^j(z) &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(n-1+j/2)^{-\lambda}}{(n-1+j/2)^2 + z^2} = \frac{(N+j/2)^{-1-\lambda}}{1+\lambda} {}_2F_1\left(1; \frac{1+\lambda}{2}; \frac{3+\lambda}{2}; -\left(\frac{z}{N+j/2}\right)^2\right) + \frac{(N+j/2)^{-\lambda}}{2((N+j/2)^2 + z^2)} + \\
&+ \frac{\lambda(N+j/2)^{-\lambda-1}}{12((N+j/2)^2 + z^2)} + \frac{(N+j/2)^{1-\lambda}}{6((N+j/2)^2 + z^2)^2} - \frac{(N+j/2)^{1-\lambda}}{720((N+j/2)^2 + z^2)} \left(\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{(N+j/2)^4} + \right. \\
&\left. + \frac{6\lambda^2}{((N+j/2)^2 + z^2)(N+j/2)^2} - \frac{24(1-\lambda)}{((N+j/2)^2 + z^2)^2}\right),
\end{aligned}$$

асимптотика которого при  $z \rightarrow \infty$  может быть получена из свойств гипергеометрической функции

$$S_N^j(z) = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi\lambda}{2}} \cdot \frac{1}{z^{1+\lambda}} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Тогда ряды из коэффициентов систем (3.22) могут быть вычислены точно



$$\begin{aligned}\tilde{S}_{2m-1}^{N_r}(\lambda) &= \frac{a^{1+\lambda}\beta_{mj}^{2+\lambda}}{\pi^{2+\lambda}D_1\Delta_m^1(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\lambda/4}\left((4D_{66}^2 + D_1D_2 - D_3^2)\beta_{mj}^2\left(S_{N_r}^k\left(\frac{aq_{mj}}{\pi}\right) - S_{N_r}^k\left(\frac{a\bar{q}_{mj}}{\pi}\right)\right) + \right. \\ &+ D_{12}D_1\Omega^4\left[\frac{1}{q_{mj}^2}\left(S_{N_r}^k(0) - S_{N_r}^k\left(\frac{aq_{mj}}{\pi}\right)\right) - \frac{1}{\bar{q}_{mj}^2}\left(S_{N_r}^k(0) - S_{N_r}^k\left(\frac{a\bar{q}_{mj}}{\pi}\right)\right)\right]\Bigg), \\ \tilde{S}_{2m}^{N_r}(\lambda) &= \frac{b^{1+\lambda}\alpha_{mk}^{2+\lambda}}{\pi^{2+\lambda}D_2\Delta_m^2(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\lambda/4}\left((4D_{66}^2 + D_1D_2 - D_3^2)\alpha_{mk}^2\left(S_{N_r}^j\left(\frac{bp_{mk}}{\pi}\right) - S_{N_r}^j\left(\frac{b\bar{p}_{mk}}{\pi}\right)\right) + \right. \\ &+ D_{12}D_1\Omega^4\left[\frac{1}{p_{mk}^2}\left(S_{N_r}^j(0) - S_{N_r}^j\left(\frac{bp_{mk}}{\pi}\right)\right) - \frac{1}{\bar{p}_{mk}^2}\left(S_{N_r}^j(0) - S_{N_r}^j\left(\frac{b\bar{p}_{mk}}{\pi}\right)\right)\right]\Bigg),\end{aligned}$$

Учитывая, что достаточно больших номерах  $m$  коэффициенты систем (3.27) являются положительными, получаем, что данные аналитические значения рядов дают также значения рядов в оценках регулярности при  $m \rightarrow \infty$ . Тогда переходя к пределу, получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{S}_{2m-1}^{N_r}(\lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{S}_{2m}^{N_r}(\lambda) = f(\lambda)$$

то есть ряды в условиях регулярности систем (3.27) стремятся снизу к одному значению

$$f(\lambda) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{D_1D_2}}{\sqrt{\sqrt{D_1D_2} - D_3}} \cdot \frac{D_1D_2 - D_{12}^2 - 4D_{66}D_{12}}{D_1D_2 - D_{12}^2 + 4D_{66}\sqrt{D_1D_2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\lambda+1}{2}\arctg\sqrt{\frac{D_1D_2}{D_3^2} - 1}\right)}{\cos\frac{\pi\lambda}{2}}.$$

Следовательно, равенство

$$f(\lambda) = 1 \tag{3.29}$$

дает искомое уравнение для определения показателя  $\lambda$ .

При этом из условия ограниченности свободных членов систем (3.27) получаем, что  $\lambda \in [0;1)$ . Тогда коэффициенты системы (3.27) удовлетворяют оценкам в условиях теоремы 2.7, если положить в оценках теоремы

$$r_n^{(1)} = \alpha_{nk}^{-\lambda}; \quad r_n^{(2)} = \beta_{nj}^{-\lambda}; \quad \xi_m^{(1)} = \beta_{mj}^{1-\lambda}; \quad \xi_m^{(2)} = \alpha_{mk}^{1-\lambda}$$

и, следовательно, оказывается справедливым асимптотический закон (3.28).

В таблице 3.2 представлены упругие константы для стекла и стеклопластика. Для данных материалов в таблице 3.3 дано решение (3.16)

Таблица 3.2 Упругие характеристики некоторых материалов

Материал	$E_1 \cdot 10^{-5}$ , кгс/см <sup>2</sup>	$G \cdot 10^{-5}$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\nu_{12}$	$\nu_{21}$
$M_1$ - стекло	0.7	0.28	0.225	0.225
$M_2$ - стеклотекстолит КАСТ-В	2.0	0.40	0.20	0.11
$M_3$ - эпоксидное стекло	0.61	0.12	0.23	0.09

Таблица 3.3 Показатель  $\lambda$  в асимптотике решения

Материал	$\lambda$
$M_1$ - стекло	0.809211
$M_2$ - стеклотекстолит КАСТ-В	0.581107
$M_3$ - эпоксидное стекло	0.614004

Известный степенной закон убывания решений систем (3.27) позволяет найти решение этих систем согласно методу улучшенной редукции, когда неизвестные в бесконечных системах, начиная с некоторого номера  $N$ , заменяются своими предельными значениями  $y_m^l = x_m^l = K_l$  ( $m > N$ ). Таким образом, решается совокупность конечных систем вида

$$y_m^l = \frac{\beta_{mj}^{2+\lambda}}{aD_1\Delta_m^l} \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^{\lambda/4} \sum_{n=N_r+1}^N \frac{(4D_{66}^2 + D_1D_2 - D_3^2)\beta_{mj}^2\alpha_{nk}^{-\lambda} + D_{12}D_1\Omega^4\alpha_{nk}^{-2-\lambda}}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} x_n^l +$$

$$+ K_l \tilde{S}_{2m-1}^N(\lambda) + \frac{F_{2m-1,l}\beta_{mj}^{2+\lambda}}{D_1^{1/2+\lambda/4}};$$

$$x_m^l = \frac{\alpha_{mk}^{2+\lambda}}{b\Delta_m^2} \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{\lambda/4} \sum_{n=N_r+1}^N \frac{(4D_{66}^2 + D_1D_2 - D_3^2)\alpha_{mk}^2\beta_{nj}^{-\lambda} + D_{12}D_1\Omega^4\beta_{nj}^{-2-\lambda}}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} y_n^l +$$

$$+ K_l \tilde{S}_{2m}^N(\lambda) + \frac{F_{2m,l}\alpha_{mk}^{2+\lambda}}{D_2^{1/2+\lambda/4}};$$

$$(2N_r = N_R; \quad m = N_r + 1, N_r + 2, \dots, N; \quad l = 1, 2, \dots, N_r)$$

Замыкает каждую из записанных выше систем уравнений приближенное представление предельных констант в виде

$$K_l = \frac{x_N^l + y_N^l}{2}.$$

Данный подход обеспечивает высокую точность вычисления коэффициентов конечной системы (3.26), определитель которой на собственных частотах обращается в нуль. Так в случае рассмотренной выше первой собственной частоты квадратной изотропной пластинки (рис. 3.1 и табл. 3.1) можно найти  $N_R = 1$ . Решения систем (3.25) при  $N = 30$  позволяют получить конечную систему (3.26) вида:

$$\begin{pmatrix} 0.997485 & -0.997490 \\ -0.997490 & 0.997485 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Конечно, из-за малой погрешности в вычислениях, как собственной частоты, так и решений систем (3.30), определитель данной системы оказывается равным  $10^{-5}$ , однако с увеличением точности вычислений его значение можно сделать сколь угодно малым. Поэтому для определения нетривиального решения исследуемой бесконечной системы (3.16) отбрасываем одно из уравнений (3.30) и строим базисное решение для оставшегося уравнения:  $Y_1 = 1; X_1 = 1.00001$  - очевидно, значение  $X_1$  содержит погрешность такого же порядка, как и коэффициенты (3.30). Остается по формулам (3.24) восстановить однородное решение (3.16), которое представлено в таблице 3.4.

Таблица 3.4 Нетривиальное решение системы (3.16) для изотропной квадратной пластины  $\nu = 0,225$ .

$n$	$Y_n$	$X_n$
1	1.00000	1.00001
2	0.02182	0.02182
3	0.00548	0.00548
4	0.00219	0.00219
5	0.00110	0.00110
10	0.00014	0.00014
$n \rightarrow \infty$	$1.48\alpha_{n1}^{-2.727}$	

Так для случая симметрии по обеим осям, точность выполнения однородных граничных условий демонстрирует таблица 3.5, где представлено выполнение нулевого граничного условия  $M_x = 0$  для первых трех

нормированных собственных форм. Наибольшая погрешность достигается в углу пластины. Данные таблицы показывают удовлетворительную точность полученного решения при относительно небольшом порядке конечных систем в методе улучшенной редукции.

Таблица 3.5. Выполнение однородных граничных условий  $M_x = 0$ .

$y$	$W_{00}^1$	$W_{00}^2$	$W_{00}^3$
0	$7.4 \cdot 10^{-8}$	$7.1 \cdot 10^{-8}$	$8.5 \cdot 10^{-7}$
0.2	$7.4 \cdot 10^{-8}$	$7.1 \cdot 10^{-8}$	$8.5 \cdot 10^{-7}$
0.4	$7.5 \cdot 10^{-8}$	$7.2 \cdot 10^{-8}$	$8.5 \cdot 10^{-7}$
0.6	$7.7 \cdot 10^{-8}$	$7.5 \cdot 10^{-8}$	$8.4 \cdot 10^{-7}$
0.8	$9.1 \cdot 10^{-8}$	$8.8 \cdot 10^{-8}$	$8.2 \cdot 10^{-7}$
1.0	$-1.1 \cdot 10^{-5}$	0.0067	- 0.003

Таким образом, удается получить асимптотику нетривиального решения исходной бесконечной системы:

$$Y_m^f = \frac{KD_1^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}}}{\beta_{mj}^{2+\lambda}}; \quad X_m^f = \frac{KD_2^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}}}{\alpha_{mk}^{2+\lambda}} \quad (m \rightarrow \infty),$$

и найти всю последовательность неизвестных коэффициентов в общем решении  $W_{kj}$ , что позволяет получить аналитическое решение поставленной задачи.

Заметим, что в случае заземленных краев описанное выше разложение применительно к системе (3.17) дает совокупность регулярных систем, имеющих постоянных предел. Таким образом, в этом случае получаем асимптотику нетривиального решения в виде

$$Y_m^c = Z_\infty; \quad X_m^c = Z_\infty \quad (m \rightarrow \infty).$$

#### 3.1.4. Численные результаты.

Предложенный подход был программно реализован для вычисления собственных частот и построения собственных форм прямоугольных ортотропных пластин. Как частный случай был получен случай изотропной пластины, для которого, как известно

$$\nu = \nu_{12} = \nu_{21}; E = E_1; G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Проводились вычисления для квадратной пластинки при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0.225$  (стекло) и  $\nu = 0.33$  (алюминий). В своей работе С.С. Ма, С.Н. Huang [195] на основе оптического метода голографической интерферометрии, экспериментально исследовали собственные частоты и фигуры Хладни алюминиевой пластины со стороной 80 мм. В представленной ниже таблице дано сравнение первых пяти собственных частот, полученных экспериментально (AF-ESPI), согласно описанному выше алгоритму (Т) и на основе метода конечных элементов (FEM), представленному в [195].

Результаты, представленные в данной таблице, показывают хорошее соответствие между численным моделированием и экспериментально найденными собственными частотами. Погрешность рассчитывалась по формуле:

$$\delta\% = \frac{|f_T - f_{\text{exp}}|}{f_{\text{exp}}} 100\%.$$

Таблица 3.6. Сравнение собственных частот с экспериментом.

$n$	1	2	3	4	5
AF-ESPI (Гц)	494	735	890	1271	2330
FEM (Гц)	510	745	945	1324	2357
$\Omega$	1.816	2.194	2.470	2.928	3.903
Т (Гц)	505	738	935	1314	2335
$\delta$ (%)	2.2	0.4	5.1	3.4	0.2

Было также проведено сравнение с известными в литературе результатами, полученными на основе метода Релея-Ритца [188]. Для удобства сравнения в табл.3.7 представлен частотный параметр  $\mu = 4\Omega^2$ . Практически все значения совпадают, за исключением 7 и 8 мод, которые являются кососимметричными по обеим координатам. Здесь отличие составляет около 0.5 %. Данный факт, по-видимому, связан с более слабой сходимостью метода Релея-Ритца по выбранным нечетным функциям.

Таблица 3.7 Первые собственные частоты  $\mu = 4\Omega^2$  для квадратной изотропной пластины при  $\nu = 0.3$

$n$	$N = 10$	[188]
1	13.4682	13.4728
2	19.5960	19.5961
3	24.2702	24.2702
4	34.8008	34.8011
5	61.0949	61.0932
6	63.6868	63.6870
7	69.2653	69.5020
8	77.1724	77.5897
9	105.461	105.463
10	117.108	117.109

В табл. 3.8 представлены первые десять собственных частот для квадратных пластин из стекла и стеклопластика (см. табл. 3.2). На рис. 3.2. представлены соответствующие им фигуры Хладни – узловые линии собственных форм. При этом, для квадратной пластины из изотропного материала  $M_1$ , собственным значениям, отвечающим модам симметричным по одной из координат и кососимметричным по другой, соответствуют две собственные формы  $W_{01}(x, y)$  и  $W_{10}(x, y)$ . Поэтому для данных собственных частот на рис. 3.2 приводятся две фигуры Хладни, первая соответствует форме  $W_{01}(x, y)$ , вторая соответствует  $W_{01}(x, y) - W_{10}(x, y)$ . Заметим, что именно вторая фигура наиболее часто встречается в эксперименте. Из табл. 3.8 и рис. 3.2 следует, что во всех примерах фундаментальная частота соответствует кососимметричным по обеим координатам формам. При этом результаты для двух ортотропных материалов  $M_2$  и  $M_3$  оказываются более схожими между собой, чем результаты для изотропного материала  $M_1$ . Это проявляется и в близости собственных частот, и в одинаковом характере фигур Хладни. Наибольшее отличие между изотропным и ортотропным материалами проявляется для симметричных мод, в частности, для второй и третьей мод. Хотя для всех трех материалов они имеют одинаковый характер симметрии, фигуры Хладни значительно отличаются для изотропного материала  $M_1$ , и для двух ортотропных материалов  $M_2$  и  $M_3$ .

Таблица 3.8. Первые собственные частоты  $\Omega$  для квадратной пластины

$n$	$M_1$	Симметрия	$M_2$	Симметрия	$M_3$	Симметрия
1	1.8645	(1, 1)	1.5916	(1, 1)	1.5832	(1, 1)
2	2.2434	(0, 0)	2.0213	(0, 0)	1.8792	(0, 0)
3	2.4503	(0, 0)	2.3683	(0, 0)	2.3653	(0, 0)
4	2.9834	(1, 0)/(0, 1)	2.5628	(1, 0)	2.4872	(1, 0)
5	3.9144	(1, 0)/(0, 1)	2.7436	(0, 1)	2.7349	(0, 1)
6	4.0316	(0, 0)	3.3787	(0, 1)	3.1388	(0, 1)
7	4.2093	(1, 1)	3.5314	(0, 0)	3.4892	(0, 0)
8	4.3988	(1, 1)	3.6937	(1, 1)	3.5140	(1, 1)
9	5.1780	(1, 0)/(0, 1)	3.9211	(1, 0)	3.9210	(1, 0)
10	5.4316	(0, 0)	4.1467	(1, 1)	4.1395	(1, 1)

Сравнение построенных в диссертации собственных форм с экспериментальными результатами, полученными на основе оптического метода голографической интерферометрии, представлено в таблице 3.9 для квадратной пластины при  $\nu = 0.225$  (стекло). Можно увидеть практически полное соответствие между теоретическими результатами и экспериментом. Все экспериментально найденные фигуры были построены аналитически, за исключением мод с номерами 19, 22 и 26, которые в эксперименте не были обнаружены.

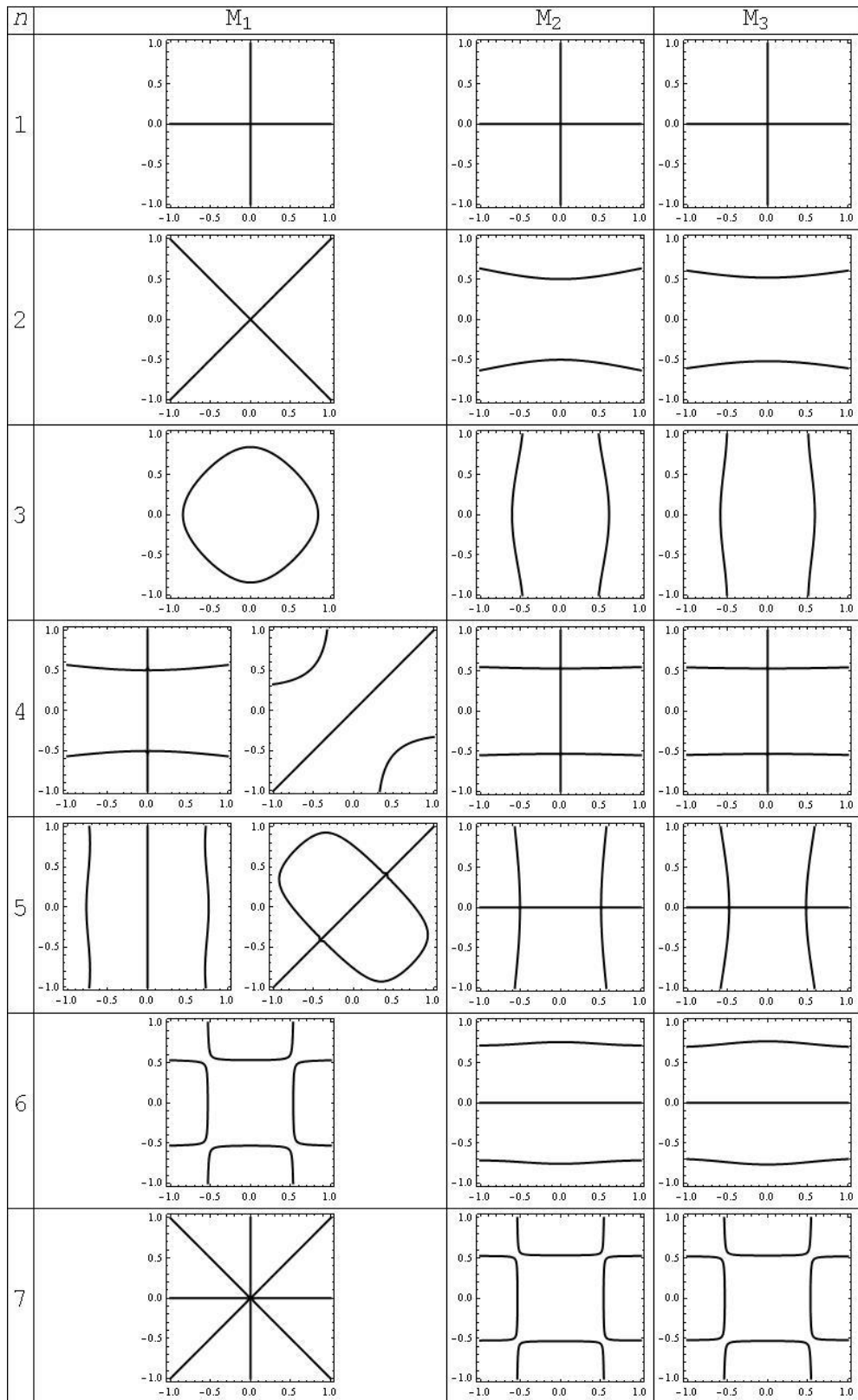
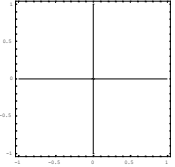
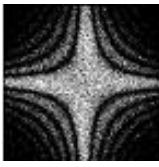
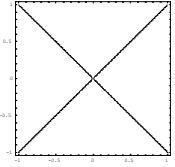

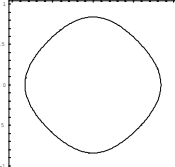
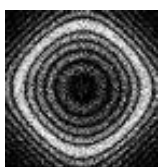
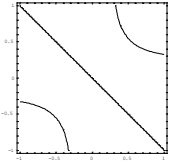
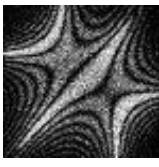
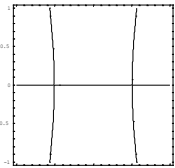
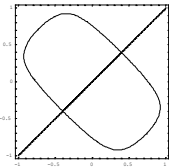
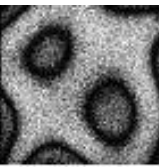
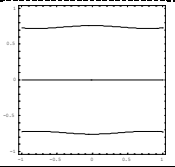
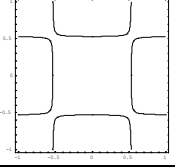
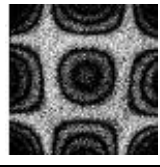
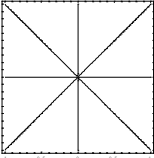

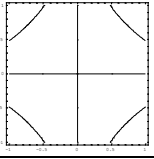
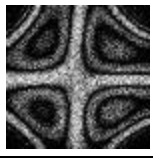
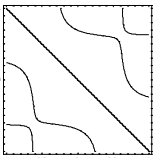
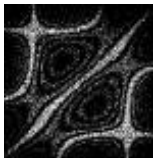
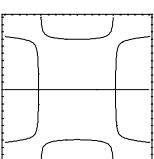
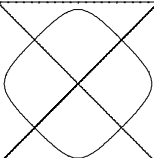

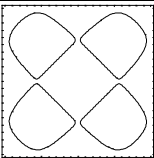

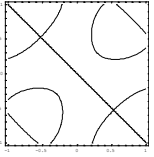
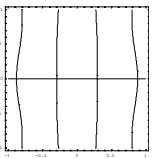
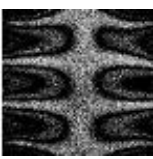
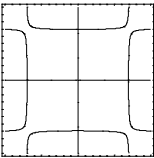
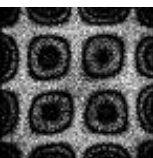
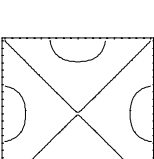



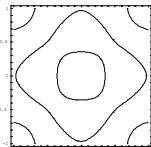

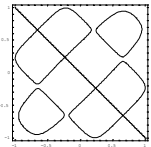
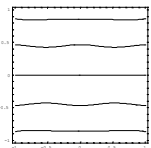
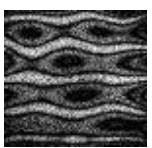
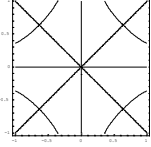

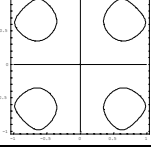
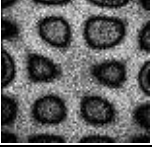
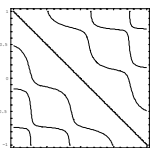
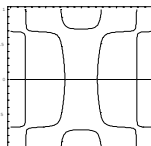
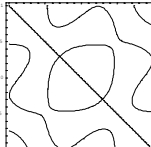
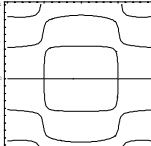

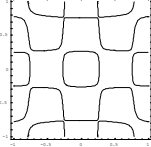

Рис. 3.2. Первые фигуры Хладни для квадратных пластин

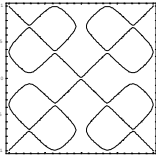
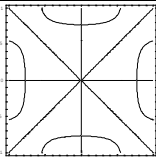
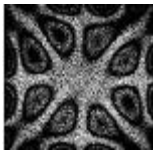
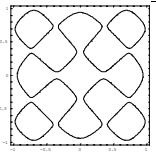
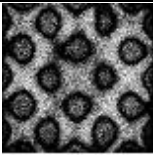
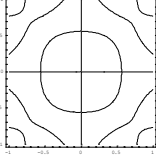

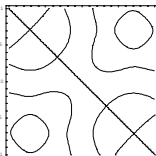
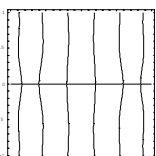
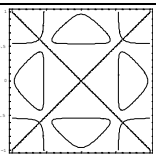
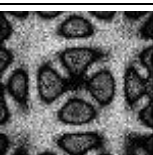


Таблица 3.9. Фигуры Хладни для квадратной пластины  $\nu=0.225$ . Сравнение с экспериментальными данными [187]

$n$	Тип симметрии	Значение собственной частоты	Фигура Хладни	
			Теория	Эксперимент [195]
1	(1,1)	1.878		
2	(0,0)	2.257		
3	(0,0)	2.443		
4	(0,1)	2.999		
				
5	(0,1)	3.916		
				
6	(0,0)	4.051		

7	(1,1)	4.231		
8	(1,1)	4.401		
9	(0,1)	5.198		
				
10	(0,0)	5.441		
11	(0,0)	5.528		
12	(0,1)	5.763		
				
13	(1,1)	6.250		
14	(0,0)	6.422		

15	(0,0)	6.525		
16	(0,1)	7.055		
				
17	(1,1)	7.198		
18	(1,1)	7.319		
19	(0,1)	7.403		
				
20	(0,1)	7.838		
				
21	(0,0)	8.456		

22	(0,0)	8.596		
23	(1,1)	8.613		
24	(0,0)	8.658		
25	(1,1)	8.688		
26	(0,1)	8.786		
				
27	(0,0)	9.223		

### 3.2. Поперечные сложные колебания прямоугольной защемленной пластины

#### 3.2.1. Общее решение уравнения сложных колебаний пластины. Сведение к бесконечной системе линейных уравнений.

Рассмотрим поперечные колебания тонкой прямоугольной ортотропной пластины  $\{(x, y) \in [-a; a] \times [-b; b]\}$  толщины  $h$ , равномерно сжатой в двух направлениях под действием контурных нагрузок  $N_x$  и  $N_y$  в плоскости пластины. Тогда уравнение гибких поперечных колебаний пластины может быть записано относительно прогиба пластины  $w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t}$  в форме (1.1).

Рассмотрим краевые условия жесткого защемления всех сторон пластины:

$$\text{при } x = \pm a : W = 0; \quad \phi_y = \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (3.31)$$

$$\text{при } y = \pm b : W = 0; \quad \phi_x = \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad (3.32)$$

Для построения общего решения уравнения (1.1) используем метод, описанный в разделе 3.1. Следуя данному подходу, общее решение задачи может быть представлено в виде суммы четных и нечетных составляющих по каждой из координат

$$W = W_{00} + W_{01} + W_{10} + W_{11}$$

где  $W_{00}$  является четной по обеим координатам,  $W_{01}$  - четная по  $x$  и нечетная по  $y$ , и т.п.

Разделяя переменные в уравнении (1.1) получаем общее решение в виде суммы тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} W_{kj} = & \sum_{n=1}^{\infty} (A_n H_j(p_{nk}y) + B_n H_j(\bar{p}_{nk}y)) T_k(\tilde{\alpha}_{nk}x) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n H_k(q_{nj}x) + D_n H_k(\bar{q}_{nj}x)) T_j(\tilde{\beta}_{nj}y) \end{aligned} \quad (3.33)$$

где тригонометрические и гиперболические функции в зависимости от типа симметрии обозначены как

$$T_j(z) = \begin{cases} \cos z, & j=0 \\ \sin z, & j=1 \end{cases}; \quad H_j(z) = \begin{cases} \text{ch } z, & j=0 \\ \text{sh } z, & j=1 \end{cases}$$

Константы разделения выбираются в форме, обеспечивающей полноту тригонометрических рядов (3.33) на границе пластины. Это может быть сделано несколькими способами, в частности в форме (3.8), которая использовалась при анализе пластины со свободными краями в п. 3.1. Однако, для полностью защемленной пластины более эффективным является их выбор в форме

$$\tilde{\alpha}_{nj} = \frac{\pi}{a} \left( n - \frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right), \quad \tilde{\beta}_{nj} = \frac{\pi}{b} \left( n - \frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right), \quad (3.34)$$

Величины  $p_{nk}, \bar{p}_{nk}$  и  $q_{hj}, \bar{q}_{hj}$  являются корнями следующих характеристических уравнений

$$D_2 p^4 + (N_y - 2D_3 \tilde{\alpha}^2) p^2 + D_1 \tilde{\alpha}^4 - N_x \tilde{\alpha}^2 - D_1 \Omega^4 = 0, \quad (3.35)$$

$$D_1 q^4 + (N_x - 2D_3 \tilde{\beta}^2) q^2 + D_2 \tilde{\beta}^4 - N_y \tilde{\beta}^2 - D_1 \Omega^4 = 0, \quad (3.36)$$

которые выражаются аналитически как корни биквадратных уравнений

$$p = \sqrt{\frac{2D_3 \tilde{\alpha}^2 - N_y + \sqrt{\mathbf{D}_p}}{2D_2}}, \quad \bar{p} = \sqrt{\frac{2D_3 \tilde{\alpha}^2 - N_y - \sqrt{\mathbf{D}_p}}{2D_2}}, \quad (3.37)$$

$$q = \sqrt{\frac{2D_3 \tilde{\beta}^2 - N_x + \sqrt{\mathbf{D}_q}}{2D_2}}, \quad \bar{q} = \sqrt{\frac{2D_3 \tilde{\beta}^2 - N_x - \sqrt{\mathbf{D}_q}}{2D_2}}. \quad (3.38)$$

где

$$\mathbf{D}_p = (N_y - 2D_3 \tilde{\alpha}^2)^2 - 4D_2 (D_1 \tilde{\alpha}^4 - N_x \tilde{\alpha}^2 - D_1 \Omega^4), \quad (3.39)$$

$$\mathbf{D}_q = (N_x - 2D_3 \tilde{\beta}^2)^2 - 4D_1 (D_2 \tilde{\beta}^4 - N_y \tilde{\beta}^2 - D_1 \Omega^4). \quad (3.40)$$

Дискриминанты (3.39) - (3.40) являются знакопеременными в зависимости от комбинации параметров задачи и констант разделения  $\tilde{\alpha}_{nk}$ ,  $\tilde{\beta}_{nj}$ . В частности для первого из уравнений (3.35) величины  $\bar{p}$  и  $p$  могут быть записаны:

при  $\mathbf{D}_p < 0$  в виде

$$p = \sqrt{\frac{\sqrt{(2D_3 \tilde{\alpha}^2 - N_y)^2 - \mathbf{D}_p} + 2D_3 \tilde{\alpha}^2 - N_y}{4D_2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{(2D_3 \tilde{\alpha}^2 - N_y)^2 - \mathbf{D}_p} - 2D_3 \tilde{\alpha}^2 + N_y}{4D_2}}$$

где  $\bar{p}$  является комплексно-сопряженным к  $p$ ;

при  $\mathbf{D}_p \geq 0$  и  $2D_3 \tilde{\alpha}^2 - N_y < -\sqrt{\mathbf{D}_p}$ , получаем пару чисто мнимых значений

$$p = i \sqrt{\frac{N_y - 2D_3 \tilde{\alpha}^2 - \sqrt{\mathbf{D}_p}}{4D_2}}; \quad \bar{p} = i \sqrt{\frac{N_y - 2D_3 \tilde{\alpha}^2 + \sqrt{\mathbf{D}_p}}{4D_2}},$$

при  $\mathbf{D}_p \geq 0$  и  $-\sqrt{\mathbf{D}_p} \leq 2D_3 \tilde{\alpha}^2 - N_y < \sqrt{\mathbf{D}_p}$ , корнями являются вещественное и чисто мнимое значение

$$p = \sqrt{\frac{2D_3 \tilde{\alpha}^2 - N_y + \sqrt{\mathbf{D}_p}}{4D_2}}; \quad \bar{p} = i \sqrt{\frac{N_y - 2D_3 \tilde{\alpha}^2 + \sqrt{\mathbf{D}_p}}{4D_2}},$$

если же  $\mathbf{D}_p \geq 0$  и  $\sqrt{\mathbf{D}_p} \leq 2D_3 \tilde{\alpha}^2 - N_y$ , оба значения вещественны

$$p = \sqrt{\frac{2D_3 \tilde{\alpha}^2 - N_y + \sqrt{\mathbf{D}_p}}{4D_2}}; \quad \bar{p} = \sqrt{\frac{2D_3 \tilde{\alpha}^2 - N_y - \sqrt{\mathbf{D}_p}}{4D_2}}.$$

Аналогичные формулы получаются и для второго уравнения (3.38).

Относительно величин  $p_{nk}, \bar{p}_{nk}$  и  $q_{hj}, \bar{q}_{hj}$  следует также заметить, что согласно теореме Виета для уравнений (3.37) - (3.38), выражения вида

$$\begin{aligned} D_1(\tilde{\alpha}_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\tilde{\alpha}_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2) &= D_2(\tilde{\beta}_{mj}^2 + p_{nk}^2)(\tilde{\beta}_{mj}^2 + \bar{p}_{nk}^2) = \\ &= D_1\tilde{\alpha}_{nk}^4 + 2D_3\tilde{\alpha}_{nk}^2\tilde{\beta}_{mj}^2 + D_2\tilde{\beta}_{mj}^4 - D_1\Omega^4 \end{aligned} \quad (3.41)$$

обязательно являются действительными.

Таким образом, общее решение (3.33) тождественно удовлетворяет разрешающему уравнению (1.1) и обладает достаточной полнотой для выполнения любых граничных условий.

Выбор констант разделения в форме (3.34) приводит для любого типа симметрии к тождеству

$$T_k(\tilde{\alpha}_{nk}a) = T_j(\tilde{\beta}_{nj}b) = 0,$$

что в случае защемленных краев пластины позволяет выполнить краевые условия (3.31), (3.32) для функции прогиба  $W$  тождественно, если положить, что неопределенные коэффициенты в общем решении связаны соотношениями

$$C_n = -D_n \frac{H_k(\bar{q}_{nj}a)}{H_k(q_{nj}a)}; \quad A_n = -B_n \frac{H_j(\bar{p}_{nk}b)}{H_j(p_{nk}b)}. \quad (3.42)$$

Подстановка соотношений (3.42) в условия на углы поворота  $\phi_y$  и  $\phi_x$  приводит к двум функциональным уравнениям вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{kj}}{\partial x} \Big|_{x=a} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n H_j(\bar{p}_{nk}b) \tilde{\alpha}_{nk} \left( \frac{H_j(\bar{p}_{nk}y)}{H_j(\bar{p}_{nk}b)} - \frac{H_j(p_{nk}y)}{H_j(p_{nk}b)} \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} D_n H_k(\bar{q}_{nj}a) \left( \bar{q}_{nj} \frac{H'_k(\bar{q}_{nj}a)}{H_k(\bar{q}_{nj}a)} - q_{nj} \frac{H'_k(q_{nj}a)}{H_k(q_{nj}a)} \right) T_j(\tilde{\beta}_{nj}y) = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{kj}}{\partial y} \Big|_{y=b} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_j(\bar{p}_{nk}b) \left( \bar{p}_{nk} \frac{H'_j(\bar{p}_{nk}b)}{H_j(\bar{p}_{nk}b)} - p_{nk} \frac{H'_j(p_{nk}b)}{H_j(p_{nk}b)} \right) T_k(\tilde{\alpha}_{nk}x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n D_n H_k(\bar{q}_{nj}a) \tilde{\beta}_{nj} \left( \frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{H_k(\bar{q}_{nj}a)} - \frac{H_k(q_{nj}x)}{H_k(q_{nj}a)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Для определения последовательностей коэффициентов Фурье  $B_n$  и  $D_n$  используем разложения входящих в равенства (3.43), (3.44) гиперболических функций по системам тригонометрических функций. При этом схожесть разложения  $\operatorname{ch} z$  по системе  $\cos \frac{\pi(2n-1)}{2h} z$  и  $\operatorname{sh} z$  по системе  $\sin \frac{\pi n z}{h}$  на отрезке  $z \in [-h; h]$  дает возможность записать эти разложения для всех четырех случаев симметрии вместе

$$\frac{H_j(\bar{p}_{nk}y)}{H_j(\bar{p}_{nk}b)} - \frac{H_j(p_{nk}y)}{H_j(p_{nk}b)} = \frac{2(\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \tilde{\beta}_{mj} T_j(\tilde{\beta}_{mj}y)}{(\tilde{\beta}_{mj}^2 + \bar{p}_{nk}^2)(\tilde{\beta}_{mj}^2 + p_{nk}^2)} \quad (3.45)$$

$$\frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{H_k(\bar{q}_{nj}a)} - \frac{H_k(q_{nj}x)}{H_k(q_{nj}a)} = \frac{2(\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \tilde{\alpha}_{mk} T_k(\tilde{\alpha}_{mk}x)}{(\tilde{\alpha}_{mk}^2 + \bar{q}_{nj}^2)(\tilde{\alpha}_{mk}^2 + q_{nj}^2)}. \quad (3.46)$$

Подстановка разложений (3.45) и (3.46) в функциональные равенства (3.43), (3.44) приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений следующего вида

$$\begin{aligned} Z_{2m-1} &= \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_1}} \frac{2}{\Delta_{1,m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_{nk} Z_{2n}}{(\tilde{\alpha}_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\tilde{\alpha}_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} \\ Z_{2m} &= \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}} \frac{2}{\Delta_{2,m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\beta}_{nj} Z_{2n-1}}{(\tilde{\beta}_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\tilde{\beta}_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} \end{aligned} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.47)$$

относительно неизвестных

$$\begin{aligned} Z_{2m-1} &= \frac{D_1}{a} (-1)^m D_m H_k(\bar{q}_{mj}a)(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2), \\ Z_{2m} &= \frac{\sqrt[4]{D_1 D_2^3}}{b} (-1)^{m+1} B_m H_j(\bar{p}_{mk}b)(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Delta_{1,m} &= \frac{a}{\tilde{\beta}_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} \left( \bar{q}_{mj} \frac{H'_k(\bar{q}_{mj}a)}{H_k(\bar{q}_{mj}a)} - q_{mj} \frac{H'_k(q_{mj}a)}{H_k(q_{mj}a)} \right) \\ \Delta_{2,m} &= \frac{b}{\tilde{\alpha}_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} \left( \bar{p}_{mk} \frac{H'_j(\bar{p}_{mk}b)}{H_j(\bar{p}_{mk}b)} - p_{mk} \frac{H'_j(p_{mk}b)}{H_j(p_{mk}b)} \right). \end{aligned}$$



### 3.2.2. Анализ бесконечной системы. Определение собственных частот и собственных форм колебаний.

В предыдущем разделе краевая задача была сведена к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая может быть записана в канонической форме

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} Z_n \quad (m=1, 2, \dots), \quad (3.48)$$

где

$$M_{2m-1, 2n-1} = 0; \quad M_{2m-1, 2n} = 4 \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \frac{2}{\Delta_{1,m}} \frac{\tilde{\alpha}_{nk}}{(\tilde{\alpha}_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\tilde{\alpha}_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)}$$

$$M_{2m, 2n-1} = 4 \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \frac{2}{\Delta_{2,m}} \frac{\tilde{\beta}_{nj}}{(\tilde{\beta}_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\tilde{\beta}_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)}; \quad M_{2m, 2n} = 0.$$

Для гибких колебаний заземленной пластины оценка регулярности системы (3.48) возможна при помощи дигамма функции  $\psi(z)$ :

$$S_{2m-1} = 4 \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \frac{a}{\pi |\Delta_{1,m}| (\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} \left( \psi \left( \frac{1+k}{2} + \frac{ia\bar{q}_{mj}}{\pi} \right) - \psi \left( \frac{1+k}{2} + \frac{iaq_{mj}}{\pi} \right) + \right. \\ \left. + \psi \left( \frac{1+k}{2} - \frac{ia\bar{q}_{mj}}{\pi} \right) - \psi \left( \frac{1+k}{2} - \frac{iaq_{mj}}{\pi} \right) \right) \quad (3.49)$$

$$S_{2m} = 4 \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \frac{b}{\pi |\Delta_{2,m}| (\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} \left( \psi \left( \frac{1+j}{2} + \frac{ib\bar{p}_{mk}}{\pi} \right) - \psi \left( \frac{1+j}{2} + \frac{ibp_{mk}}{\pi} \right) + \right. \\ \left. + \psi \left( \frac{1+j}{2} - \frac{ib\bar{p}_{mk}}{\pi} \right) - \psi \left( \frac{1+j}{2} - \frac{ibp_{mk}}{\pi} \right) \right). \quad (3.50)$$

Учитывая асимптотику выражений

$$p_{mk} = P\tilde{\alpha}_{mk}; \quad \bar{p}_{mk} = \bar{P}\tilde{\alpha}_{mk}; \quad q_{mj} = Q\tilde{\beta}_{mj}; \quad \bar{q}_{mj} = \bar{Q}\tilde{\beta}_{mj} \quad (m \rightarrow \infty) \quad (3.51)$$

$$\Delta_{1,m} = \frac{a}{(Q + \bar{Q})\tilde{\beta}_{mj}^2}; \quad \Delta_{2,m} = \frac{a}{(P + \bar{P})\tilde{\beta}_{mj}^2} \quad (3.52)$$

где

$$P = \sqrt{\frac{D_3 + \sqrt{D_3^2 - D_1 D_2}}{D_2}}; \quad \bar{P} = \sqrt{\frac{D_3 - \sqrt{D_3^2 - D_1 D_2}}{D_2}},$$

$$Q = \sqrt{\frac{D_3 + \sqrt{D_3^2 - D_1 D_2}}{D_1}}; \quad \bar{Q} = \sqrt{\frac{D_3 - \sqrt{D_3^2 - D_1 D_2}}{D_1}},$$

и поведения дигамма функции

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \dots \quad (z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \pi), \quad (3.53)$$

можно найти, что при увеличении номера ряда в условиях регулярности системы (3.47) стремятся к одному и тому же значению предела

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = \theta. \quad (3.54)$$

Предельная константа  $\theta$  зависит от комбинации упругих констант  $\frac{\sqrt{D_1 D_2}}{D_3} = t$

следующим образом

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{t} \ln \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{1 - \sqrt{1-t^2}}}{\pi \left( \sqrt{1 + \sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1 - \sqrt{1-t^2}} \right)}, & 0 < t \leq 1 \\ \frac{\sqrt{2t} \operatorname{arctg} \sqrt{t^2 - 1}}{\pi \sqrt{t - 1}}, & t > 1 \end{cases} \quad (3.55)$$

При этом данная элементарная функция монотонно возрастает при  $t \rightarrow \infty$  и стремится к  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (рис. 3.3).

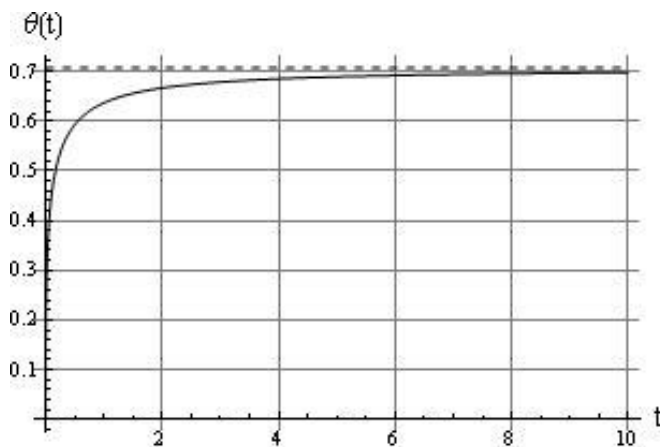


Рис. 3.3 Предельная константа  $\theta$  в условиях регулярности как функция от

$t = \frac{\sqrt{D_1 D_2}}{D_3}$  для сложных колебаний защемленной пластины

Таким образом, при любой комбинации параметров задачи для бесконечной системы (3.47) всегда найдется номер  $N_R$ , начиная с которого при  $m > N_R$  будет справедливой оценка (2.5). То есть полученная бесконечная система для гибких колебаний заземленной пластины является квазирегулярной. На рис. 3.4 показана зависимость  $N_R = N_R(\Omega)$  для заземленной изотропной квадратной пластины при отсутствии нагрузок в плоскости пластины  $N_x = N_y = 0$ .

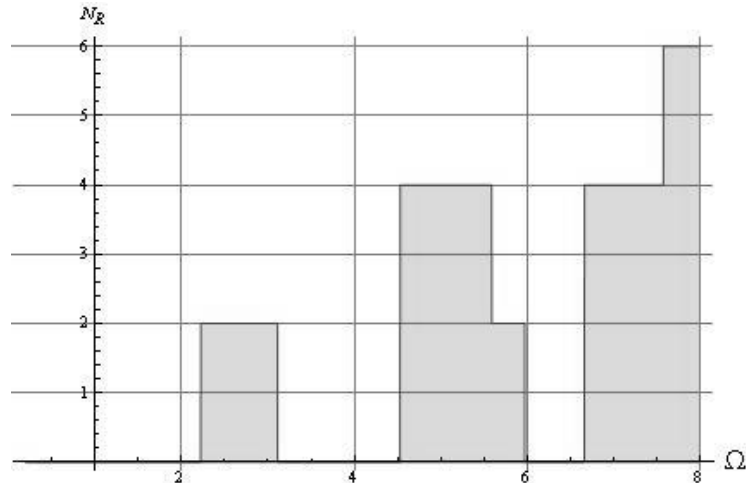


Рис.3.4 Зависимость  $N_R(\Omega)$  для квадратной заземленной изотропной пластины ( $k = j = 0$ )

Можно заметить, что аналогично случаю пластины со свободными краями, на части частотного диапазона система является вполне регулярной, т.е.  $N_R = 0$ . Очевидно, что здесь собственные частоты пластины отсутствуют. При помощи представленного во второй главе диссертации критерия (2.46) можно значительно сузить те интервалы, где возможно наличие собственных частот пластины. Процесс локализации собственных частот представлен на рис. 3.5, где можно увидеть, что область  $T_N(\Omega) < 0$  уменьшается при увеличении номера  $N$ . Для  $N = 2$  (рис. 3.5а) критерий (2.46) позволяет получить лишь достаточно широкие интервалы для первой и второй собственных частот, в то время как при  $N = 4$  (рис. 3.5b) и  $N = 10$  (рис. 3.5c) наблюдаются уже достаточно малые интервалы для всех первых собственных частот. Рис. 3.5d показывает в большем масштабе, что близкие собственные частоты также могут быть локализованы при помощи (2.46).

Таким образом, первые собственные частоты оказываются локализованы в некоторых интервалах. Нижняя и верхняя границы этих интервалов могут быть сделаны настолько близкими, что первые значащие цифры совпадают. В табл. 3.10 представлен процесс локализации собственных частот колебаний пластины на основе критерия (3.51) в сравнении с результатами [188] для мод симметричных по обеим осям ( $k=j=0$ ). Можно заметить точное соответствие полученных результатов с известными результатами.

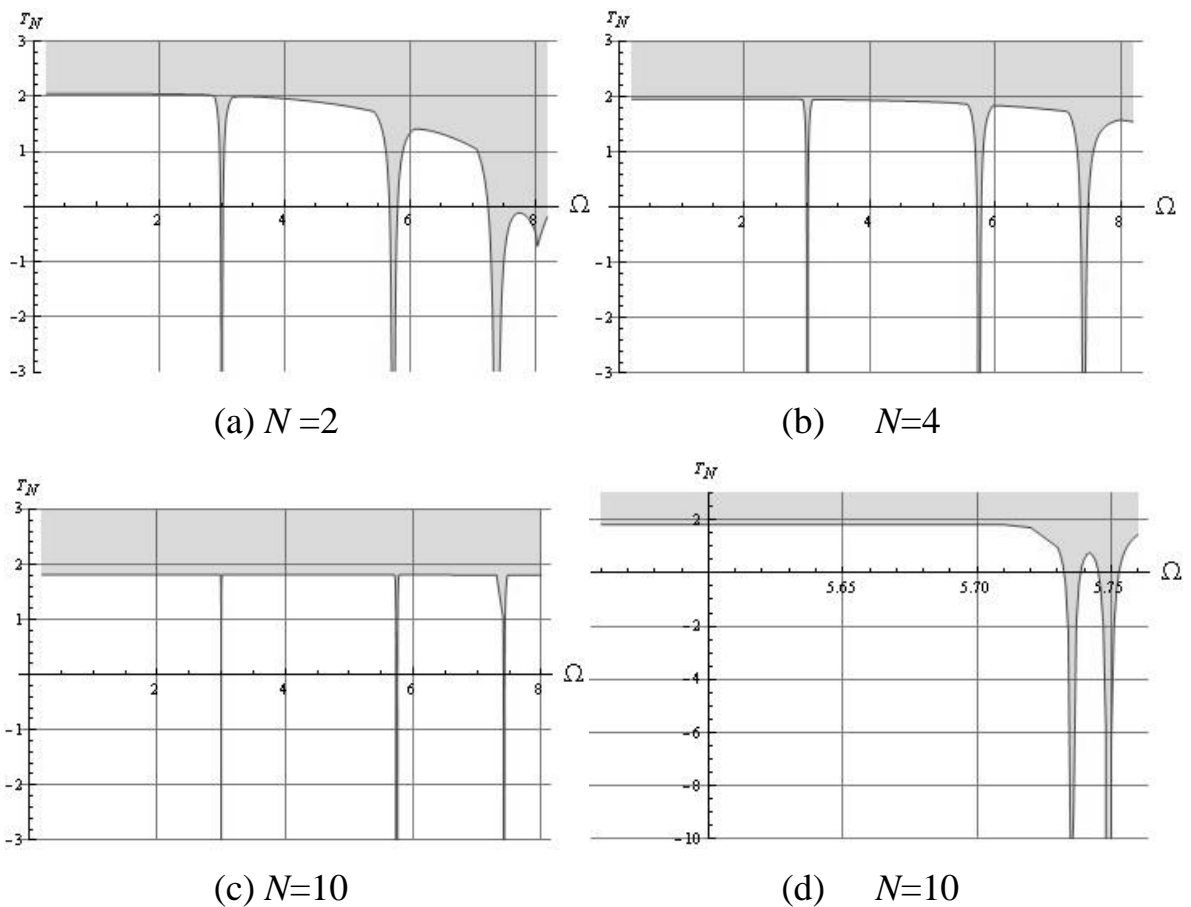


Рис. 3.5 Локализация первых собственных частот симметричных по обеим осям колебаний ( $k=j=0$ ) защемленной квадратной изотропной пластины

Используя разложение квазирегулярной бесконечной системы (3.42) согласно (2.29) – (2.33) на совокупность вполне регулярных бесконечных систем и одну конечную систему, можно найти асимптотику нетривиального ограниченного решения данной системы таким же образом, что и при анализе пластины со свободными краями в разделе 3.1. Действительно, в этом случае замена вида

Таблица 3.10. Локализация первых трех собственных частот для мод симметричных по обеим осям ( $k = j = 0$ ) в случае заземленной изотропной квадратной пластины

Номер частоты	$N$	4	10	20	40	[188]
1	Нижняя граница	2.980	2.996	2.9991	2.9993	2.9994
	Верхняя граница	3.019	3.004	2.9997	2.9995	
2	Нижняя граница	5.674	5.732	5.7347	5.7353	5.7354
	Верхняя граница	5.813	5.739	5.7361	5.7357	
3	Нижняя граница	5.674	5.746	5.7480	5.7488	5.7490
	Верхняя граница	5.813	5.752	5.7500	5.7493	

$$Z_m = \sum_{l=1}^{N_R} \chi_m^l Z_l \quad (m > N_R) \quad (3.56)$$

приводит бесконечную систему (3.47) к совокупности вполне регулярных бесконечных систем относительно  $\{\chi_m^l\}_{m=N_R+1}^{\infty}$  ( $l = 1, 2, \dots, N_R$ ) с одинаковой матрицей:

$$\chi_m^l = \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} \chi_n^l + M_{ml}, \quad (m = N_R + 1, N_R + 2, \dots) \quad (3.57)$$

Так как предельная константа  $\theta$  в (3.54) строго меньше единицы, то из ограниченности  $M_{ml}$ , выступающих в роли свободных членов (3.57), следует, что каждая из систем (3.57) имеет единственное ограниченное решение. Таким образом, вопрос о существовании ограниченного решения для исходной квазирегулярной системы (3.47) сводится к вопросу существования решения у конечной системы относительно первых неизвестных  $\{Z_m\}_{m=1}^{N_R}$ :

$$Z_m = \sum_{n=1}^{N_R} Q_{mn}^C Z_n, \quad (m = 1, 2, \dots, N_R) \quad (3.58)$$

где  $Q_{mn}^C = M_{mn} + \sum_{l=N_R+1}^{\infty} M_{ml} \chi_l^n$ .

Равенство нулю определителя конечной системы (3.58) также дает дисперсионное уравнение для определения собственных частот пластины:

$$\det \|\delta_{mn} - Q_{mn}^C\| = 0 \quad (3.59)$$

Найдем аналитически асимптотику решений систем (3.57). С этой целью проведем замену переменных вида

$$\chi_{2m-1}^l = D_1^4 \tilde{\beta}_{mj}^{-1} y_m^l; \quad \chi_{2m}^l = D_2^4 \alpha_{mk}^{-1} x_m^l. \quad (3.60)$$

Тогда преобразованные системы (3.52) принимают вид ( $2N_r = N_R$ ;  $m = N_r + 1, N_r + 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} y_m^l &= \frac{2\tilde{\beta}_{mj}}{\Delta_{1,m}} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{x_n^l}{(\tilde{\alpha}_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\tilde{\alpha}_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} + \frac{M_{2m-1,l} \tilde{\beta}_{mj}}{D_1^{1/4}}, \\ x_m^l &= \frac{2\tilde{\alpha}_{mk}}{\Delta_{2,m}} \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{y_n^l}{(\tilde{\beta}_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\tilde{\beta}_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} + \frac{M_{2m,l} \tilde{\alpha}_{mk}}{D_2^{1/4}} \end{aligned} \quad (3.61)$$

и удовлетворяют представленному во второй главе диссертации обобщению закона асимптотических выражений (теорема 2.7) при

$$r_n^{(1)} = r_n^{(2)} = 1; \quad \xi_m^{(1)} = \beta_{mj}; \quad \xi_m^{(2)} = \alpha_{mk}. \quad (3.62)$$

Действительно, используя известные значения рядов [115]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + z^2} = \frac{\pi}{4z} \operatorname{th} \frac{\pi z}{2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{\pi}{2z} \operatorname{cth} \pi z + \frac{1}{2z^2}$$

можно получить, в введенных выше обозначениях, следующие формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\alpha}_{nk}^2 + q^2} = \frac{a}{2q} \cdot \frac{H'_k(qa)}{H_k(qa)} - \frac{\delta_{k1}}{2q^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\beta}_{nk}^2 + p^2} = \frac{b}{2p} \cdot \frac{H'_j(pb)}{H_j(pb)} - \frac{\delta_{j1}}{2p^2}.$$

Тогда для системы (3.61) ряды в условиях регулярности можно вычислить точно

$$S_{2m-1}^{N_r} = 2\tilde{\beta}_{mj}^2 \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \frac{\frac{H'_k(\bar{q}_{mj}a)}{\bar{q}_{mj}H_k(\bar{q}_{mj}a)} - \frac{H'_k(q_{mj}a)}{q_{mj}H_k(q_{mj}a)} + \frac{\delta_{k1}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)}{aq_{mj}^2\bar{q}_{mj}^2}}{\frac{q_{mj}H'_k(\bar{q}_{mj}a)}{H_k(\bar{q}_{mj}a)} - \frac{\bar{q}_{mj}H'_k(q_{mj}a)}{H_k(q_{mj}a)}} - \frac{2\tilde{\beta}_{mj}}{|\Delta_{1,m}|} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \sum_{n=1}^{N_r} \frac{1}{(\tilde{\alpha}_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\tilde{\alpha}_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)},$$

$$S_{2m}^{N_r} = 2\tilde{\alpha}_{mk}^2 \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \frac{\frac{H'_j(\bar{p}_{mk}b)}{\bar{p}_{mk}H_j(\bar{p}_{mk}b)} - \frac{H'_j(p_{mk}b)}{p_{mk}H_j(p_{mk}b)} + \frac{\delta_{jl}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)}{bp_{mk}^2\bar{p}_{mk}^2}}{\frac{p_{mk}H'_j(\bar{p}_{mk}b)}{H_j(\bar{p}_{mk}b)} - \frac{\bar{p}_{mk}H'_j(p_{mk}b)}{H_j(p_{mk}b)}}} - \frac{2\tilde{\alpha}_{mk}}{|\Delta_{2,m}|} \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \sum_{n=1}^{N_r} \frac{1}{(\tilde{\beta}_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\tilde{\beta}_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)}.$$

Переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получаем, что значения рядов стремятся к единице,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m^{N_r} = 1,$$

т.е. выполняется условие (2.28) и согласно оценкам (3.62) системы (3.61) имеют общий ненулевой предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m^l = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m^l = K_l > 0. \quad (3.63)$$

Таким образом, согласно формуле замены (3.56), для нетривиального решения однородной квазирегулярной бесконечной системы (3.47) выполняется следующий асимптотический закон

$$Z_{2m-1} = \frac{\tilde{K}D_1^{\frac{1}{4}}}{\tilde{\beta}_{mj}}; \quad Z_{2m} = \frac{\tilde{K}D_2^{\frac{1}{4}}}{\tilde{\alpha}_{mk}} \quad (m \rightarrow \infty). \quad (3.64)$$

Известное асимптотическое поведение  $Z_m$  позволяет найти нетривиальное решение данной бесконечной системы при помощи метода улучшенной редукции (см. раздел 2.1) и построить собственные формы колебаний пластины с защемленными краями.

### 3.2.3. Численные результаты.

На основе представленной теории был разработан алгоритм вычисления собственных частот и собственных форм колебаний пластины, который был программно реализован в пакете Mathematica. В табл. 3.11 показаны первые 10 собственных частот полностью защемленной графит - эпоксидной ортотропной пластины со следующими значениями упругих постоянных

$$D_1 = 123.885 \cdot 10^{-6} \text{ GPa} \cdot \text{м}^3, D_2 = 7.031 \cdot 10^{-6} \text{ GPa} \cdot \text{м}^3 \text{ и } D_3 = 11.702 \cdot 10^{-6} \text{ GPa} \cdot \text{м}^3,$$

наряду с данными, полученными методом «dual separation of variables» [228], и методом конечных элементов [223]. Для удобства сравнения в таблице

представлен частотный параметр  $\gamma = 2a\Omega$ . Можно заметить, что все три подхода дают очень близкие результаты.

В табл. 3.12 даны собственные частоты квадратной изотропной пластины с защемленными краями под действием гидростатического давления  $N_H$ , вычисленные согласно представленному в диссертации подходу рядом с аналогичными результатами А. Weinstein и W.Z. Chien [226], а также М. Trubert и W.A. Nash [222]. Заметим, что [226] использовали вариационный метод для определения нижней границы собственной частоты и классический метод Рэлея - Ритца для вычисления верхней оценки. В [222] использовался метод возмущений для определения собственных частот. Снова можно увидеть полное соответствие всех результатов. Тем не менее, представленный подход позволяет найти настолько близкие нижние и верхние оценки для собственных значений, что позволяет фактически определить их первые значащие цифры.

На основе предложенного в диссертации метода было проведено исследование зависимости первых пяти собственных частот квадратной ортотропной защемленной пластины при варьировании свойств материала и значений сил  $N_x$  и  $N_y$  в плоскости пластины. Данные результаты представлены в табл. 3.13 – 3.16, при этом табл. 3.13 соответствует изотропному материалу, для которого упругие константы равны  $D_1 = D_2$ ;  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ , в то время как в табл. 3.14 - 3.16 даны собственные частоты для ортотропной пластины при разных значениях упругих констант. Можно увидеть, что увеличение значений сил  $N_x$  и  $N_y$  в любой комбинации приводит к уменьшению значений собственных частот колебаний пластины.

Таблица 3.11 Значения  $\gamma = 2a\Omega$  для защемленной графит - эпоксидной пластины ( $a = 1 м$ ,  $b = 1.2 м$ ,  $h = 0.02 м$ )

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Симметрия ( $k, j$ )	(0, 0)	(0, 1)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
Критерий (2.46)	4.806	5.103	5.704	6.573	7.613	7.896	8.039	8.321	8.746	8.773
DSV [228]	4.80	5.08	5.68	6.56	7.60	7.89	8.03	8.31	8.74	8.76
МКЭ [223]	4.81	5.10	5.70	6.57	7.62	7.90	8.04	8.32	8.75	8.77



Таблица 3.12 Собственные частоты  $\lambda = 4\Omega^2$  для квадратной изотропной пластины с защемленными краями под действием гидростатического давления  $N_x = N_y = -4N_H$

$\frac{a^2 N_H}{\pi^2 D}$	Нижняя граница [226]	Верхняя граница [226]	[223]	Критерий (2.46)
5	49.580	49.847	49.628	49.581
10	59.922	60.392	60.019	59.926
15	68.580	69.271	68.566	68.585
20	76.124	77.088	-	76.171
30	89.268	90.656	-	89.272
50	110.60	112.90	-	110.59
100	148.26	154.98	-	150.55
200	207.79	215.69	-	207.73

Таблица 3.13 Первые пять собственных частот  $\Omega = \sqrt[4]{\omega^2 h \rho / D_1}$  для защемленной квадратной пластины при  $D_1 = D_2$ ;  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ , сжатой нагрузками  $N_x$  и  $N_y$  в плоскости пластины

$n$	$N_x = N_y = 0$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.2$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.5$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = 1$ $N_y = 0$	$N_x = 0$ $\frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 1$
1	2.999	2.883	2.673	2.668	2.668
2	4.284	4.191	4.038	3.865	3.865
3	5.201	5.121	4.992	4.189	4.189
4	5.735	5.662	5.545	4.992	4.992
5	5.749	5.677	5.563	5.388	5.388

Во всех рассмотренных случаях первая собственная частота (фундаментальная собственная частота) всегда достигается для симметричных по обеим осям мод, с одним лишь исключением, когда  $\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.5$  в результатах табл. 3.16. Это можно пояснить близостью нагрузок в плоскости пластины к критическим значениям сил, при которых пластина теряет устойчивость. Как следствие, здесь первая собственная частота достигается для моды симметричной в направлении оси  $OX$  и кососимметричной в направлении оси  $OY$ .

Таблица 3.14 Первые пять собственных частот  $\Omega = \sqrt[4]{\omega^2 h \rho / D_1}$  для заземленной квадратной пластины при  $D_1 = 2D_2$ ;  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ , сжатой нагрузками  $N_x$  и  $N_y$  в плоскости пластины

$n$	$N_x = N_y = 0$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.2$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.5$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = 1$ $N_y = 0$	$N_x = 0$ $\frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 1$
1	2.782	2.632	2.338	2.328	2.323
2	3.753	3.611	3.359	3.606	3.029
3	4.164	4.063	3.894	3.698	4.062
4	4.816	4.713	4.546	4.543	4.312
5	4.928	4.811	4.616	4.868	4.546

Таблица 3.15 Первые пять собственных частот  $\Omega = \sqrt[4]{\omega^2 h \rho / D_1}$  для заземленной квадратной пластины при  $D_1 = 3D_2$ ;  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ , сжатой нагрузками  $N_x$  и  $N_y$  в плоскости пластины

$n$	$N_x = N_y = 0$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.2$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.5$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = 1$ $N_y = 0$	$N_x = 0$ $\frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 1$
1	2.689	2.521	2.170	2.157	2.128
2	3.499	3.321	2.979	3.314	2.432
3	4.115	4.009	3.833	3.625	3.639
4	4.525	4.371	4.103	4.333	4.009
5	4.643	4.528	4.337	4.447	4.339

Таблица 3.16 Первые пять собственных частот  $\Omega = \sqrt[4]{\omega^2 h \rho / D_1}$  для заземленной квадратной пластины при  $D_1 = 10D_2$ ;  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ , сжатой нагрузками  $N_x$  и  $N_y$  в плоскости пластины

$n$	$N_x = N_y = 0$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.2$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.5$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = 1$ $N_y = 0$	$N_x = 0$ $\frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 1$
1	2.517	2.305	1.407	1.743	1.533
2	2.960	2.638	1.671	2.614	2.877
3	3.606	3.272	2.405	3.439	3.894
4	4.021	3.909	3.407	3.483	3.901
5	4.299	4.055	3.717	3.888	4.364

### 3.3. Устойчивость прямоугольной защемленной пластины

#### 3.3.1. Алгоритм вычисления критических сил.

Полученное в предыдущем диссертации решение задачи о сложных колебаниях защемленной ортотропной пластины позволяет исследовать проблему статической устойчивости пластины как вырожденный случай  $\Omega=0$ . При этом, алгоритм вычисления собственных значений и форм колебаний для системы (3.47) остается неизменным.

Проиллюстрируем предложенный в диссертации подход на примере классической задачи о защемленной изотропной тонкой пластине  $(x, y) \in \{[-a; a] \times [-b; b]\}$ , равномерно сжатой усилиями  $N_x$  и  $N_y$  в своей плоскости. Общее решение для форм потери устойчивости (3.28) принимает вид

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \operatorname{ch} p_n b \left( \frac{\operatorname{ch} p_n y}{\operatorname{ch} p_n b} - \frac{\operatorname{ch} \bar{p}_n y}{\operatorname{ch} \bar{p}_n b} \right) \cos \tilde{\alpha}_n x + B_n \operatorname{ch} q_n a \left( \frac{\operatorname{ch} q_n x}{\operatorname{ch} q_n a} - \frac{\operatorname{ch} \bar{q}_n x}{\operatorname{ch} \bar{q}_n a} \right) \cos \tilde{\beta}_n y \right\}. \quad (3.65)$$

Здесь  $\tilde{\alpha}_n = (n-1/2)\pi/a$ ,  $\tilde{\beta}_n = (n-1/2)\pi/b$ ; величины  $p_n, \bar{p}_n, q_n, \bar{q}_n$  являются корнями характеристических уравнений ( $Q = N_x / D$ ;  $P = N_y / D$ ):

$$p_n = \sqrt{\tilde{\alpha}_n^2 - P/2 + \sqrt{(Q-P)\tilde{\alpha}_n^2 + P^2/4}}, \quad q_n = \sqrt{\tilde{\beta}_n^2 - Q/2 + \sqrt{(P-Q)\tilde{\beta}_n^2 + Q^2/4}},$$

$$\bar{p}_n = \sqrt{\tilde{\alpha}_n^2 - P/2 - \sqrt{(Q-P)\tilde{\alpha}_n^2 + P^2/4}}, \quad \bar{q}_n = \sqrt{\tilde{\beta}_n^2 - Q/2 - \sqrt{(P-Q)\tilde{\beta}_n^2 + Q^2/4}}.$$

Подстановка решения (3.65) в краевые условия приводит к бесконечной системе однородных линейных алгебраических уравнений (3.47), которую в исследуемом случае можно представить в виде

$$Z_{2m-1} \Delta_{1,m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\tilde{\alpha}_n Z_{2n}}{(\tilde{\alpha}_n^2 + q_m^2)(\tilde{\alpha}_n^2 + \bar{q}_m^2)}; \quad (m=1,2,\dots) \quad (3.66)$$

$$Z_{2m} \Delta_{2,m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\tilde{\beta}_n Z_{2n-1}}{(\tilde{\beta}_n^2 + p_m^2)(\tilde{\beta}_n^2 + \bar{p}_m^2)}$$

где  $Z_{2n-1} = B_n \frac{(-1)^n}{a} (q_n^2 - \bar{q}_n^2) \operatorname{ch} q_n a$ ,  $Z_{2n} = A_n \frac{(-1)^{n+1}}{b} (p_n^2 - \bar{p}_n^2) \operatorname{ch} p_n b$ ,

$$\frac{\Delta_{1,m}}{a} = \frac{q_m \operatorname{th} q_m a - \bar{q}_m \operatorname{th} \bar{q}_m a}{\tilde{\beta}_m (q_m^2 - \bar{q}_m^2)}; \quad \frac{\Delta_{2,m}}{b} = \frac{p_m \operatorname{th} p_m b - \bar{p}_m \operatorname{th} \bar{p}_m b}{\tilde{\alpha}_m (p_m^2 - \bar{p}_m^2)}.$$

или в каноническом виде

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn}(P, Q) Z_n \quad (m=1, 2, \dots). \quad (3.67)$$

Локализацию значений критических сил из системы (3.67) можно провести аналогично тому, как это делалось в предыдущих разделах диссертации при вычислении собственных частот. Так, если в некоторой области параметров  $(P, Q)$  система (3.67) является вполне регулярной, то есть найдется такая константа  $\theta \in (0, 1)$ , что все ряды из абсолютных значений коэффициентов (3.67) удовлетворяют неравенствам

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}(P, Q)| \leq \theta < 1,$$

то существует [53] единственное ограниченное решение системы, которое в силу однородности системы является тривиальным  $Z_m \equiv 0$ . Очевидно, что в такой области параметров не могут находиться значения критических сил. Сузить область параметров, содержащую значения критических сил, можно на основе проверки достаточного условия (2.46):

$$T_N(P, Q) > 0 \quad (3.68)$$

Ряды в условиях регулярности вычисляются точно при помощи дигамма функции  $\psi(z)$ :

$$S_{2m-1} = \frac{a(\psi(1/2 + iaq_m/\pi) - \psi(1/2 + ia\bar{q}_m/\pi) + \psi(1/2 - iaq_m/\pi) - \psi(1/2 - ia\bar{q}_m/\pi))}{|\Delta_{1,m}| \pi(q_m^2 - \bar{q}_m^2)},$$

$$S_{2m} = \frac{b(\psi(1/2 + ibp_m/\pi) - \psi(1/2 + ib\bar{p}_m/\pi) + \psi(1/2 - ibp_m/\pi) - \psi(1/2 - ib\bar{p}_m/\pi))}{|\Delta_{2,m}| \pi(p_m^2 - \bar{p}_m^2)}, \quad (3.69)$$

Тогда переходя к пределу в (3.69), получаем для любых значений  $P$  и  $Q$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \frac{2}{\pi}.$$

Таким образом, система (3.67) удовлетворяет условиям регулярности, начиная с некоторого номера  $m > N_R$ , то есть является квазирегулярной.

Реализация условия (3.68) сводится к аналитическому суммированию рядов из условий регулярности, что в рассматриваемом случае дается формулами (3.69), и обращению конечной матрицы порядка  $N$ .



Таблица 3.17 Локализация значений критических сил в случае одноосного сжатия для защемленной изотропной пластины

$N$	4	10	20	30	50
$(b/\pi)^2 Q$	2.456 - 2.586	2.507 - 2.530	2.515 - 2.522	2.517 - 2.520	2.518

Из таблицы следует критическое значение  $Q_C = 2.518(\pi/a)^2$ . По приближенной формуле для критических значений нагрузок

$$Q + P = \frac{8}{3} \pi^2 / a^2, \quad (3.70)$$

приведенной в справочнике [114], ему соответствует  $Q_0 = 2.667(\pi/a)^2$ . Там же представлено уточненное значение  $Q_1 = 2.517(\pi/a)^2$ , которое отлично согласуется с найденным значением.

Аппроксимация кривой на рис. 3.6 (D) позволяет предложить вместо приближенной зависимости (3.70) уточненную зависимость между критическими значениями параметров нагрузки при двухосном сжатии квадратной пластины

$$Q + P + 0.0211 \frac{a^2}{\pi^2} (Q - P)^2 = 2.652 \frac{\pi^2}{a^2}. \quad (3.71)$$

Более детальное сравнение вычисленных значений критических нагрузок  $(b/\pi)^2 Q_C$  с соответствующими приближенными значениями [114] представлено в таблице 3.18. Можно увидеть, что представленное решение хорошо согласуется с известными результатами.

Таблица 3.18 Сравнение вычисленных значений критических сил для защемленной квадратной пластины с данными [114]

$P/Q$	0	0.25	0.5	0.75	1.0
$(b/\pi)^2 Q_C$	2.518	2.082	1.758	1.514	1.326
$(b/\pi)^2 Q_0$	2.667	2.133	1.777	1.524	1.333
$\delta(\%)$	5.9	2.5	1.1	0.7	0.5

Для определения формы потери устойчивости остается с учетом найденных значений критических нагрузок  $P_C$  и  $Q_C$  выполнить численные оценки нетривиального ограниченного решения квазирегулярной бесконечной системы

(3.69) и воспользоваться аналитическим представлением прогиба в форме бесконечного ряда (3.65).

### 3.3.2. Построение форм потери устойчивости.

Для построения собственных форм на найденных значениях критических сил  $P_C$  и  $Q_C$  используем декомпозицию бесконечной системы (3.67) на совокупность вполне регулярных бесконечных систем и конечную при помощи замены

$$Z_m = \sum_{j=1}^{N_R} \chi_m^j Z_j \quad (m \geq N_R + 1), \quad (3.72)$$

где коэффициенты  $\xi_m^j$  удовлетворяют следующим системам:

$$\chi_m^j = \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} \chi_n^j + M_{mj} \quad (m \geq N_R + 1; j = 1, 2, \dots, N_R). \quad (3.73)$$

Как можно увидеть, свободные члены этих систем формируются первыми  $N_R$  столбцами матрицы  $M_{mn}$ . Системы (3.73) удовлетворяют теореме 2.2 существования ограниченного решения системы. Из вполне регулярности этих систем следует также единственность этих ограниченных решений. После того как значения  $\{\chi_m^j\}$  найдены из систем (3.73), из нерегулярной части ( $1 \leq m \leq N_R$ ) бесконечной системы (3.67) получаем однородную конечную систему уравнений:

$$Z_m = \sum_{n=1}^{N_R} \left( M_{mn} + \sum_{j=N_R+1}^{\infty} M_{mj} \chi_j^n \right) Z_n \quad (m = 1, 2, \dots, N_R). \quad (3.74)$$

Система (3.74) на критических значениях нагрузок  $P = P_C$  и  $Q = Q_C$  имеет нетривиальное решение, которое позволяет построить форму потери устойчивости пластины. Точность данного подхода напрямую зависит от точности решения вполне регулярных систем (3.73). Чтобы сделать их решение эффективным, проведем замену  $\chi_{2m-1}^j = Z_{2m-1}^j / \tilde{\beta}_m$ ;  $\chi_{2m}^j = Z_{2m}^j / \tilde{\alpha}_m$  ( $m \geq N_r + 1$ ;  $N_R = 2N_r$ ), после чего системы (3.73) удовлетворяют достаточным условиям существования ненулевого предела у решения (теорема 2.7). Заметим, что данные рассуждения фактически повторяют выкладки, представленные в предыдущем разделе диссертации 3.2.2. Таким образом, асимптотика решений (3.73) имеет вид

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \chi_{2m-1}^j \tilde{\beta}_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \chi_{2m}^j \tilde{\alpha}_m = K_j \quad (3.75)$$

что позволяет применить для нахождения нетривиального решения бесконечной системы (3.67) метод улучшенной редукции.

### 3.3.3 Численные результаты и сравнение с приближенными решениями.

Представленный алгоритм дает возможность получить аналитическое решение поставленной задачи и провести сравнение с решениями, полученными на основе энергетических методов. В частности для одноосного сжатия пластины [3, 114] отмечается, что с увеличением отношения сторон  $b/a$  увеличивается погрешность приближенной формулы

$$N_x + \frac{a^2}{b^2} N_y = \frac{\pi^2 D}{3b^2} \left( \frac{3b^2}{a^2} + \frac{3a^2}{b^2} + 2 \right) \quad (3.76)$$

так как форма потери устойчивости  $w(x, y)$  оказывается существенно отличающейся от формы

$$w_0 = (1 - \cos \pi(x/a - 1))(1 - \cos \pi(y/b - 1)) \quad (3.77)$$

Там же отмечается, что с увеличением  $b/a$  у формы потери устойчивости растет число выпучин. При  $1.1 < a/b < 2$  согласно [3] наблюдается две выпучины, при  $2 < a/b \leq 2.7$  три выпучины и т.д.

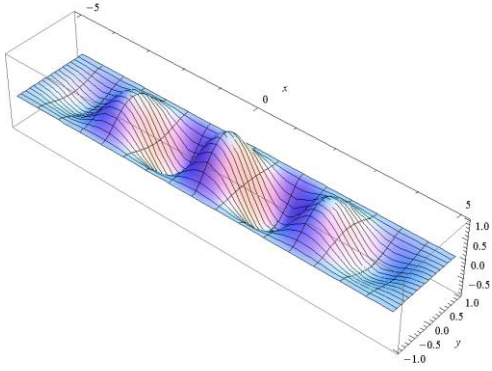
Проведем сравнение критических сил  $(b/\pi)^2 Q_1$  представленных [3, 114] и найденных значений  $(b/\pi)^2 Q_C$  по описанному в разделе 3.3.1 алгоритму (табл. 3.19). Согласно данным табл. 3.19, значения критических сил отличаются очень незначительно практически для любого соотношения сторон.

Таблица 3.19 Критические силы  $Q$  при одноосном сжатии  $P_C = 0$ .

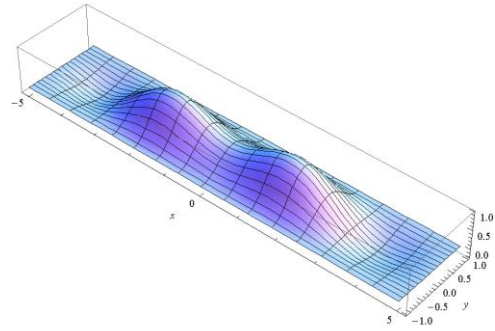
$b/a$	1/5	1/3	1/2	1	2
$(b/\pi)^2 Q_C$	1.779	1.867	1.965	2.518	1.209
$(b/\pi)^2 Q_1$	1.750	1.840	1.970	2.517	1.229
$\delta$ (%)	2.0	1.5	0.2	0.03	1.6

Построим формы потери устойчивости для случая одноосного сжатия пластины и для случая двухосного сжатия пластины равными силами (рис. 3.7).

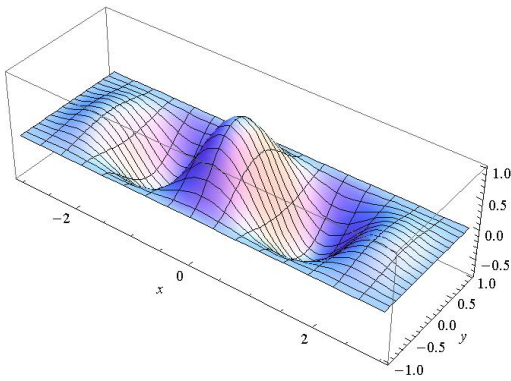




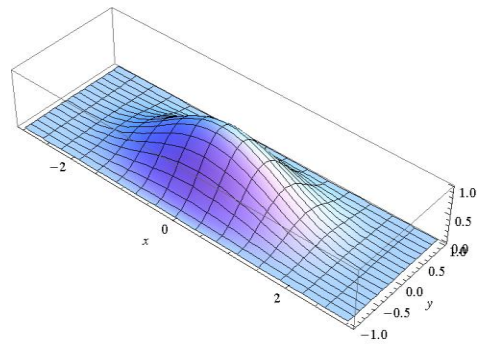
a)  $b/a = 1/5, (b/\pi)^2 Q_C = 1.779, P_C = 0$



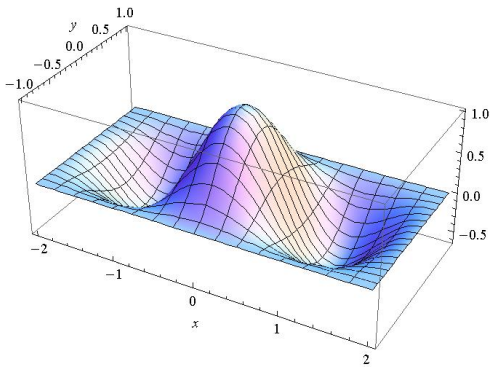
b)  $b/a = 1/5, (b/\pi)^2 Q_C = 0.986, P_C = Q_C$



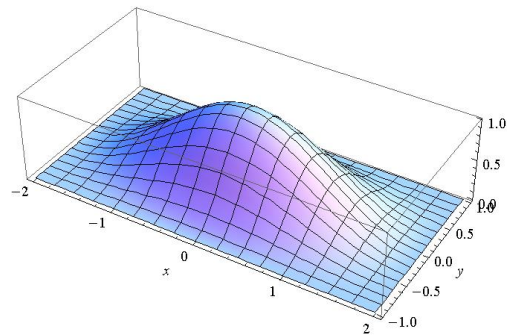
c)  $b/a = 1/3, (b/\pi)^2 Q_C = 1.867, P_C = 0$



d)  $b/a = 1/3, (b/\pi)^2 Q_C = 0.973, P_C = Q_C$



e)  $b/a = 1/2, (b/\pi)^2 Q_C = 1.965, P_C = 0$



f)  $b/a = 1/2, (b/\pi)^2 Q_C = 0.981, P_C = Q_C$

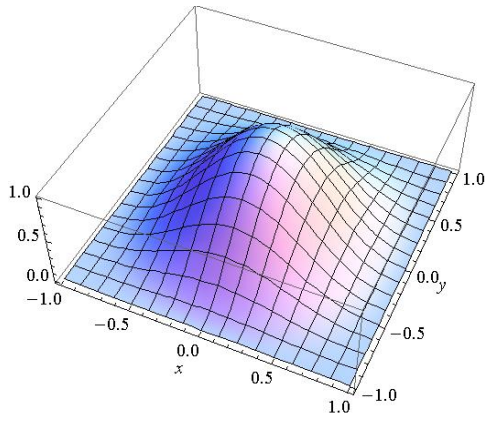
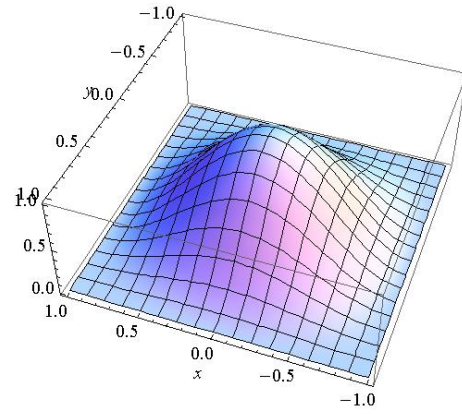
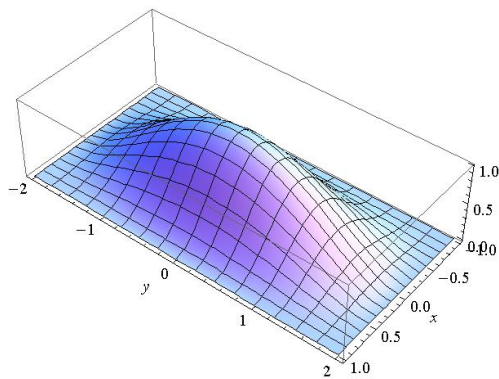
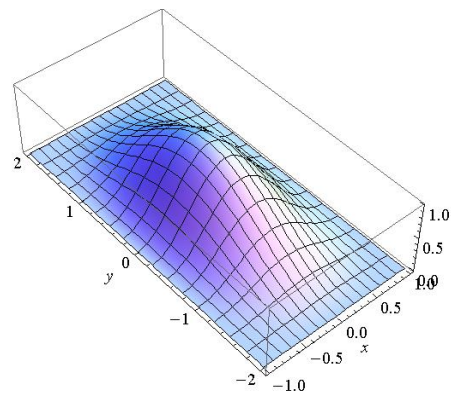
g):  $b/a = 1, (b/\pi)^2 Q_C = 2.518, P_C = 0$ h):  $b/a = 1, (b/\pi)^2 Q_C = 1.326, P_C = Q_C$ i):  $b/a = 2, (b/\pi)^2 Q_C = 1.209, P_C = 0$ j):  $b/a = 2, (b/\pi)^2 Q_C = 0.981, P_C = Q_C$ 

Рис. 3.7. Формы потери устойчивости прямоугольной защемленной по всем краям пластины

Согласно представленным данным, формы потери устойчивости пластины в большинстве рассмотренных примеров имеют форму с одной выпучиной. Как в случае одноосного растяжения, так и в случае двухосного сжатия форма потери устойчивости имеет тем большее число выпучин, чем сильнее отличается форма пластины от квадрата. В случае одноосного сжатия это выражается более ярко с увеличением нагруженных сторон прямоугольника (рис. 3.7а, 3.7с, 3.7е). Тем не менее, хотя характер поведения форм потери устойчивости соответствует [3], представленные формы несколько отличаются. Так три выпучины наблюдаются и после  $a/b > 2.7$  (рис. 3.7с), причем формы с двумя выпучинами при одноосном сжатии не наблюдаются в принципе. Таким образом, представленное решение дает возможность впервые с требуемой точностью построить формы потери

устойчивости для прямоугольных пластин и более детально исследовать вопрос о зависимости формы потери устойчивости от геометрии пластины.

Алгоритм вычисления собственных чисел задачи (критических нагрузок), детально описанный в разделе 3.3.1, практически без изменений переносится на ортотропные пластины. Ниже, на основе данного алгоритма, проведено исследование зоны статической стабильности для квадратной защемленной пластины при вариации упругих свойств материала (рис. 3.8 – 3.11).

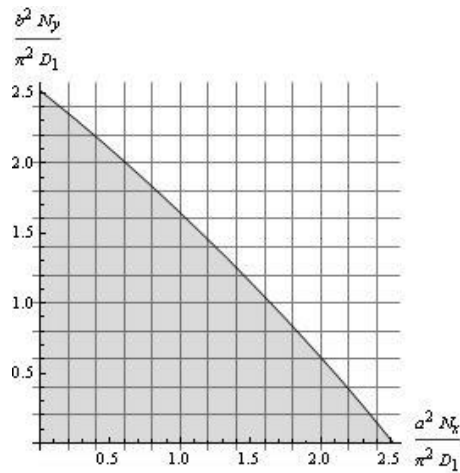


Рис 3.8 Зона статической стабильности (серый цвет)  
для защемленной квадратной пластины ( $D_1 = D_2$ ;  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ )

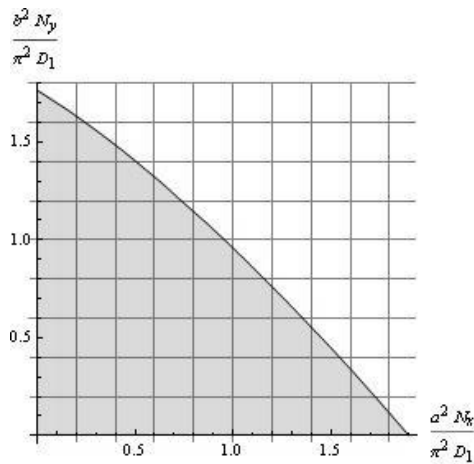


Рис 3.9 Зона статической стабильности (серый цвет)  
для защемленной квадратной пластины ( $D_1 = 2D_2$ ;  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ )

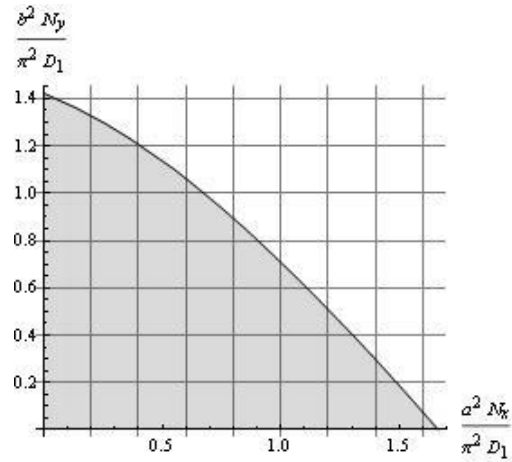


Рис 3.10 Зона статической стабильности (серый цвет)  
для заземленной квадратной пластины ( $D_1 = 3D_2$ ;  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ )

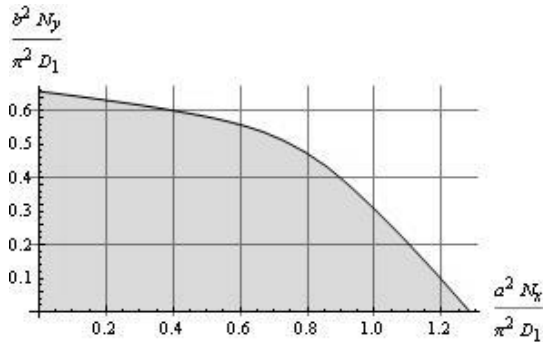


Рис 3.11 Зона статической стабильности (серый цвет)  
для заземленной квадратной пластины ( $D_1 = 10D_2$ ;  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ )

Можно увидеть, что при увеличении отношения упругих констант  $D_1 / D_2$  зона статической стабильности значительно уменьшается. Если для изотропного материала (рис. 3.8) зависимость между значениями критических нагрузок почти линейная (см. формулу (3.66)), то с уменьшением одной из упругих постоянных эта зависимость переходит в квадратичную кривую, которая наиболее ярко выражена на рис. 3.11. Уменьшение зоны статической стабильности при увеличении ортотропных свойств материала пластины объясняет уменьшение значений собственных частот колебаний в табл. 3.13 – 3.16, так как при приближении вынуждающих нагрузок к критическим значениям, собственная частота колебаний стремится к нулю.

### 3.4. Краткие выводы по главе 3

Представленный в третьей главе диссертации метод дает возможность построения аналитического решения задачи в значительно более широком диапазоне частот по сравнению с известными методами. На основе анализа бесконечных систем линейных уравнений соответствующих задачам колебаний и устойчивости прямоугольных ортотропных пластин удается построить в аналитической форме асимптотику их нетривиального решения. При этом сформулированная в разделе 2.3 теорема 2.8 о достаточных условиях существования ограниченного решения квазирегулярной бесконечной системы дает практический инструмент в виде условия (2.46) для определения верхних и нижних оценок собственного числа. Приведенные примеры показывают, что данные оценки могут быть сделаны настолько близкими, что совпадают первые значащие цифры, то есть предлагаемый подход гарантирует точность полученных результатов.

Проведенные численные исследования для задач колебания ортотропных пластин со свободными краями и защемленными краями показали хорошее совпадение как с известными в литературе классическими результатами, полученными на основе энергетического подхода, так и с рядом современных методов, в том числе численных (МКЭ).

Таким образом, полученные асимптотически точные решения задач колебания и устойчивости прямоугольных ортотропных пластин могут использоваться как эталонные при отладке численных и численно – аналитических методов, для вычисления собственных частот и критических сил с заданной точностью в том диапазоне параметров, где энергетические методы приводят к системам высокой размерности.

В четвертой главе диссертации полученные решения используются для построения динамической матрицы жесткости структурного элемента в форме прямоугольной пластины. Результаты данной главы были опубликованы в статьях [79 -81, 91, 210, 211], представлены на конференциях [63, 99, 101 – 103, 190, 212].

## ГЛАВА 4. . СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ АНСАМБЛЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

### 4.1. Взаимная зависимость произвольных граничных силовых и кинематических характеристик пластины

#### 4.1.1. Построение замкнутого аналитического решения уравнения колебаний для структурного элемента

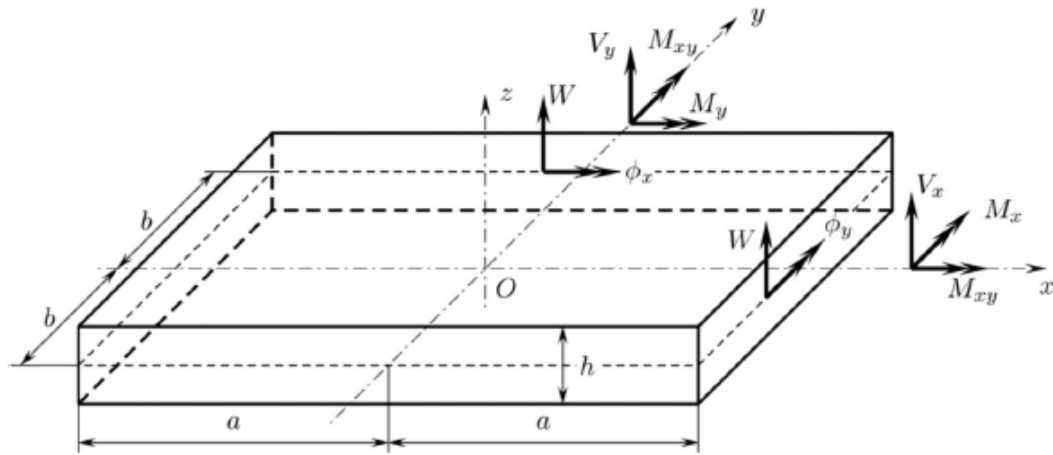


Рис. 4.1. Координатная система и обозначения для смещений и сил

Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластину  $(x, y) \in [-a; a] \times [-b; b]$  (рис. 4.1), установившиеся вынужденные поперечные колебания которой описываются в рамках классической теории тонких пластин дифференциальным уравнением

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - D\Omega^4 W = 0, \quad (4.1)$$

относительно функции прогиба  $w^0(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t}$ . Здесь введен безразмерный частотный параметр  $\Omega^4 = \rho h \omega^2 / D$ , отнесенный к некоторой характерной цилиндрической жесткости  $D$  для всех пластин ансамбля,  $h$  – толщина пластины,  $\rho$  – плотность материала пластины.

Введем векторы граничных смещений и граничных усилий

$$d = \begin{bmatrix} W_1 \\ \phi_1 \\ W_2 \\ \phi_2 \\ W_3 \\ \phi_3 \\ W_4 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(a, y) \\ \phi_y(a, y) \\ W(x, b) \\ \phi_x(x, b) \\ W(-a, y) \\ \phi_y(-a, y) \\ W(x, -b) \\ \phi_x(x, -b) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad f = \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_3 \\ V_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x(a, y) \\ M_x(a, y) \\ V_y(x, b) \\ M_y(x, b) \\ -V_x(-a, y) \\ -M_x(-a, y) \\ -V_y(x, -b) \\ -M_y(x, -b) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

предполагая возможность их разложения в тригонометрические ряды по модифицированному тригонометрическому базису, предложенному в предыдущей главе диссертации:

$$d = \begin{bmatrix} W_a^+ \\ \phi_a^+ \\ W_b^+ \\ \phi_b^+ \\ W_a^- \\ \phi_a^- \\ W_b^- \\ \phi_b^- \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} W_{an}^{+k} T_k(\beta_{nk} y) \\ \phi_{an}^{+k} T_k(\beta_{nk} y) \\ W_{bn}^{+k} T_k(\alpha_{nk} x) \\ \phi_{bn}^{+k} T_k(\alpha_{nk} x) \\ W_{an}^{-k} T_k(\beta_{nk} y) \\ \phi_{an}^{-k} T_k(\beta_{nk} y) \\ W_{bn}^{-k} T_k(\alpha_{nk} x) \\ \phi_{bn}^{-k} T_k(\alpha_{nk} x) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$f = \begin{bmatrix} V_a^+ \\ M_a^+ \\ V_b^+ \\ M_b^+ \\ V_a^- \\ M_a^- \\ V_b^- \\ M_b^- \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} V_{an}^{+k} T_k(\beta_{nk} y) \\ M_{an}^{+k} T_k(\beta_{nk} y) \\ V_{bn}^{+k} T_k(\alpha_{nk} x) \\ M_{bn}^{+k} T_k(\alpha_{nk} x) \\ V_{an}^{-k} T_k(\beta_{nk} y) \\ M_{an}^{-k} T_k(\beta_{nk} y) \\ V_{bn}^{-k} T_k(\alpha_{nk} x) \\ M_{bn}^{-k} T_k(\alpha_{nk} x) \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

Напомним, что здесь тригонометрические обозначены как

$$T_j(z) = \begin{cases} \cos z, & j = 0 \\ \sin z, & j = 1 \end{cases};$$

Константы разделения выбираются в форме

$$\alpha_{nj} = \frac{\pi}{a} \left( n - 1 + \frac{j}{2} \right), \quad \beta_{nj} = \frac{\pi}{b} \left( n - 1 + \frac{j}{2} \right).$$

Выбранная форма тригонометрических рядов (4.3), (4.4) обладает достаточной полнотой для представления любого типа граничных смещений и сил из пространства интегрируемых с квадратом функций  $L_2$  и может также использоваться для представления обобщенных функций, при помощи которых описываются сосредоточенные нагрузки.

Напомним, что задание на стороне  $x = a$ , значений функции прогиба  $W(a, y) = 0$  и угла поворота  $\phi_y(a, y) = 0$  соответствует условию жесткого защемления данной стороны, в случае если момент  $M_x(a, y) = 0$  и опорная реакция  $V_x(a, y) = 0$  получаем условие свободной стороны пластины. Если же край пластины свободно оперт, то  $W(a, y) = 0$  и  $M_x(a, y) = 0$ . Только в последнем случае переменные в (4.1) разделяются и можно получить аналитическое решение задачи в форме ряда (см. обзорные разделы 1.1 и 1.3).

В третьей главе диссертации были получены асимптотически точные решения для поперечных колебаний прямоугольных пластин со свободными и защемленными краями, которые строились на основе общего решения уравнения колебаний (4.1). Заметим, что зная общее решение (4.1), можно по известным формулам [125] выразить все кинематические и динамические характеристики колебаний пластины

$$\phi_x = \frac{\partial W}{\partial y}; \quad \phi_y = \frac{\partial W}{\partial x}; \quad (4.5)$$

$$V_x = - \left( D_1 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (D_3 + 2D_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right); \quad V_y = - \left( D_2 \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (D_3 + 2D_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right); \quad (4.6)$$

$$M_x = - \left( D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \quad M_y = - \left( D_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right); \quad (4.7)$$

Как известно [150, 227], динамическая матрица жесткости  $\mathbf{K}$  элемента задает зависимость между граничными значениями кинематических и силовых



характеристик. Для прямоугольной пластины со свободно опертыми краями (см. раздел 1.3) эта зависимость может быть получена явно для каждой моды колебаний в отдельности

$$f_{sn} = K_n \cdot d_{sn}, \quad (4.8)$$

где  $d_{sn} = (W_{an}^{+0}, W_{an}^{+1}, \phi_{an}^{+0}, \phi_{an}^{+1}, W_{bn}^{+0}, W_{bn}^{+1}, \phi_{bn}^{+0}, \phi_{bn}^{+1}, W_{an}^{-0}, W_{an}^{-1}, \phi_{an}^{-0}, \phi_{an}^{-1}, W_{bn}^{-0}, W_{bn}^{-1}, \phi_{bn}^{-0}, \phi_{bn}^{-1}),$   
 $f_{sn} = (V_{an}^{+0}, V_{an}^{+1}, M_{an}^{+0}, M_{an}^{+1}, V_{bn}^{+0}, V_{bn}^{+1}, M_{bn}^{+0}, M_{bn}^{+1}, V_{an}^{-0}, V_{an}^{-1}, M_{an}^{-0}, M_{an}^{-1}, V_{bn}^{-0}, V_{bn}^{-1}, M_{bn}^{-0}, M_{bn}^{-1})$   
 $(m = 0, 1, 2, \dots).$

Данный результат удастся получить в следующие три этапа [150]:

- строится общее решение уравнения колебаний (4.1) имеющее достаточное количество неопределенных констант для удовлетворения произвольным граничным условиям на сторонах пластины, которые не оперты;
- вводятся разложения в тригонометрические ряды для векторов граничных смещений и усилий на не опертых сторонах пластины;
- неопределенные константы исключаются для каждой моды колебаний с номером  $n$ , что дает блок  $K_n$  динамической матрицы жесткости для каждой гармоники;

Будем следовать данному алгоритму для произвольных граничных условий на всех сторонах пластины, с учетом того факта, что решение уже не будет распадаться на моды.

Представление граничных выражений (4.3) определяет форму общего решения уравнения колебаний (4.1), которое строится на основе техники разделения переменных, представленной в третьей главе диссертации:

$$W = W_{00} + W_{01} + W_{10} + W_{11}, \quad (4.9)$$

где  $W_{00}$ - симметричная по обеим координатам часть решения,  $W_{01}$  - симметричная по  $x$ , и антисимметричная по  $y$ , и т.п.

В частности, согласно результатам п. 3.1 общее решение может быть записано для всех четырех случаев симметрии в виде

$$W_{kj} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n H_j(p_{nk} y) + B_n H_j(\bar{p}_{nk} y)) T_k(\alpha_{nk} x) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n H_k(q_{nj} x) + D_n H_k(\bar{q}_{nj} x)) T_j(\beta_{nj} y) \quad (4.10)$$

Величины  $p_{nk}, \bar{p}_{nk}$  и  $q_{hj}, \bar{q}_{hj}$  являются корнями следующих характеристических уравнений

$$D_2 p^4 - 2D_3 \alpha^2 p^2 + D_1 \alpha^4 - D\Omega^4 = 0. \quad (4.11)$$

$$D_1 q^4 - 2D_3 \beta^2 q^2 + D_2 \beta^4 - D\Omega^4 = 0. \quad (4.12)$$

Хотелось бы подчеркнуть, что формула (4.10) дает удобное представление общего решения, которое в развернутой записи для простейшего случая изотропного материала пластины имеет вид

$$W^{00} = A_0 \cos \Omega y + B_0 \operatorname{ch} \Omega y + C_0 \cos \Omega x + D_0 \operatorname{ch} \Omega x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} p_{1n} y + B_n \operatorname{ch} p_{2n} y) \cos \alpha_n x + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \operatorname{ch} q_{1n} x + D_n \operatorname{ch} q_{2n} x) \cos \beta_n y;$$

$$W^{01} = A_0 \sin \Omega y + B_0 \operatorname{sh} \Omega y + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh} p_{1n} y + B_n \operatorname{sh} p_{2n} y) \cos \alpha_n x \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \operatorname{ch} \tilde{q}_{1n} x + D_n \operatorname{ch} \tilde{q}_{2n} x) \sin \tilde{\beta}_n y;$$

$$W^{10} = C_0 \sin \Omega x + D_0 \operatorname{sh} \Omega x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \tilde{p}_{1n} y + B_n \operatorname{ch} \tilde{p}_{2n} y) \sin \tilde{\alpha}_n x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \operatorname{sh} q_{1n} x + D_n \operatorname{sh} q_{2n} x) \cos \beta_n y;$$

$$W^{11} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh} \tilde{p}_{1n} y + B_n \operatorname{sh} \tilde{p}_{2n} y) \sin \tilde{\alpha}_n x + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \operatorname{sh} \tilde{q}_{1n} x + D_n \operatorname{sh} \tilde{q}_{2n} x) \sin \tilde{\beta}_n y,$$

где  $p_{1n} = \sqrt{\alpha_n^2 - \Omega^2}; p_{2n} = \sqrt{\alpha_n^2 + \Omega^2}; q_{1n} = \sqrt{\beta_n^2 - \Omega^2}; q_{2n} = \sqrt{\beta_n^2 + \Omega^2};$   
 $\tilde{p}_{1n} = \sqrt{\tilde{\alpha}_n^2 - \Omega^2}; \tilde{p}_{2n} = \sqrt{\tilde{\alpha}_n^2 + \Omega^2}; \tilde{q}_{1n} = \sqrt{\tilde{\beta}_n^2 - \Omega^2}; \tilde{q}_{2n} = \sqrt{\tilde{\beta}_n^2 + \Omega^2}.$

Очевидно, неопределенные коэффициенты  $A_n, B_n, C_n, D_n$  являются различными для каждого отдельного случая симметрии.

Решение (4.10) удовлетворяет (4.1) *a priori*, в то же время данное решение содержит достаточный произвол для выполнения широкого спектра граничных условий. При исследовании свободных колебаний прямоугольной пластины (см. третью главу диссертации) данная форма решения ведет к вполне регулярным

бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, для которых исследована асимптотика решения и построен алгоритм эффективного решения.

4.1.2. Бесконечная система линейных уравнений, связывающая граничные силовые и кинематические характеристики пластины в случае изотропного материала.

Граничные смещения и усилия также могут быть представлены в виде комбинации четырех векторов, каждый из которых отвечает своему типу симметрии:

$$d^{kj} = \begin{bmatrix} W_a^{kj} \\ W_b^{kj} \\ \phi_a^{kj} \\ \phi_b^{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{kj}(a, y) \\ W^{kj}(x, b) \\ \phi^{kj}(a, y) \\ \phi^{kj}(x, b) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad f^{kj} = \begin{bmatrix} V_a^{kj} \\ V_b^{kj} \\ M_a^{kj} \\ M_b^{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x^{kj}(a, y) \\ V_y^{kj}(x, b) \\ M_x^{kj}(a, y) \\ M_y^{kj}(x, b) \end{bmatrix} \quad (k, j = 0, 1) \quad (4.13)$$

Тогда динамическая матрица жесткости пластины  $\mathbf{K}$  также представляется в виде комбинации четырех матриц  $\mathbf{K}^{kj}$  по типу симметрии.

Рассмотрим более подробно построение матрицы  $\mathbf{K}^{00}$  для симметричной по обеим координатам составляющей решения. Пусть разложения для (4.13) имеют вид

$$d^{00} = \begin{bmatrix} W_{a0} + \sum_{n=1}^{\infty} W_{a_n} \cos \beta_n y \\ W_{b0} + \sum_{n=1}^{\infty} W_{b_n} \cos \alpha_n x \\ \phi_{a0} + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{a_n} \cos \beta_n y \\ \phi_{b0} + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{b_n} \cos \alpha_n x \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad f^{00} = -D \cdot \begin{bmatrix} V_{a0} + \sum_{n=1}^{\infty} V_{a_n} \cos \beta_n y \\ V_{y0} + \sum_{n=1}^{\infty} V_{b_n} \cos \alpha_n x \\ M_{a0} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{a_n} \cos \beta_n y \\ M_{b0} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{b_n} \cos \alpha_n x \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Вычисляя компоненты векторов (4.13) согласно формулам (4.5) – (4.7) по представлению для общего решения  $W^{00}$  и сверяя их затем с граничным разложением (4.14), получаем равенства тригонометрических рядов:

$$\phi_y^{00}(a, y) = C_0 \Omega \sin \Omega a - D_0 \Omega \operatorname{sh} \Omega a - \sum_{n=1}^{\infty} (C_n q_{1n} \operatorname{sh} q_{1n} a + D_n q_{2n} \operatorname{sh} q_{2n} a) \cos \beta_n y = \phi_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{a_n} \cos \beta_n y,$$

$$V_x^{00}(a, y) = -D \left( C_0 \Omega^3 \sin \Omega a + D_0 \Omega^3 \operatorname{sh} \Omega a + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n q_{1n} (q_{1n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2) \operatorname{sh} q_{1n} a + D_n q_{2n} (q_{2n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2) \operatorname{sh} q_{2n} a) \cos \beta_n y \right) = -D \left( V_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} V_{a_n} \cos \beta_n y \right),$$

$$\phi_x^{00}(x, b) = -A_0 \Omega \sin \Omega b + B_0 \Omega \operatorname{sh} \Omega b + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n p_{1n} \operatorname{sh} p_{1n} b + B_n p_{2n} \operatorname{sh} p_{2n} b) \cos \alpha_n x = \phi_{b_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{b_n} \cos \alpha_n x,$$

$$V_y^{00}(x, b) = D \left( A_0 \Omega^3 \sin \Omega b + B_0 \Omega^3 \operatorname{sh} \Omega b + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n p_{1n} (p_{1n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2) \operatorname{sh} p_{1n} b + B_n p_{2n} (p_{2n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2) \operatorname{sh} p_{2n} b) \cos \alpha_n x \right) = -D \left( V_{b_0} + \sum_{n=1}^{\infty} V_{b_n} \cos \alpha_n x \right).$$

Из равенства коэффициентов при одинаковых гармониках следуют соотношения

$$\begin{cases} C_0 \sin \Omega a - D_0 \operatorname{sh} \Omega a = \phi_{a_0} / \Omega \\ C_0 \sin \Omega a + D_0 \operatorname{sh} \Omega a = V_{a_0} / \Omega^3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} A_0 \sin \Omega b - B_0 \operatorname{sh} \Omega b = -\phi_{b_0} / \Omega \\ A_0 \sin \Omega b + B_0 \operatorname{sh} \Omega b = -V_{b_0} / \Omega^3 \end{cases},$$

а также

$$\begin{cases} C_n q_{1n} \operatorname{sh} q_{1n} a + D_n q_{2n} \operatorname{sh} q_{2n} a = -\phi_{a_n} \\ C_n q_{1n} (q_{1n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2) \operatorname{sh} q_{1n} a + D_n q_{2n} (q_{2n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2) \operatorname{sh} q_{2n} a = V_{a_n} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} A_n p_{1n} \operatorname{sh} p_{1n} b + B_n p_{2n} \operatorname{sh} p_{2n} b = \phi_{b_n} \\ A_n p_{1n} (p_{1n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2) \operatorname{sh} p_{1n} b + B_n p_{2n} (p_{2n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2) \operatorname{sh} p_{2n} b = -V_{b_n} \end{cases},$$

из которых можно выразить неопределенные коэффициенты общего решения через коэффициенты Фурье граничных смещений и усилий:

$$A_0 = -\frac{V_{b_0} + \Omega^2 \phi_{b_0}}{2\Omega^3 \sin \Omega b}; \quad B_0 = -\frac{V_{b_0} - \Omega^2 \phi_{b_0}}{2\Omega^3 \operatorname{sh} \Omega b}; \quad C_0 = \frac{V_{a_0} + \Omega^2 \phi_{a_0}}{2\Omega^3 \sin \Omega a}; \quad D_0 = \frac{V_{a_0} - \Omega^2 \phi_{a_0}}{2\Omega^3 \operatorname{sh} \Omega a};$$

$$A_n = \frac{V_{b_n} + (p_{2n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2)\phi_{b_n}}{2\Omega^2 p_{1n} \operatorname{sh} p_{1n} b}; \quad B_n = -\frac{V_{b_n} + (p_{1n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2)\phi_{b_n}}{2\Omega^2 p_{2n} \operatorname{sh} p_{2n} b}; \quad (4.15)$$

$$C_n = -\frac{V_{a_n} + (q_{2n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2)\phi_{a_n}}{2\Omega^2 q_{1n} \operatorname{sh} q_{1n} a}; \quad D_n = \frac{V_{a_n} + (q_{1n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2)\phi_{a_n}}{2\Omega^2 q_{2n} \operatorname{sh} q_{2n} a}.$$

Таким образом, после подстановки (4.15), общее решение оказывается представленным через коэффициенты  $\phi_{a_n}, \phi_{b_n}, V_{a_n}, V_{b_n}$ . Данные коэффициенты, в свою очередь, могут быть связаны между собой и с коэффициентами  $W_{a_n}, W_{b_n}, M_{a_n}, M_{b_n}$  посредством равенств:

$$W^{00}(a, y) = W_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} W_{a_n} \cos \beta_n y \quad \text{или}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_{a_0} (\operatorname{ctg} \Omega a - \operatorname{cth} \Omega a)}{2\Omega} + \frac{V_{a_0} (\operatorname{ctg} \Omega a + \operatorname{cth} \Omega a)}{2\Omega^3} - \frac{\phi_{b_0} \left( \frac{\cos \Omega y}{\sin \Omega b} - \frac{\operatorname{ch} \Omega y}{\operatorname{sh} \Omega b} \right) - \frac{V_{b_0} \left( \frac{\cos \Omega y}{\sin \Omega b} + \frac{\operatorname{ch} \Omega y}{\operatorname{sh} \Omega b} \right)}{2\Omega^3} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \phi_{a_n} \left\{ \frac{q_{1n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2}{q_{2n}} \operatorname{cth} q_{2n} a - \frac{q_{2n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2}{q_{1n}} \operatorname{cth} q_{1n} a \right\} + V_{a_n} \left\{ \frac{\operatorname{cth} q_{2n} a}{q_{2n}} - \frac{\operatorname{cth} q_{1n} a}{q_{1n}} \right\} \right) \frac{\cos \beta_n y}{2\Omega^2} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\Omega^2} \left( \phi_{b_n} \left\{ \frac{p_{2n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2}{p_{1n}} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{1n} b} - \frac{p_{1n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2}{p_{2n}} \frac{\operatorname{ch} p_{2n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} b} \right\} - V_{b_n} \left\{ \frac{\operatorname{ch} p_{2n} y}{p_{2n} \operatorname{sh} p_{2n} b} - \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{p_{1n} \operatorname{sh} p_{1n} b} \right\} \right) = \\ & = W_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} W_{a_n} \cos \beta_n y \end{aligned}$$

$$W^{00}(x, b) = W_{b_0} + \sum_{n=1}^{\infty} W_{b_n} \cos \alpha_n x \quad \text{или}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_{a_0} \left( \frac{\cos \Omega x}{\sin \Omega a} - \frac{\operatorname{ch} \Omega x}{\operatorname{sh} \Omega a} \right) + \frac{V_{a_0} \left( \frac{\cos \Omega x}{\sin \Omega a} + \frac{\operatorname{ch} \Omega x}{\operatorname{sh} \Omega a} \right)}{2\Omega^3} - \frac{\phi_{b_0} (\operatorname{ctg} \Omega b - \operatorname{cth} \Omega b)}{2\Omega} - \frac{V_{b_0} (\operatorname{ctg} \Omega b + \operatorname{cth} \Omega b)}{2\Omega^3} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\Omega^2} \left( \phi_{a_n} \left\{ \frac{q_{2n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2}{q_{1n}} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{1n} a} - \frac{q_{1n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2}{q_{2n}} \frac{\operatorname{ch} q_{2n} x}{\operatorname{sh} q_{2n} a} \right\} - V_{a_n} \left\{ \frac{\operatorname{ch} q_{2n} x}{q_{2n} \operatorname{sh} q_{2n} a} - \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{q_{1n} \operatorname{sh} q_{1n} a} \right\} \right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \phi_{b_n} \left\{ \frac{p_{1n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2}{p_{2n}} \operatorname{cth} p_{2n} b - \frac{p_{2n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2}{p_{1n}} \operatorname{cth} p_{1n} b \right\} + V_{b_n} \left\{ \frac{\operatorname{cth} p_{2n} b}{p_{2n}} - \frac{\operatorname{cth} p_{1n} b}{p_{1n}} \right\} \right) \frac{\cos \alpha_n x}{2\Omega^2} = \\ & = W_{b_0} + \sum_{n=1}^{\infty} W_{b_n} \cos \alpha_n x \end{aligned}$$

$$-M_x^{00}(a, y)/D = M_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{a_n} \cos \beta_n y \quad \text{или}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\Omega\phi_{a_0}(\operatorname{ctg}\Omega a + \operatorname{cth}\Omega a)}{2} - \frac{V_{a_0}(\operatorname{ctg}\Omega a - \operatorname{cth}\Omega a)}{2\Omega} + \frac{v\Omega\phi_{b_0}\left(\frac{\cos\Omega y}{\sin\Omega b} + \frac{\operatorname{ch}\Omega y}{\operatorname{sh}\Omega b}\right)}{2} + \frac{vV_{b_0}\left(\frac{\cos\Omega y}{\sin\Omega b} - \frac{\operatorname{ch}\Omega y}{\operatorname{sh}\Omega b}\right)}{2\Omega} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \left( \phi_{a_n} \left\{ \frac{(q_{1n}^2 - (2-v)\beta_n^2)(q_{2n}^2 - v\beta_n^2)}{q_{2n}} \operatorname{cth} q_{2n} a - \frac{(q_{2n}^2 - (2-v)\beta_n^2)(q_{1n}^2 - v\beta_n^2)}{q_{1n}} \operatorname{cth} q_{1n} a \right\} + \right. \\
& \left. + V_{a_n} \left\{ \frac{q_{2n}^2 - v\beta_n^2}{q_{2n}} \operatorname{cth} q_{2n} a - \frac{q_{1n}^2 - v\beta_n^2}{q_{1n}} \operatorname{cth} q_{1n} a \right\} \right) \frac{\cos\beta_n y}{2\Omega^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\Omega^2} \left( \phi_{b_n} \left\{ \frac{(p_{1n}^2 - (2-v)\alpha_n^2)(vp_{2n}^2 - \alpha_n^2)}{p_{2n}} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \frac{\operatorname{ch} p_{2n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} b} - \frac{(p_{2n}^2 - (2-v)\alpha_n^2)(vp_{1n}^2 - \alpha_n^2)}{p_{1n}} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{1n} b} \right\} + V_{b_n} \left\{ \frac{vp_{2n}^2 - \alpha_n^2}{p_{2n}} \frac{\operatorname{ch} p_{2n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} b} - \frac{vp_{1n}^2 - \alpha_n^2}{p_{1n}} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{1n} b} \right\} \right) = \\
& = M_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{a_n} \cos\beta_n y
\end{aligned}$$

$$-M_y^{00}(x, b) / D = M_{b_0} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{b_n} \cos\alpha_n x \text{ или}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{v\Omega\phi_{a_0}\left(\frac{\cos\Omega x}{\sin\Omega a} + \frac{\operatorname{ch}\Omega x}{\operatorname{sh}\Omega a}\right)}{2} - \frac{vV_{a_0}\left(\frac{\cos\Omega x}{\sin\Omega a} - \frac{\operatorname{ch}\Omega x}{\operatorname{sh}\Omega a}\right)}{2\Omega} + \frac{\Omega\phi_{b_0}(\operatorname{ctg}\Omega b + \operatorname{cth}\Omega b)}{2} + \frac{V_{b_0}(\operatorname{ctg}\Omega b - \operatorname{cth}\Omega b)}{2\Omega} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\Omega^2} \left( \phi_{a_n} \left\{ \frac{(q_{1n}^2 - (2-v)\beta_n^2)(vq_{2n}^2 - \beta_n^2)}{q_{2n}} \frac{\operatorname{ch} q_{2n} x}{\operatorname{sh} q_{2n} a} - \frac{(q_{2n}^2 - (2-v)\beta_n^2)(vq_{1n}^2 - \beta_n^2)}{q_{1n}} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{1n} a} \right\} + \right. \\
& \left. + V_{a_n} \left\{ \frac{vq_{2n}^2 - \beta_n^2}{q_{2n}} \frac{\operatorname{ch} q_{2n} x}{\operatorname{sh} q_{2n} a} - \frac{vq_{1n}^2 - \beta_n^2}{q_{1n}} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{1n} a} \right\} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \phi_{b_n} \left\{ \frac{(p_{1n}^2 - (2-v)\alpha_n^2)(p_{2n}^2 - v\alpha_n^2)}{p_{2n}} \operatorname{cth} p_{2n} b - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(p_{2n}^2 - (2-v)\alpha_n^2)(p_{1n}^2 - v\alpha_n^2)}{p_{1n}} \operatorname{cth} p_{1n} b \right\} + V_{b_n} \left\{ \left[ \frac{p_{2n}^2 - v\alpha_n^2}{p_{2n}} \operatorname{cth} p_{2n} b - \frac{p_{1n}^2 - v\alpha_n^2}{p_{1n}} \operatorname{cth} p_{1n} b \right] \right\} \right) \frac{\cos\alpha_n x}{2\Omega^2} = \\
& = M_{b_0} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{b_n} \cos\alpha_n x
\end{aligned}$$

Раскладывая гиперболические функции в данных равенствах в ряды по соответствующим тригонометрическим функциям и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения граничных смещений и усилий:

$$\frac{\operatorname{ctg}\Omega a + \operatorname{cth}\Omega a}{2\Omega^3} V_{a_0} - \frac{1}{b\Omega^4} V_{b_0} - W_{a_0} + \frac{\operatorname{ctg}\Omega a - \operatorname{cth}\Omega a}{2\Omega} \phi_{a_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{bp_{1n}^2 p_{2n}^2} (V_{b_n} + v\alpha_n^2 \phi_{b_n})$$

$$\frac{1}{a\Omega^4}V_{a_0} - \frac{\operatorname{ctg} \Omega b + \operatorname{cth} \Omega b}{2\Omega^3}V_{b_0} - W_{b_0} - \frac{\operatorname{ctg} \Omega b - \operatorname{cth} \Omega b}{2\Omega}\phi_{b_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{aq_{1n}^2 q_{2n}^2} (V_{a_n} + v\beta_n^2 \phi_{a_n})$$

$$M_{a_0} + \frac{\operatorname{ctg} \Omega a - \operatorname{cth} \Omega a}{2\Omega}V_{a_0} + \frac{\Omega(\operatorname{ctg} \Omega a + \operatorname{cth} \Omega a)}{2}\phi_{a_0} - \frac{v}{b}\phi_{b_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{bp_{1n}^2 p_{2n}^2} (\alpha_n^2 V_{b_n} + v\Omega^4 \phi_{b_n})$$

$$M_{b_0} - \frac{\operatorname{ctg} \Omega b - \operatorname{cth} \Omega b}{2\Omega}V_{b_0} + \frac{v}{a}\phi_{a_0} - \frac{\Omega(\operatorname{ctg} \Omega b + \operatorname{cth} \Omega b)}{2}\phi_{b_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{aq_{1n}^2 q_{2n}^2} (\beta_n^2 V_{a_n} + v\Omega^4 \phi_{a_n})$$

$$\Delta_{2m}V_{a_m} - 2\Omega^2 W_{a_m} + \Delta_{1m}\phi_{a_m} = \frac{4\Omega^2(-1)^{m+1}}{bq_{1m}^2 q_{2m}^2} (V_{b_0} + \beta_m^2 \phi_{b_0}) - \frac{4\Omega^2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} (V_{b_n} + (\beta_m^2 + v\alpha_n^2)\phi_{b_n})}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)}$$

$$-\Delta_{4m}V_{b_m} - 2\Omega^2 W_{b_m} - \Delta_{3m}\phi_{b_m} = \frac{4\Omega^2(-1)^m}{ap_{1m}^2 p_{2m}^2} (V_{a_0} + \alpha_m^2 \phi_{a_0}) + \frac{4\Omega^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} (V_{a_n} + (\alpha_m^2 + v\beta_n^2)\phi_{a_n})}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)}$$

$$2\Omega^2 M_{a_m} - \Delta_{6m}V_{a_m} + \Delta_{5m}\phi_{a_m} = \frac{4v\Omega^2(-1)^{m+1}}{bq_{1m}^2 q_{2m}^2} (\beta_m^2 V_{b_0} + \Omega^4 \phi_{b_0}) - \frac{4\Omega^2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} ((v\beta_m^2 + \alpha_n^2)V_{b_n} + ((1-v)^2\beta_m^2\alpha_n^2 + v\Omega^4)\phi_{b_n})}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)}$$

$$2\Omega^2 M_{b_m} + \Delta_{8m}V_{b_m} - \Delta_{7m}\phi_{b_m} = \frac{4v\Omega^2(-1)^m}{ap_{1m}^2 p_{2m}^2} (\alpha_m^2 V_{a_0} + \Omega^4 \phi_{a_0}) + \frac{4\Omega^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} ((v\alpha_m^2 + \beta_n^2)V_{a_n} + ((1-v)^2\alpha_m^2\beta_n^2 + v\Omega^4)\phi_{a_n})}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)}$$

$$m = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

где

$$\Delta_{1n} = \frac{q_{1n}^2 - (2-v)\beta_n^2}{q_{2n}} \operatorname{cth} q_{2n} a - \frac{q_{2n}^2 - (2-v)\beta_n^2}{q_{1n}} \operatorname{cth} q_{1n} a; \quad \Delta_{2n} = \frac{\operatorname{cth} q_{2n} a}{q_{2n}} - \frac{\operatorname{cth} q_{1n} a}{q_{1n}};$$

$$\Delta_{3n} = \frac{p_{1n}^2 - (2-v)\alpha_n^2}{p_{2n}} \operatorname{cth} p_{2n} b - \frac{p_{2n}^2 - (2-v)\alpha_n^2}{p_{1n}} \operatorname{cth} p_{1n} b; \quad \Delta_{4n} = \frac{\operatorname{cth} p_{2n} b}{p_{2n}} - \frac{\operatorname{cth} p_{1n} b}{p_{1n}};$$

$$\Delta_{5n} = \frac{(q_{2n}^2 - (2-v)\beta_n^2)(q_{1n}^2 - v\beta_n^2)}{q_{1n}} \operatorname{cth} q_{1n} a - \frac{(q_{1n}^2 - (2-v)\beta_n^2)(q_{2n}^2 - v\beta_n^2)}{q_{2n}} \operatorname{cth} q_{2n} a;$$

$$\Delta_{6n} = \frac{q_{2n}^2 - v\beta_n^2}{q_{2n}} \operatorname{cth} q_{2n} a - \frac{q_{1n}^2 - v\beta_n^2}{q_{1n}} \operatorname{cth} q_{1n} a;$$

$$\Delta_{7n} = \frac{(p_{2n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2)(p_{1n}^2 - \nu\alpha_n^2)}{p_{1n}} \operatorname{cth} p_{1n}b - \frac{(p_{1n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2)(p_{2n}^2 - \nu\alpha_n^2)}{p_{2n}} \operatorname{cth} p_{2n}b;$$

$$\Delta_{8n} = \frac{p_{2n}^2 - \nu\alpha_n^2}{p_{2n}} \operatorname{cth} p_{2n}b - \frac{p_{1n}^2 - \nu\alpha_n^2}{p_{1n}} \operatorname{cth} p_{1n}b.$$

В случае косо́й симметрии по одной или двум координатам граничные смещения и силы оказываются связанными схожими соотношениями. В частности, если решение четное в направлении оси  $Ox$  и нечетное в направлении оси  $Oy$ , векторы (4.13) могут быть представлены в виде

$$d^{01} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} W_{a_n} \sin \tilde{\beta}_n y \\ W_{b_0} + \sum_{n=1}^{\infty} W_{b_n} \cos \alpha_n x \\ \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{a_n} \sin \tilde{\beta}_n y \\ \phi_{b_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{b_n} \cos \alpha_n x \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad f^{01} = -D \cdot \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} V_{a_n} \sin \tilde{\beta}_n y \\ V_{b_0} + \sum_{n=1}^{\infty} V_{b_n} \cos \alpha_n x \\ \sum_{n=1}^{\infty} M_{a_n} \sin \tilde{\beta}_n y \\ M_{b_0} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{b_n} \cos \alpha_n x \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Опять, в силу полноты систем тригонометрических функций, гипотеза о возможности разложения граничных смещений и сил (4.17) охватывает практически все возможные варианты нагрузки на пластину, в том числе описывает непрерывные, разрывные и сосредоточенные силовые характеристики.

Повторяя выкладки, представленные выше для симметричного случая, получаем следующую взаимосвязь для коэффициентов тригонометрических рядов

$$\frac{\operatorname{tg} \Omega b - \operatorname{th} \Omega b}{2\Omega^3} V_{a_0} + W_{b_0} - \frac{\operatorname{tg} \Omega b + \operatorname{th} \Omega b}{2\Omega} \phi_{b_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a\tilde{q}_{1n}^2 \tilde{q}_{2n}^2} (V_{a_n} + \nu \tilde{\beta}_n^2 \phi_{a_n})$$

$$M_{b_0} + \frac{\operatorname{tg} \Omega b + \operatorname{th} \Omega b}{2\Omega} V_{b_0} + \frac{\Omega(\operatorname{tg} \Omega b - \operatorname{th} \Omega b)}{2} \phi_{b_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{a\tilde{q}_{1n}^2 \tilde{q}_{2n}^2} (\tilde{\beta}_n^2 V_{a_n} + \nu \Omega^4 \phi_{a_n})$$

$$\Delta_{2m}^{01} V_{a_m} - 2\Omega^2 W_{a_m} + \Delta_{1m}^{01} \phi_{a_m} = -\frac{4\Omega^2 (-1)^{m+1}}{b\tilde{q}_{1m}^2 \tilde{q}_{2m}^2} (V_{b_0} + \tilde{\beta}_m^2 \phi_{b_0}) + \frac{4\Omega^2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} (V_{b_n} + (\tilde{\beta}_m^2 + \nu\alpha_n^2) \phi_{b_n})}{(\alpha_n^2 + \tilde{q}_{1m}^2)(\alpha_n^2 + \tilde{q}_{2m}^2)}$$

$$-\Delta_{4m}^{01} V_{b_m} - 2\Omega^2 W_{b_m} - \Delta_{3m}^{01} \phi_{b_m} = -\frac{4\Omega^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} (V_{a_n} + (\alpha_m^2 + \nu\tilde{\beta}_n^2) \phi_{a_n})}{(\tilde{\beta}_n^2 + p_{1m}^2)(\tilde{\beta}_n^2 + p_{2m}^2)}$$



$$\begin{aligned}
2\Omega^2 M_{a_m} - \Delta_{6m}^{01} V_{a_m} + \Delta_{5m}^{01} \phi_{a_m} &= -\frac{4\nu\Omega^2 (-1)^{m+1} (\tilde{\beta}_m^2 V_{b_0} + \Omega^4 \phi_{b_0})}{b\tilde{q}_{1m}^2 \tilde{q}_{2m}^2} + \\
&+ \frac{4\Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \left( (\nu\tilde{\beta}_m^2 + \alpha_n^2) V_{b_n} + ((1-\nu)^2 \tilde{\beta}_m^2 \alpha_n^2 + \nu\Omega^4) \phi_{b_n} \right)}{(\alpha_n^2 + \tilde{q}_{1m}^2)(\alpha_n^2 + \tilde{q}_{2m}^2)} \\
2\Omega^2 M_{b_m} + \Delta_{8m}^{01} V_{b_m} - \Delta_{7m}^{01} \phi_{b_m} &= -\frac{4\Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \left( (\nu\alpha_m^2 + \tilde{\beta}_n^2) V_{a_n} + ((1-\nu)^2 \alpha_m^2 \tilde{\beta}_n^2 + \nu\Omega^4) \phi_{a_n} \right)}{a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\beta}_n^2 + p_{1m}^2)(\tilde{\beta}_n^2 + p_{2m}^2)}{}}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Здесь последовательности  $\Delta_{jm}^{01}$  ( $j=1,2, \dots, 8$ ) получаются из выражений для  $\Delta_{jm}$ , записанных в предыдущем разделе для симметричного случая, заменой по следующей схеме

$$\beta_m \rightarrow \tilde{\beta}_m; q_{jm} \rightarrow \tilde{q}_{jm}; \text{cth } p_{jm}b \rightarrow \text{th } p_{jm}b.$$

Для нечетной по обеим осям составляющей решения, векторы (4.13) раскладываются в следующие тригонометрические ряды

$$d^{11} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} W_{a_n} \sin \tilde{\beta}_n y \\ \sum_{n=1}^{\infty} W_{b_n} \sin \tilde{\alpha}_n x \\ \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{a_n} \sin \tilde{\beta}_n y \\ \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{b_n} \sin \tilde{\alpha}_n x \end{bmatrix} \text{ и } f^{11} = -D \cdot \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} V_{a_n} \sin \tilde{\beta}_n y \\ \sum_{n=1}^{\infty} V_{b_n} \sin \tilde{\alpha}_n x \\ \sum_{n=1}^{\infty} M_{a_n} \sin \tilde{\beta}_n y \\ \sum_{n=1}^{\infty} M_{b_n} \sin \tilde{\alpha}_n x \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Бесконечная система, связывающая коэффициенты (4.19), в данном случае симметрии имеет вид

$$\begin{aligned}
\Delta_{2m}^{11} V_{a_m} - 2\Omega^2 W_{a_m} + \Delta_{1m}^{11} \phi_{a_m} &= -\frac{4\Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} (V_{b_n} + (\tilde{\beta}_m^2 + \nu\tilde{\alpha}_n^2) \phi_{b_n})}{b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\alpha}_n^2 + \tilde{q}_{1m}^2)(\tilde{\alpha}_n^2 + \tilde{q}_{2m}^2)}{}} \\
-\Delta_{4m}^{11} V_{b_m} - 2\Omega^2 W_{b_m} - \Delta_{3m}^{11} \phi_{b_m} &= \frac{4\Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} (V_{a_n} + (\tilde{\alpha}_m^2 + \nu\tilde{\beta}_n^2) \phi_{a_n})}{a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\beta}_n^2 + \tilde{p}_{1m}^2)(\tilde{\beta}_n^2 + \tilde{p}_{2m}^2)}{}} \\
2\Omega^2 M_{a_m} - \Delta_{6m}^{11} V_{a_m} + \Delta_{5m}^{11} \phi_{a_m} &= -\frac{4\Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \left( (\nu\tilde{\beta}_m^2 + \tilde{\alpha}_n^2) V_{b_n} + ((1-\nu)^2 \tilde{\beta}_m^2 \tilde{\alpha}_n^2 + \nu\Omega^4) \phi_{b_n} \right)}{b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\alpha}_n^2 + \tilde{q}_{1m}^2)(\tilde{\alpha}_n^2 + \tilde{q}_{2m}^2)}{}}
\end{aligned}$$

$$2\Omega^2 M_{b_m} + \Delta_{8m}^{11} V_{b_m} - \Delta_{7m}^{11} \phi_{b_m} = \frac{4\Omega^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \left( v\tilde{\alpha}_m^2 + \tilde{\beta}_n^2 \right) \mathcal{N}_{a_n} + \left( (1-v)^2 \tilde{\alpha}_m^2 \tilde{\beta}_n^2 + v\Omega^4 \right) \phi_{a_n}}{(\tilde{\beta}_n^2 + \tilde{p}_{1m}^2)(\tilde{\beta}_n^2 + \tilde{p}_{2m}^2)} \quad (4.20)$$

где последовательности  $\Delta_{jm}^{11}$  ( $j=1,2, \dots, 8$ ) могут быть получены из  $\Delta_{jm}$  заменой символов по схеме

$$\alpha_m \rightarrow \tilde{\alpha}_m; \beta_m \rightarrow \tilde{\beta}_m; q_{jm} \rightarrow \tilde{q}_{jm}; p_{jm} \rightarrow \tilde{p}_{jm}; \operatorname{cth} q_{jm} a \rightarrow \operatorname{th} \tilde{q}_{jm} a; \operatorname{cth} p_{jm} b \rightarrow \operatorname{th} \tilde{p}_{jm} b.$$

4.1.3. Бесконечная система линейных уравнений, связывающая граничные силовые и кинематические характеристики пластины в случае ортотропного материала.

Из предыдущего пункта можно увидеть, что анализ каждого случая симметрии представляет собой отдельную задачу, при этом в соотношениях (4.16), (4.18), (4.20) приходится отдельно удерживать слагаемые, отвечающие постоянным составляющим в тригонометрических разложениях. Предложенная форма общего решения (4.10) позволяет унифицировать эти выкладки и получить единообразные выражения для всех случаев симметрии.

Действительно, вычисляя углы поворота по (4.10), получаем

$$\begin{aligned} \phi_y &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{kj} H_j(p_{nk} y) + B_n^{kj} H_j(\bar{p}_{nk} y)) \alpha_{nk} T'_k(\alpha_{nk} x) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{kj} q_{nj} H'_k(q_{nj} x) + D_n^{kj} \bar{q}_{nj} H'_k(\bar{q}_{nj} x)) T_j(\beta_{nj} y) \\ \phi_x &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{kj} p_{nk} H'_j(p_{nk} y) + B_n^{kj} \bar{p}_{nk} H'_j(\bar{p}_{nk} y)) T_k(\alpha_{nk} x) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{kj} H_k(q_{nj} x) + D_n^{kj} H_k(\bar{q}_{nj} x)) \beta_{nj} T'_j(\beta_{nj} y) \end{aligned}$$

А также

$$\begin{aligned} V_x &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{kj} [D_1 \alpha_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) p_{nk}^2] H_j(p_{nk} y) + B_n^{kj} [D_1 \alpha_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \bar{p}_{nk}^2] H_j(\bar{p}_{nk} y)) \alpha_{nk} T'_k(\alpha_{nk} x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{kj} q_{nj} [(D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2 - D_1 q_{nj}^2] H'_k(q_{nj} x) + D_n^{kj} \bar{q}_{nj} [(D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2 - D_1 \bar{q}_{nj}^2] H'_k(\bar{q}_{nj} x)) T_j(\beta_{nj} y) \\ V_y &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{kj} p_{nk} [(D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2 - D_2 p_{nk}^2] H'_j(p_{nk} y) + B_n^{kj} \bar{p}_{nk} [(D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2 - D_2 \bar{p}_{nk}^2] H'_j(\bar{p}_{nk} y)) T_k(\alpha_{nk} x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{kj} [D_2 \beta_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) q_{nj}^2] H_k(q_{nj} x) + D_n^{kj} [D_2 \beta_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \bar{q}_{nj}^2] H_k(\bar{q}_{nj} x)) \beta_{nj} T'_j(\beta_{nj} y) \end{aligned}$$

Выразим неопределенные коэффициенты  $C_n^{kj}$  и  $D_n^{kj}$  для каждого случая симметрии  $(k, j)$  через коэффициенты разложения величин  $\phi_y(\pm a, y), V_x(\pm a, y)$ . Приравнявая записанные выше выражения с граничными разложениями (4.3), (4.4) получаем равенства:

$$\sum_{k=0}^1 (C_n^{kj} q_{nj} H'_k(q_{nj}a) + D_n^{kj} \bar{q}_{nj} H'_k(\bar{q}_{nj}a)) = \phi_{an}^{+j} \quad (4.21)$$

$$\sum_{k=0}^1 (-1)^{k+1} (C_n^{kj} q_{nj} H'_k(q_{nj}a) + D_n^{kj} \bar{q}_{nj} H'_k(\bar{q}_{nj}a)) = \phi_{an}^{-j} \quad (4.22)$$

$$\sum_{k=0}^1 (C_n^{kj} q_{nj} [(D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 - D_1 q_{nj}^2] H'_k(q_{nj}a) + D_n^{kj} \bar{q}_{nj} [(D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 - D_1 \bar{q}_{nj}^2] H'_k(\bar{q}_{nj}a)) = V_{an}^{+j} \quad (4.23)$$

$$\sum_{k=0}^1 (-1)^{k+1} (C_n^{kj} q_{nj} [(D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 - D_1 q_{nj}^2] H'_k(q_{nj}a) + D_n^{kj} \bar{q}_{nj} [(D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 - D_1 \bar{q}_{nj}^2] H'_k(\bar{q}_{nj}a)) = V_{an}^{-j} \quad (4.24)$$

Складывая и вычитая (4.21), (4.22), а также (4.23), (4.24), получаем систему четырех уравнений относительно неопределенных констант  $C_n^{kj}$  и  $D_n^{kj}$ :

$$C_n^{0j} q_{nj} H'_0(q_{nj}a) + D_n^{0j} \bar{q}_{nj} H'_0(\bar{q}_{nj}a) = \frac{\phi_{an}^{+j} - \phi_{an}^{-j}}{2}$$

$$C_n^{1j} q_{nj} H'_1(q_{nj}a) + D_n^{1j} \bar{q}_{nj} H'_1(\bar{q}_{nj}a) = \frac{\phi_{an}^{+j} + \phi_{an}^{-j}}{2}$$

$$C_n^{0j} q_{nj} [(D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 - D_1 q_{nj}^2] H'_0(q_{nj}a) + D_n^{0j} \bar{q}_{nj} [(D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 - D_1 \bar{q}_{nj}^2] H'_0(\bar{q}_{nj}a) = \frac{V_{an}^{+j} - V_{an}^{-j}}{2}$$

$$C_n^{1j} q_{nj} [(D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 - D_1 q_{nj}^2] H'_1(q_{nj}a) + D_n^{1j} \bar{q}_{nj} [(D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 - D_1 \bar{q}_{nj}^2] H'_1(\bar{q}_{nj}a) = \frac{V_{an}^{+j} + V_{an}^{-j}}{2}$$

Из данных соотношений можно выразить константы  $C_n^{kj}$  и  $D_n^{kj}$  следующим образом

$$\begin{aligned} C_n^{kj} q_{nj} H'_k(q_{nj}a) &= \frac{D_1 \bar{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2}{D_1 (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} \cdot \frac{\phi_{an}^{+j} - (-1)^k \phi_{an}^{-j}}{2} + \frac{1}{D_1 (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} \cdot \frac{V_{an}^{+j} - (-1)^k V_{an}^{-j}}{2}; \\ D_n^{kj} \bar{q}_{nj} H'_k(\bar{q}_{nj}a) &= -\frac{D_1 q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2}{D_1 (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} \cdot \frac{\phi_{an}^{+j} - (-1)^k \phi_{an}^{-j}}{2} - \frac{1}{D_1 (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} \cdot \frac{V_{an}^{+j} - (-1)^k V_{an}^{-j}}{2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Аналогичным образом, можно выразить величины  $A_n^{kj}, B_n^{kj}$  через коэффициенты разложений (4.3), (4.4) величин  $\phi_x(x, \pm b)$  и  $V_y(x, \pm b)$ :

$$\begin{aligned}
A_n^{kj} p_{nk} H'_j(p_{nk} b) &= \frac{D_2 \bar{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2}{D_2 (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} \cdot \frac{\phi_{bn}^{+k} - (-1)^j \phi_{bn}^{-k}}{2} + \frac{1}{D_2 (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} \cdot \frac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2}, \\
B_n^{kj} \bar{p}_{nk} H'_j(\bar{p}_{nk} b) &= -\frac{D_2 p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2}{D_2 (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} \cdot \frac{\phi_{bn}^{+k} - (-1)^j \phi_{bn}^{-k}}{2} - \frac{1}{D_2 (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} \cdot \frac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Используя формулы (4.25) и (4.26), общее решение задачи (4.10), может быть записано в том же самом виде (3.18), которое было получено в третьей главе:

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{k,j=0}^1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{H_j(p_{nk} y)}{p_{nk} H'_j(p_{nk} b)} \left[ \left( D_2 \bar{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2 \right) \frac{\phi_{bn}^{+k} - (-1)^j \phi_{bn}^{-k}}{2} + \frac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2} \right] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{H_j(\bar{p}_{nk} y)}{\bar{p}_{nk} H'_j(\bar{p}_{nk} b)} \left[ \left( D_2 p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2 \right) \frac{\phi_{bn}^{+k} - (-1)^j \phi_{bn}^{-k}}{2} + \frac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2} \right] \right] \left\{ \frac{T_k(\alpha_{nk} x)}{D_2 (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{H_k(q_{nj} x)}{q_{nj} H'_j(q_{nj} a)} \left[ \left( D_1 \bar{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2 \right) \frac{\phi_{an}^{+j} - (-1)^k \phi_{an}^{-j}}{2} + \frac{V_{an}^{+j} - (-1)^k V_{an}^{-j}}{2} \right] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{H_k(\bar{q}_{nj} x)}{\bar{q}_{nj} H'_j(\bar{q}_{nj} a)} \left[ \left( D_1 q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2 \right) \frac{\phi_{an}^{+j} - (-1)^k \phi_{an}^{-j}}{2} + \frac{V_{an}^{+j} - (-1)^k V_{an}^{-j}}{2} \right] \right] \right\} \frac{T_j(\beta_{nj} y)}{D_1 (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} \right\}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Далее, раскладывая на границе пластины прогиб пластины (4.27) и моменты

$$\begin{aligned}
M_x &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{kj} [D_1 \alpha_{nk}^2 - D_{12} p_{nk}^2] H_j(p_{nk} y) + B_n^{kj} [D_1 \alpha_{nk}^2 - D_{12} \bar{p}_{nk}^2] H_j(\bar{p}_{nk} y)) T_k(\alpha_{nk} x) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{kj} [D_{12} \beta_{nj}^2 - D_1 q_{nj}^2] H_k(q_{nj} x) + D_n^{kj} [D_{12} \beta_{nj}^2 - D_1 \bar{q}_{nj}^2] H_k(\bar{q}_{nj} x)) T_j(\beta_{nj} y) \\
M_y &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{kj} [D_{12} \alpha_{nk}^2 - D_2 p_{nk}^2] H_j(p_{nk} y) + B_n^{kj} [D_{12} \alpha_{nk}^2 - D_2 \bar{p}_{nk}^2] H_j(\bar{p}_{nk} y)) T_k(\alpha_{nk} x) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{kj} [D_2 \beta_{nj}^2 - D_{12} q_{nj}^2] H_k(q_{nj} x) + D_n^{kj} [D_2 \beta_{nj}^2 - D_{12} \bar{q}_{nj}^2] H_k(\bar{q}_{nj} x)) \beta_{nj} T_j(\beta_{nj} y)
\end{aligned}$$

с учетом соотношений (4.25), (4.26) на основе формул (3.14), (3.15), получаем бесконечную систему линейных уравнений, связывающую коэффициенты граничных разложений (4.3) и (4.4):

$$\frac{2 - \delta_{j0} \delta_{1m}}{b D_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(D_2 \beta_{mj}^2 + D_{12} \alpha_{nk}^2) \phi_{bn}^{kj} + V_{bn}^{kj}}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} + \Delta_m^1 \phi_{am}^{kj} + \Delta_m^2 V_{am}^{kj} = W_{am}^{kj}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2 - \delta_{j0}\delta_{1m}}{bD_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{\left( (D_3^2 - 4D_{66}^2 - D_1D_2) \beta_{mj}^2 \alpha_{nk}^2 - D_1D\Omega^4 \right) \phi_{bn}^{kj} - (D_{12}\beta_{mj}^2 + D_1\alpha_{nk}^2) V_{bn}^{kj}}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} + \\
& + \Delta_m^3 \phi_{am}^{kj} + \Delta_m^4 V_{am}^{kj} = -M_{am}^{kj} \\
& \frac{2 - \delta_{k0}\delta_{1m}}{aD_2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{\left( D_1\alpha_{mk}^2 + D_{12}\beta_{nj}^2 \right) \phi_{bn}^{kj} + V_{bn}^{kj}}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} + \Delta_m^5 \phi_{bm}^{kj} + \Delta_m^6 V_{bm}^{kj} = W_{bm}^{kj} \\
& \frac{2 - \delta_{k0}\delta_{1m}}{aD_2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{\left( (D_3^2 - 4D_{66}^2 - D_1D_2) \beta_{nj}^2 \alpha_{mk}^2 - D_1D\Omega^4 \right) \phi_{an}^{kj} - (D_{12}\alpha_{mk}^2 + D_2\beta_{nj}^2) V_{an}^{kj}}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} + \\
& + \Delta_m^7 \phi_{bm}^{kj} + \Delta_m^8 V_{bm}^{kj} = -M_{bm}^{kj} \\
& \hspace{20em} (m = 1, 2, \dots) \quad (4.28)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi_{bn}^{+k} - (-1)^j \phi_{bn}^{-k}}{2} = \phi_{bn}^{kj}; \quad \frac{\phi_{an}^{+j} - (-1)^k \phi_{an}^{-j}}{2} = \phi_{an}^{kj}; \\
& \frac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2} = V_{bn}^{kj}; \quad \frac{V_{an}^{+j} - (-1)^k V_{an}^{-j}}{2} = V_{an}^{kj}; \\
& \frac{W_{bn}^{+k} + (-1)^j W_{bn}^{-k}}{2} = W_{bn}^{kj}; \quad \frac{W_{an}^{+j} + (-1)^k W_{an}^{-j}}{2} = W_{an}^{kj} \\
& \frac{M_{bn}^{+k} + (-1)^j M_{bn}^{-k}}{2} = M_{bn}^{kj}; \quad \frac{M_{an}^{+j} + (-1)^k M_{an}^{-j}}{2} = M_{an}^{kj} \\
& \Delta_m^1 = \frac{H_k(q_{mj}a)}{H'_k(q_{mj}a)} \cdot \frac{D_1\bar{q}_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{mj}^2}{2D_1q_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} - \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{H'_k(\bar{q}_{mj}a)} \cdot \frac{D_1q_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{mj}^2}{2D_1\bar{q}_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)}; \\
& \Delta_m^2 = \frac{1}{2D_1(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} \left( q_{mj} \frac{H'_k(q_{mj}a)}{H_k(q_{mj}a)} - \bar{q}_{mj} \frac{H'_k(\bar{q}_{mj}a)}{H_k(\bar{q}_{mj}a)} \right); \\
& \Delta_m^3 = \frac{H_k(q_{mj}a)}{H'_k(q_{mj}a)} \cdot \frac{(D_1\bar{q}_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{mj}^2)(D_1q_{mj}^2 - D_{12}\beta_{mj}^2)}{2D_1q_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} - \\
& - \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{H'_k(\bar{q}_{mj}a)} \cdot \frac{(D_1q_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{mj}^2)(D_1\bar{q}_{mj}^2 - D_{12}\beta_{mj}^2)}{2D_1\bar{q}_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)}; \\
& \Delta_m^4 = \frac{H_k(q_{mj}a)}{H'_k(q_{mj}a)} \cdot \frac{D_1q_{mj}^2 - D_{12}\beta_{mj}^2}{2D_1q_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} - \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{H'_k(\bar{q}_{mj}a)} \cdot \frac{D_1\bar{q}_{mj}^2 - D_{12}\beta_{mj}^2}{2D_1\bar{q}_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)}; \\
& \Delta_m^5 = \frac{H_j(p_{mk}b)}{H'_j(p_{mk}b)} \cdot \frac{D_2\bar{p}_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{mk}^2}{2D_2p_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} - \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H'_j(\bar{p}_{mk}b)} \cdot \frac{D_2p_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{mk}^2}{2D_2\bar{p}_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)};
\end{aligned}$$

$$\Delta_m^6 = \frac{1}{2D_2(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} \left( p_{mk} \frac{H'_j(p_{mk}b)}{H_j(p_{mk}b)} - \bar{p}_{mk} \frac{H'_j(\bar{p}_{mk}b)}{H_j(\bar{p}_{mk}b)} \right);$$

$$\Delta_m^7 = \frac{H_j(p_{mk}b)}{H'_j(p_{mk}b)} \cdot \frac{(D_2\bar{p}_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{mk}^2)(D_2p_{mk}^2 - D_{12}\alpha_{mk}^2)}{2D_2p_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} -$$

$$- \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H'_j(\bar{p}_{mk}b)} \cdot \frac{(D_2p_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{mk}^2)(D_2\bar{p}_{mk}^2 - D_{12}\alpha_{mk}^2)}{2D_2\bar{p}_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)};$$

$$\Delta_m^8 = \frac{H_j(p_{mk}b)}{H'_j(p_{mk}b)} \cdot \frac{D_2p_{mk}^2 - D_{12}\alpha_{mk}^2}{2D_2p_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} - \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H'_j(\bar{p}_{mk}b)} \cdot \frac{D_2\bar{p}_{mk}^2 - D_{12}\alpha_{mk}^2}{2D_2\bar{p}_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)};$$

## 4.2. Спектральная матрица жесткости элемента.

### 4.2.1. Матричная запись бесконечных систем.

Бесконечные системы из п. 4.1 могут быть записаны в матричной форме относительно входящих в них коэффициентов Фурье граничных характеристик пластины для каждого случая симметрии  $(k, j)$

$$\bar{W} = \{\delta_{k0}W_{a_0}, \delta_{j0}W_{b_0}, \dots, W_{a_m}, W_{b_m}, \dots\}^T, \quad \bar{\Phi} = \{\delta_{k0}\phi_{a_0}, \delta_{j0}\phi_{b_0}, \dots, \phi_{a_m}, \phi_{b_m}, \dots\}^T,$$

$$\bar{M} = \{\delta_{k0}M_{a_0}, \delta_{j0}M_{b_0}, \dots, M_{a_m}, M_{b_m}, \dots\}^T, \quad \bar{V} = \{\delta_{k0}V_{a_0}, \delta_{j0}V_{b_0}, \dots, V_{a_m}, V_{b_m}, \dots\}^T.$$

следующим образом

$$\begin{cases} A^{clamped}\bar{V} + \bar{W} + A^{mix1}\bar{\Phi} = 0 \\ A^{free}\bar{\Phi} + \bar{M} + A^{mix2}\bar{V} = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

В частности, в случае изотропного материала пластины входящие в равенства (4.29) бесконечные матрицы для четной составляющей решения имеют вид:

$$A^{clamped} = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{ctg} \Omega a + \operatorname{cth} \Omega a}{2\Omega^3} & \frac{1}{b\Omega^4} & \dots & 0 & \frac{(-1)^{n+1}}{bp_{1n}^2 p_{2n}^2} & \dots \\ -\frac{1}{a\Omega^4} & \frac{\operatorname{ctg} \Omega b + \operatorname{cth} \Omega b}{2\Omega^3} & \dots & \frac{(-1)^n}{aq_{1n}^2 q_{2n}^2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{2(-1)^{m+1}}{bq_{1m}^2 q_{2m}^2} & \dots & -\frac{\Delta_{2m} \delta_{mn}}{2\Omega^2} & \frac{2(-1)^{m+n+1}}{b(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} & \dots \\ \frac{2(-1)^m}{ap_{1m}^2 p_{2m}^2} & 0 & \dots & \frac{2(-1)^{m+n}}{a(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} & \frac{\Delta_{4m} \delta_{mn}}{2\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix};$$

$$A^{mix1} = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{cth} \Omega a - \operatorname{ctg} \Omega a}{2\Omega} & 0 & \dots & 0 & \frac{v\alpha_n^2 (-1)^{n+1}}{bp_{1n}^2 p_{2n}^2} & \dots \\ 0 & -\frac{\operatorname{cth} \Omega b - \operatorname{ctg} \Omega b}{2\Omega} & \dots & \frac{v\beta_n^2 (-1)^n}{aq_{1n}^2 q_{2n}^2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{2(-1)^{m+1} \beta_m^2}{bq_{1m}^2 q_{2m}^2} & \dots & -\frac{\Delta_{1m} \delta_{mn}}{2\Omega^2} & \frac{2(-1)^{m+n+1} (\beta_m^2 + v\alpha_n^2)}{b(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} & \dots \\ \frac{2(-1)^m \alpha_m^2}{ap_{1m}^2 p_{2m}^2} & 0 & \dots & \frac{2(-1)^{m+n} (\alpha_m^2 + v\beta_n^2)}{a(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} & \frac{\Delta_{3m} \delta_{mn}}{2\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix};$$

$$A^{mix2} = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{ctg} \Omega a - \operatorname{cth} \Omega a}{2\Omega} & 0 & \dots & 0 & \frac{\alpha_n^2 (-1)^n}{bp_{1n}^2 p_{2n}^2} & \dots \\ 0 & -\frac{\operatorname{ctg} \Omega b - \operatorname{cth} \Omega b}{2\Omega} & \dots & \frac{\beta_n^2 (-1)^{n+1}}{aq_{1n}^2 q_{2n}^2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{2v(-1)^m \beta_m^2}{bq_{1m}^2 q_{2m}^2} & \dots & -\frac{\Delta_{6m} \delta_{mn}}{2\Omega^2} & \frac{2(-1)^{m+n} (v\beta_m^2 + \alpha_n^2)}{b(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} & \dots \\ \frac{2v(-1)^{m+1} \alpha_m^2}{ap_{1m}^2 p_{2m}^2} & 0 & \dots & \frac{2(-1)^{m+n+1} (v\alpha_m^2 + \beta_n^2)}{a(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} & \frac{\Delta_{8m} \delta_{mn}}{2\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix};$$

$$A^{free} = \begin{pmatrix} \frac{\Omega(\operatorname{ctg} \Omega a + \operatorname{cth} \Omega a)}{2} & -\frac{v}{b} & \dots & 0 & \frac{v\Omega^4 (-1)^n}{bp_{1n}^2 p_{2n}^2} & \dots \\ \frac{v}{a} & -\frac{\Omega(\operatorname{ctg} \Omega b + \operatorname{cth} \Omega b)}{2} & \dots & \frac{v\Omega^4 (-1)^{n+1}}{aq_{1n}^2 q_{2n}^2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{2v\Omega^4 (-1)^m}{bq_{1m}^2 q_{2m}^2} & \dots & \frac{\Delta_{5m} \delta_{mn}}{2\Omega^2} & \frac{2(-1)^{m+n} ((1-v)^2 \beta_m^2 \alpha_n^2 + v\Omega^4)}{b(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} & \dots \\ \frac{2v\Omega^4 (-1)^{m+1}}{ap_{1m}^2 p_{2m}^2} & 0 & \dots & \frac{2(-1)^{m+n+1} ((1-v)^2 \alpha_m^2 \beta_n^2 + v\Omega^4)}{a(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} & -\frac{\Delta_{7m} \delta_{mn}}{2\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Из систем (4.18), (4.20) данные матрицы записываются для остальных случаев симметрии аналогичным образом.

В случае колебаний пластины со свободными краями  $\bar{M} = \bar{V} = 0$  система (4.29) принимает вид

$$\begin{cases} \bar{W} + A^{mix1} \bar{\phi} = 0 \\ A^{free} \bar{\phi} = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

и собственные частоты колебаний определяются в этом случае из уравнения

$$\det \begin{bmatrix} I & A^{mix1} \\ 0 & A^{free} \end{bmatrix} = \det A^{free} = 0 \quad (4.31)$$

Аналогично, собственные частоты колебания полностью защемленной пластины  $\bar{W} = \bar{\phi} = 0$  находятся из уравнения

$$\det A^{clamped} = 0 \quad (4.32)$$

Собственные частоты колебаний двух смешанных краевых задач дают дисперсионные уравнения

$$\bar{W} = \bar{V} = 0: \det A^{mix1} = 0 \text{ и } \bar{\phi} = \bar{M} = 0: \det A^{mix2} = 0.$$

Система (4.29) может быть разрешена относительно смещений согласно формулам

$$\bar{W} = P^{11} \bar{V} + P^{12} \bar{M}, \quad \bar{\phi} = P^{21} \bar{V} + P^{22} \bar{M} \quad (4.33)$$

где  $P^{11} = A^{mix1} (A^{free})^{-1} A^{mix2} - A^{clamped}$ ;  $P^{12} = A^{mix1} (A^{free})^{-1}$

$$P^{21} = -(A^{free})^{-1} A^{mix2}; \quad P^{22} = -(A^{free})^{-1}.$$

4.2.2. Построение спектральной матрицы жесткости для различных случаев симметрии.

Преимущество описанного выше подхода заключается в возможности практически точного обращения бесконечной матрицы  $(A^{free})^{-1}$ .



Действительно, пусть элементы этой матрицы равны  $(A^{free})^{-1} = \{z_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty}$  (для удобства нумерацию начинаем с нуля), тогда из матричного тождества

$$A^{free}(A^{free})^{-1} = I \quad (4.34)$$

следует бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно столбца данной матрицы  $\{z_{m,j}\}_{m=0}^{\infty}$  ( $j = 0, 1, \dots$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(\operatorname{ctg} \Omega a + \operatorname{cth} \Omega a)}{2} z_{0j} - \frac{\nu}{b} z_{1j} &= \frac{\nu \Omega^4}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{p_{1n}^2 p_{2n}^2} z_{2n+1,j} + \delta_{j0}, \\ \frac{\nu}{a} z_{0j} - \frac{\Omega(\operatorname{ctg} \Omega b + \operatorname{cth} \Omega b)}{2} z_{1j} &= \frac{\nu \Omega^4}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{q_{1n}^2 q_{2n}^2} z_{2n,j} + \delta_{j1}, \\ (-1)^m z_{2m,j} &= -\frac{4\nu \Omega^6}{b \Delta_{5m} q_{1m}^2 q_{2m}^2} z_{1j} - \frac{4\Omega^2}{b \Delta_{5m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^2 \beta_m^2 \alpha_n^2 + \nu \Omega^4}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} (-1)^n z_{2n+1,j} + \frac{2\Omega^2 (-1)^m \delta_{j,2m}}{\Delta_{5m}}, \\ (-1)^{m+1} z_{2m+1,j} &= \frac{4\nu \Omega^6}{a \Delta_{7m} p_{1m}^2 p_{2m}^2} z_{0j} + \frac{4\Omega^2}{a \Delta_{7m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^2 \beta_n^2 \alpha_m^2 + \nu \Omega^4}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} (-1)^n z_{2n,j} + \frac{2\Omega^2 (-1)^m \delta_{j,2m+1}}{\Delta_{7m}} \end{aligned} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.35)$$

Система (4.35) исследована в разделе 3.1, где доказана ее квазирегулярность

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4\Omega^2}{b \Delta_{5m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^2 \beta_m^2 \alpha_n^2 + \nu \Omega^4}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4\Omega^2}{a \Delta_{7m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^2 \beta_n^2 \alpha_m^2 + \nu \Omega^4}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} = \frac{1-\nu}{3+\nu} < 1,$$

что приводит к наличию единственного ограниченного решению на частотах колебаний, отличных от собственных частот. На основе авторского обобщения достаточного признака существования ненулевого предела у решения системы (теорема 2.7), находится асимптотика

$$z_{2m,j} = \frac{(-1)^m b K_j}{\beta_m^{2+\lambda}}, \quad z_{2m+1,j} = \frac{(-1)^{m+1} a K_j}{\alpha_m^{2+\lambda}} \quad (4.36)$$

где  $K_j$  - некоторая константа,  $\lambda \in (0; 1)$  определяется как корень уравнения

$$\frac{(1-\nu)(1+\lambda)}{3+\nu} = \cos \frac{\pi \lambda}{2}.$$

Знание асимптотики (4.36) позволяет определить столбец матрицы  $(A^{free})^{-1}$  из решения системы порядка  $2N+3$  относительно первых элементов  $z_{0j}, z_{1j}, \dots, z_{2N,j}, z_{2N+1,j}$  и предельной константы  $K_j$  по методу улучшенной редукции.

Ниже приводится данная система

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(\operatorname{ctg} \Omega a + \operatorname{cth} \Omega a)}{2} z_{0j} - \frac{\nu}{b} z_{1j} &= \frac{\nu \Omega^4}{b} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{p_{1n}^2 p_{2n}^2} z_{2n+1,j} + \frac{\nu \Omega^4 a K_j}{b} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^{2+\lambda} p_{1n}^2 p_{2n}^2} + \delta_{j0}, \\ \frac{\nu}{a} z_{0j} - \frac{\Omega(\operatorname{ctg} \Omega b + \operatorname{cth} \Omega b)}{2} z_{1j} &= \frac{\nu \Omega^4}{a} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{q_{1n}^2 q_{2n}^2} z_{2n,j} + \frac{\nu \Omega^4 b K_j}{a} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^{2+\lambda} q_{1n}^2 q_{2n}^2} + \delta_{j1}, \\ (-1)^m z_{2m,j} &= -\frac{4\nu \Omega^6}{b \Delta_{5m} q_{1m}^2 q_{2m}^2} z_{1j} - \frac{4\Omega^2}{b \Delta_{5m}} \sum_{n=1}^N \frac{((1-\nu)^2 \beta_m^2 \alpha_n^2 + \nu \Omega^4)}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} (-1)^n z_{2n+1,j} + \\ &+ \frac{4\Omega^2 a K_j}{b \Delta_{5m}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{((1-\nu)^2 \beta_m^2 \alpha_n^2 + \nu \Omega^4)}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2) \alpha_n^{2+\lambda}} + \frac{2\Omega^2 (-1)^m \delta_{j,2m}}{\Delta_{5m}}, \\ (-1)^m z_{2m+1,j} &= -\frac{4\nu \Omega^6}{a \Delta_{7m} p_{1m}^2 p_{2m}^2} z_{0j} - \frac{4\Omega^2}{a \Delta_{7m}} \sum_{n=1}^N \frac{(1-\nu)^2 \beta_n^2 \alpha_m^2 + \nu \Omega^4}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} (-1)^n z_{2n,j} + \\ &- \frac{4\Omega^2 b K_j}{a \Delta_{7m}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^2 \beta_n^2 \alpha_m^2 + \nu \Omega^4}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2) \beta_n^{2+\lambda}} - \frac{2\Omega^2 (-1)^m \delta_{j,2m+1}}{\Delta_{7m}} \quad (m = 1, 2, \dots, N) \\ K_j &= \frac{(-1)^N}{2} \left( \frac{z_{2N,j} \beta_N^{2+\lambda}}{b} + \frac{z_{2N+1,j} \alpha_N^{2+\lambda}}{a} \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Очевидно, если провести аналогичный анализ для тождества

$$(A^{free})^{-1} A^{free} = I,$$

получим те же результаты для строк матрицы  $A^{free}$ , то есть решение (4.37) и асимптотика (4.36) уже при небольших значениях  $N$  дает возможность найти все бесконечное множество элементов матрицы  $A^{free}$ .

Алгоритм обращения матрицы  $A^{free}$  из решения (4.37) остается без изменений и для всех других типов симметрии, в том числе и в общем случае ортотропной пластины. Остается справедливой и степенная асимптотика (4.29), которая для общего случая переходит в формулы, представленные в п.3.1.

Таким образом, удастся получить связь между коэффициентами Фурье граничных значений смещений и усилий. Построенная зависимость для каждого типа симметрии может быть записана более компактно в форме

$$f_S^{ki} = \mathbf{K}^{kj} d_S^{kj},$$

где для каждого типа симметрии  $\mathbf{K}^{kj}$  - спектральные динамические матрицы

жесткости;  $f_S^{ki} = -D \begin{bmatrix} \mathbf{V}_a^{kj} \\ \mathbf{V}_b^{kj} \\ \mathbf{M}_a^{kj} \\ \mathbf{M}_b^{kj} \end{bmatrix}$ ;  $d_S^{ki} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_a^{kj} \\ \mathbf{W}_b^{kj} \\ \boldsymbol{\Phi}_a^{kj} \\ \boldsymbol{\Phi}_b^{kj} \end{bmatrix}$  - последовательности коэффициентов Фурье

граничных усилий и смещений соответственно, при записи которых принято

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_a^{kj} &= \{\delta_{k0} W_{a0}, W_{a1}, \dots, W_{am}, \dots\}^T, & \mathbf{W}_b^{kj} &= \{\delta_{j0} W_{b0}, W_{b1}, \dots, W_{bm}, \dots\}^T \\ \boldsymbol{\Phi}_a^{kj} &= \{\delta_{k0} \phi_{a0}, \phi_{a1}, \dots, \phi_{am}, \dots\}^T, & \boldsymbol{\Phi}_b^{kj} &= \{\delta_{j0} \phi_{b0}, \phi_{b1}, \dots, \phi_{bm}, \dots\}^T \\ \mathbf{V}_a^{kj} &= \{\delta_{k0} V_{a0}, V_{a1}, \dots, V_{am}, \dots\}^T, & \mathbf{V}_b^{kj} &= \{\delta_{j0} V_{b0}, V_{b1}, \dots, V_{bm}, \dots\}^T \\ \mathbf{M}_a^{kj} &= \{\delta_{k0} M_{a0}, M_{a1}, \dots, M_{am}, \dots\}^T, & \mathbf{M}_b^{kj} &= \{\delta_{j0} M_{b0}, M_{b1}, \dots, M_{bm}, \dots\}^T. \end{aligned}$$

4.2.3. Алгоритм построения спектральной динамической матрицы жесткости элемента  $\mathbf{K}$  в общем случае.

Векторы граничных смещений  $d^{kj}$  и усилий  $f^{kj}$  (4.13) для каждого типа симметрии  $(k, j)$ , связанные посредством матриц  $\mathbf{K}^{kj}$ , позволяют записать граничные смещения и усилия на сторонах пластины (4.2) следующим образом

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} W_1^0 + W_1^1 \\ \phi_1^0 + \phi_1^1 \\ W_2^0 + W_2^1 \\ \phi_2^0 + \phi_2^1 \\ W_3^0 + W_3^1 \\ \phi_3^0 + \phi_3^1 \\ W_4^0 + W_4^1 \\ \phi_4^0 + \phi_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_a^{00} + W_a^{01} + W_a^{10} + W_a^{11} \\ \phi_a^{00} + \phi_a^{01} + \phi_a^{10} + \phi_a^{11} \\ W_b^{00} + W_b^{01} + W_b^{10} + W_b^{11} \\ \phi_b^{00} + \phi_b^{01} + \phi_b^{10} + \phi_b^{11} \\ W_a^{00} + W_a^{01} - W_a^{10} - W_a^{11} \\ -\phi_a^{00} - \phi_a^{01} + \phi_a^{10} + \phi_a^{11} \\ W_b^{00} - W_b^{01} + W_b^{10} - W_b^{11} \\ -\phi_b^{00} + \phi_b^{01} - \phi_b^{10} + \phi_b^{11} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

и

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} V_1^0 + V_1^1 \\ M_1^0 + M_1^1 \\ V_2^0 + V_2^1 \\ M_2^0 + M_2^1 \\ V_3^0 + V_3^1 \\ M_3^0 + M_3^1 \\ V_4^0 + V_4^1 \\ M_4^0 + M_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a^{00} + V_a^{01} + V_a^{10} + V_a^{11} \\ M_a^{00} + M_a^{01} + M_a^{10} + M_a^{11} \\ V_b^{00} + V_b^{01} + V_b^{10} + V_b^{11} \\ M_b^{00} + M_b^{01} + M_b^{10} + M_b^{11} \\ V_a^{00} + V_a^{01} - V_a^{10} - V_a^{11} \\ -M_a^{00} - M_a^{01} + M_a^{10} + M_a^{11} \\ V_b^{00} - V_b^{01} + V_b^{10} - V_b^{11} \\ -M_b^{00} + M_b^{01} - M_b^{10} + M_b^{11} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Здесь «0» в верхнем индексе левой части равенств обозначает симметричную составляющую, а «1» - кососимметричную.

Из равенств (4.38), (4.39) можно выразить смещения на двух противоположных сторонах пластины через значения смещений  $d^{kj}$ . Так на сторонах  $x = \pm a$  получаем:

$$[W_1^0, W_1^1, W_3^0, W_3^1]^T = \mathbf{T}_1 [W_a^{00}, W_a^{01}, W_a^{10}, W_a^{11}]^T, [\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_3^0, \phi_3^1]^T = \mathbf{T}_3 [\phi_a^{00}, \phi_a^{01}, \phi_a^{10}, \phi_a^{11}]^T \quad (4.40)$$

и на сторонах  $y = \pm b$ :

$$[W_2^0, W_2^1, W_4^0, W_4^1]^T = \mathbf{T}_2 [W_b^{00}, W_b^{01}, W_b^{10}, W_b^{11}]^T, [\phi_2^0, \phi_2^1, \phi_4^0, \phi_4^1]^T = \mathbf{T}_4 [\phi_b^{00}, \phi_b^{01}, \phi_b^{10}, \phi_b^{11}]^T \quad (4.41)$$

где матрицы перехода  $\mathbf{T}_j$  имеют вид:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Заметим также, что матрицы перехода обладают следующим свойством

$$\mathbf{T}_j^{-1} = \frac{1}{2} \mathbf{T}_j^T,$$

которое легко проверить непосредственной подстановкой.

Тогда формулы (4.40), (4.41) допускают простое обращение, например

$$[W_a^{00}, W_a^{01}, W_a^{10}, W_a^{11}]^T = \frac{1}{2} \mathbf{T}_1^T [W_1^0, W_1^1, W_3^0, W_3^1]^T \quad (4.43)$$

Аналогичным образом оказываются связанными также и компоненты силовых характеристик. Ниже приводятся эти формулы на сторонах  $x = \pm a$ :

$$[V_1^0, V_1^1, V_3^0, V_3^1]^T = \mathbf{T}_1 [V_a^{00}, V_a^{01}, V_a^{10}, V_a^{11}]^T, [M_1^0, M_1^1, M_3^0, M_3^1]^T = \mathbf{T}_3 [M_a^{00}, M_a^{01}, M_a^{10}, M_a^{11}]^T \quad (4.44)$$

и на сторонах  $y = \pm b$ :

$$\begin{bmatrix} V_2^0, V_2^1, V_4^0, V_4^1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{T}_2 \begin{bmatrix} V_b^{00}, V_b^{01}, V_b^{10}, V_b^{11} \end{bmatrix}^T, \quad \begin{bmatrix} M_2^0, M_2^1, M_4^0, M_4^1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{T}_4 \begin{bmatrix} M_b^{00}, M_b^{01}, M_b^{10}, M_b^{11} \end{bmatrix}^T \quad (4.45)$$

Введем последовательности коэффициентов Фурье для векторов граничных смещений  $\vec{d}$  и усилий  $\vec{f}$ :

$$f_S = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}; \quad d_S = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

где  $f_i = [V_i^0, V_i^1, M_i^0, M_i^1]^T$ ,  $d_i = [W_i^0, W_i^1, \Phi_i^0, \Phi_i^1]^T$ ,

$$W_i^0 = \{W_{i0}^0, W_{i1}^0, \dots, W_{im}^0, \dots\}^T, \quad W_i^1 = \{W_{i1}^1, \dots, W_{im}^1, \dots\}^T$$

$$\Phi_i^0 = \{\Phi_{i0}^0, \Phi_{i1}^0, \dots, \Phi_{im}^0, \dots\}^T, \quad \Phi_i^1 = \{\Phi_{i1}^1, \dots, \Phi_{im}^1, \dots\}^T$$

$$V_i^0 = \{V_{i0}^0, V_{i1}^0, \dots, V_{im}^0, \dots\}^T, \quad V_i^1 = \{V_{i1}^1, \dots, V_{im}^1, \dots\}^T$$

$$M_i^0 = \{M_{i0}^0, M_{i1}^0, \dots, M_{im}^0, \dots\}^T, \quad M_i^1 = \{M_{i1}^1, \dots, M_{im}^1, \dots\}^T$$

Данные последовательности можно выразить через коэффициенты Фурье  $f_S^{kj}$  и  $d_S^{kj}$  каждого типа симметрии в отдельности в виде

$$f_S = \mathbf{T} [f_S^{00}, f_S^{01}, f_S^{10}, f_S^{11}] \quad \text{и} \quad d_S = \mathbf{T} [d_S^{00}, d_S^{01}, d_S^{10}, d_S^{11}] \quad (4.47)$$

при помощи следующей матрицы перехода

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & E_n \\ -E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}$$

где  $E_n$  - единичная матрица порядка  $n$ ,  $0$  – нулевая матрица.

Структура матрицы перехода  $\mathbf{T}$  показывает, что она является объединением матриц  $\mathbf{T}_j$  из (4.42) и, как следствие, обладает свойством

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2} \mathbf{T}^T.$$

Тогда (4.47) допускает обращение в виде

$$[f_S^{00}, f_S^{01}, f_S^{10}, f_S^{11}] = \frac{1}{2} \mathbf{T}^T f_S \quad \text{и} \quad [d_S^{00}, d_S^{01}, d_S^{10}, d_S^{11}] = \frac{1}{2} \mathbf{T}^T d_S,$$

и спектральная матрица динамической жесткости для прямоугольной пластины, дающая зависимость

$$f_S = \mathbf{K} d_S,$$

выражается в виде

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \mathbf{T} \begin{pmatrix} K^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^{11} \end{pmatrix} \mathbf{T}^T. \quad (4.48)$$

При практической реализации, в последовательностях коэффициентов Фурье удерживается некоторое число  $N$  первых компонентов, и все матрицы, входящие в представленные выше формулы оказываются конечными. При этом матрицы  $\mathbf{K}^{kj}$  оказываются порядка  $4N \times 4N$ , а спектральная DSM матрица  $\mathbf{K}$  порядка  $16N \times 16N$ .

### 4.3. Процедура стыковки элементов структуры

Подобно классическому DSM методу для пластин с шарнирно-опертым краем, процедура стыковки матриц динамической жесткости каждой из пластин ансамбля, близка к аналогичной процедуре метода конечных элементов с тем отличием, что стыковка проводится не через точечные узлы, а через линии стыковки. Однако, если для пластин с шарнирно-опертыми краями [227] стыковка проводится лишь в направлении не шарнирно-опертых сторон, то в представленной теории стыковка может осуществляться в обоих направлениях.

На рис. 4.2. представлена простейшая структура в виде уголка, для которой стыковка трех структурных элементов в форме прямоугольных пластин осуществляется как в направлении оси  $Ox$ , так и в направлении оси  $Oy$ . Стороны каждой из пластин обозначены  $l_j$ . Очевидно, что объединение структуры должно осуществляться по линиям  $l_3$  и  $l_6$ . Обозначим как  $f_S^\mu$  и  $d_S^\mu$  ( $\mu = I, II, III$ ) последовательности коэффициентов Фурье для векторов граничных смещений  $\vec{d}$  и усилий  $\vec{f}$  каждой из пластин. Эти последовательности, согласно разделу 4.2, оказываются связанными посредством равенства

$$f_S^\mu = \mathbf{K}_\mu d_S^\mu \quad (4.49)$$

где  $\mathbf{K}_\mu$  - спектральная динамическая матрица жесткости пластины ( $\mu$ ).

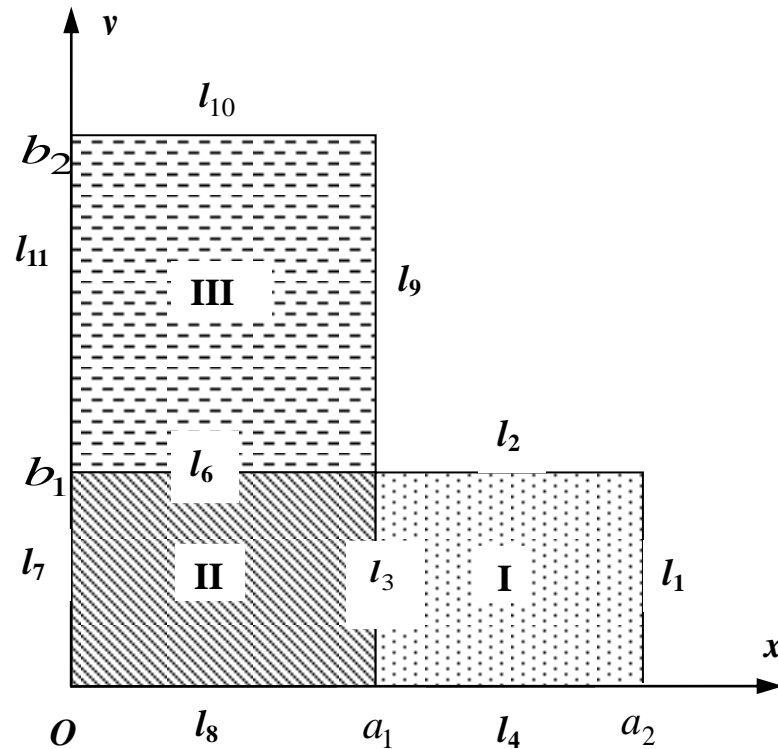


Рис. 4.2. Стыковка трех пластин для структуры в виде уголка

Введем теперь аналогичные последовательности для всей структуры, изображенной на рис. 4.2. Обозначим их как  $f_i = [\mathbf{V}_i^0, \mathbf{V}_i^1, \mathbf{M}_i^0, \mathbf{M}_i^1]^\Gamma$ ,  $d_i = [\mathbf{W}_i^0, \mathbf{W}_i^1, \Phi_i^0, \Phi_i^1]^\Gamma$  для каждого из имеющихся восьми граничных отрезков  $l_j$  и

двух отрезков  $l_3$  и  $l_6$ , по которым осуществляется стыковка. Тогда для первой пластины получаем из (4.49):

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} K_I^{11} & K_I^{12} & K_I^{13} & K_I^{14} \\ K_I^{21} & K_I^{22} & K_I^{23} & K_I^{24} \\ K_I^{31} & K_I^{32} & K_I^{33} & K_I^{34} \\ K_I^{41} & K_I^{42} & K_I^{43} & K_I^{44} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

а также для второй и третьей пластины:

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} K_{II}^{11} & K_{II}^{12} & K_{II}^{13} & K_{II}^{14} \\ K_{II}^{21} & K_{II}^{22} & K_{II}^{23} & K_{II}^{24} \\ K_{II}^{31} & K_{II}^{32} & K_{II}^{33} & K_{II}^{34} \\ K_{II}^{41} & K_{II}^{42} & K_{II}^{43} & K_{II}^{44} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} K_{III}^{11} & K_{III}^{12} & K_{III}^{13} & K_{III}^{14} \\ K_{III}^{21} & K_{III}^{22} & K_{III}^{23} & K_{III}^{24} \\ K_{III}^{31} & K_{III}^{32} & K_{III}^{33} & K_{III}^{34} \\ K_{III}^{41} & K_{III}^{42} & K_{III}^{43} & K_{III}^{44} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d_9 \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_6 \end{bmatrix}.$$

Равенство силовых компонентов на линиях стыковки дает два уравнения для стыковки представленных матриц

$$f_3 = K_I^{11}d_1 + K_I^{12}d_2 + K_I^{13}d_3 + K_I^{14}d_4 = K_{II}^{11}d_3 + K_{II}^{12}d_6 + K_{II}^{13}d_7 + K_{II}^{14}d_8,$$

$$f_6 = K_{II}^{21}d_3 + K_{II}^{22}d_6 + K_{II}^{23}d_7 + K_{II}^{24}d_8 = K_{III}^{41}d_9 + K_{III}^{42}d_{10} + K_{III}^{43}d_{11} + K_{III}^{44}d_6,$$

которые позволяют исключить силовые характеристики  $f_3$  и  $f_6$  из рассмотрения. Вообще говоря, кинематические характеристики  $d_3$  и  $d_6$  также можно явно выразить из этих двух уравнений через кинематические характеристики на краях уголкового структуры, однако, учитывая, что записанные равенства являются матричными уравнениями, то чтобы избежать процедуры численного обращения матриц предлагается их оставить.

Объединение данных соотношений для структуры, изображенной на рис. 4.2, представлено ниже



$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ f_4 \\ 0 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} K_I^{11} & K_I^{12} & K_I^{13} & K_I^{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_I^{21} & K_I^{22} & K_I^{23} & K_I^{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_I^{31} & K_I^{23} & K_I^{33} - K_{II}^{11} & K_I^{34} & -K_{II}^{12} & -K_{II}^{13} & -K_{II}^{14} & 0 & 0 & 0 \\ K_I^{41} & K_I^{24} & K_I^{34} & K_I^{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{II}^{21} & 0 & K_{II}^{22} - K_{III}^{44} & K_{II}^{23} & K_{II}^{24} & -K_{III}^{41} & -K_{III}^{42} & -K_{III}^{43} \\ 0 & 0 & K_{II}^{31} & 0 & K_{II}^{32} & K_{II}^{33} & K_{II}^{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{II}^{41} & 0 & K_{II}^{42} & K_{II}^{43} & K_{II}^{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{III}^{14} & 0 & 0 & K_{III}^{11} & K_{III}^{12} & K_{III}^{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{III}^{24} & 0 & 0 & K_{III}^{21} & K_{III}^{22} & K_{III}^{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{III}^{34} & 0 & 0 & K_{III}^{31} & K_{III}^{32} & K_{III}^{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \\ d_{11} \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

где «0» - блок нуль - матрицы,  $K_{\mu}^{ij}$  - соответствующий блок динамической матрицы жесткости элемента ( $\mu$ ).

Заданные произвольные граничные условия на сторонах механической структуры преобразуются в векторную форму  $f_i = [\mathbf{V}_i^0, \mathbf{V}_i^1, \mathbf{M}_i^0, \mathbf{M}_i^1]^T$ ,  $d_i = [\mathbf{W}_i^0, \mathbf{W}_i^1, \boldsymbol{\varphi}_i^0, \boldsymbol{\varphi}_i^1]^T$  при помощи разложения в ряды Фурье. При этом равенство (4.51) рассматривается как система уравнений (матричное уравнение) относительно неизвестных элементов векторов смещений и усилий. Равенство нулю определителя этой системы дает дисперсионное уравнение для определения собственных частот колебаний ансамбля пластин, а собственный вектор, соответствующий этому значению, дает коэффициенты Фурье собственных форм колебаний. Так, например, для граничных условий свободного края в (4.51) все силовые компоненты полагаются равными нулю  $f_i = 0$ , и равенство нулю определителя матрицы (4.51) позволяет найти собственные частоты колебания. В остальных случаях граничных условий на границе области задаются восемь компонентов из  $\{f_i, d_i\}$ , оставшиеся же восемь граничных компонентов  $\{f_i, d_i\}$  вместе с  $d_3$  и  $d_6$  задают матричный блок  $10 \times 10$  для матрицы, определитель которой и дает дисперсионное уравнение для исследования данной краевой задачи.

#### 4.4. Численные результаты

Представленная выше теория программно реализована в пакете Mathematica для вычисления собственных частот колебаний и собственных форм прямоугольных пластин и их ансамблей с различными граничными условиями. Вначале было проведено сравнение полученных значений собственных частот согласно спектральному методу динамической жесткости (DSM) со значениями известными в литературе.

Первые десять собственных значений квадратной пластины ( $a / b = 1, \nu = 0.3$ ) со свободными краями, вычисленные согласно DSM представлены в табл. 4.1. Для проверки сходимости метода безразмерные частоты  $\Omega = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 / D}$  вычислялись для двух различных значений  $N$ , где  $N$  – число удерживаемых первых членов в тригонометрических рядах, представляющих граничные смещения и усилия. Можно увидеть, что уже при  $N = 4$  получаем удовлетворительную точность практически для всех представленных частот, при  $N = 10$  точность результата составляет пять значащих цифр. В качестве эталонного решения использовалось решение задачи о поперечных колебаниях прямоугольных пластин [80], представленное в третьей главе диссертации.

Таблица 4.1. Первые собственные частоты  $\Omega = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 / D}$  изотропной квадратной пластины ( $a / b = 1, \nu = 0.3$ ) со свободным краем F-F-F-F

	$N = 4$	$N = 10$	[80]
1	1.8349	1.8349	1.8350
2	2.2133	2.2133	2.2134
3	2.4632	2.4632	2.4633
4	2.9498	2.9496	2.9496
5	3.9081	3.9081	3.9081
6	3.9911	3.9902	3.9902
7	4.1613	4.1612	4.1613
8	4.3928	4.3923	4.3924
9	5.1354	5.1347	5.1347
10	5.4226	5.4108	5.4108

Некоторые формы колебаний, полученные на основе описанного подхода, представлены на рис. 4.3. Данные формы колебаний соответствуют типичным фигурам Хладни (см. раздел 3.1). На данном рисунке шестая мода (*a*) и десятая мода (*d*) соответствуют симметричным по обеим осям колебаниям, седьмая мода (*b*) представляет кососимметрические по обеим осям колебания, в то время как девятая мода (*c*) симметрична в направлении оси *x* и кососимметрична в направлении оси *y*.

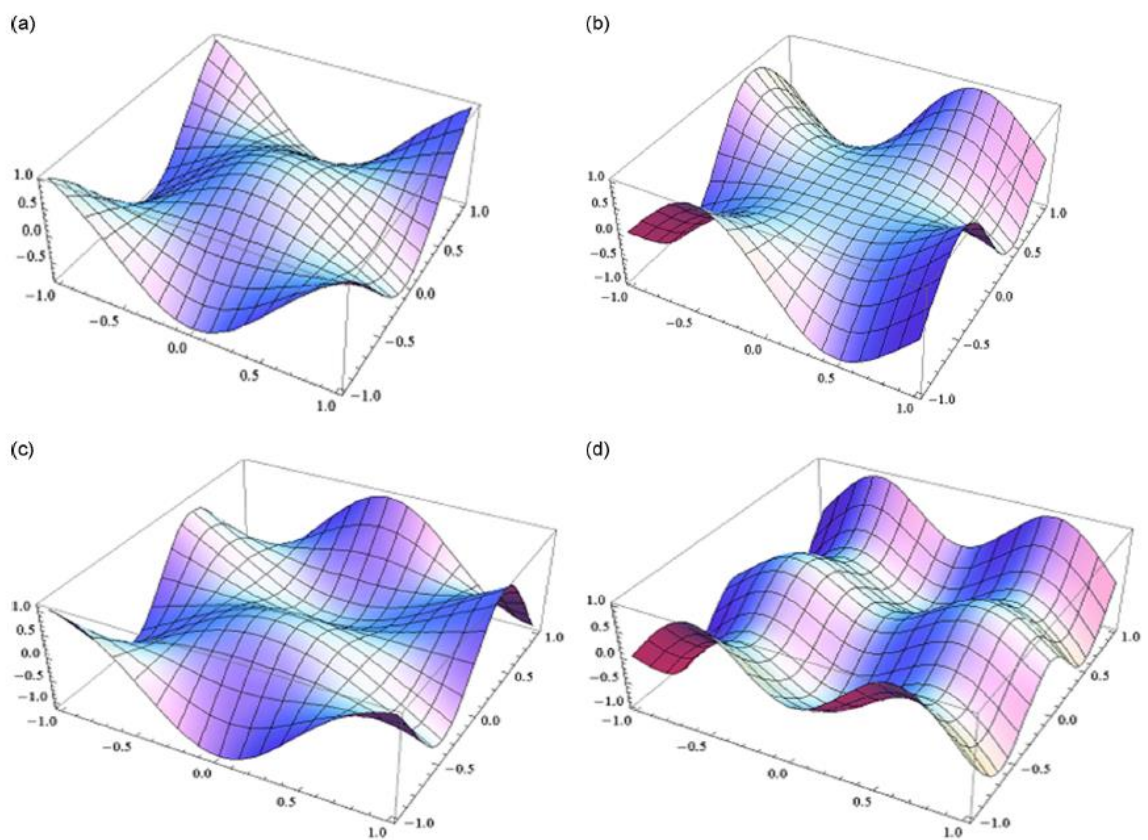


Рис. 4.3. Собственные формы колебаний изотропной квадратной пластины ( $\nu=0,3$ ) со свободным краем: (*a*) - шестая, (*b*) - седьмая, (*c*) -девятая, (*d*) - десятая.

Для полноты сравнения в табл. 4.2 представлены значения частотного параметра  $\lambda=4\Omega^2$  для той же задачи, вычисленные при помощи спектральной матрицы динамической жесткости в сравнении с данными [188], где использовался подход на основе метода Рэлея – Ритца. Данные этой таблицы

опять показывают хорошее соответствие результатов. Заметим также, что, в отличие от метода Рэлея – Ритца, данный результат достигается при значительно меньшем числе слагаемых в представлении решения.

Далее, первые собственные частоты прямоугольной пластины ( $a/b = 2$ ,  $\nu=0.3$ ) со свободным краем, вычисленные на основе разработанного в диссертации DSM метода, сравнивались с аналогичными значениями, полученными при помощи метода, представленного в третьей главе диссертации (табл. 4.3). Изменение геометрии элемента не меняет характера сходимости, опять уже при удерживаемых первых  $N=4$  членах тригонометрических рядов можно наблюдать удовлетворительную погрешность в определении полученных значений собственных частот.

Таблица 4.2. Сравнение первых собственных частот  $\Omega = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 / D}$  изотропной квадратной пластины ( $a/b = 1$ ,  $\nu = 0.3$ ) со свободным краем F-F-F-F с аналогичными результатами на основе метода Рэлея – Ритца.

$n$	$N = 10$	[188]
1	13.4682	13.4728
2	19.5960	19.5961
3	24.2702	24.2702
4	34.8008	34.8011
5	61.0949	61.0932
6	63.6868	63.6870
7	69.2653	69.5020
8	77.1724	77.5897
9	105.461	105.463
10	117.108	117.109

Для проверки общности подхода рассматривались также и другие типы граничных условий для элемента. Так в табл. 4.4 показаны первые десять собственных частот квадратной ( $a/b = 1$ ) изотропной пластины с полностью защемленными краями. В расчетах полагалось  $N = 10$ . Результаты сравнивались с с верхними и нижними границами для собственных частот, найденных [188].

Сравнивались также собственные значения для смешанных граничных условий, когда две противоположные стороны пластины свободны, а две другие полностью заземленные. Результаты вычислений по представленному методу сверялись с результатами [188] для симметричных по обеим координатам мод колебаний. Эти данные представлены в табл. 4.5.

Таблица 4.3. Первые собственные частоты  $\Omega = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 / D}$  изотропной пластины ( $a / b = 2, \nu = 0.3$ ) со свободным краем F-F-F-F

$n$	$N = 4$	$N = 10$	Асимптотически точное решение
1	1.15821	1.15821	1.1582
2	1.28880	1.28877	1.2888
3	1.91185	1.91132	1.9113
4	1.93014	1.93012	1.9301
5	2.34538	2.34534	2.3453
6	2.51932	2.51873	2.5187
7	2.54960	2.54954	2.5495
8	2.73240	2.72404	2.7240
9	3.00405	3.00190	3.0019
10	3.12925	3.16428	3.1642

Таблица 4.4. Первые собственные частоты  $\lambda = 4\Omega^2$  изотропной квадратной пластины с заземленным краем C-C-C-C в сравнении с данными [188]

$n$	$N = 10$	Нижние границы	Верхние границы
1	35.9849	35.976	35.985
2	131.581	131.50	131.58
3	132.204	132.13	132.21
4	220.031	219.08	220.06
5	308.900	308.60	308.91
6	309.162	308.99	309.17
7	392.761	388.74	392.85
8	393.896	391.40	393.98
9	562.107	544.75	562.38
10	565.536	564.99	565.40

Таблица 4.5. Первые собственные частоты  $\lambda = 4\Omega^2$  изотропной пластины при смешанных краевых условиях C-F-C-F в сравнении с данными [188]

Моды		$N = 10$	[188]
$a/b=1$	1	22.165	22.17
	2	43.589	43.6
	3	120.09	120.1
	4	136.89	136.9
	5	149.29	149.3
$a/b=2$	1	5.5074	5.51
	2	27.358	27.3
	3	29.855	29.9
	4	56.968	56.9
	5	73.968	74.0

В таблице 4.6 представлен анализ вычислительной эффективности предложенного метода спектральной динамической жесткости в сравнении с методом конечных элементов (ABAQUS). В данной таблице представлены собственные частоты элемента в виде прямоугольной пластины при двух типах граничных условий (FFFF и CCCC). Можно увидеть, что аналогично предыдущим расчетам для изотропного материала, удержание  $N = 10$  дает четыре значащие цифры для собственных частот колебаний, при  $N = 20$  уже более шести значащих цифр. Эту же точность дает расчет в программе ABAQUS при сетке  $300 \times 300$  с использованием элементов S4R5, при этом время вычислений оказывается почти в 100 раз большим. Заметим, что в расчетах при меньшем числе элементов программа ABAQUS дает погрешность на указанных частотах до 10%.

Таблица 4.6. Сходимость и вычислительная эффективность метода спектральной динамической жесткости в сравнении с методом конечных элементов (ABAQUS 300×300)

$N$	Собственные частоты $\Omega$ квадратной пластины $D_1 / D_2 = 10, D_{66} / D_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25$						Знач. цифры	Время ожидан ия (s)
	5	6	7	8	9	10		
FFFF								
5	1.65297	1.97760	2.36466	2.49495	2.74719	2.90039	3	0.15
10	1.65297	1.97740	2.36466	2.49489	2.74718	2.89991	4	0.16
20	1.65297	1.97737	2.36466	2.49488	2.74718	2.89983	> 6	0.22
FEM	1.65303	1.97731	2.36469	2.49484	2.74727	2.89970	4	49.00
CCCC								
5	3.14649	3.99557	4.05737	4.26632	4.81067	5.07834	5	0.12
10	3.14649	3.99557	4.05737	4.26632	4.81067	5.07834	6	0.14
20	3.14649	3.99557	4.05737	4.26632	4.81067	5.07834	> 6	0.16
FEM	3.14651	3.99550	4.05752	4.26629	4.81069	5.07863	4	43.00

В качестве примера механической структуры, составленной из прямоугольных элементов, рассматривалась пластина в виде равнобокого уголка (см. рис. 4.2) при разных граничных условиях. В табл. 4.7 представлены первые пять собственных частот колебаний для полностью защемленной пластины в сравнении с данными [178], которые были получены на основе метода двойных рядов Фурье. В представленных расчетах удерживалось  $N = 10$ .

Таблица 4.7. Первые собственные частоты  $\Omega = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 / D}$  изотропной

пластины в виде уголка ( $a_1 : b_1 : a_2 : b_2 = 5 : 5 : 3 : 3$ ) с полностью защемленным краем

$n$	DSM $N = 10$	[178]
1	7.552	7.556
2	9.139	9.145
3	10.25	10.25
4	12.11	12.11
5	12.23	12.24

Можно увидеть, что значения собственных частот, вычисленные на основе двух различных подходов, практически совпадают с точностью до погрешности округления.

Таблица 4.8. Первые собственные частоты  $\Omega = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 / D}$  изотропной

пластины в виде уголка ( $a_1 : b_1 : a_2 : b_2 = 2 : 2 : 1 : 1$ ,  $\nu = 0.29$ ) с шарнирно-опертыми краями

$n$	DSM $N = 10$	Метод конечных элементов	[175]
1	6.214	6.220	6.198
2	7.795	7.802	7.862
3	8.909	8.902	8.922
4	10.983	10.882	10.900
5	11.329	11.340	11.384

В табл. 4.8 представлены собственные частоты колебаний изотропной пластины в форме уголка ( $\nu = 0.29$ ), когда края пластины шарнирно-оперты. При расчете динамических матриц жесткости  $\mathbf{K}^{kj}$  каждой из пластин в вычислениях удерживалось  $N = 10$ . Таким образом, в результате получаем для каждого элемента матрицы жесткости размера  $160 \times 160$  и общую матрицу уголка размера  $400 \times 400$ . Значения собственных частот сверялись с результатами расчетов при помощи метода конечных элементов (пакет NASTRAN) при 1302 узлах, и с результатами полуаналитического метода [175]. Данные табл. 6.7 показывают, что



все три метода дают достаточно близкие результаты. Заметим, что значения по DSM методу оказываются ближе к аналогичным значениям по методу конечных элементов.

Рассмотрим далее составную защемленную пластину (рис. 4.4) из двух изотропных пластин, у которых значительно различаются модули упругости  $E_I / E_{II} = 8 / 1$  при  $\nu = 0.25$ . В следующей таблице 4.9 даны первые десять собственных частот этой пластины в сравнении с собственными частотами однородной пластины с модулем упругости  $E_I$ .

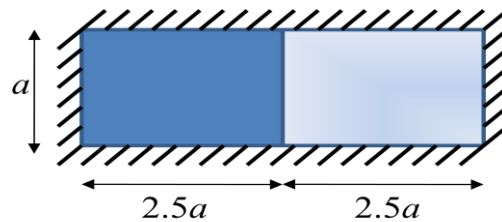


Рис. 4. 4. Составная пластина.

Таблица 4.9. Собственные частоты  $\Omega$  изотропной защемленной пластины  $\nu = 0.25$  ( $a : b = 5 : 1$ )  $E_I / E_{II} = 8 / 1$

$n$	Составная пластина (рис.4.4)	Однородная пластина
1	1.4425	2.3787
2	1.5536	2.4934
3	1.7331	2.7371
4	1.9569	2.4207
5	2.1948	2.5988
6	2.3601	2.9062
7	2.4356	3.9368
8	2.4584	4.0187
9	2.5133	4.0903
10	2.5592	4.1823

Из данных таблицы 4.9. можно увидеть, что спектр собственных частот составной (ослабленной) пластины лежит значительно ниже по сравнению с однородной пластиной. На рис. 4.5 представлены характерные формы колебаний соответствующие данным частотам. На первых частотах более жесткая часть

составной пластины остается в покое, в то же время более податливая составляющая дает собственную форму. С увеличением частоты колебаний начинаются колебания и для более жесткой составляющей, при этом можно найти формы колебаний, где именно эта часть определяет собственную форму колебаний пластины, тогда как вторая часть остается относительно невозмущенной. Для однородной пластины эти эффекты отсутствуют.

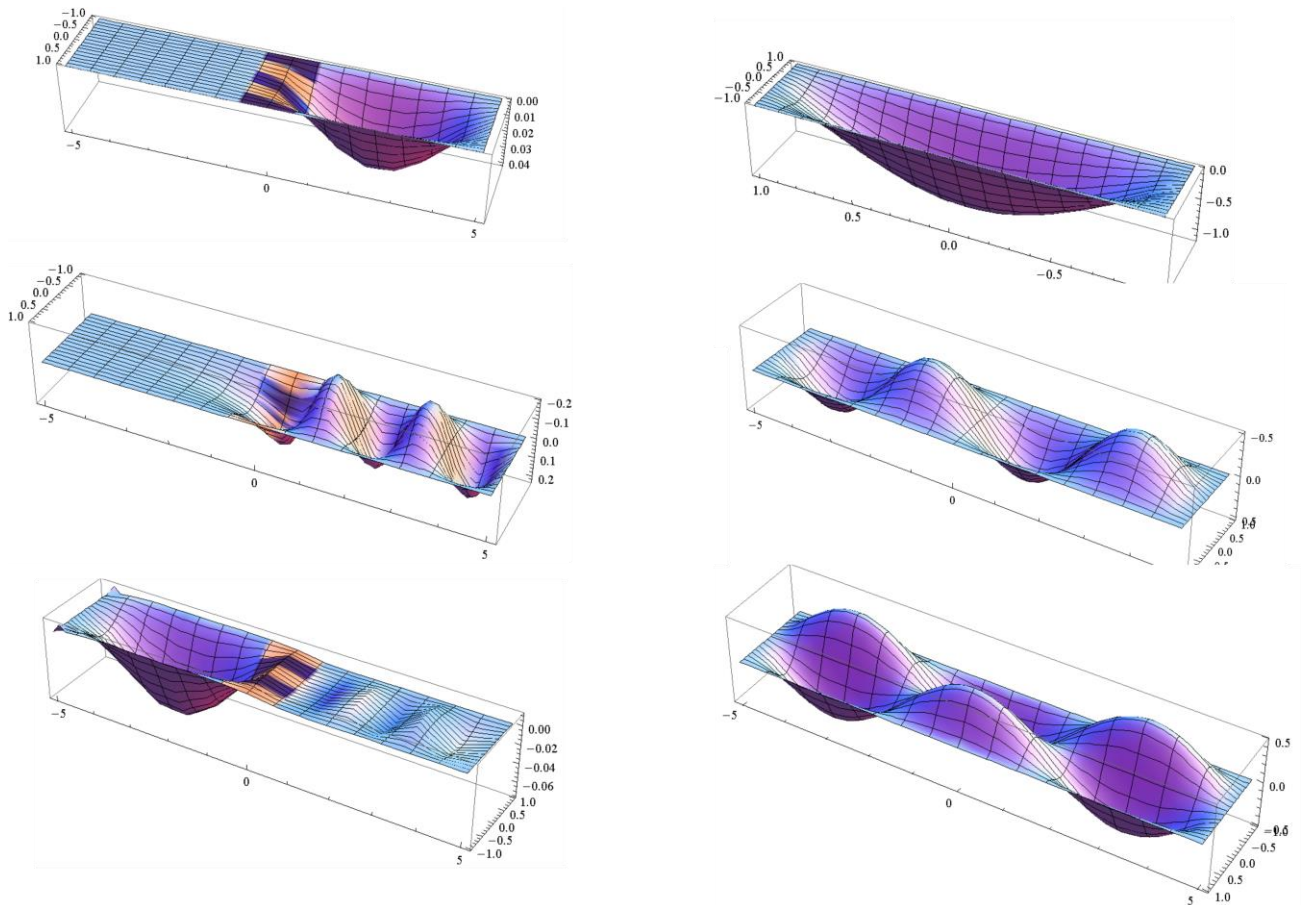


Рис.4.5. Собственные формы колебаний №1, 5 и 9 для составной пластины (слева) и однородной (справа)

На рис. 4.6 представлена составная пластина из трех частей при смешанных граничных условиях, при этом материал каждого элемента предполагался изотропным и отличающимся модулем упругости (средняя часть пластины более податлива  $E_I / E_{II} = 8 / 1$ ,  $E_I = E_{III}$ )/

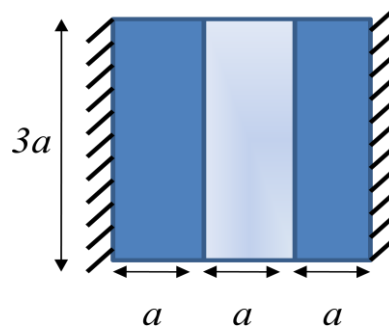


Рис. 4.6 Составная пластина из трех элементов

В таблице 4.10 представлены собственные частоты данной пластины, вычисленные на основе метода спектральной динамической жесткости в сравнении с частотами однородной пластины.

Таблица 4.10. Собственные частоты  $\Omega$  изотропной пластины  $\nu = 0.3$ 

$$(a : b = 1 : 1), E_I / E_{II} = 8 / 1, E_I = E_{III}$$

$n$	Однородная пластина	Составная пластина (рис.)
1	2.3539	0.8694
2	2.5691	0.9099
3	3.3010	0.9328
4	3.9105	0.9340
5	4.0976	0.9992
6	4.4668	1.4321
7	4.6792	1.5213
8	5.4779	1.7552
9	5.5778	1.8459
10	5.6279	1.8665

Снова можно увидеть, что податливая вставка и при смешанных граничных условиях приводит к более низким частотам резонанса. При этом наблюдается следующий эффект: если для однородной пластины первые частоты соответствуют симметричным формам колебаний, то для составной пластины первые формы колебаний являются кососимметричными. Для иллюстрации этого факта на рис. 4.7 представлены первые собственные формы колебаний составной и однородной пластин при данных граничных условиях.

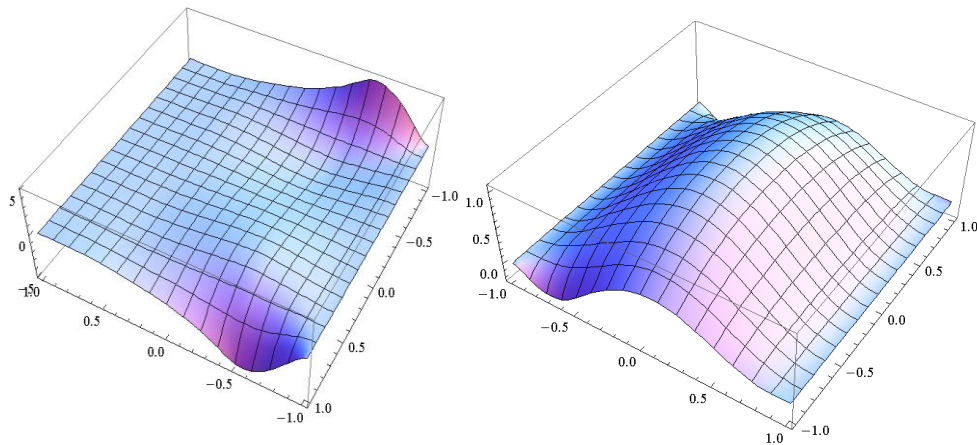


Рис. 4.7. Первые собственные формы для составной пластины (слева) и для однородной пластины (справа)

#### 4.5. Краткие выводы к главе 4.

Таким образом, построена спектральная динамическая матрица жесткости для структурного элемента в форме изотропной прямоугольной пластины, связывающая кинематические и силовые характеристики на краях пластины. При этом, ее построение оказывается возможным благодаря представленной во второй главе диссертации асимптотической теории бесконечных систем линейных уравнений, и полученному на ее основе асимптотически точному решению задачи о поперечных колебаниях пластины со свободным краем.

Данные численного моделирования показывают, что разработанный спектральный метод динамической жесткости дает возможность для анализа свободных колебаний прямоугольных пластин и их ансамблей при различных граничных условиях. Сравнение полученных значений собственных частот как для одного элемента, так и для простейшей механической структуры в виде равнобокого уголка с известными в литературе результатами, подтверждает достоверность вычисленных значений собственных частот.

К недостаткам представленного подхода следует отнести достаточно быстрый рост размерности спектральной динамической матрицы жесткости структуры. Так при удержании в представлении кинематических и силовых характеристик  $N$  первых членов рядов Фурье, общая динамическая матрица

жесткости уголковой структуры уже имеет размер  $(40N) \times (40N)$ , что ограничивает возможности подхода.

Преимущество данного метода заключается в возможности анализа колебаний в области средних и высоких частот, в возможности стыковки элементов из различного материала, а также в достаточно простом обобщении описанного подхода на случай анизотропного материала. Заметим также, что представленные материалы использованы в ряде работ [191 - 193] зарубежных авторов.

Материалы данной главы диссертации опубликованы в статьях [88, 142], представлены на международной конференции [190].

## ГЛАВА 5. АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОЛЕБАНИЙ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛ

### 5.1. Установившиеся вынужденные колебания прямоугольной изотропной пластины в случае силовых граничных условий

Имеется два основных аналитических подхода к построению решений задач динамики для прямоугольной пластины в случае обобщенного плоского напряженного состояния или для бесконечной прямоугольной призмы в случае плоской деформации. Это метод однородных решений [199, 200] и метод суперпозиции [39 - 42]. В том и в другом методах используются оценки решений квазирегулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Как уже указывалось во второй главе диссертации, надежный метод вычисления верхних и нижних оценок ограниченных решений существует только для линейных регулярных бесконечных систем с неотрицательными коэффициентами. Это метод лимитант Б.М. Кояловича [57]. Он нашел применение в бигармонических краевых задачах статики [57, 41, 133, 153]. Существенным недостатком метода лимитант является необходимость решать большое количество конечных систем линейных алгебраических уравнений согласно процедуре последовательных приближений. Недавно с помощью предельного перехода метод лимитант был модифицирован [134] в метод «предельных лимитант», который предполагает находить решения только двух вспомогательных конечных систем.

#### 5.1.1. Постановка краевой задачи и бесконечная система линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания прямоугольной пластины (рис. 5.1) под действием симметричных относительно координатных осей нормальных напряжений.

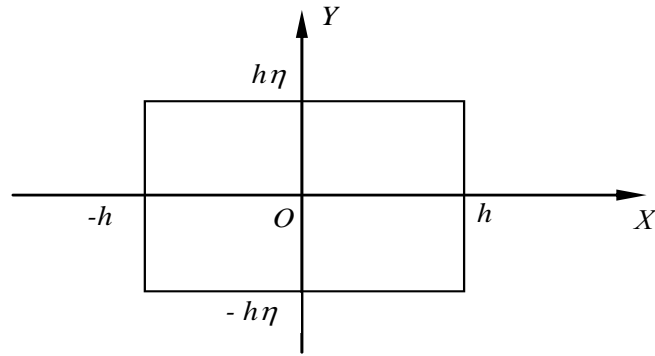


Рис.5.1. Прямоугольная пластина

В безразмерных координатах  $x = X/h$ ;  $y = Y/h$  получаем следующую краевую задачу для уравнений движения Ламе:

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu^*} \text{grad div } \vec{u} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\rho$  – плотность материала,  $G$  – модуль сдвига,  $\nu^* = \frac{\nu}{1+\nu}$  – коэффициент Пуассона для плоского обобщенного напряженного состояния.

$$\left. \frac{\sigma_{xx}}{2G} \right|_{x=\pm 1} = f(y)e^{-i\omega t}; \quad \left. \frac{\sigma_{xy}}{2G} \right|_{x=\pm 1} = 0; \quad \left. \frac{\sigma_{yy}}{2G} \right|_{y=\pm \eta} = g(x)e^{-i\omega t}; \quad \left. \frac{\sigma_{xy}}{2G} \right|_{y=\pm \eta} = 0; \quad (5.2)$$

Следуя методу суперпозиции, решение  $\vec{u} = \{u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}\}e^{-i\omega t}$  уравнения Ламе (5.1) для прямоугольной области представляется в виде суммы общих решений для полос  $x \in [-1; 1]$  и  $y \in [-\eta; \eta]$ :

$$u(x, y) = C_0 \sin \Omega_1 x - \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \text{ch } p_{1m} y + B_m \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \text{ch } p_{2m} y \right) \sin \alpha_m x + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \text{sh } q_{1m} x + D_m \text{sh } q_{2m} x) \cos \beta_m y; \quad (5.3)$$

$$v(x, y) = A_0 \sin \Omega_1 y + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \text{sh } p_{1m} y + B_m \text{sh } p_{2m} y) \cos \alpha_m x - \sum_{m=1}^{\infty} \left( C_m \frac{\beta_m}{q_{1m}} \text{ch } q_{1m} x + D_m \frac{q_{2m}}{\beta_m} \text{ch } q_{2m} x \right) \sin \beta_m y \quad (5.4)$$

Здесь  $\alpha_n = n\pi$ ;  $\beta_n = n\pi/\eta$ ;  $q_{\ell n}^2 = \beta_n^2 - \Omega_\ell^2$ ,  $p_{\ell n}^2 = \alpha_n^2 - \Omega_\ell^2$ , ( $\ell = 1, 2$ );  $\Omega_1 = \omega h/c_1$ ;

$\Omega_2 = \omega h/c_2$ ;  $c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu^*)}{\rho(1-2\nu^*)}}$  – скорость продольной волны,  $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  –

скорость сдвиговой волны.

Представление общего решения таково, что граничные условия на касательные напряжения (5.2) удается выполнить тождественно, положив

$$C_m = -D_m \frac{\beta_m^2 + q_{2m}^2}{2\beta_m^2} \frac{\text{sh } q_{2m}}{\text{sh } q_{1m}}, \quad A_m = -B_m \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2\alpha_m^2} \frac{\text{sh } p_{2m}\eta}{\text{sh } p_{1m}\eta}. \quad (5.5)$$

Граничные условия (5.2) на нормальные напряжения с учетом (5.5) приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{\nu^* \sin \Omega_1}{(1-\nu^*)\Omega_1 \cos \Omega_1 \eta} z_0 + \frac{\nu^* \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-\nu^*) \cos \Omega_1 \eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\beta_n^2 q_{1n}^2} + \frac{(1-2\nu^*)g_0}{(1-\nu^*) \cos \Omega_1 \eta}; \\ z_0 &= -\frac{\nu^* \sin \Omega_1 \eta}{(1-\nu^*)\eta \Omega_1 \cos \Omega_1} x_0 + \frac{\nu^* \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-\nu^*) \cos \Omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{\alpha_n^2 p_{1n}^2} + \frac{(1-2\nu^*)f_0}{(1-\nu^*) \cos \Omega_1}; \\ x_m &= -\frac{\Omega_1^2}{\Delta_m^x (1-2\nu^*)} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} z_n + \frac{2\nu^* \Omega_1 \sin \Omega_1 \eta}{(1-2\nu^*)\eta \Delta_m^x q_{1m}^2} x_0 + \frac{f_m}{\Delta_m^x}; \\ z_m &= -\frac{\Omega_1^2}{\Delta_m^z (1-2\nu^*)} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} x_n + \frac{2\nu^* \Omega_1 \sin \Omega_1}{(1-2\nu^*)\Delta_m^z p_{1m}^2} z_0 + \frac{g_m}{\Delta_m^z}; \end{aligned} \quad (5.6)$$

( $m = 1, 2, \dots$ )

где  $x_0 = A_0 \Omega_1$ ;  $z_0 = C_0 \Omega_1$ ;  $x_m = (-1)^m D_m \text{sh } q_{2m}$ ;  $z_m = \frac{(-1)^m B_m \text{sh } p_{2m}\eta}{\eta}$ ;

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{1}{\alpha_n^2 + q_{1m}^2} \left( \frac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2 + q_{2m}^2} - \frac{\nu^* \Omega_2^2}{\alpha_n^2} \right); \quad b_{mn} = \frac{1}{\beta_n^2 + p_{1m}^2} \left( \frac{2\alpha_m^2}{\beta_n^2 + p_{2m}^2} - \frac{\nu^* \Omega_2^2}{\beta_n^2} \right); \\ \Delta_m^x &= q_{2m} \text{cth } q_{2m} - \frac{(\beta_m^2 + q_{2m}^2)^2}{4\beta_m^2 q_{1m}} \text{cth } q_{1m}; \quad \Delta_m^z = \eta \left( p_{2m} \text{cth } p_{2m}\eta - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1m}} \text{cth } p_{1m}\eta \right). \end{aligned}$$

Величины  $f_m$ ,  $g_m$  – коэффициенты разложений в ряды Фурье для функций, задающих нагрузку на гранях призмы:



$$f(y) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m f_m \cos \beta_m y; \quad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m g_m \cos \alpha_m x.$$

Заметим, что система (5.5) идентична бесконечной системе, приведенной в [39, 41] с точностью до группировки членов и обозначений.

Чтобы придать дальнейшим выкладкам большую компактность и обеспечить неотрицательность элементов бесконечной матрицы, введем следующую замену для неизвестных:

$$X_1 = -\frac{x_0 \sin \Omega_1 \eta}{L}; \quad X_2 = \frac{z_0 \sin \Omega_1}{L}; \quad X_{2m+1} = -x_m; \quad X_{2m+2} = z_m, \quad (5.7)$$

и для коэффициентов системы:

$$\begin{aligned} M_{1,1} &= 0; M_{1,2} = \frac{v^* \operatorname{tg} \Omega_1 \eta}{(1-v^*)\Omega_1}; M_{1,2n+1} = \frac{v^* \Omega_1^2 \Omega_2^2 \operatorname{tg} \Omega_1 \eta}{\beta_n^2 q_{1n}^2 2(1-v^*)L}; M_{1,2n+2} = 0; \\ M_{2,1} &= -\frac{v^* \operatorname{tg} \Omega_1}{(1-v^*)\eta \Omega_1}; M_{2,2} = 0; M_{2,2n+1} = 0; M_{2,2n+2} = \frac{v^* \Omega_1^2 \Omega_2^2 \operatorname{tg} \Omega_1}{\alpha_n^2 p_{1n}^2 2(1-v^*)L}; \\ M_{2m+1,1} &= \frac{2v^* \Omega_1 L}{(1-2v^*)\eta \Delta_m^x q_{1m}^2}; M_{2m+1,2} = 0; M_{2m+1,2n+1} = 0; M_{2m+1,2n+2} = \frac{\Omega_1^2}{\Delta_m^x (1-2v^*)} a_{mn}; \\ M_{2m+2,1} &= 0; M_{2m+2,2} = \frac{2v^* \Omega_1 L}{(1-2v^*)\Delta_m^z p_{1m}^2}; M_{2m+2,2n+1} = \frac{\Omega_1^2}{\Delta_m^z (1-2v^*)} b_{mn}; M_{2m+2,2n+2} = 0; \\ B_1 &= -\frac{(1-2v^*)g_0 \operatorname{tg} \Omega_1 \eta}{(1-2v^*)L}; B_2 = \frac{(1-2v^*)f_0 \operatorname{tg} \Omega_1}{(1-v^*)L}; B_{2m+1} = -\frac{f_m}{\Delta_m^x}; B_{2m+2} = \frac{g_m}{\Delta_m^z}; \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь  $L$  - положительная константа, выбором которой можно обеспечить выполнение условий регулярности с более раннего номера.

Тогда бесконечную систему можно записать в каноническом виде [53]:

$$X_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} X_n + B_m, \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (5.9)$$

### 5.1.2. Преобразование к оценкам решений регулярной бесконечной системы.

Оценим регулярность системы (5.9) на основе известного значения ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{2a^2},$$

который позволяет, с учетом того факта, что коэффициенты  $a_{mn}$  и  $b_{mn}$ , начиная с определенных номеров, не изменяют своих знаков, получить аналитические значения рядов  $S_m$  в условиях регулярности:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{v^* |\operatorname{tg} \Omega_1 \eta|}{(1-v^*)\Omega_1} + \frac{v^* \Omega_1^2 \Omega_2^2 |\operatorname{tg} \Omega_1 \eta|}{2(1-v^*)L} \left( \sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{\beta_n^2} \left( \frac{1}{|q_{1n}^2|} - \frac{1}{q_{1n}^2} \right) + \frac{1}{2\Omega_1^4} - \frac{\eta \operatorname{ctg} \Omega_1 \eta}{2\Omega_1^3} - \frac{\eta^2}{6\Omega_1^2} \right); \\
S_2 &= \frac{v^* |\operatorname{tg} \Omega_1|}{(1-v^*)\eta\Omega_1} + \frac{v^* \Omega_1^2 \Omega_2^2 |\operatorname{tg} \Omega_1|}{2(1-v^*)L} \left( \sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{\alpha_n^2} \left( \frac{1}{|p_{1n}^2|} - \frac{1}{p_{1n}^2} \right) + \frac{1}{2\Omega_1^4} - \frac{\operatorname{ctg} \Omega_1}{2\Omega_1^3} - \frac{1}{6\Omega_1^2} \right); \\
S_{2m+1} &= \left| \frac{2v^* \Omega_1 L}{(1-2v^*)\eta \Delta_m^x q_{1m}^2} \right| + \frac{\Omega_1^2}{(1-2v^*) |\Delta_m^x|} \left( \sum_{n=1}^{N_2(m)} \left( |a_{mn}| - \operatorname{sign} \left( m - \frac{\sqrt{v^*} \Omega \eta}{2\sqrt{2}} \right) a_{mn} \right) + \right. \\
&+ \operatorname{sign} \left( m - \frac{\sqrt{v^*} \Omega \eta}{2\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\beta_m^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \left( \frac{\operatorname{cth} q_{1m}}{q_{1m}} - \frac{\operatorname{cth} q_{2m}}{q_{2m}} - \frac{1}{q_{1m}^2} + \frac{1}{q_{2m}^2} \right) - \frac{v^* \Omega_2^2}{q_{1m}^2} \left( \frac{1}{6} - \frac{\operatorname{cth} q_{1m}}{2q_{1m}} + \frac{1}{2q_{1m}^2} \right) \right) \Bigg); \\
S_{2m+2} &= \left| \frac{2v^* \Omega_1 L}{(1-2v^*) \Delta_m^z p_{1m}^2} \right| + \frac{\Omega_1^2}{(1-2v^*) |\Delta_m^z|} \left( \sum_{n=1}^{N_3(m)} \left( |b_{mn}| - \operatorname{sign} \left( m - \frac{\sqrt{v^*} \Omega}{2\sqrt{2}} \right) b_{mn} \right) + \operatorname{sign} \left( m - \frac{\sqrt{v^*} \Omega}{2\sqrt{2}} \right) \times \right. \\
&\times \left( \frac{\alpha_m^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \left( \frac{\eta \operatorname{cth} p_{1m} \eta}{p_{1m}} - \frac{\eta \operatorname{cth} p_{2m} \eta}{p_{2m}} - \frac{1}{p_{1m}^2} + \frac{1}{p_{2m}^2} \right) - \frac{v^* \Omega_2^2}{p_{1m}^2} \left( \frac{\eta^2}{6} - \frac{\eta \operatorname{cth} p_{1m} \eta}{2p_{1m}} + \frac{1}{2p_{1m}^2} \right) \right) \Bigg)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

где  $N_1 = \max \left( \left[ \frac{\Omega_1 \eta}{\pi} \right], \left[ \frac{\Omega_1}{\pi} \right] \right) + 1$ ,  $N_2(m) = \left\lceil \frac{1}{\pi} \sqrt{\max \left( 0, \Omega_2^2 - \left( \frac{\pi}{\eta} \right)^2, \frac{v^* \Omega_2^2 (\beta_m^2 - \Omega_2^2)}{2\beta_m^2 - v^* \Omega_2^2} \right)} \right\rceil + 1$ ,

$N_3(m) = \left\lceil \frac{\eta}{\pi} \sqrt{\max \left( 0, \Omega_2^2 - \pi^2, \frac{v^* \Omega_2^2 (\alpha_m^2 - \Omega_2^2)}{2\alpha_m^2 - v^* \Omega_2^2} \right)} \right\rceil + 1$ ,  $[x]$  – целая часть действительного  $x$ .

Формулы (5.10) позволяют точно вычислять номера  $N_R = N_R(\Omega)$  и значения величин  $\rho_m = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}|$ , характеризующих регулярные части бесконечной системы (5.9), в зависимости от значений заданной относительной частоты колебаний  $\Omega$ . Для примера на рис. 5.2 приведена зависимость  $N_R = N_R(\Omega)$  при  $\eta = 1$ ;  $v^* = 0.248$  (полагалось  $L = 0,1$ ).

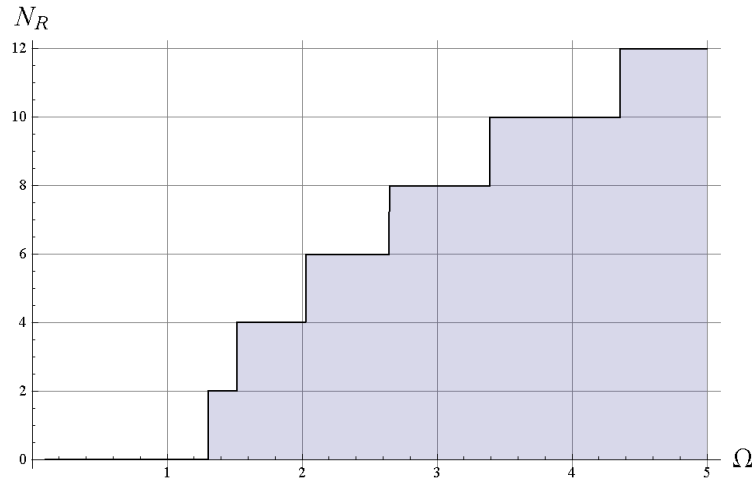


Рис. 5.2. Зависимость  $N_R(\Omega)$  для квадратной изотропной пластины при  $\nu^* = 0.248$

Используя асимптотику при  $m \rightarrow \infty$  входящих в формулы (5.10) выражений

$$q_{lm} = \beta_m - \frac{\Omega_l^2}{2\beta_m} + O\left(\frac{1}{\beta_m^3}\right); \quad p_{lm} = \alpha_m - \frac{\Omega_l^2}{2\alpha_m} + O\left(\frac{1}{\alpha_m^3}\right), \quad (5.11)$$

$$\Delta_m^x = \frac{\Omega_1^2}{2(1-2\nu)\beta_m} + O\left(\frac{1}{\beta_m^3}\right); \quad \Delta_m^z = \frac{\eta\Omega_1^2}{2(1-2\nu)\alpha_m} + O\left(\frac{1}{\alpha_m^3}\right), \quad (5.12)$$

можно получить следующую оценку

$$S_m = 1 - \frac{2}{\pi m} + O(m^{-2}) \quad (5.13)$$

которая указывает, что исследуемая бесконечная система является квазирегулярной, то есть для любого значения безразмерной частоты колебаний

$\Omega = \frac{2h}{\pi c_2} \omega$  всегда найдется номер  $N_R = N_R(\Omega)$ , такой, что при  $m > N_R$  выполняется

$$S_m < 1.$$

Чтобы преобразовать квазирегулярную бесконечную системы (5.9) к оценкам решений регулярной бесконечной системы, полагаем (раздел 2.3, формулы (2.29) – (2.33)), что в регулярной части системы (5.9) первые  $N_R$  неизвестных  $\{X_1, \dots, X_{N_R}\}$  являются параметрами. Для оставшихся неизвестных регулярной части системы (5.9) получается регулярная бесконечная система с линейной комбинацией параметров  $\{X_1, \dots, X_{N_R}\}$  в качестве свободных членов:

$$X_m = \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} X_n + (B_m + \sum_{n=1}^{N_R} M_{mn} X_n), \quad (m \geq N_R + 1). \quad (5.14)$$

Решение этой линейной бесконечной системы линейно зависит от параметров в составе свободных членов:

$$X_m = \chi_m^0 + \sum_{j=1}^{N_R} \chi_m^j X_j \quad (m \geq N_R + 1) \quad (5.15)$$

Из (5.11) для коэффициентов линейной формы в представлении (5.14) получается совокупность регулярных бесконечных систем с одной и той же матрицей:

$$\begin{aligned} \chi_m^0 &= \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} \chi_n^0 + B_m \\ \chi_m^j &= \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} \chi_n^j + M_{mj} \quad (m \geq N_R + 1; j = 1, 2, \dots, N_R). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Если свободные члены первой из систем (5.16) удовлетворяют условию теоремы 2.2:  $|B_m| \leq K\rho_m$  (при  $m \geq N_R + 1$ ;  $K$  – некоторая положительная константа), то существуют [53] ограниченные решения каждой из регулярных бесконечных систем (5.16). Существование ограниченного решения для квазирегулярной системы (5.9) эквивалентно существованию решения конечной системы относительно первых неизвестных  $\{X_1, \dots, X_{N_R}\}$

$$X_m = \sum_{j=1}^{N_R} Q_{mj} X_j + P_m. \quad (m=1, 2, \dots, N_R) \quad (5.17)$$

$$\text{Здесь } Q_{mj} = M_{mj} + \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} \chi_n^j; \quad P_m = \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} \chi_n^0 + B_m.$$

Если определитель системы (5.17) не равен нулю, то существует единственное решение  $\{X_1, \dots, X_{N_R}\}$ , и подстановка его в (5.14) приводит к ограниченному решению квазирегулярной бесконечной системы, которое соответствует вынужденным гармоническим колебаниям призмы при заданной относительной частоте  $\Omega$ . Если же определитель система (5.17) равен нулю

$$\det \|\delta_{mj} - Q_{mj}\| = 0, \quad (5.18)$$

то вынужденные гармонические колебания призмы не существуют в форме (5.3), (5.4). Соответствующая частота  $\Omega$  является собственной частотой призмы  $\Omega = \Omega^*$ .

Асимптотический анализ выражений (5.8) обнаруживает, что, увеличивая параметр  $N_R$ , можно добиться неотрицательности элементов матрицы  $M_{mn}$  регулярных систем (5.16). При этом свободные члены для систем (5.16) для индексов  $j = 1, 2, \dots, N_R$  становятся также знакопостоянными. Первая ( $j = 0$ ) из систем (5.16) имеет свободные члены исходной системы (5.9), которые могут оказаться знакопеременными. Однако из-за линейности исходной задачи ее всегда можно разделить на две вспомогательные задачи со знакопостоянными свободными членами. Здесь будем полагать, что с помощью соответствующих подстановок все знакопостоянные свободные члены систем (5.16) преобразованы в неотрицательные.

Как указывалось выше, симметричные колебания прямоугольника уже исследовались в работах [39, 41, 42] на основе метода суперпозиции. При этом главную роль в построении эффективного алгоритма решения бесконечной системы играла гипотеза, выдвинутая по аналогии с подобной задачей статики, о существовании предела у неизвестных в бесконечной системе для произвольного вида вынуждающей нагрузки

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = - \lim_{m \rightarrow \infty} z_m = K. \quad (5.19)$$

Данная гипотеза нашла подтверждение в рассмотренных численных примерах [39, 41, 42]. Заметим также, что в этих работах предел  $K$  предполагался, вообще говоря, отличным от нуля.

На основе (5.14) – (5.17) можно строго доказать (5.19). Действительно, каждая из регулярных систем (5.16) является системой с неотрицательными коэффициентами и удовлетворяет условию теоремы 2.7 при  $r_n^{(1)} = r_n^{(2)} = 1$ ;  $\xi_m^{(1)} = \beta_m$ ;  $\xi_m^{(2)} = \alpha_m$ .

Соответственно регулярные бесконечные системы (5.16) имеют ненулевые пределы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \chi_{2m-1}^j = - \lim_{m \rightarrow \infty} \chi_{2m}^j = K_j, \quad (5.20)$$

где предельные константы  $K_0, K_1, \dots, K_{N_R}$  связаны следующей из представления (5.15) зависимостью:

$$K = K_0 + \sum_{j=1}^{N_R} K_j X_j. \quad (5.21)$$

Таким образом, из приведенного доказательства следует, что в частных случаях предельная константа  $K$  может обращаться в нуль.

В работе [134] были найдены предельные значения итерационного процесса для лимитант, и количество вспомогательных конечных систем сократилось до двух. Первая из вспомогательных систем для каждой из бесконечных систем (5.16) совпадает с конечной системой метода простой редукции (теорема 2.6 в разделе 2.1). Данные системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_m^0 &= \sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} \bar{\chi}_n^0 + B_m \\ \bar{\chi}_m^j &= \sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} \bar{\chi}_n^j + M_{mj} \quad (m = N_R + 1; N_R + 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N_R). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Вторая вспомогательная система определяется только матрицей регулярной системы, и у всех систем (5.16) она одна:

$$\tilde{\chi}_m = \sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} \tilde{\chi}_n + \left( S_m - \sum_{n=1}^N |M_{mn}| \right) \quad (m = N_R + 1, N_R + 2, \dots, N). \quad (5.23)$$

Для оценок решений регулярных систем (5.16) достаточно вычислить точные верхние и нижние грани «предельных лимитант», которые в случае первой из систем (5.16) имеют вид:

$$V_{0,m}^N = \frac{\sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} \bar{\chi}_n^0 + B_m}{\sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} (1 - \tilde{\chi}_n) + \rho_m + \sum_{n=1}^{N_R} |M_{mn}|}, \quad (m \geq N + 1). \quad (5.24)$$

Предельные лимитанты для остальных систем (5.16) отличаются от  $V_{0,m}^N$  только числителями

$$V_{0,m}^N = \frac{\sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} \bar{\chi}_n^j + M_{mj}}{\sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} (1 - \tilde{\chi}_n) + \rho_m + \sum_{n=1}^{N_R} |M_{mn}|}, \quad (m \geq N+1; j = 1, 2, \dots, N_R). \quad (5.25)$$

Обозначая  $h_j = \inf_{m>N} V_{j,m}^N$ ;  $H_j = \sup_{m>N} V_{j,m}^N$ , приходим к следующим двусторонним

оценкам ограниченных решений для регулярных бесконечных систем (5.16):

$$\bar{\chi}_m^j + h_j \tilde{\chi}_m \leq \chi_m^j \leq \bar{\chi}_m^j + H_j \tilde{\chi}_m \quad (m = N_R + 1, N_R + 2, \dots, N; j = 0, 1, \dots, N_R) \quad (5.26)$$

$$h_j \leq \chi_m^j \leq H_j \quad (m \geq N+1; j = 0, 1, \dots, N_R) \quad (5.27)$$

Рассмотрим реализацию данного алгоритма на примере возбуждения колебаний гармонической нормальной нагрузкой  $\sigma_{yy} = 2Gg_0 e^{-i\omega t}$  на гранях  $y = \pm \eta$  при следующих данных:  $v^* = 0.248$ ;  $\eta = 1$ ;  $\Omega = 1.4$ .

Из рис. 5.2 можно увидеть, что уравнения исходной бесконечной системы (5.9) начинают удовлетворять условиям регулярности, начиная с  $N_R = 2$ . Таким образом, совокупность бесконечных систем (5.16) содержит только три системы. При  $m > 2$  для рассматриваемых граничных условий  $B_m = 0$ , поэтому для первой системы получаем точно  $\chi_m^0 = 0$ . В силу симметрии элементов бесконечной матрицы системы при  $\eta = 1$  следует, что  $\chi_{2m-1}^1 = \chi_{2m}^2$ ;  $\chi_{2m}^1 = \chi_{2m-1}^2$ . Нижняя и верхняя оценки решения системы для  $j = 1$  на основе формул (5.26), (5.27) приведены в табл. 5.1 при  $N = 20$  и при  $N = 200$ .

Таблица 5.1. Оценки решения бесконечной системы (5.16) при  $j = 1$

		3	4	5	6	7	$\infty$
N = 20	Нижняя оценка	0.110288	0.082003	0.077736	0.077025	0.074050	0.072409
	Верхняя оценка	0.110295	0.082010	0.077748	0.077037	0.074071	0.073053
N=200	Нижняя оценка	0.110291	0.082007	0.077742	0.077031	0.074061	0.072617
	Верхняя оценка	0.110291	0.082007	0.077742	0.077031	0.074061	0.072652

При этом вначале для фиксированного номера редукции  $N$  решаются вспомогательные системы (5.22), (5.23), затем оценивается нижняя и верхняя граница лимитант (5.24), (5.25) и по формулам (5.26), (5.27) оцениваются значения неизвестных. На рис.5.3 представлены значения лимитант  $V_{1,m}^{200}$  для данного примера. Зрительно значения лимитант распадаются на две последовательности – верхняя для четных номеров и нижняя для нечетных, что связано с парностью исследуемой бесконечной системы. Обе последовательности строго убывающие и сближаются с горизонтальными асимптотами, что позволяет определить точные грани, которые представлены в последнем столбце табл. 5.1.

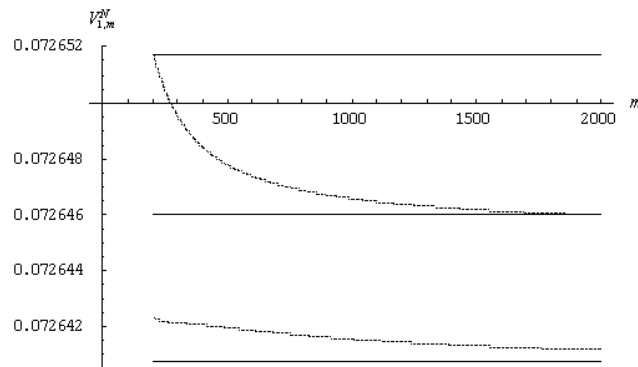


Рис.5.3. Значения лимитант  $V_{1,m}^{200}$  для численного примера.

Перекрывающиеся верхние и нижние границы для всех неизвестных, позволяют определить конечные количества первых цифр, которые не изменятся при увеличении порядков конечных вспомогательных систем. Ограничиваясь только этими «точными» цифрами при вычислении матрицы коэффициентов конечной системы (5.17), можно оценить порядки элементов матрицы и определить близость заданной частоты вынужденных колебаний к собственной частоте призмы путем сравнения порядка определителя системы (5.17) с наибольшим порядком элементов матрицы системы (5.17).

Для рассматриваемого примера система (5.17) второго порядка ( $N_R = 2$ ), для коэффициентов которой на основе решений (5.16), представленных в табл. 5.1, находим оценки при  $N=20$ :

$$Q = \begin{pmatrix} 0.05988 & 0.88940 \\ 0.88938 & 0.05988 \end{pmatrix}$$



и при  $N=200$ :

$$Q = \begin{pmatrix} 0.059878 & 0.889378 \\ 0.889378 & 0.059878 \end{pmatrix}.$$

Свободные члены из-за того, что  $\chi_m^0 = 0$ , не зависят от  $N$  и равны

$$P = \begin{pmatrix} -21.8389 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В представленной ниже табл. 5.2 даны значения определителя матрицы  $Q$ , отнесенные к наибольшему из его элементов, при частотах вынужденных колебаний, приближающихся к первой собственной частоте  $\Omega_1^* = \sqrt{2} = 1.41421\dots$ , которая для данного примера совпадает с модой Ламе и вычисляется точно.

Таблица 5.2. Значения определителя системы (5.17) для численного примера

$\Omega$	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421
$\det Q / (Q_{ij})_{\max}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-5}$

Можно заметить, что число верных знаков в значении собственной частоты колебаний на единицу больше порядка определителя конечной системы, что позволяет использовать условие (5.18) для вычисления собственных частот призмы.

Ранее было представлено условие (2.46) (следствие из теоремы 2.8) существования тривиального решения для однородной квазирегулярной бесконечной системы, которое позволяет найти интервалы расположения собственных частот в третьей главе диссертации. Проверая данное условие относительно коэффициентов (5.8) при заданном значении  $N$ , выясняется, будет ли система (5.9) после явного исключения первых  $N$  неизвестных регулярной. В табл. 5.3 представлены интервалы  $\Omega$ , где условие (2.46) не выполняется для представленного выше численного примера.

Таблица 5.3 Проверка  $T_N(\Omega) > 0$  условия (2.46) для изотропной квадратной пластины при  $\nu^* = 0.248$ .

$N$	5	10	20	30	50	100
Интервал	1.403 -	1.409 -	1.412 -	1.4135 -	1.4139 -	1.4141 -
для $\Omega_1^*$	1.434	1.422	1.417	1.4153	1.4146	1.4144

Таким образом, условие (2.46) дает возможность для эффективного определения собственных частот также и в случае поперечных колебаний пластины.

### 5.1.3. Улучшение сходимости рядов в представлении решения.

Используя асимптотический закон (5.19), проведем улучшение сходимости рядов для компонент перемещения и тензора напряжений. Как известно, в случае установившихся колебаний решение (5.3), (5.4) разделяется на потенциальные и вихревые составляющие

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5.28)$$

где функции  $\varphi$ ,  $\psi$  – решения дифференциальных уравнений Гельмгольца

$$\Delta \varphi + \Omega_1^2 \varphi = 0; \quad \Delta \psi + \Omega_2^2 \psi = 0.$$

Представлению решения (5.3), (5.4) соответствуют следующие функции  $\varphi$ ,  $\psi$ :

$$\varphi = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n^2 q_{1n}} \frac{\text{ch } q_{1n} x}{\text{sh } q_{1n}} x_n \cos \beta_n y + \eta \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n^2 p_{1n}} \frac{\text{ch } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} z_n \cos \alpha_n x \right); \quad (5.29)$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\text{sh } q_{sn} x}{\beta_n \text{sh } q_{2n}} x_n \sin \beta_n y - \frac{\text{sh } p_{sn} y}{\alpha_n \text{sh } p_{2n} \eta} z_n \sin \alpha_n x \right). \quad (5.30)$$

Асимптотический закон (4.19) приводит к плохой сходимости рядов (5.29), (5.30) на границе прямоугольника и в малой окрестности границы. Подстановка этих рядов в формулы для напряжений приведет из-за дифференцирований к расходящимся рядам на границе прямоугольника. Для корректности необходимо улучшение сходимости рядов (5.29), (5.30), причем не только на границе, но и в ее

окрестности. Для этого достаточно найти суммы вспомогательных рядов, которые получаются из данных рядов после подстановки в них  $x_n = K$ ;  $z_n = -K$ :

$$K\varphi_K = -K \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n^2 q_{1n}} \frac{\text{ch } q_{1n} x}{\text{sh } q_{1n}} \cos \beta_n y - \eta \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n^2 p_{1n}} \frac{\text{ch } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} \cos \alpha_n x \right); \quad (5.31)$$

$$K\psi_K = K \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\text{sh } q_{2n} x}{\beta_n \text{sh } q_{2n}} \sin \beta_n y + \frac{\text{sh } p_{2n} y}{\alpha_n \text{sh } p_{2n} \eta} \sin \alpha_n x \right) \quad (5.32)$$

Упростим общие члены вспомогательных рядов, на основе асимптотик (5.11) поскольку будем использовать только остатки этих рядов с большими номерами  $n$ :

$$\frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n^2 p_{1n}} \approx \frac{1}{\alpha_n} + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2\alpha_n^3}, \quad \frac{\text{ch } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} \approx \frac{\text{ch } \alpha_n y}{\text{sh } \alpha_n \eta} + \frac{\Omega_1^2}{2\alpha_n} \left[ (\eta - y)e^{\alpha_n(y-\eta)} + (\eta + y)e^{-\alpha_n(y+\eta)} \right],$$

которые после использования известной [115] суммы ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nX}}{n^p} \cos nY = \begin{cases} \frac{X}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\text{ch } X + 2\cos Y), & p = 1 \\ \text{Re } \text{Li}_p(-e^{-X+iY}), & p > 1 \end{cases}, \quad [X \geq 0, \quad -\pi \leq Y \leq \pi],$$

приводят к приближенному значению суммы вспомогательного ряда (5.31):

$$\begin{aligned} \varphi_K \approx \eta^2 - 1 + \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{(\text{ch}(\pi(1-x)/\eta) + \cos(\pi y/\eta))(\text{ch}(\pi(1+x)/\eta) + \cos(\pi y/\eta))}{(\text{ch}(\pi(\eta-y)) + \cos(\pi x))(\text{ch}(\pi(\eta+y)) + \cos(\pi x))} + \text{Re} \left[ \frac{\Omega_1^2 \eta^2}{2\pi^2} \times \right. \\ \left. \times \left( (x-1) \text{Li}_2(-e^{\frac{(iy+x-1)\pi}{\eta}}) - (x+1) \text{Li}_2(-e^{\frac{(iy-x-1)\pi}{\eta}}) + (1-\frac{y}{\eta}) \text{Li}_2(-e^{(ix+y-\eta)\pi}) + (1+\frac{y}{\eta}) \text{Li}_2(-e^{(ix-y-\eta)\pi}) \right) \right. \\ \left. + \eta \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2\pi^3} (\text{Li}_3(-e^{(ix+y-\eta)\pi}) + \text{Li}_3(-e^{(ix-y-\eta)\pi}) - \eta^2 \text{Li}_3(-e^{(iy+x-1)\pi/\eta}) - \eta^2 \text{Li}_3(-e^{(iy-x-1)\pi/\eta})) \right]. \quad (5.33) \end{aligned}$$

Здесь  $\text{Li}_p(z)$  - полилогарифм порядка  $p$ .

Улучшаем сходимость ряда (5.29) посредством замены остатка ряда на сумму (5.33) упрощенного вспомогательного ряда, но без первых  $N$  слагаемых. Получается аналитическое значение суммы ряда (5.29), точность которого может быть улучшена посредством увеличения порядка  $N$  конечных систем (5.22), (5.23).

$$\varphi = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\beta_n} \left\{ \left[ \frac{K}{e^{\beta_n}} \left( 1 + \frac{\Omega_1^2}{2\beta_n} + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2\beta_n^2} \right) \text{ch } \beta_n x - x \frac{\Omega_1^2}{2\beta_n} \text{sh } \beta_n x \right] - \frac{x_n}{\text{sh } q_{1n}} \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n q_{1n}} \text{ch } q_{1n} x \right] \cos \beta_n y -$$

$$-\left[ \frac{K}{e^{\alpha_n \eta}} \left( 1 + \frac{\Omega_1^2}{2\beta_n} + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2\alpha_n^2} \right) \operatorname{ch} \alpha_n y - y \frac{\Omega_1^2}{2\alpha_n} \operatorname{sh} \alpha_n y \right] + \frac{z_n \eta}{\operatorname{sh} p_{1n} \eta} \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n p_{1n}} \operatorname{ch} p_{1n} y \left] \cos \alpha_n x \right\} + K\varphi_K. \quad (5.34)$$

Аналогичным образом улучшается сходимость ряда (5.30). При этом сумма вспомогательного ряда (5.32) вычисляется с помощью известной [115] формулы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nX}}{n^2} \sin nY = \operatorname{Im} \operatorname{Li}_2(-e^{-X+iY}), \quad [X \geq 0, \quad -\pi \leq Y \leq \pi]$$

и принимает вид:

$$\begin{aligned} \psi_K \approx \frac{\Omega_2^2 \eta^2}{2\pi^2} \operatorname{Im} & \left( (1-x) \operatorname{Li}_2(-e^{(iy+x-1)\pi/\eta}) - (1+x) \operatorname{Li}_2(-e^{(iy-x-1)\pi/\eta}) + \right. \\ & \left. + (1-y/\eta) \operatorname{Li}_2(-e^{(ix+y-\eta)\pi}) - (1+y/\eta) \operatorname{Li}_2(-e^{(ix-y-\eta)\pi}) \right) - xy/2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Соответственно улучшение сходимости приводит к выражению:

$$\begin{aligned} \psi = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\beta_n} & \left\{ x_n \frac{\operatorname{sh} q_{2n} x}{\operatorname{sh} q_{2n}} - K \left( \left( 1 + \Omega_2^2 \frac{\operatorname{cth} \beta_n}{2\beta_n} \right) \frac{\operatorname{sh} \beta_n x}{\operatorname{sh} \beta_n} - \frac{x}{2\beta_n} \Omega_2^2 \frac{\operatorname{ch} \beta_n x}{\operatorname{sh} \beta_n} \right) \right\} \sin \beta_n y - \\ & - \left[ z_n \frac{\operatorname{sh} p_{2n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} \eta} + K \left( \left( 1 + \Omega_2^2 \frac{\operatorname{cth} \alpha_n \eta}{2\beta_n} \right) \frac{\operatorname{sh} \alpha_n y}{\operatorname{sh} \alpha_n \eta} - \frac{y}{2\alpha_n} \Omega_2^2 \frac{\operatorname{ch} \alpha_n y}{\operatorname{sh} \alpha_n \eta} \right) \right] \sin \alpha_n x \right\} + K\psi_K \end{aligned} \quad (5.36)$$

Полученные выражения (5.34) и (5.36) в отличие от рядов (5.29), (5.30) можно дифференцировать сколько угодно раз. Возвращая эти выражения в потенциальные представления (5.28), можно записать формулы улучшения сходимости для перемещений. Напряжения могут быть выражены непосредственно через потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\frac{1-2\nu^*}{2G} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \Delta\varphi; \quad \frac{1}{2G} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy}) = \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) (\varphi + i\psi).$$

Подставляя в данные выражения (5.34) и (5.36), получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\frac{1-2\nu^*}{2G}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = & \Omega_1^2 \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\beta_n} \left[ \left( x_n \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n q_{1n}} \frac{\text{ch } q_{1n} x}{\text{sh } q_{1n}} - 2K e^{-\beta_n} \text{ch } \beta_n x \right) \cos \beta_n y + \right. \right. \\
& + \left. \left( z_n \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n p_{1n}} \frac{\text{ch } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} + 2K e^{-\alpha_n \eta} \text{ch } \alpha_n y \right) \cos \alpha_n x \right] + K \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{\text{ch}(\eta - y)\pi + \cos x\pi}{\text{ch}(1-x)\pi / \eta + \cos y\pi / \eta} + \\
& + K \left[ 1 - \eta^2 + \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{\text{ch}(\eta + y)\pi + \cos x\pi}{\text{ch}(1+x)\pi / \eta + \cos y\pi / \eta} \right] \left. \right\} + z_0 \cos \Omega_1 x + x_0 \cos \Omega_1 y; \tag{5.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1-2\nu^*}{2G}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = & (z_0 \cos \Omega_1 x - x_0 \cos \Omega_1 y)(1-2\nu^*) + 2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \left\{ (1-2\nu^*) x_n \left( q_{2n} \frac{\text{ch } q_{2n} x}{\text{sh } q_{2n}} - \right. \right. \\
& - \left. \left( \frac{\beta_n}{q_{1n}} + \frac{q_{1n}}{\beta_n} \right) \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{4\beta_n} \frac{\text{ch } q_{1n} x}{\text{sh } q_{1n}} \right) + K \Omega_1^2 e^{-\beta_n} (x \text{sh } \beta_n x - \text{ch } \beta_n x) \left. \right\} \cos \beta_n y + \eta \left[ K \Omega_1^2 e^{-\alpha_n \eta} (y \text{sh } \alpha_n y - \right. \\
& - \eta \text{ch } \alpha_n y) + (1-2\nu^*) z_n \left( \left( \frac{\alpha_n}{p_{1n}} + \frac{p_{1n}}{\alpha_n} \right) \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{4\alpha_n} \frac{\text{ch } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} - p_{2n} \frac{\text{ch } p_{2n} y}{\text{sh } p_{2n} \eta} \right) \left. \right] \cos \alpha_n x \left. \right\} - \frac{K}{2} \Omega_1^2 (2 + 2\eta^2 - \\
& - \frac{(1-x) \text{sh}((1-x)\pi / \eta)}{\text{ch}(1-x) \frac{\pi}{\eta} + \cos y \frac{\pi}{\eta}} - \eta \frac{(\eta-y) \text{sh}((\eta-y)\pi)}{\text{ch}(\eta-y)\pi + \cos x\pi} - \frac{(1+x) \text{sh}((1+x)\pi / \eta)}{\text{ch}(1+x) \frac{\pi}{\eta} + \cos y \frac{\pi}{\eta}} - \eta \frac{(\eta+y) \text{sh}((\eta+y)\pi)}{\text{ch}(\eta+y)\pi + \cos x\pi} \left. \right); \tag{5.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1-2\nu^*}{2G} \sigma_{xy} = & \sum_{n=1}^N (-1)^n \left\{ (1-2\nu^*) x_n \left( \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n} \left( \frac{\text{sh } q_{1n} x}{\text{sh } q_{1n}} - \frac{\text{sh } q_{2n} x}{\text{sh } q_{2n}} \right) + K \Omega_1^2 e^{-\beta_n} (\text{sh } \beta_n x - x \text{ch } \beta_n x) \right) \times \right. \\
& \times \sin \beta_n y + \eta \left[ (1-2\nu^*) z_n \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n} \left( \frac{\text{sh } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} - \frac{\text{sh } p_{2n} y}{\text{sh } p_{2n} \eta} \right) + K \Omega_1^2 e^{-\alpha_n \eta} (y \text{ch } \alpha_n y - \eta \text{sh } \alpha_n y) \right] \sin \alpha_n x \left. \right\} + \\
& + \frac{K}{4} \Omega_1^2 \left( \frac{(1-x) \sin y\pi / \eta}{\text{ch}(1-x) \frac{\pi}{\eta} + \cos y \frac{\pi}{\eta}} + \frac{\eta(y-\eta) \sin x\pi}{\text{ch}(\eta-y)\pi + \cos x\pi} - \frac{(1+x) \sin y\pi / \eta}{\text{ch}(1+x) \frac{\pi}{\eta} + \cos y \frac{\pi}{\eta}} + \frac{\eta(\eta+y) \sin x\pi}{\text{ch}(\eta+y)\pi + \cos x\pi} \right). \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Заметим, что логарифмические особенности при подходе к угловой точке  $(1; \eta)$ , заключенные в полилогарифмах формул (5.33), (5.35), сократились в формулах (5.37), (5.38) для нормальных напряжений. Если в асимптотических формулах (5.11) удерживать только первые слагаемые, то особенности не сокращаются, и искажается характер напряжений в углах прямоугольника.

В табл. 5.4 представлены граничные значения нормальных напряжений, вычисленные по формулам (5.37) - (5.39) для рассмотренного в п. 5.1.3 примера (напомним,  $\sigma_{yy} = 2Gg_0 e^{-i\omega t}$  на гранях  $y = \pm\eta$  при  $v^* = 0.248$ ;  $\eta = 1$ ;  $\Omega = 1.4$ ; остальные напряжения на границе равны нулю) при двух значениях порядка  $N$  вспомогательных систем метода лимитант. Данные таблицы показывают удовлетворительное с практической точки зрения выполнение граничных условий уже при  $N = 10$ , а с увеличением  $N$  появляется возможность добиться требуемой точности решения исходной задачи.

Таблица 5.4 Выполнение граничных условий

$x$	$\sigma_{yy}/(2Gg_0),$ $N = 10$	$\sigma_{yy}/(2Gg_0),$ $N = 100$	$y$	$\sigma_{xx}/(2Gg_0),$ $N = 10$	$\sigma_{xx}/(2Gg_0),$ $N = 100$
0	0.99897	1.00001	0	0.001174	-0.000009
0.20	0.99896	1.00001	0.20	0.001187	-0.000009
0.40	0.99891	1.00001	0.40	0.001241	-0.000009
0.60	1.00114	1.00001	0.60	-0.001299	-0.000009
0.80	1.00143	1.00001	0.80	-0.001635	-0.000009
0.90	0.99855	1.00001	0.90	0.001718	-0.000009
0.95	1.00582	1.00001	0.95	-0.006325	-0.000011
1.00	0.97001	1.00229	1.00	0.031911	-0.002244

На рисунке 5.4(a) представлены значения касательных напряжений  $\sigma_{xy}$  в трех сечениях  $y = 0.25; 0.5; 0.75$  призмы, которые вычислялись по формулам (5.39) с улучшением сходимости, и на рис. 5(б) – без улучшения сходимости ( $K=0$ ,  $N=100$ ). Последний случай иллюстрируют явление Гиббса, которое наблюдается для напряжений во всех сечениях призмы при подходе к границе. Заметим, что катастрофическое падение точности решения происходит, несмотря на то, что для касательных напряжений граничные условия выполнены тождественно, а ряды имеют экспоненциальный характер сходимости всюду кроме границы области. Аналогичная картина наблюдается и для нормальных напряжений. Увеличением параметра  $N$  удается лишь сузить тот интервал, где наблюдается явление Гиббса.

Таким образом, улучшение сходимости рядов (5.37)-(5.39) во всей области определения является необходимым для получения достоверных результатов вблизи границы призмы.

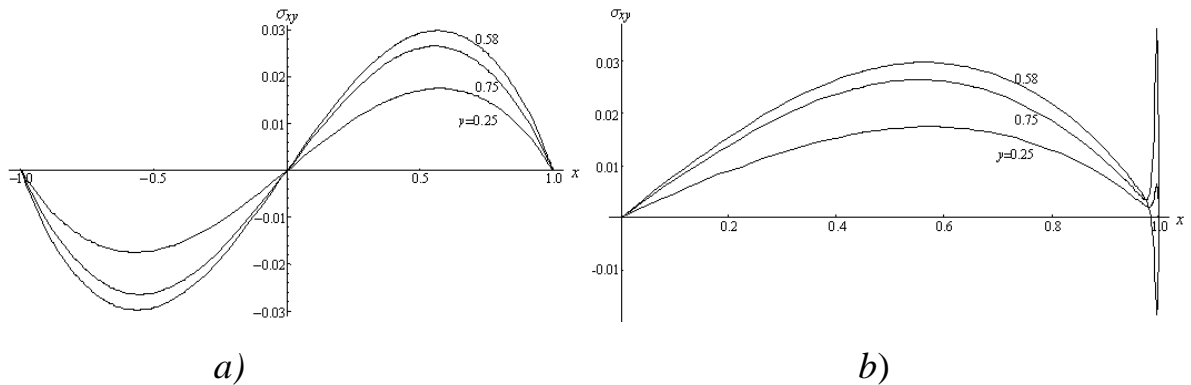


Рис. 5.4. Значения касательных напряжений  $\sigma_{xy}$  в трех сечениях для численного примера (*a* – с улучшением сходимости (5.39), *b* – без улучшения сходимости)

На рис. 5.5 и 5.6 представлены графики нормальных напряжений для рассмотренного выше примера в сечениях  $y = 0; 0.5; 0.75; 1.0$ , и в сечениях  $x = 0; 0.5; 0.75$ . Наибольшие по модулю напряжения достигаются в центре призмы и равны  $(\sigma_{yy})_{\max} = 81.424Gg_0$ ,  $(\sigma_{xx})_{\max} = -76.535Gg_0$ , при этом касательные напряжения оказываются достаточно малы и не превосходят  $|\sigma_{xy}| \leq 0.1Gg_0$ .

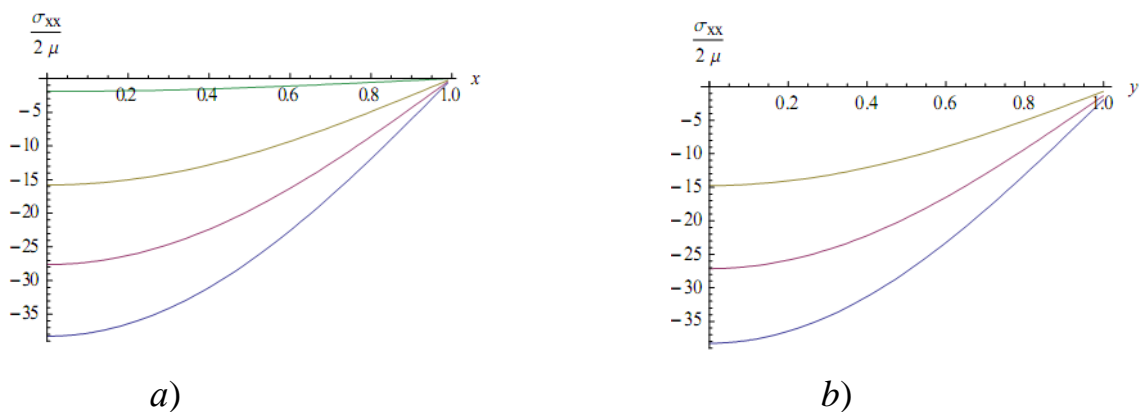


Рис. 5.5. Значения напряжений  $\sigma_{xx}$  в сечениях для численного примера (*a* – в сечениях  $y = 0; 0.5; 0.75; 1.0$ , *b* – в сечениях  $x = 0; 0.5; 0.75$ .)

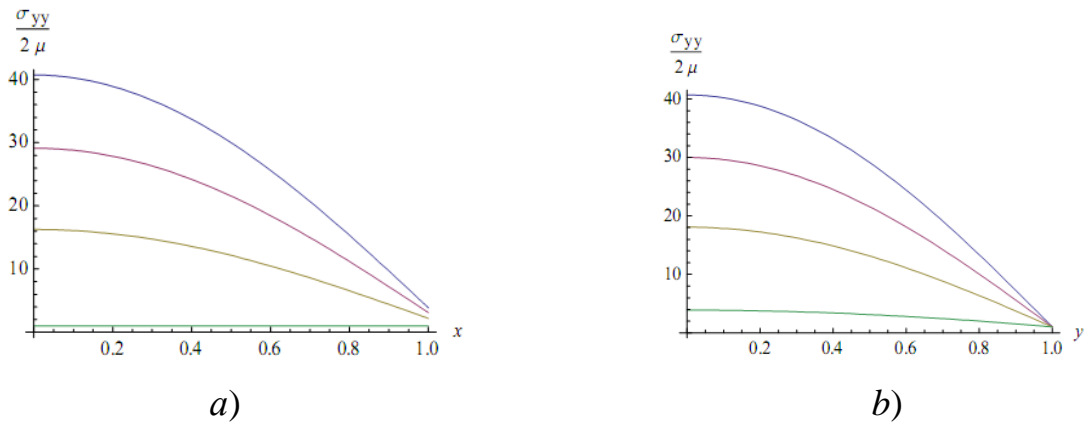


Рис. 5.6. Значения напряжений  $\sigma_{yy}$  в сечениях для численного примера ( $a$  – в сечениях  $y = 0; 0.5; 0.75; 1.0$ ,  $b$  – в сечениях  $x = 0; 0.5; 0.75$ .)

При указанных расчетных параметрах призмы, ее первая собственная частота оказывается совпадающей с частотой моды Ламе равной  $\Omega_1^* = \sqrt{2} = 1.414$ . Таким образом, частота колебаний в примере отличается от собственной менее чем на 0.015, что объясняет большие значения нормальных напряжений.

Таким образом, здесь представлен новый алгоритм определения напряженно-деформированного состояния при установившихся колебаниях прямоугольной призмы, позволяющий находить двусторонние оценки точности решения квазирегулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

## 5.2. Вынужденные установившиеся гармонические колебания прямоугольной изотропной пластины в случае первой основной граничной задачи

### 5.2.1. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений в случае первой основной граничной задачи.

Рассмотрим в безразмерных координатах установившиеся колебания тонкой пластины  $[-1;1] \times [-\eta;\eta]$  под действием вынуждающих смещений. Получаем следующую краевую задачу для уравнений Ламе (5.1) относительно усредненного по толщине вектора смещений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x|_{x=\pm 1} &= f_1(y)e^{-i\omega t}; & \mathbf{u}_y|_{x=\pm 1} &= f_2(y)e^{-i\omega t}; \\ \mathbf{u}_x|_{y=\pm\eta} &= g_1(x)e^{-i\omega t}; & \mathbf{u}_y|_{y=\pm\eta} &= g_2(y)e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (5.40)$$



Следуя методу суперпозиции, общее решение  $\vec{u} = \{u_x(x, y)\vec{i} + u_y(x, y)\vec{j}\}e^{-i\omega t}$  уравнений Ламе (5.1) в случае симметричных по обеим осям колебаний представляется в том же виде (5.3), (5.4) суммы общих решений для полос  $x \in [-1; 1]$  и  $y \in [-\eta; \eta]$ , что и в случае силовых граничных условий.

Пусть для вынуждающих колебания смещений справедливы разложения в ряды Фурье

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{10} + \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m} \cos \beta_m y; & f_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} f_{2m} \sin \beta_m y; \\ g_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} g_{1m} \sin \alpha_m x; & g_2 &= g_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} g_{2m} \cos \alpha_m x, \end{aligned}$$

тогда краевые условия (5.40) приводят к следующей системе функциональных равенств:

$$\begin{aligned} \text{I. } & C_0 \sin \Omega_1 + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \operatorname{sh} q_{1m} + D_m \operatorname{sh} q_{2m}) \cos \beta_m y = f_{10} + \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m} \cos \beta_m y; \\ \text{II. } & A_0 \sin \Omega_1 y + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (A_m \operatorname{sh} p_{1m} y + B_m \operatorname{sh} p_{2m} y) - \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \frac{\beta_m}{q_{1m}} \operatorname{ch} q_{1m} + D_m \frac{q_{2m}}{\beta_m} \operatorname{ch} q_{2m}) \sin \beta_m y = \sum_{m=1}^{\infty} f_{2m} \sin \beta_m y; \\ \text{III. } & C_0 \sin \Omega_1 x - \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \operatorname{ch} p_{1m} \eta + B_m \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \operatorname{ch} p_{2m} \eta) \sin \alpha_m x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (C_m \operatorname{sh} q_{1m} x + D_m \operatorname{sh} q_{2m} x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{1m} \sin \alpha_m x; \\ \text{IV. } & A_0 \sin \Omega_1 \eta + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \operatorname{sh} p_{1m} \eta + B_m \operatorname{sh} p_{2m} \eta) \cos \alpha_m x = g_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} g_{2m} \cos \alpha_m x. \end{aligned}$$

Равенства I и IV позволяют сразу найти

$$C_0 = \frac{f_{10}}{\sin \Omega_1} \quad \text{и} \quad A_0 = \frac{g_{20}}{\sin \Omega_1 \eta},$$

а также выразить

$$C_m = -\frac{\operatorname{sh} q_{2m}}{\operatorname{sh} q_{1m}} D_m + \frac{f_{1m}}{\operatorname{sh} q_{1m}}; \quad A_m = -\frac{\operatorname{sh} p_{2m} \eta}{\operatorname{sh} p_{1m} \eta} B_m + \frac{g_{2m}}{\operatorname{sh} p_{1m} \eta} \quad (5.41)$$

Функциональные равенства II и III после разложения входящих в них функций по полной системе тригонометрических функций и подстановки (5.41) приводят к парной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_m^x x_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} y_n + P_m; \\ \Delta_m^y y_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} x_n + Q_m; \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5.42)$$

где  $x_n = \frac{(-1)^n B_n \operatorname{sh} p_{2n} \eta}{\eta}$ ;  $y_n = (-1)^n D_n \operatorname{sh} q_{2n}$ ;

$$\Delta_m^x = \eta \left( \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m} \eta - \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \operatorname{cth} p_{2m} \eta \right), \quad \Delta_m^y = \frac{\beta_m}{q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m} - \frac{q_{2m}}{\beta_m} \operatorname{cth} q_{2m};$$

$$a_{mn} = \frac{2\Omega_1^2 \alpha_m}{(1-2\nu^*) (\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)}, \quad b_{mn} = \frac{2\Omega_1^2 \beta_m}{(1-2\nu^*) (\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)};$$

$$P_m = \frac{2f_{10} \alpha_m}{p_{1m}^2} + (-1)^m \left( g_{1m} + g_{2m} \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m} \eta \right) + 2\alpha_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n f_{1n}}{\beta_n^2 + p_{1m}^2};$$

$$Q_m = \frac{2g_{20} \beta_m}{\eta q_{1m}^2} + (-1)^m \left( f_{2m} + f_{1m} \frac{\beta_m}{q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m} \right) + \frac{2\beta_m}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n g_{2n}}{\alpha_n^2 + q_{1m}^2}.$$

### 5.2.2. Исследование бесконечной системы. Асимптотика неизвестных.

Чтобы исследовать регулярность системы (5.42) опять используем значение ряда из [115]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{2a^2},$$

тогда значения рядов из модулей коэффициентов системы (5.42) можно вычислить точно:

$$S_{2m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_{mn}}{\Delta_m^x} \right| = \frac{1}{|\Delta_m^x|} \sum_{n=1}^{N_a} (|a_{mn}| - a_{mn}) + \frac{2\alpha_m}{|\Delta_m^x|} \left( \frac{\eta}{2p_{2m}} \operatorname{cth} p_{2m} \eta - \frac{\eta}{2p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m} \eta + \frac{1}{2p_{1m}^2} - \frac{1}{2p_{2m}^2} \right); \quad (5.43)$$

$$S_{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b_{mn}}{\Delta_m^y} \right| = \frac{1}{|\Delta_m^y|} \sum_{n=1}^{N_b} (|b_{mn}| - b_{mn}) + \frac{2\beta_m}{|\Delta_m^y|} \left( \frac{1}{2q_{2m}} \operatorname{cth} q_{2m} - \frac{1}{2q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m} + \frac{1}{2q_{1m}^2} - \frac{1}{2q_{2m}^2} \right), \quad (5.44)$$

где  $N_a = [\eta \sqrt{\max(0, (\Omega_2 / \pi)^2 - 1)}]$  и  $N_b = [\sqrt{\max(0, (\Omega_2 / \pi)^2 - 1/\eta^2)}]$  ( $[x]$  – целая часть действительного  $x$ ).

При  $m \rightarrow \infty$ , используя асимптотику (5.11) для  $q_{lm}$  и  $p_{lm}$ , можно найти следующие асимптотические представления ( $l = 1, 2$ ):

$$\Delta_m^x = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\alpha_m^2} \eta + O\left(\frac{1}{\alpha_m^4}\right); \quad \Delta_m^y = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\beta_m^2} + O\left(\frac{1}{\beta_m^4}\right). \quad (5.45)$$

Подставляя (5.45) в (5.43), (5.44) получаем при  $m \rightarrow \infty$ :

$$S_m = \frac{1}{3-4\nu^*} + O\left(\frac{1}{m}\right). \quad (5.46)$$

Из (5.46) следует, что система (5.42) является квазирегулярной. Действительно, для любого значения частоты  $\Omega$  всегда можно найти номер  $N_R$ , начиная с которого  $S_m < 1$ .

Положим далее, что функции  $f_l(y)$ ,  $g_l(x)$  ( $l = 1, 2$ ), задающие вынуждающие колебания смещения, дважды дифференцируемы. Покажем, что этот факт приводит к ограниченности свободных членов системы (5.42).

Действительно, учтем что

$$2\alpha_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n f_n}{\beta_n^2 + p_{1m}^2} = \eta \int_{-\eta}^{\eta} f_1(y) \left( \frac{\text{ch } p_{1m} y}{\text{sh } p_{1m} y} - \frac{1}{\eta p_{1m}} \right) dy,$$

тогда свободные члены можно записать как квадратуры граничных условий

$$P_m = \int_{-\eta}^{\eta} f_1(y) \left( \frac{\text{ch } p_{1m} y}{\text{sh } p_{1m} y} - \frac{1}{\eta p_{1m}} + \frac{\alpha_m}{\eta p_{1m}^2} \right) dy + (-1)^m \int_{-1}^1 (g_1(x) \sin \alpha_m x + \text{cth } p_{1m} \eta \frac{\alpha_m}{p_{1m}} g_2(x) \cos \alpha_m x) dx.$$

Дважды интегрируя по частям данное равенство, с использованием (5.11) найдем при  $m \rightarrow \infty$ :

$$P_m = \frac{2(f_1(\eta) - g_1(1))}{\alpha_m} + \frac{2(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{\alpha_m^2} + O(\alpha_m^{-3}).$$

В силу того, что  $u_x(1, \eta) = f_1(\eta) = g_1(1)$  получаем асимптотическое поведение свободных членов бесконечной системы:

$$\frac{P_m}{\Delta_m^x} = \frac{4(1 - 2v^*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{\eta \Omega_1^2 (3 - 4v^*)} + O(1/\alpha_m). \quad (5.47)$$

Аналогично доказывается ограниченность свободных членов  $Q_m$

$$\frac{Q_m}{\Delta_m^y} = -\frac{4(1 - 2v^*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{\eta \Omega_1^2 (3 - 4v^*)} + O(1/\beta_m). \quad (5.48)$$

Проведем далее замену переменных:

$$x_m = X_m^0 + \sum_{j=1}^{N_R} (X_m^{j,1} x_j + X_m^{j,2} y_j); \quad y_m = Y_m^0 + \sum_{j=1}^{N_R} (Y_m^{j,1} x_j + Y_m^{j,2} y_j); \quad (m > N_R), \quad (5.49)$$

где  $N_R = N_R(\Omega, \eta)$  - номер, начиная с которого для системы (5.42) выполняются условия регулярности. Подстановка (5.49) в систему приводит к совокупности бесконечных систем с одинаковой матрицей относительно введенных новых неизвестных:

$$\begin{cases} X_m^0 = \frac{1}{\Delta_m^x} \sum_{n=N_R+1}^{\infty} a_{mn} Y_n^0 + \frac{P_m}{\Delta_m^x}; \\ Y_m^0 = \frac{1}{\Delta_m^y} \sum_{n=N_R+1}^{\infty} b_{mn} X_n^0 + \frac{Q_m}{\Delta_m^y}; \end{cases} \quad \begin{cases} X_m^{j1} = \frac{1}{\Delta_m^x} \sum_{n=N_R+1}^{\infty} a_{mn} Y_n^{j1}; \\ Y_m^{j1} = \frac{1}{\Delta_m^y} \sum_{n=N_R+1}^{\infty} b_{mn} X_n^{j1} + \frac{b_{mj}}{\Delta_m^y}; \end{cases} \\
\begin{cases} X_m^{j2} = \frac{1}{\Delta_m^x} \sum_{n=N_R+1}^{\infty} a_{mn} Y_n^{j2} + \frac{a_{mj}}{\Delta_m^x}; \\ Y_m^{j2} = \frac{1}{\Delta_m^y} \sum_{n=N_R+1}^{\infty} b_{mn} X_n^{j2}; \end{cases} \quad (m > N_R, j = 1, 2, \dots, N_R) \quad (5.50)$$

и к конечной системе линейных алгебраических уравнений относительно первых неизвестных  $\{x_m, y_m\}_{m=1}^{N_R}$ , коэффициенты которой зависят от решений (5.50):

$$\begin{cases} \Delta_m^x x_m = \sum_{n=1}^{N_R} \left( \sum_{j=N_R+1}^{\infty} a_{mj} Y_j^{n1} \right) x_n + \sum_{n=1}^{N_R} \left( a_{mn} + \sum_{j=N_R+1}^{\infty} a_{mj} Y_j^{n2} \right) y_n + P_m + \sum_{j=N_R+1}^{\infty} a_{mn} Y_n^0; \\ \Delta_m^y y_m = \sum_{n=1}^{N_R} \left( b_{mn} + \sum_{j=N_R+1}^{\infty} b_{mj} X_j^{n1} \right) x_n + \sum_{n=1}^{N_R} \left( \sum_{j=N_R+1}^{\infty} b_{mj} X_j^{n2} \right) y_n + Q_m + \sum_{j=N_R+1}^{\infty} b_{mn} X_n^0; \end{cases} \quad (5.51) \\
(m = 1, 2, \dots, N_R)$$

Согласно (5.46) бесконечные системы (5.50) являются вполне регулярными. Так как исходная система (5.42) имеет ограниченные свободные члены, то и все системы (5.50) также имеют ограниченные свободные члены. Таким образом, согласно теореме 2.2 каждая из систем (5.50) имеет единственное ограниченное решение.

Чтобы привести вполне регулярные системы (5.50) к виду, удовлетворяющему обобщенному закону существования ненулевого предела у решения (теорема 2.7, раздел 2.2), проведем замену переменных:

$$\begin{aligned} X_m^0 &= \frac{(1-2v^*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{(1-v^*)\eta\Omega_1^2} + \frac{x_m^0}{\alpha_m^\lambda}; & Y_m^0 &= -\frac{(1-2v^*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{(1-v^*)\eta\Omega_1^2} + \frac{y_m^0}{\beta_m^\lambda}; \\ X_m^{jk} &= \frac{x_m^{jk}}{\alpha_m^\lambda}; & Y_m^{jk} &= \frac{y_m^{jk}}{\beta_m^\lambda} \quad (m > N_R; j = 1, 2, \dots, N_R; k = 1, 2) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Дальнейшие выкладки проведем для системы относительно  $X_m^0, Y_m^0$ , так как после замены, в силу асимптотик (5.47), (5.48), все системы имеют одинаковый порядок убывания свободных членов как  $O(1/m)$ . Данная система примет вид

$$\begin{cases} x_m^0 = \frac{\alpha_m^\lambda}{\Delta_m^x} \sum_{n=N_R+1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\beta_n^\lambda} y_n^0 + \alpha_m^\lambda \left( \frac{P_m}{\Delta_m^x} - \frac{(1-2v^*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{(1-v^*)\eta\Omega_1^2} \left( 1 + \sum_{n=N_R+1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\Delta_m^x} \right) \right), \\ y_m^0 = \frac{\beta_m^\lambda}{\Delta_m^y} \sum_{n=N_R+1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{\alpha_n^\lambda} x_n^0 + \beta_m^\lambda \left( \frac{Q_m}{\Delta_m^y} + \frac{(1-2v^*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{(1-v^*)\eta\Omega_1^2} \left( 1 + \sum_{n=N_R+1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{\Delta_m^y} \right) \right), \end{cases} \quad (m > N_R) \quad (5.53)$$

Номер  $N_R$  всегда можно подобрать таким, что коэффициенты (5.35) будут строго положительными. Для оценки регулярности этой системы, на основе формулы Эйлера-Маклорена получаем следующее значение ряда

$$\begin{aligned} S_N(a) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{k^{-\lambda}}{k^2 + a^2} = \frac{N^{-(1+\lambda)}}{1+\lambda} {}_2F_1 \left( 1, \frac{1+\lambda}{2}, \frac{3+\lambda}{2}; -\left(\frac{a}{N}\right)^2 \right) + \frac{N^{-\lambda}}{2(N^2 + a^2)} + \frac{\lambda N^{-(\lambda+1)}}{12(N^2 + a^2)} + \\ + \frac{N^{1-\lambda}}{6(N^2 + a^2)^2} - \frac{1}{720} \left( \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)N^{-(\lambda+3)}}{(N^2 + a^2)} + \frac{6\lambda^2 N^{-(\lambda+1)}}{(N^2 + a^2)^2} - \frac{24(1-\lambda)N^{1-\lambda}}{(N^2 + a^2)^3} \right), \end{aligned} \quad (5.54)$$

который при  $a \rightarrow \infty$  дает асимптотику

$$S_N(a) = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi\lambda}{2}} a^{-(1+\lambda)} + k_N a^{-2} + O(a^{-(3+\lambda)}), \quad (5.55)$$

где  $k_N = \frac{N^{1-\lambda}}{\lambda-1} + \frac{1}{2} N^{-\lambda} + \frac{\lambda}{12} N^{-(1+\lambda)} - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{720} N^{-(3+\lambda)}$ .

Формулы (5.54) позволяют вычислить значение рядов в условиях регулярности

$$\begin{aligned} 1 - \varphi_m &= \frac{\alpha_m^\lambda}{\Delta_m^x} \sum_{n=N_R+1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\beta_n^\lambda} = \frac{2\alpha_m^{\lambda+1} \eta^{2+\lambda}}{\Delta_m^x \pi^{2+\lambda}} \left( S_{N_R+1} \left( \frac{\eta p_{2m}}{\pi} \right) - S_{N_R+1} \left( \frac{\eta p_{1m}}{\pi} \right) \right), \\ 1 - \psi_m &= \frac{\beta_m^\lambda}{\Delta_m^y} \sum_{n=N_R+1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{\alpha_n^\lambda} = \frac{2\beta_m^{1+\lambda}}{\Delta_m^y \pi^{2+\lambda}} \left( S_{N_R+1} \left( \frac{q_{2m}}{\pi} \right) - S_{N_R+1} \left( \frac{q_{1m}}{\pi} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.56)$$

а (5.11), (5.45) и (5.55) исследовать поведение при больших номерах  $m$ :

$$\begin{aligned} 1 - \varphi_m &= \frac{1+\lambda}{(3-4v^*) \cos \frac{\pi\lambda}{2}} + \frac{4k_{N_R+1} \eta^{\lambda-1}}{\pi(3-4v^*) m^{1-\lambda}} + O\left(\frac{1}{m}\right); \\ 1 - \psi_m &= \frac{1+\lambda}{(3-4v^*) \cos \frac{\pi\lambda}{2}} + \frac{4k_{N_R+1} \eta^{1-\lambda}}{\pi(3-4v^*) m^{1-\lambda}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

Так как коэффициент  $k_N$  является отрицательной величиной, то для того, чтобы система оставалась регулярной, но уже не была вполне регулярной

(напомним, это условие является обязательным для выполнения теоремы 2.7) должно выполняться равенство

$$\cos \frac{\pi \lambda}{2} = \frac{\lambda + 1}{3 - 4\nu^*} \quad (5.57)$$

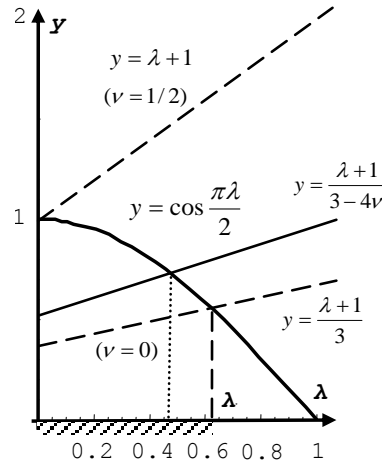


Рис. 5.7. Левая и правая части уравнения (5.57) ( $\lambda^* = 0.633451$ )

Свободные члены систем (5.42), согласно (5.47), (5.48), ведут себя как  $O(1/m)$ , поэтому для ограниченности свободных членов системы (5.53) необходимо чтобы  $\lambda \in [0; 1)$ . Рис. 5.7 показывает, что уравнение (5.57) имеет на указанном интервале единственный корень.

Можно проверить, что бесконечная система (5.53) удовлетворяет обобщенному признаку существования ненулевого предела у решения (теорема 2.7). Действительно, пусть в условиях данной теоремы  $\xi_m^{(1)} = \xi_m^{(2)} = m^{1-\lambda}$ . Учтем также, что в силу асимптотического закона (5.45) для  $\Delta_m^x, \Delta_m^y$  всегда найдутся константы  $\Delta_{\text{sup}}^x, \Delta_{\text{inf}}^x, \Delta_{\text{sup}}^y, \Delta_{\text{inf}}^y$  такие что

$$\Delta_{\text{inf}}^x \leq \Delta_m^x \alpha_m^2 \leq \Delta_{\text{sup}}^x \quad \text{и} \quad \Delta_{\text{inf}}^y \leq \Delta_m^y \beta_m^2 \leq \Delta_{\text{sup}}^y \quad (m > N_R).$$

Тогда при  $m > n$  справедливы оценки

$$\frac{2\Omega_1^2}{1-2\nu^*} \frac{\eta^\lambda}{\pi \Delta_{\text{sup}}^x} \left( \frac{\eta^2}{\eta^2+1} \right)^2 n^{-\lambda} \leq \frac{a_{mn} \xi_m^{(1)}}{\Delta_m^x} \leq \frac{2\Omega_1^2}{1-2\nu^*} \frac{\eta^\lambda \alpha_{N_R}^4}{\pi \Delta_{\text{inf}}^x p_{1N_R}^2 p_{2N_R}^2} n^{-\lambda};$$

$$\frac{2\Omega_1^2}{1-2\nu^*} \frac{\eta^{-\lambda}}{\pi \Delta_{\text{sup}}^y} \left( \frac{1}{\eta^2+1} \right)^2 n^{-\lambda} \leq \frac{b_{mn} \xi_m^{(2)}}{\Delta_m^y} \leq \frac{2\Omega_1^2}{1-2\nu^*} \frac{\eta^{-\lambda} \beta_{N_R}^4}{\pi \Delta_{\text{inf}}^y q_{1N_R}^2 q_{2N_R}^2} n^{-\lambda},$$

т.е.  $r_n^{(1)} = r_n^{(2)} = n^{-\lambda}$ .

Следовательно, для единственного ограниченного решения существует общий положительный предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m^0 = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m^0 = K_0 \quad (5.58)$$

Из формул замены (5.52) следуют асимптотические формулы для исходных неизвестных:

$$X_m^0 = \frac{(1-2v^*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{(1-v^*)\eta\Omega_1^2} + \frac{K_0}{\alpha_m^\lambda}; \quad Y_m^0 = -\frac{(1-2v^*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{(1-v^*)\eta\Omega_1^2} + \frac{K_0}{\beta_m^\lambda}; \quad (5.59)$$

Рассматривая подобным образом остальные системы (5.50) относительно  $\{X_m^{j,1}, Y_m^{j,1}\}$  и  $\{X_m^{j,2}, Y_m^{j,2}\}$ , доказывается справедливость формул при  $m \rightarrow \infty$ :

$$X_m^{j,1} \approx \frac{K_j^1}{\alpha_m^\lambda}; \quad Y_m^{j,1} \approx \frac{K_j^1}{\beta_m^\lambda} \quad \text{и} \quad X_m^{j,2} \approx \frac{K_j^2}{\alpha_m^\lambda}; \quad Y_m^{j,2} \approx \frac{K_j^2}{\beta_m^\lambda}. \quad (5.60)$$

Тогда из замены (5.52) и соотношений (5.47), (5.48) получаем двучленную асимптотическую формулу для неизвестных в исследуемой бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (5.42)

$$x_m = K + \frac{K_1}{\alpha_m^\lambda}; \quad y_m = -K + \frac{K_1}{\beta_m^\lambda}, \quad (5.61)$$

где  $K = \frac{(1-2v^*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{(1-v^*)\eta\Omega_1^2}$ ;  $K_1 = K_0 + \sum_{j=1}^{N_R} (K_j^1 x_j + K_j^2 y_j)$ .

Формула (5.61) в общем случае соответствует закону (5.19), добавляя в него второй член асимптотики.

### 5.2.3. Улучшение сходимости рядов в решении.

Проиллюстрируем изложенный выше подход на примере следующей краевой задачи:

$$\mathbf{u}_x|_{x=\pm 1} = \left(1 + \cos \frac{\pi y}{\eta}\right) e^{-i\alpha x}; \quad \mathbf{u}_y|_{x=\pm 1} = 0; \quad \mathbf{u}_x|_{y=\pm \eta} = 0; \quad \mathbf{u}_y|_{y=\pm \eta} = 0 \quad (5.62)$$

Свободные члены бесконечной системы (5.42) в этом случае имеют вид

$$P_m = \frac{2\alpha_m \beta_1^2}{\Delta_m^x p_{1m}^2 (p_{1m}^2 + \beta_1^2)}; \quad Q_m = \frac{(-1)^m \delta_{1m} \beta_m}{\Delta_m^y q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m}.$$

Из последней формулы следует, что при больших значениях  $m$ , свободные члены ведут себя как  $O(1/m)$ . Таким образом, здесь получаем  $K = 0$  и асимптотика неизвестных в бесконечной системе (5.42) определяется только степенным слагаемым в (5.61).

При решении бесконечной системы (5.42) использовалось разложение (5.49) - (5.51), так как бесконечные системы (5.50), после замены (5.52), эффективно решаются методом предельных лимитант (см. раздел 5.1.2, формулы (5.22) – (5.27)) на всем диапазоне частоты вынужденных колебаний. Близость к нулю определителя конечной системы (5.51) показывает близость резонансной частоты. Аналогично рассмотренным ранее задачам, для определения собственных частот колебаний удобно использовать условие (2.46).

Для компонентов вектора смещений получаем выражения:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x &= f_{10} \frac{\sin \Omega_1 x}{\sin \Omega_1} - \eta \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{p_{2m} \operatorname{ch} p_{2m} y}{\alpha_m \operatorname{sh} p_{2m} \eta} - \frac{\alpha_m \operatorname{ch} p_{1m} y}{p_{1m} \operatorname{sh} p_{1m} \eta} \right) (-1)^m x_m \sin \alpha_m x + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{sh} q_{2m} x}{\operatorname{sh} q_{2m}} - \frac{\operatorname{sh} q_{1m} x}{\operatorname{sh} q_{1m}} \right) (-1)^m y_m \cos \beta_m y - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_{2m} \alpha_m \operatorname{ch} p_{1m} y}{p_{1m} \operatorname{sh} p_{1m} \eta} \sin \alpha_m x + \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m} \frac{\operatorname{sh} q_{1m} x}{\operatorname{sh} q_{1m}} \cos \beta_m y; \\ \mathbf{u}_y &= g_{20} \frac{\sin \Omega_1 y}{\sin \Omega_1 \eta} + \eta \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{sh} p_{2m} y}{\operatorname{sh} p_{2m} \eta} - \frac{\operatorname{sh} p_{1m} y}{\operatorname{sh} p_{1m} \eta} \right) (-1)^m x_m \cos \alpha_m x - \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{q_{2m} \operatorname{ch} q_{2m} x}{\beta_m \operatorname{sh} q_{2m}} - \frac{\beta_m \operatorname{ch} q_{1m} x}{q_{1m} \operatorname{sh} q_{1m}} \right) (-1)^m y_m \sin \beta_m y + \sum_{m=1}^{\infty} g_{2m} \frac{\operatorname{sh} p_{1m} y}{\operatorname{sh} p_{1m} \eta} \cos \alpha_m x - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{1m} \beta_m \operatorname{ch} q_{1m} x}{q_{1m} \operatorname{sh} q_{1m}} \sin \beta_m y. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Откуда следует, что ряды, представляющие смещения, являются слабо сходящимися рядами Фурье на границе, где можно улучшить их сходимость на основе найденной двучленной асимптотики. Учитывая, что здесь  $K = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x(x, \eta) &= f_{10} \frac{\sin \Omega_1 x}{\sin \Omega_1} + \sum_{m=1}^{N_R} \left( \frac{\operatorname{sh} q_{2m} x}{\operatorname{sh} q_{2m}} - \frac{\operatorname{sh} q_{1m} x}{\operatorname{sh} q_{1m}} \right) y_m - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_{2m} \alpha_m}{p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m} \eta \sin \alpha_m x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m f_{1m} \frac{\operatorname{sh} q_{1m} x}{\operatorname{sh} q_{1m}} - \\ &- \eta \sum_{m=1}^{N_R} (-1)^m \left( \Delta_m^x x_m - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\alpha_m^2 m^\lambda} \eta^{1-\lambda} K_1 \right) \sin \alpha_m x - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\pi^2} \eta^{1-\lambda} K_1 \operatorname{ImLi}_{2+\lambda} \left( -e^{i\pi x} \right); \\ \mathbf{u}_y(1, y) &= g_{20} \frac{\sin \Omega_1 y}{\sin \Omega_1 \eta} + \eta \sum_{m=1}^{N_R} \left( \frac{\operatorname{sh} p_{2m} y}{\operatorname{sh} p_{2m} \eta} - \frac{\operatorname{sh} p_{1m} y}{\operatorname{sh} p_{1m} \eta} \right) x_m + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m g_{2m} \frac{\operatorname{sh} p_{1m} y}{\operatorname{sh} p_{1m} \eta} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{1m} \beta_m}{q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m} \sin \beta_m y - \\ &- \sum_{m=1}^{N_R} (-1)^m \left( \Delta_m^y y_m - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\beta_m^2 m^\lambda} K_1 \right) \sin \beta_m y - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\pi^2} \eta^2 K_1 \operatorname{ImLi}_{2+\lambda} \left( -e^{\frac{i\pi y}{\eta}} \right). \end{aligned} \quad (5.64)$$

где  $\operatorname{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$  ( $|z| < 1$ ) - функция обобщенного полилогарифма [115].



Условия  $\mathbf{u}_x(1, y) = (1 + \cos \frac{\pi y}{\eta})$  и  $\mathbf{u}_y(x, \eta) = 0$  выполняются точно по построению решения, погрешность выполнения условия  $\mathbf{u}_y(1, y) = 0$  характеризует таблица 5.5. В верхних ячейках таблицы даны значения  $\mathbf{u}_y(1, \bar{y}_j)$  при удержании в расчетах  $N = 10$  первых уравнений и неизвестных, в нижних – при  $N = 100$  для частоты  $\Omega = 3.410$ . Данные этой таблицы показывают, что погрешность растет ближе к угловой точке, причем улучшение сходимости, при которой использовалось знание асимптотики, дает уже при удержании в расчетах  $N = 10$  удовлетворительный результат. Увеличение числа вовлекаемых в расчеты неизвестных и уравнений дает возможность выполнить граничные условия с высокой точностью, несмотря на то, что значение частоты вынужденных колебаний оказывается достаточно близким к собственной частоте.

На рис. 5.8 представлено поведение смещений  $u_x(x, 0)$  вблизи собственной частоты колебаний. При подходе к собственной частоте все характеристики напряженно-деформируемого состояния возрастают, переход через собственную частоту характеризуется сменой знака.

Таблица 5.6 Точность выполнения граничных условий  $\mathbf{u}_y(1, y) = 0$  в (5.62)

$\bar{y}_j$	$\mathbf{u}_y(1, \bar{y}_j)$	
	без улучшения сходимости (5.63)	с улучшением сходимости (5.64)
0.1	-0.014697	-0.000013
	0.000043	0.000000
0.3	-0.047047	-0.000038
	0.000137	0.000000
0.5	-0.090959	-0.000054
	0.000270	0.000000
0.7	-0.169640	-0.000031
	0.000529	0.000000
0.9	-0.401939	-0.001953
	0.001689	0.000000

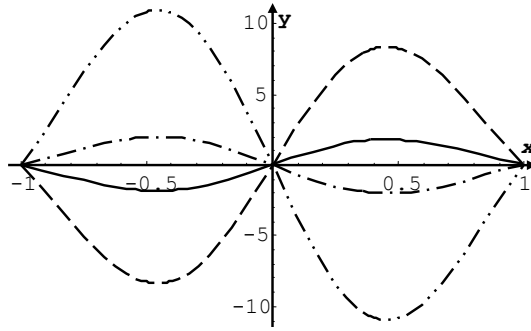


Рис.5.8. Смещения  $u_x(x,0)$  для краевой задачи (5.62)

( — при  $\Omega = 3.410$ ; - - - - - при  $\Omega = 3.412$ ;  
 - · - · - · при  $\Omega = 3.413$ ; · · · · · при  $\Omega = 3.415$ )

### 5.3. Планарные колебания ортотропной прямоугольной пластины с защемленными и свободными краями.

5.3.1. Общее решение дифференциальных уравнений. Бесконечные системы уравнений в случае свободных и защемленных краев пластины.

Исследование свободных продольных (планарных) колебаний прямоугольной ортотропной пластины сводится к построению нетривиального решения системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно собственных форм колебаний  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ :

$$\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left( G + \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \Omega^2 G u = 0 \quad (5.65)$$

$$\left( G + \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \Omega^2 G v = 0 \quad (5.66)$$

где обозначено  $\Omega^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  - коэффициенты Пуассона,  $E_1$  и  $E_2$  - модули Юнга в направлениях координатных осей,  $G$  - модуль сдвига.

При этом для пластины с защемленными краями, граничные условия могут быть записаны в виде:

$$\text{при } x = \pm a \quad u = v = 0 \quad (5.67)$$

$$\text{при } y = \pm b \quad u = v = 0 \quad (5.68)$$

и для пластины со свободными краями в виде:

$$\text{при } x = \pm a \quad \sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0 \quad (5.69)$$

$$\text{при } y = \pm b \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (5.70)$$

Описанный в предыдущих разделах диссертации подход к исследованию краевых задач при установившихся гармонических колебаниях пластины может быть использован для вычисления собственных частот колебаний и построения соответствующих им собственных форм краевых задач (5.67), (5.68) и (5.69), (5.70) при произвольной симметрии решения. В силу линейности исследуемых задач, представим общее решение системы дифференциальных уравнений (5.65), (5.66) в виде суммы:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{00} \\ v_{00} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{01} \\ v_{01} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{10} \\ v_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} \\ v_{11} \end{pmatrix}, \quad (5.71)$$

где индексом «00» обозначено решение соответствующее напряженно-деформируемому состоянию симметричному по обеим координатным осям, индексом «01» - симметричному по оси  $OX$  и антисимметричному по  $OY$ , и т.д.

Далее, компоненты смещений  $u_{kj}$  и  $v_{kj}$  представим в виде суммы двух тригонометрических рядов

$$u_{kj} = u_{kj}^{(1)} + u_{kj}^{(2)}, \quad v_{kj} = v_{kj}^{(1)} + v_{kj}^{(2)}, \quad (5.72)$$

каждый из которых можно записать одной аналитической формулой для различных типов симметрии, если ввести следующие обозначения для тригонометрических и гиперболических функций

$$H_0 = \text{ch}(z), \quad H_1 = \text{sh}(z), \quad T_0 = \cos(z), \quad T_1 = \sin(z). \quad (5.73)$$

Заметим, что данная идея использовалась ранее в третьей главе диссертации для описания поперечных колебаний ортотропной пластины.

Тогда первые ряды в представлении решения (5.72) могут быть представлены в виде

$$u_{kj}^{(1)} = H_j(py)T_k'(\alpha x), \quad v_{kj}^{(1)} = \Theta_1 H_j'(py)T_k(\alpha x) \quad (5.74)$$

где  $\alpha$  - некоторая константа разделения.

Подставляя (5.74) в систему дифференциальных уравнений (5.65), (5.66) можно получить, что константа  $\Theta_1$  выражается из уравнений этой системы как

$$\Theta_1 = \frac{\frac{E_1 \alpha^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} - p^2 - \Omega^2}{\alpha p \left(1 + \frac{\nu_1 E_2}{G(1-\nu_1 \nu_2)}\right)} = \frac{\alpha p \left(1 + \frac{\nu_2 E_1}{G(1-\nu_1 \nu_2)}\right)}{\frac{E_2 p^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} + \Omega^2 - \alpha^2} \quad (5.75)$$

В силу соотношений принципа Бетти, для упругих констант имеет место равенство

$$\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1,$$

тогда равенство (5.75) приводит к следующему характеристическому уравнению относительно  $p$ :

$$p^4 + \left( \left( 2\nu_1 - \frac{E_1}{G} \right) \alpha^2 + \Omega^2 + \Omega_y^2 \right) p^2 + \frac{\nu_1}{\nu_2} (\alpha^2 - \Omega^2) (\alpha^2 - \Omega_x^2) = 0 \quad (5.76)$$

где  $\Omega_x^2 = \frac{(1-\nu_1 \nu_2) \rho \omega^2}{E_1}$  и  $\Omega_y^2 = \frac{(1-\nu_1 \nu_2) \rho \omega^2}{E_2}$  - дополнительные частотные

параметры, которые введены для краткости изложения.

Аналогичным образом строятся члены второго ряда Фурье в представлении решения (5.72), в частности

$$u_{kj}^{(2)} = H'_k(qx) T_j(\beta y), \quad \nu_{kj}^{(2)} = \Theta_2 H_k(qx) T'_j(\beta y) \quad (5.77)$$

где  $\beta$  - константа разделения в данном случае. Подстановка (5.77) в уравнения исходной системы дифференциальных уравнений приводит к двойному равенству:

$$\Theta_2 = \frac{\frac{E_1 q^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} - \beta^2 + \Omega^2}{q\beta \left(1 + \frac{\nu_1 E_2}{G(1-\nu_1 \nu_2)}\right)} = \frac{q\beta \left(1 + \frac{\nu_2 E_1}{G(1-\nu_1 \nu_2)}\right)}{\frac{E_2 \beta^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} - q^2 - \Omega^2}. \quad (5.78)$$

Откуда получаем характеристическое уравнение для определения  $q$ :

$$q^4 + \left( \left( 2\nu_2 - \frac{E_2}{G} \right) \beta^2 + \Omega^2 + \Omega_x^2 \right) q^2 + \frac{\nu_2}{\nu_1} (\beta^2 - \Omega^2) (\beta^2 - \Omega_y^2) = 0 \quad (5.79)$$

Из полученных характеристических уравнений (5.76) и (5.79), которые являются биквадратными относительно  $p$  и  $q$  соответственно, корни могут быть выражены в аналитической форме:

$$p = \sqrt{\left( \frac{E_1}{2G} - \nu_1 \right) \alpha^2 - \frac{\Omega^2 + \Omega_y^2}{2}} + \sqrt{D_p}, \quad \bar{p} = \sqrt{\left( \frac{E_1}{2G} - \nu_1 \right) \alpha^2 - \frac{\Omega^2 + \Omega_y^2}{2}} - \sqrt{D_p} \quad (5.80)$$

и

$$q = \sqrt{\left(\frac{E_2}{2G} - \nu_2\right)\beta^2 - \frac{\Omega^2 + \Omega_x^2}{2} + \sqrt{D_q}}, \quad \bar{q} = \sqrt{\left(\frac{E_2}{2G} - \nu_2\right)\beta^2 - \frac{\Omega^2 + \Omega_x^2}{2} - \sqrt{D_q}} \quad (5.81)$$

где

$$D_p = \left(\left(\frac{E_1}{2G} - \nu_1\right)\alpha^2 - \frac{\Omega^2 + \Omega_y^2}{2}\right)^2 - \frac{\nu_1}{\nu_2}(\alpha^2 - \Omega^2)(\alpha^2 - \Omega_x^2), \quad (5.82)$$

$$D_q = \left(\left(\frac{E_2}{2G} - \nu_2\right)\beta^2 - \frac{\Omega^2 + \Omega_x^2}{2}\right)^2 - \frac{\nu_2}{\nu_1}(\beta^2 - \Omega^2)(\beta^2 - \Omega_y^2). \quad (5.83)$$

Заметим, что каждый из построенных членов (5.74), (5.77) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (5.65), (5.66) для любых ненулевых констант разделения  $\alpha$  и  $\beta$ . Однако, для полноты представления решения на границе пластины предлагается выбрать их в форме

$$\alpha_{nk} = \frac{\pi}{a} \left(n - \frac{k}{2}\right) = \begin{cases} \frac{\pi n}{a}, & k=0 \\ \frac{\pi(2n-1)}{2a}, & k=1 \end{cases}; \quad \beta_{nj} = \frac{\pi}{b} \left(n - \frac{j}{2}\right) = \begin{cases} \frac{\pi n}{b}, & j=0 \\ \frac{\pi(2n-1)}{2b}, & j=1 \end{cases} \quad (5.84)$$

В случае же когда константа разделения  $\alpha = 0$ , получаем частное решение в форме

$$u_{kj}^{(2)} = 0 \quad \text{и} \quad v_{kj}^{(2)} = T_j'(\Omega_y y) \quad (5.85)$$

Если  $\beta = 0$ , аналогичное решение может быть записано как

$$u_{kj}^{(1)} = T_k'(\Omega_x x) \quad \text{и} \quad v_{kj}^{(1)} = 0. \quad (5.86)$$

Следуя методу суперпозиции, ряд по полученным выше частным решениям (5.74), (5.77), (5.85) и (5.86) дает общее решение системы дифференциальных уравнений (5.65) и (5.66) следующего вида

$$\left(1 + \frac{\nu_2 E_1}{G(1 - \nu_1 \nu_2)}\right) u_{kj} = \delta_{j0} C_0 T_k'(\Omega_x x) + \left(1 + \frac{\nu_2 E_1}{G(1 - \nu_1 \nu_2)}\right) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n H_j(p_{nk} y) + B_n H_j(\bar{p}_{nk} y)) T_k'(\alpha_{nk} x) - \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \frac{q_{nj}^2 - \frac{E_2 \beta_{nj}^2}{G(1 - \nu_1 \nu_2)} + \Omega^2}{q_{nj}} H_k'(q_{nj} x) + D_n \frac{\bar{q}_{nj}^2 - \frac{E_2 \beta_{nj}^2}{G(1 - \nu_1 \nu_2)} + \Omega^2}{\bar{q}_{nj}} H_k'(\bar{q}_{nj} x) \right) \frac{T_j(\beta_{nj} y)}{\beta_{nj}}, \quad (5.87)$$

$$\left(1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}\right) v_{kj} = \delta_{k0} A_0 T'_j(\Omega_y y) + \left(1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}\right) \sum_{n=1}^{\infty} (C_n H_k(q_{nj} x) + D_n H_k(\bar{q}_{nj} x)) T'_j(\beta_{nj} y) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \frac{p_{nk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{nk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2}{p_{nk}} H'_j(p_{nk} y) + B_n \frac{\bar{p}_{nk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{nk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2}{\bar{p}_{nk}} H'_j(\bar{p}_{nk} y) \right) \frac{T_k(\alpha_{nk} x)}{\alpha_{nk}}, \quad (5.88)$$

где  $\delta_{mn}$  - символ Кронекера,  $A_n, B_n, C_n$  и  $D_n$  - неопределенные коэффициенты.

Тогда компоненты тензора напряжений имеют вид:

$$\frac{G(1-v_1 v_2) + v_2 E_1}{G E_1} \sigma_{xx}^{kj} = -\delta_{j0} \Omega_x C_0 T_k(\Omega_x x) - \delta_{k0} \Omega_y v_2 A_0 T_j(\Omega_y y) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (A_n (\alpha_{nk}^2 + v_2 p_{nk}^2 + v_2 \Omega^2) H_j(p_{nk} y) + B_n (\alpha_{nk}^2 + v_2 \bar{p}_{nk}^2 + v_2 \Omega^2) H_j(\bar{p}_{nk} y)) \frac{T_k(\alpha_{nk} x)}{\alpha_{nk}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (C_n (\bar{q}_{nj}^2 + v_2 \beta_{nj}^2 + \Omega_x^2) H_k(q_{nj} x) + D_n (q_{nj}^2 + v_2 \beta_{nj}^2 + \Omega_x^2) H_k(\bar{q}_{nj} x)) \frac{T_j(\beta_{nj} y)}{\beta_{nj}}, \quad (5.89)$$

$$\frac{G(1-v_1 v_2) + v_1 E_2}{G E_2} \sigma_{yy}^{kj} = -\delta_{j0} \Omega_x v_1 C_0 T_k(\Omega_x x) - \delta_{k0} \Omega_y A_0 T_j(\Omega_y y) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n (\bar{p}_{nk}^2 + v_1 \alpha_{nk}^2 + \Omega_y^2) H_j(p_{nk} y) + B_n (p_{nk}^2 + v_1 \alpha_{nk}^2 + \Omega_y^2) H_j(\bar{p}_{nk} y)) \frac{T_k(\alpha_{nk} x)}{\alpha_{nk}} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (C_n (\beta_{nj}^2 + v_1 q_{nj}^2 + v_1 \Omega^2) H_k(q_{nj} x) + D_n (\beta_{nj}^2 + v_1 \bar{q}_{nj}^2 + v_1 \Omega^2) H_k(\bar{q}_{nj} x)) \frac{T_j(\beta_{nj} y)}{\beta_{nj}}, \quad (5.90)$$

$$\frac{G(1-v_1 v_2) + v_2 E_1}{G \sqrt{E_1 E_2}} \sigma_{xy}^{kj} = \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \frac{v_2 p_{nk}^2 + \alpha_{nk}^2 - \Omega_x^2}{p_{nk}} H'_j(p_{nk} y) + \right.$$

$$+ B_n \frac{v_2 \bar{p}_{nk}^2 + \alpha_{nk}^2 - \Omega_x^2}{\bar{p}_{nk}} H'_j(\bar{p}_{nk} y) \left. \right) T'_k(\alpha_{nk} x) + \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \frac{v_1 q_{nj}^2 + \beta_{nj}^2 - \Omega_y^2}{q_{nj}} H'_k(q_{nj} x) + \right.$$

$$+ D_n \frac{v_1 \bar{q}_{nj}^2 + \beta_{nj}^2 - \Omega_y^2}{\bar{q}_{nj}} H'_k(\bar{q}_{nj} x) \left. \right) T'_j(\beta_{nj} y). \quad (5.91)$$

Таким образом, формулы (5.87), (5.88) обеспечивают точное решение системы дифференциальных уравнений (5.65), (5.66). Построенное решение обладает достаточным множеством произвольных коэффициентов  $A_n, B_n, C_n$  и  $D_n$  для того, чтобы удовлетворить любым граничным условиям. Далее рассмотрим

два случая граничных условий: (5.67), (5.68) - полностью защемленную пластину (CCCC) и (5.69), (5.70) - пластину со свободным краем (FFFF).

Выбор тригонометрических функций в форме (5.73) и констант разделения в форме (5.84) приводит на границе пластины к равенствам

$$T'_k(\alpha_{nk}a) = 0, \quad T'_j(\beta_{nj}b) = 0. \quad (5.92)$$

Тогда граничные условия  $u_{kj}(a, y) = 0$  и  $v_{kj}(x, b) = 0$  могут быть выполнены тождественно, если положить, что

$$A_0 = 0, \quad C_0 = 0, \quad (5.93)$$

$$D_n = -C_n \frac{\bar{q}_{nj}}{q_{nj}} \cdot \frac{q_{nj}^2 - \frac{E_2 \beta_{nj}^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} + \Omega^2}{\bar{q}_{nj}^2 - \frac{E_2 \beta_{nj}^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} + \Omega^2} \cdot \frac{H'_k(q_{nj}a)}{H'_k(\bar{q}_{nj}a)}, \quad (5.94)$$

$$B_n = -A_n \frac{\bar{p}_{nk}}{p_{nk}} \cdot \frac{p_{nk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{nk}^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} + \Omega^2}{\bar{p}_{nk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{nk}^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} + \Omega^2} \cdot \frac{H'_j(p_{nk}b)}{H'_j(\bar{p}_{nk}b)}, \quad (5.95)$$

Подставляя (5.93) – (5.95) в формулы для компонентов смещений (5.87), (5.88), получаем из оставшихся граничных условий защемленного края следующие функциональные соотношения

$$u_{kj}(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n H'_j(p_{nk}b) \left( \frac{H_j(p_{nk}b)}{H'_j(p_{nk}b)} - \frac{\bar{p}_{nk}}{p_{nk}} \cdot \frac{p_{nk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{nk}^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} + \Omega^2}{\bar{p}_{nk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{nk}^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} + \Omega^2} \cdot \frac{H_j(\bar{p}_{nk}b)}{H'_j(\bar{p}_{nk}b)} \right) T'_k(\alpha_{nk}x) -$$

$$- \frac{1}{1 + \frac{\nu_2 E_1}{G(1-\nu_1 \nu_2)}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+j} C_n H'_k(q_{nj}a) \frac{q_{nj}^2 - \frac{E_2 \beta_{nj}^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} + \Omega^2}{\beta_{nj} q_{nj}} \left( \frac{H'_k(q_{nj}x)}{H'_k(q_{nj}a)} - \frac{H'_k(\bar{q}_{nj}x)}{H'_k(\bar{q}_{nj}a)} \right) = 0,$$

$$v_{kj}(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n H'_k(q_{nj}a) \left( \frac{H_k(q_{nj}a)}{H'_k(q_{nj}a)} - \frac{\bar{q}_{nj}}{q_{nj}} \cdot \frac{q_{nj}^2 - \frac{E_2 \beta_{nj}^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} + \Omega^2}{\bar{q}_{nj}^2 - \frac{E_2 \beta_{nj}^2}{G(1-\nu_1 \nu_2)} + \Omega^2} \cdot \frac{H_k(\bar{q}_{nj}a)}{H'_k(\bar{q}_{nj}a)} \right) T'_j(\beta_{nj}y) -$$

$$-\frac{1}{1+\frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+k} A_n H'_j(p_{nk} b) \frac{p_{nk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{nk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2}{\alpha_{nk} p_{nk}} \left( \frac{H'_j(p_{nk} y)}{H'_j(p_{nk} b)} - \frac{H'_j(\bar{p}_{nk} y)}{H'_j(\bar{p}_{nk} b)} \right) = 0 \quad (5.96)$$

где в зависимости от типа симметрии решения

$$\frac{H_l(z)}{H'_l(z)} = \begin{cases} \operatorname{cth} z, & l=0 \\ \operatorname{th} z, & l=1 \end{cases}$$

Так как разложение в ряд Фурье функции  $\operatorname{ch} z$  по системе  $\left\{ \cos \frac{\pi(2n-1)}{2h} z \right\}$  и функции  $\operatorname{sh} z$  по системе функций  $\left\{ \sin \frac{\pi n z}{h} \right\}$  при  $z \in [-h; h]$  совпадают в введенных обозначениях (5.73) и (5.84), то оказывается возможным записать разложение гиперболических функций для любого типа симметрии  $(k, j)$  в виде

$$\frac{H'_k(q_{nj} x)}{H'_k(q_{nj} a)} - \frac{H'_k(\bar{q}_{nj} x)}{H'_k(\bar{q}_{nj} a)} = \frac{2(\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k} \alpha_{mk} T'_k(\alpha_{mk} x)}{(\alpha_{mk}^2 + q_{nj}^2)(\alpha_{mk}^2 + \bar{q}_{nj}^2)} \quad (5.97)$$

$$\frac{H'_j(p_{nk} y)}{H'_j(p_{nk} b)} - \frac{H'_j(\bar{p}_{nk} y)}{H'_j(\bar{p}_{nk} b)} = \frac{2(\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+j} \beta_{mj} T'_j(\beta_{mj} y)}{(\beta_{mj}^2 + \bar{p}_{nk}^2)(\beta_{mj}^2 + p_{nk}^2)} \quad (5.98)$$

Тогда функциональные равенства (5.96) могут быть представлены в форме полных рядов Фурье

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m H'_j(p_{mk} b) \left( \frac{H_j(p_{mk} b)}{H'_j(p_{mk} b)} - \frac{\bar{p}_{mk}}{p_{mk}} \cdot \frac{p_{mk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{mk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2}{\bar{p}_{mk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{mk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2} \cdot \frac{H_j(\bar{p}_{mk} b)}{H'_j(\bar{p}_{mk} b)} \right) T'_k(\alpha_{mk} x) + \quad (5.99)$$

$$+ \frac{2}{1+\frac{v_2 E_1}{G(1-v_1 v_2)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+j}}{a} (q_{nj}^2 - \bar{q}_{nj}^2) C_n H'_k(q_{nj} a) \frac{q_{nj}^2 - \frac{E_2 \beta_{nj}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2}{\beta_{nj} q_{nj}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k} \alpha_{mk} T'_k(\alpha_{mk} x)}{(\alpha_{mk}^2 + q_{nj}^2)(\alpha_{mk}^2 + \bar{q}_{nj}^2)} = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m H'_k(q_{mj} a) \left( \frac{H_k(q_{mj} a)}{H'_k(q_{mj} a)} - \frac{\bar{q}_{mj}}{q_{mj}} \cdot \frac{q_{mj}^2 - \frac{E_2 \beta_{mj}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2}{\bar{q}_{mj}^2 - \frac{E_2 \beta_{mj}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2} \cdot \frac{H_k(\bar{q}_{mj} a)}{H'_k(\bar{q}_{mj} a)} \right) T'_j(\beta_{mj} y) + \quad (5.100)$$



$$+ \frac{2}{1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{b} (p_{nk}^2 - \bar{p}_{nk}^2) A_n H'_j(p_{nk} b) \frac{p_{nk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{nk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2}{\alpha_{nk} p_{nk}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+j} \beta_{mj} T'_j(\beta_{mj} y)}{(\beta_{mj}^2 + \bar{p}_{nk}^2)(\beta_{mj}^2 + p_{nk}^2)} = 0$$

Вместо коэффициентов  $A_m$  и  $C_m$  введем новые коэффициенты  $x_m^c$  и  $y_m^c$ :

$$x_m^c = \frac{v_2}{b} (-1)^{m+k} A_m H'_j(p_{mk} b) (p_{mk}^2 - \bar{p}_{mk}^2) \frac{p_{mk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{mk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2}{\alpha_{mk} p_{mk}} \quad (5.101)$$

$$y_m^c = \frac{v_1}{a} (-1)^{m+j} C_m H'_k(q_{mj} a) (q_{mj}^2 - \bar{q}_{mj}^2) \frac{q_{mj}^2 - \frac{E_2 \beta_{mj}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2}{\beta_{mj} q_{mj}} \quad (5.102)$$

тогда равенство нулю коэффициентов при базисных функциях в (5.99), (5.100) приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений вида

$$x_m^c = \frac{2\alpha_{mk}}{\left(1 + \frac{v_2 E_1}{G(1-v_1 v_2)}\right) \Delta_{1,m}^c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^c}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} \quad (5.103)$$

$$y_m^c = \frac{2\beta_{mj}}{\left(1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}\right) \Delta_{2,m}^c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^c}{(\alpha_{nj}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nj}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} \quad (m = 1, 2, 3 \dots) \quad (5.104)$$

где

$$\Delta_{1,m}^c = \frac{b\alpha_{mk}}{\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2} \left( \frac{p_{mk}}{p_{mk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{mk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2} \frac{H_j(p_{mk} b)}{H'_j(p_{mk} b)} - \frac{\bar{p}_{mk}}{\bar{p}_{mk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{mk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2} \frac{H_j(\bar{p}_{mk} b)}{H'_j(\bar{p}_{mk} b)} \right) \quad (5.105)$$

$$\Delta_{2,m}^c = \frac{a\beta_{mj}}{\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2} \left( \frac{q_{mj}}{q_{mj}^2 - \frac{E_2 \beta_{mj}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2} \frac{H_k(q_{mj} a)}{H'_k(q_{mj} a)} - \frac{\bar{q}_{mj}}{\bar{q}_{mj}^2 - \frac{E_2 \beta_{mj}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2} \frac{H_k(\bar{q}_{mj} a)}{H'_k(\bar{q}_{mj} a)} \right) \quad (5.106)$$

Система (5.103), (5.104) может быть записана в каноническом виде

$$Z_m^c = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn}^c Z_n^c \quad (m = 1, 2, 3 \dots) \quad (5.107)$$

где  $Z_m^c = \{x_1^c, y_1^c, \dots, x_m^c, y_m^c, \dots\}$

$$M_{2m-1,2n-1}^c = 0; \quad M_{2m-1,2n}^c = \frac{2\alpha_{mk}}{\left(1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}\right) \Delta_{1,m}^c (\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2) (\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)};$$

$$M_{2m,2n-1}^c = \frac{2\beta_{mj}}{\left(1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}\right) \Delta_{2,m}^c (\alpha_{nj}^2 + q_{mj}^2) (\alpha_{nj}^2 + \bar{q}_{mj}^2)}; \quad M_{2m,2n}^c = 0.$$

Аналогичным образом строится бесконечная система линейных уравнений для пластины со свободными краями (5.69), (5.70). Условия на касательные напряжения  $\sigma_{xy}(a, y) = \sigma_{xy}(x, b) = 0$  могут быть выполнены точно, если неопределенные коэффициенты  $A_n, B_n, C_n, D_n$  связаны в (5.91) следующими соотношениями

$$D_n = -C_n \frac{\bar{q}_{nj}}{q_{nj}} \cdot \frac{v_1 q_{nj}^2 + \beta_{nj}^2 - \Omega_y^2}{v_1 \bar{q}_{nj}^2 + \beta_{nj}^2 - \Omega_y^2} \cdot \frac{H'_k(q_{nj}a)}{H'_k(\bar{q}_{nj}a)} \quad (5.108)$$

$$B_n = -A_n \frac{\bar{p}_{nk}}{p_{nk}} \cdot \frac{v_2 p_{nk}^2 + \alpha_{nk}^2 - \Omega_x^2}{v_2 \bar{p}_{nk}^2 + \alpha_{nk}^2 - \Omega_x^2} \cdot \frac{H'_j(p_{nk}b)}{H'_j(\bar{p}_{nk}b)} \quad (5.109)$$

После подстановки равенств (5.108), (5.109) в выражения для нормальных напряжений (5.89) – (5.90), граничные условия  $\sigma_{xx}(a, y) = \sigma_{yy}(x, b) = 0$  приводят к следующим функциональным уравнениям

$$-\delta_{j0} \Omega_x C_0 T_k(\Omega_x a) - \delta_{k0} \Omega_y v_2 A_0 T_j(\Omega_y b) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k} A_n H'_j(p_{nk}b)}{\alpha_{nk}} \times$$

$$\times \left( \left( v_2 p_{nk}^2 + \alpha_{nk}^2 + v_2 \Omega^2 \right) \frac{H_j(p_{nk}y)}{H'_j(p_{nk}b)} - \frac{\bar{p}_{nk}}{p_{nk}} \cdot \frac{v_2 p_{nk}^2 + \alpha_{nk}^2 - \Omega_x^2}{v_2 \bar{p}_{nk}^2 + \alpha_{nk}^2 - \Omega_x^2} \left( v_2 \bar{p}_{nk}^2 + \alpha_{nk}^2 + v_2 \Omega^2 \right) \frac{H_j(\bar{p}_{nk}y)}{H'_j(\bar{p}_{nk}b)} \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n H'_k(q_{nj}a) (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2) (\beta_{nj}^2 - \Omega_y^2)}{a \beta_{nj} q_{nj} (v_1 \bar{q}_{nj}^2 + \beta_{nj}^2 - \Omega_y^2)} \Delta_{2,n}^f T_j(\beta_{nj}y) = 0 \quad (5.110)$$

$$-\delta_{j0} \Omega_x v_1 C_0 T_k(\Omega_x x) - \delta_{k0} \Omega_y A_0 T_j(\Omega_y b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n H'_j(p_{nk}b) (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2) (\alpha_{nk}^2 - \Omega_x^2)}{b \alpha_{nk} p_{nk} (v_2 \bar{p}_{nk}^2 + \alpha_{nk}^2 - \Omega_x^2)} \Delta_{1,n}^f T_k(\alpha_{nk}x) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+j} C_n H'_k(q_{nj}a)}{\beta_{nj}} \left( \left( v_1 q_{nj}^2 + \beta_{nj}^2 + v_1 \Omega^2 \right) \cdot \frac{H_k(q_{nj}x)}{H'_k(q_{nj}a)} - \frac{\bar{q}_{nj}}{q_{nj}} \cdot \frac{v_1 q_{nj}^2 + \beta_{nj}^2 - \Omega_y^2}{v_1 \bar{q}_{nj}^2 + \beta_{nj}^2 - \Omega_y^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left( v_1 \bar{q}_{nj}^2 + \beta_{nj}^2 + v_1 \Omega^2 \right) \cdot \frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{H'_k(\bar{q}_{nj}a)} \right) = 0 \quad (5.111)$$

где

$$\Delta_{1,m}^f = \frac{b}{(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)(\alpha_{mk}^2 - \Omega_x^2)} \left( p_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 + v_1\alpha_{mk}^2 + \Omega_y^2)(v_2\bar{p}_{mk}^2 + \alpha_{mk}^2 - \Omega_x^2) \frac{H_j(p_{mk}b)}{H'_j(p_{mk}b)} - \bar{p}_{mk}(p_{mk}^2 + v_1\alpha_{mk}^2 + \Omega_y^2)(v_2p_{mk}^2 + \alpha_{mk}^2 - \Omega_x^2) \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H'_j(\bar{p}_{mk}b)} \right) \quad (5.112)$$

$$\Delta_{2,m}^f = \frac{a}{(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)(\beta_{mj}^2 - \Omega_y^2)} \left( q_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 + v_2\beta_{mj}^2 + \Omega_x^2)(v_1\bar{q}_{mj}^2 + \beta_{mj}^2 - \Omega_y^2) \frac{H_k(q_{mj}a)}{H'_k(q_{mj}a)} - \bar{q}_{mj}(q_{mj}^2 + v_2\beta_{mj}^2 + \Omega_x^2)(v_1q_{mj}^2 + \beta_{mj}^2 - \Omega_y^2) \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{H'_k(\bar{q}_{mj}a)} \right) \quad (5.113)$$

Также как и в предыдущем случае, преобразование функциональных уравнений (5.112) и (5.113) к бесконечной системе линейных уравнений оказывается возможным для любого типа симметрии благодаря схожести разложений в ряды Фурье функции  $\text{sh } z$  по системе функций  $\left\{ \cos \frac{\pi n z}{h} \right\}$  и функции  $\text{sh } z$  по системе  $\left\{ \sin \frac{\pi(2n-1)}{2h} z \right\}$  при  $z \in [-h; h]$ . Отсутствие постоянных членов в разложении нечетной функции  $\text{sh } z$  может быть записано при помощи символов Кронекера  $\delta_{kn}$ :

$$\frac{H_k(q_{nj}x)}{H'_k(q_{nj}a)} = \frac{\delta_{k0}}{aq_{nj}} + \frac{2q_{nj}}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k} T_k(\alpha_{mk}x)}{\alpha_{mk}^2 + q_{nj}^2} \quad (5.114)$$

$$T_k(\Omega_x x) = (-1)^{k+1} T'_k(\Omega_x a) \left( \frac{\delta_{k0}}{a\Omega_x} - \frac{2\Omega_x}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m T_k(\alpha_{mk}x)}{\alpha_{mk}^2 - \Omega_x^2} \right) \quad (5.115)$$

и

$$\frac{H_j(p_{nk}y)}{H'_j(p_{nk}b)} = \frac{\delta_{j0}}{bp_{nk}} + \frac{2p_{nk}}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+j} T_j(\beta_{mj}y)}{\beta_{mj}^2 + p_{nk}^2} \quad (5.116)$$

$$T_j(\Omega_y y) = (-1)^{j+1} T'_j(\Omega_y b) \left( \frac{\delta_{j0}}{b\Omega_y} - \frac{2\Omega_y}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m T_j(\beta_{mj}y)}{\beta_{mj}^2 - \Omega_y^2} \right) \quad (5.117)$$

Окончательно, замена вида

$$x_0^f = T'_j(\Omega_y b) A_0, \quad y_0^f = -T'_k(\Omega_x a) C_0 \quad (5.118)$$

$$x_m^f = (-1)^{m+k+1} A_m H'_j(p_{mk}b) \frac{\alpha_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)(\alpha_{mk}^2 - \Omega_x^2)}{bp_{mk}(v_2\bar{p}_{mk}^2 + \alpha_{mk}^2 - \Omega_x^2)} \quad (5.119)$$

$$y_m^f = (-1)^{m+j} C_m H'_k(q_{mj}a) \frac{\beta_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)(\beta_{mj}^2 - \Omega_y^2)}{aq_{mj}(v_1\bar{q}_{mj}^2 + \beta_{mj}^2 - \Omega_y^2)} \quad (5.120)$$

и подстановка разложений (5.114) – (5.117) в уравнения (5.110), (5.111) приводит к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\delta_{k0}x_0^f = \delta_{k0}\delta_{j0} \frac{v_1(-1)^{k+1}T'_j(\Omega_y b)}{a\Omega_y T_j(\Omega_y b)} y_0^f - \delta_{k0}v_1 \frac{T'_j(\Omega_y b)}{T_j(\Omega_y b)} \cdot \frac{\Omega_y^2 + v_1\Omega^2}{\Omega_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^f}{\beta_{nj}^2(\beta_{nj}^2 - \Omega_y^2)} \quad (5.121)$$

$$\delta_{j0}y_0^f = \delta_{k0}\delta_{j0} \frac{v_2(-1)^{j+1}T'_k(\Omega_x a)}{b\Omega_x T_k(\Omega_x a)} x_0^f - \delta_{j0}v_2 \frac{T'_k(\Omega_x a)}{T_k(\Omega_x a)} \cdot \frac{\Omega_x^2 + v_2\Omega^2}{\Omega_x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^f}{\alpha_{nk}^2(\alpha_{nk}^2 - \Omega_x^2)} \quad (5.122)$$

$$x_m^f = \frac{2\delta_{j0}v_1\Omega_x^2\alpha_{mk}^2 y_0^f}{a\Delta_{1,m}^f(\alpha_{mk}^2 - \Omega_x^2)} + \frac{2v_1\left(1 - v_1v_2 + \frac{v_1E_2}{G}\right)\alpha_{mk}^2}{v_2\Delta_{1,m}^f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{nj}^2\left(\alpha_{mk}^2 - \frac{v_1\Omega_x^2}{1 - v_1v_2}\right) - \frac{v_1\Omega_x^2}{1 - v_1v_2}(\alpha_{mk}^2 - \Omega^2)}{\beta_{nj}^2(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} y_n^f \quad (5.123)$$

$$y_m^f = \frac{2\delta_{k0}v_2\Omega_y^2\beta_{mj}^2 x_0^f}{b\Delta_{2,m}^f(\beta_{mj}^2 - \Omega_y^2)} + \frac{2v_2\left(1 - v_1v_2 + \frac{v_2E_1}{G}\right)\beta_{mj}^2}{v_1\Delta_{2,m}^f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nk}^2\left(\beta_{mj}^2 - \frac{v_2\Omega_y^2}{1 - v_1v_2}\right) - \frac{v_2\Omega_y^2}{1 - v_1v_2}(\beta_{mj}^2 - \Omega^2)}{\alpha_{nk}^2(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} x_n^f \quad (5.124)$$

Очевидно, что данная система может быть также записана в каноническом виде

$$Z_m^f = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn}^f Z_n^f \quad (m=1, 2, 3 \dots) \quad (5.125)$$

если положить  $Z_m^f = \{\delta_{k0}x_0^f, \delta_{j0}y_0^f, x_1^f, y_1^f, \dots, x_m^f, y_m^f, \dots\}$

$$M_{1,1}^f = 0; M_{1,2}^f = \delta_{k0}\delta_{j0} \frac{v_1(-1)^{k+1}T'_j(\Omega_y b)}{a\Omega_y T_j(\Omega_y b)}; M_{1,2n+1}^f = 0; M_{1,2n+2}^f = -\frac{\delta_{k0}v_1}{\Omega_y} \frac{T'_j(\Omega_y b)}{T_j(\Omega_y b)} \cdot \frac{\Omega_y^2 + v_1\Omega^2}{\beta_{nj}^2(\beta_{nj}^2 - \Omega_y^2)};$$

$$M_{2,1}^f = \delta_{k0}\delta_{j0} \frac{v_2(-1)^{j+1}T'_k(\Omega_x a)}{b\Omega_x T_k(\Omega_x a)}; M_{2,2}^f = 0; M_{2,2n+1}^f = -\frac{\delta_{j0}v_2}{\Omega_x} \frac{T'_k(\Omega_x a)}{T_k(\Omega_x a)} \cdot \frac{\Omega_x^2 + v_2\Omega^2}{\alpha_{nk}^2(\alpha_{nk}^2 - \Omega_x^2)}; M_{2,2n+2}^f = 0;$$

$$M_{2m+1,1}^f = 0; M_{2m+1,2}^f = \frac{2\delta_{j0}v_1\Omega_x^2\alpha_{mk}^2}{a\Delta_{1,m}^f(\alpha_{mk}^2 - \Omega_x^2)}; M_{2m+1,2n+1}^f = 0;$$

$$M_{2m+1,2n+2}^f = 2v_1\left(1 - v_1v_2 + \frac{v_1E_2}{G}\right)\alpha_{mk}^2 \cdot \frac{\beta_{nj}^2\left(\alpha_{mk}^2 - \frac{v_1\Omega_x^2}{1 - v_1v_2}\right) - \frac{v_1\Omega_x^2}{1 - v_1v_2}(\alpha_{mk}^2 - \Omega^2)}{v_2\Delta_{1,m}^f\beta_{nj}^2(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)};$$

$$M_{2m+2,1}^f = \frac{2\delta_{k0}v_2\Omega_y^2\beta_{mj}^2}{b\Delta_{2,m}^f(\beta_{mj}^2 - \Omega_y^2)}; M_{2m+2,2}^f = 0;$$

$$M_{2m+2,2n+1}^f = 2v_2\left(1 - v_1v_2 + \frac{v_2E_1}{G}\right)\beta_{mj}^2 \cdot \frac{\alpha_{nk}^2\left(\beta_{mj}^2 - \frac{v_2\Omega_y^2}{1 - v_1v_2}\right) - \frac{v_2\Omega_y^2}{1 - v_1v_2}(\beta_{mj}^2 - \Omega^2)}{v_1\Delta_{2,m}^f\alpha_{nk}^2(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)}; M_{2m+2,2n+2}^f = 0;$$

5.3.2. Исследование бесконечных систем. Асимптотика нетривиального решения на собственных частотах колебаний.

Описанный в предыдущих разделах диссертации подход к определению собственных частот колебаний на основе следствия (2.46) из теоремы 2.8, а также к вычислению собственных форм колебаний на основе аналитического определения асимптотики нетривиального решения бесконечной системы на основе теоремы 2.7, здесь также может быть использован. Для этого оценим регулярность выведенных бесконечных систем (5.103), (5.104) (CCCC) и (5.121) – (5.124) (FFFF) на основе следующих рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{nk}^2 + q^2} = \frac{a}{2q} \cdot \frac{H_k(qa)}{H'_k(qa)} - \frac{\delta_{k0}}{2q^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{nk}^2} = \frac{a^2}{2(3-2k)} \quad (5.126)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{nj}^2 + p^2} = \frac{b}{2p} \cdot \frac{H_j(pb)}{H'_j(pb)} - \frac{\delta_{j0}}{2p^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{nj}^2} = \frac{b^2}{2(3-2j)} \quad (5.127)$$

Тогда для бесконечной системы (5.103), (5.104) ряды из модулей коэффициентов системы вычисляются аналитически для любого номера  $m$ :

$$S_{2m-1}^c = \frac{\alpha_{mk}}{|\Delta_{1,m}^c| \left( 1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)} \right)} \left( \frac{b}{p_{mk}^2 - \bar{p}_{mk}^2} \left[ \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{\bar{p}_{mk} H'_j(\bar{p}_{mk}b)} - \frac{H_j(p_{mk}b)}{p_{mk} H'_j(p_{mk}b)} \right] - \frac{\delta_{j0}}{p_{mk}^2 \bar{p}_{mk}^2} \right) \quad (5.128)$$

$$S_{2m}^c = \frac{\beta_{mj}}{|\Delta_{2,m}^c| \left( 1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)} \right)} \left( \frac{a}{q_{mj}^2 - \bar{q}_{mj}^2} \left[ \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{\bar{q}_{mj} H'_k(\bar{q}_{mj}a)} - \frac{H_k(q_{mj}a)}{q_{mj} H'_k(q_{mj}a)} \right] - \frac{\delta_{k0}}{q_{mj}^2 \bar{q}_{mj}^2} \right) \quad (5.129)$$

и для системы (5.121) – (5.124) в виде

$$S_1^f = \frac{\delta_{k0} v_1}{\Omega_y} \left| \frac{T'_j(\Omega_y b)}{T_j(\Omega_y b)} \right| \left( \frac{\delta_{j0}}{a} + \frac{\Omega_y^2 + v_1 \Omega^2}{2\Omega_y^2} \left[ \frac{b}{\Omega_y} \cdot \frac{T_j(\Omega_y b)}{T'_j(\Omega_y b)} - \frac{b^2}{3-2j} + \frac{\delta_{j0}}{\Omega_y^2} \right] \right); \quad (5.130)$$

$$S_2^f = \frac{\delta_{j0} v_2}{\Omega_x} \left| \frac{T'_k(\Omega_x a)}{T_k(\Omega_x a)} \right| \left( \frac{\delta_{k0}}{b} + \frac{\Omega_x^2 + v_2 \Omega^2}{2\Omega_x^2} \left[ \frac{a}{\Omega_x} \cdot \frac{T_k(\Omega_x a)}{T'_k(\Omega_x a)} - \frac{a^2}{3-2k} + \frac{\delta_{k0}}{\Omega_x^2} \right] \right); \quad (5.131)$$

$$\begin{aligned}
S_{2m+1}^f &= \frac{2\delta_{j0}v_1\Omega_x^2\alpha_{mk}^2}{a|\Delta_{1,m}^f(\alpha_{mk}^2 - \Omega_x^2)|} + \frac{v_1}{v_2} \left(1 - v_1v_2 + \frac{v_1E_2}{G}\right) \frac{\alpha_{mk}^2}{|\Delta_{1,m}^f|} \left\{ \left( \alpha_{mk}^2 - \frac{v_1\Omega_x^2}{1 - v_1v_2} \right) \times \right. \\
&\times \left( \frac{b}{p_{mk}^2 - \bar{p}_{mk}^2} \left[ \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{\bar{p}_{mk}H'_j(\bar{p}_{mk}b)} - \frac{H_j(p_{mk}b)}{p_{mk}H'_j(p_{mk}b)} \right] - \frac{\delta_{j0}}{p_{mk}^2\bar{p}_{mk}^2} \right) - \frac{v_1\Omega_x^2}{1 - v_1v_2} (\alpha_{mk}^2 - \Omega^2) \times \\
&\times \left. \left( \frac{b^2}{(3-2j)p_{mk}^2\bar{p}_{mk}^2} + \frac{\delta_{j0}(p_{mk}^2 + \bar{p}_{mk}^2)}{p_{mk}^4\bar{p}_{mk}^4} + \frac{b}{p_{mk}^2 - \bar{p}_{mk}^2} \left[ \frac{H_j(p_{mk}b)}{p_{mk}^3H'_j(p_{mk}b)} - \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{\bar{p}_{mk}^3H'_j(\bar{p}_{mk}b)} \right] \right) \right\}
\end{aligned} \tag{5.132}$$

$$\begin{aligned}
S_{2m+2}^f &= \frac{2\delta_{k0}v_2\Omega_y^2\beta_{mj}^2}{b|\Delta_{2,m}^f(\beta_{mj}^2 - \Omega_y^2)|} + \frac{v_2}{v_1} \left(1 - v_1v_2 + \frac{v_2E_1}{G}\right) \frac{\beta_{mj}^2}{|\Delta_{2,m}^f|} \left\{ \left( \beta_{mj}^2 - \frac{v_2\Omega_y^2}{1 - v_1v_2} \right) \times \right. \\
&\times \left( \frac{a}{q_{mj}^2 - \bar{q}_{mj}^2} \left[ \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{\bar{q}_{mj}H'_k(\bar{q}_{mj}a)} - \frac{H_k(q_{mj}a)}{q_{mj}H'_k(q_{mj}a)} \right] - \frac{\delta_{k0}}{q_{mj}^2\bar{q}_{mj}^2} \right) - \frac{v_2\Omega_y^2}{1 - v_1v_2} (\beta_{mj}^2 - \Omega^2) \times \\
&\times \left. \left( \frac{a^2}{(3-2k)q_{mj}^2\bar{q}_{mj}^2} + \frac{\delta_{k0}(q_{mj}^2 + \bar{q}_{mj}^2)}{q_{mj}^4\bar{q}_{mj}^4} + \frac{a}{q_{mj}^2 - \bar{q}_{mj}^2} \left[ \frac{H_k(q_{mj}a)}{q_{mj}^3H'_k(q_{mj}a)} - \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{\bar{q}_{mj}^3H'_k(\bar{q}_{mj}a)} \right] \right) \right\}
\end{aligned} \tag{5.133}$$

( $m=1, 2, 3\dots$ )

Для построения верхней оценки записанных выше рядов используем асимптотику корней (5.80), (5.81) характеристических уравнений при  $m \rightarrow \infty$ :

$$p_{mk} = P\alpha_{mk}; \quad \bar{p}_{mk} = \bar{P}\alpha_{mk}; \quad q_{mj} = Q\beta_{mj}; \quad \bar{q}_{mj} = \bar{Q}\beta_{mj} \tag{5.134}$$

где

$$\begin{aligned}
P &= \sqrt{\frac{E_1}{2G} - v_1 + \sqrt{\left(\frac{E_1}{2G} - v_1\right)^2 - \frac{v_1}{v_2}}}; \quad \bar{P} = \sqrt{\frac{E_1}{2G} - v_1 - \sqrt{\left(\frac{E_1}{2G} - v_1\right)^2 - \frac{v_1}{v_2}}}; \\
Q &= \sqrt{\frac{E_2}{2G} - v_2 + \sqrt{\left(\frac{E_2}{2G} - v_2\right)^2 - \frac{v_2}{v_1}}}; \quad \bar{Q} = \sqrt{\frac{E_2}{2G} - v_2 - \sqrt{\left(\frac{E_2}{2G} - v_2\right)^2 - \frac{v_2}{v_1}}}.
\end{aligned}$$

Подставляя асимптотику (5.134) в значения рядов из условий регулярности и переходя к пределу, получаем, что нечетные (5.128) и четные (5.129) суммы имеют один и тот же предел для любого типа симметрии ( $k, j$ ):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1}^c = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m}^c = \theta_c \tag{5.135}$$

где

$$\theta_c = \frac{1 + \frac{\nu_1 E_2}{G(1 - \nu_1 \nu_2)} \left( 2 + \frac{\nu_1 E_2}{G(1 - \nu_1 \nu_2)} \right)}{1 + \frac{\nu_1 E_2}{G(1 - \nu_1 \nu_2)} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\nu_1 \nu_2}} + \frac{1}{\sqrt{\nu_1 \nu_2}} \cdot \frac{\nu_1 E_2}{G(1 - \nu_1 \nu_2)} \right)} \quad (5.136)$$

Свойство коэффициентов Пуассона  $\sqrt{\nu_1 \nu_2} < 1$  дает возможность оценить предельную константу как  $\theta_c < 1$ . Таким образом, условия регулярности будут выполнены, начиная с некоторого номера  $m > N_R$ , и бесконечная система линейных уравнений (5.107) является квазирегулярной.

Аналогичные асимптотические оценки могут быть получены также для рядов в условиях регулярности (5.130) – (5.133) бесконечной системы, возникающей в случае свободных краев пластины:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1}^f = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+2}^f = 1 \quad (5.137)$$

Следовательно, бесконечная система (5.125) также является квазирегулярной.

В предыдущих разделах диссертации для определения собственных частот пластины использовалось условие (2.46). Полученные выше аналитические выражения как для элементов бесконечных матриц систем (5.107) и (5.125), так и для рядов (5.128) – (5.133) позволяют эффективно реализовать проверку условия  $T_N(\Omega) > 0$  для данных систем и получить значения собственных частот колебаний. Сходимость данного процесса по  $N$  представлена в табл. 5.7 для изотропной квадратной пластины. D.J. Gorman [167] вычислил первую собственную частоту для данной защемленной пластины как  $\lambda^2 = 1.778$ . В принятых в диссертации обозначениях частотный параметр  $\lambda^2 = \Omega_x$ , который вычисляется на основе условия  $T_N(\Omega) > 0$  как  $\Omega_x = 1.7776$  для частоты  $\Omega = 3.0046$ . Таким образом, представленный подход для расчета собственных значений дает полное соответствие с известными результатами в литературе.

Для построения собственных форм колебаний пластины на найденном значении собственной частоты используем, следуя принятому в диссертации подходу, разложение (2.29) - (2.33) однородных бесконечных систем (5.107) и (5.125) на совокупность регулярных бесконечных систем и одну конечную

систему. Данный подход детально описан в разделах 5.1 и 5.2 для решения неоднородной краевой задачи в случае изотропного материала. Заметим, что каждая из регулярных бесконечных систем (2.32) будет иметь решение, стремящееся к ненулевой константе, лишь тогда, когда для элементов бесконечной матрицы под главной диагональю будет справедлива оценка, начиная с некоторого номера  $N > N_R$ :

$$0 < l r_n^{(i)} \leq \xi_m^{(i)} M_{mn}^{(i)} \leq L r_n^{(i)} \quad (m > n > N) \quad (5.138)$$

при ограничениях на последовательности  $\xi_m^{(i)}$  и  $r_n^{(i)}$ , записанных в условии теоремы 2.7. При этом следствие из данной теоремы показывает, что необходимым условием для выполнения условий (5.138) является условие

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m^{(i)} = 1 \quad (5.139)$$

Таблица 5.7 Интервалы для первых собственных частот квадратной изотропной пластины ( $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )

Тип граничных условий	$N$	2	4	8	16
CCCC	нижняя граница	3.002	3.004	3.004	3.004
	верхняя граница	3.005	3.005	3.004	3.004
FFFF	нижняя граница	1.937	1.958	1.961	1.961
	верхняя граница	1.985	1.965	1.962	1.961

Таким образом, бесконечная система (5.125) для пластины со свободными краями удовлетворяет условию (5.139) в силу (5.137). Следовательно, ее нетривиальное решение можно проверить на наличие предела согласно теореме 2.7. Данная проверка показывает, что условия теоремы 2.7 выполняются при

$$r_n^{(1)} = r_n^{(2)} = 1; \quad \xi_m^{(1)} = \alpha_{mk}; \quad \xi_m^{(2)} = \beta_{mj} \quad (5.140)$$

и нетривиальное решение системы (5.125) сходится к общему пределу

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m^f = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m^f = G_f \quad (5.141)$$



Найденная асимптотика (5.141) позволяет использовать для расчета нетривиального решения однородной бесконечной системы (5.125) как метод лимитант (см. раздел 5.1), так и более упрощенный подход улучшенной редукции, которые оба дают практически идентичные результаты при достаточно большом порядке аппроксимирующих конечных систем.

В частности, при использовании метода улучшенной редукции, используем приближенное равенство

$$x_m^f = y_m^f = G_f \quad (m > N^*) \quad (5.142)$$

где  $G_f$  - некоторая константа, которая приближенно выражается как

$$G_f = \frac{x_{N^*}^f + y_{N^*}^f}{2} \quad (5.143)$$

Тогда уравнение (5.143) может быть взято в качестве замыкающего уравнения для редуцированной системы вида

$$\delta_{k0} x_0^f = \delta_{k0} \delta_{j0} \frac{v_1 (-1)^{k+1} T_j'(\Omega_y b)}{a \Omega_y T_j(\Omega_y b)} y_0^f - \delta_{k0} v_1 \frac{T_j'(\Omega_y b)}{T_j(\Omega_y b)} \cdot \frac{\Omega_y^2 + v_1 \Omega^2}{\Omega_y} \left( \sum_{n=1}^{N^*} \frac{y_n^f}{\beta_{nj}^2 (\beta_{nj}^2 - \Omega_y^2)} + \frac{G_f}{2\Omega_y^2} \left\{ \frac{b}{\Omega_y} \frac{T_j(\Omega_y b)}{T_j'(\Omega_y b)} - \frac{b^2}{3-2j} + \frac{\delta_{j0}}{\Omega_y^2} - \sum_{n=1}^{N^*} \frac{2\Omega_y^2}{\beta_{nj}^2 (\beta_{nj}^2 - \Omega_y^2)} \right\} \right) \quad (5.144)$$

$$\delta_{j0} y_0^f = \delta_{k0} \delta_{j0} \frac{v_2 (-1)^{j+1} T_k'(\Omega_x a)}{b \Omega_x T_k(\Omega_x a)} x_0^f - \delta_{j0} v_2 \frac{T_k'(\Omega_x a)}{T_k(\Omega_x a)} \cdot \frac{\Omega_x^2 + v_2 \Omega^2}{\Omega_x} \left( \sum_{n=1}^{N^*} \frac{x_n^f}{\alpha_{nk}^2 (\alpha_{nk}^2 - \Omega_x^2)} + \frac{G_f}{2\Omega_x^2} \left\{ \frac{a}{\Omega_x} \frac{T_k(\Omega_x a)}{T_k'(\Omega_x a)} - \frac{a^2}{3-2k} + \frac{\delta_{k0}}{\Omega_x^2} - \sum_{n=1}^{N^*} \frac{2\Omega_x^2}{\alpha_{nk}^2 (\alpha_{nk}^2 - \Omega_x^2)} \right\} \right) \quad (5.145)$$

$$x_m^f = \frac{2\delta_{j0} v_1 \Omega_x^2 \alpha_{mk}^2 y_0^f}{a \Delta_{1,m}^f (\alpha_{mk}^2 - \Omega_x^2)} + \frac{2v_1 \left( 1 - v_1 v_2 + \frac{v_1 E_2}{G} \right) \alpha_{mk}^2}{v_2 \Delta_{1,m}^f} \times \left\{ \sum_{n=1}^{N^*} \frac{\beta_{nj}^2 \left( \alpha_{mk}^2 - \frac{v_1 \Omega_x^2}{1 - v_1 v_2} \right) - \frac{v_1 \Omega_x^2}{1 - v_1 v_2} (\alpha_{mk}^2 - \Omega^2)}{\beta_{nj}^2 (\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2) (\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} y_n^f + G_f \tilde{S}_{1,m}^f \right\} \quad (5.146)$$

$$y_m^f = \frac{2\delta_{k0}v_2\Omega_y^2\beta_{mj}^2x_0^f}{b\Delta_{2,m}^f(\beta_{mj}^2-\Omega_y^2)} + \frac{2v_2\left(1-v_1v_2 + \frac{v_2E_1}{G}\right)\beta_{mj}^2}{v_1\Delta_{2,m}^f} \times \left\{ \sum_{n=1}^{N^*} \frac{\alpha_{nk}^2 \left( \beta_{mj}^2 - \frac{v_2\Omega_y^2}{1-v_1v_2} \right) - \frac{v_2\Omega_y^2}{1-v_1v_2} (\beta_{mj}^2 - \Omega^2)}{\alpha_{nk}^2 (\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2) (\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} x_n^f + G_f \tilde{S}_{2,m}^f \right\} \quad (5.147)$$

(m = 1, 2, 3...N\*)

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{1,m}^f &= \left( \alpha_{mk}^2 - \frac{v_1\Omega_x^2}{1-v_1v_2} \right) \left( \frac{b}{p_{mk}^2 - \bar{p}_{mk}^2} \left[ \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{\bar{p}_{mk}H'_j(\bar{p}_{mk}b)} - \frac{H_j(p_{mk}b)}{p_{mk}H'_j(p_{mk}b)} \right] - \frac{\delta_{j0}}{p_{mk}^2\bar{p}_{mk}^2} \right) - \frac{v_1\Omega_x^2}{1-v_1v_2} \times \\ &\frac{(\alpha_{mk}^2 - \Omega^2)}{p_{mk}^2\bar{p}_{mk}^2} \left( \frac{b^2}{(3-2j)} + \frac{\delta_{j0}(p_{mk}^2 + \bar{p}_{mk}^2)}{p_{mk}^2\bar{p}_{mk}^2} + \frac{bp_{mk}^2\bar{p}_{mk}^2}{p_{mk}^2 - \bar{p}_{mk}^2} \left[ \frac{H_j(p_{mk}b)}{p_{mk}^3H'_j(p_{mk}b)} - \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{\bar{p}_{mk}^3H'_j(\bar{p}_{mk}b)} \right] \right) - \\ &- \sum_{n=1}^{N^*} \frac{\beta_{nj}^2 \left( \alpha_{mk}^2 - \frac{v_1\Omega_x^2}{1-v_1v_2} \right) - \frac{v_1\Omega_x^2}{1-v_1v_2} (\alpha_{mk}^2 - \Omega^2)}{\beta_{nj}^2 (\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2) (\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)}; \\ \tilde{S}_{2,m}^f &= \left( \beta_{mj}^2 - \frac{v_2\Omega_y^2}{1-v_1v_2} \right) \left( \frac{a}{q_{mj}^2 - \bar{q}_{mj}^2} \left[ \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{\bar{q}_{mj}H'_k(\bar{q}_{mj}a)} - \frac{H_k(q_{mj}a)}{q_{mj}H'_k(q_{mj}a)} \right] - \frac{\delta_{k0}}{q_{mj}^2\bar{q}_{mj}^2} \right) - \frac{v_2\Omega_y^2}{1-v_1v_2} \times \\ &\frac{(\beta_{mj}^2 - \Omega^2)}{q_{mj}^2\bar{q}_{mj}^2} \left( \frac{a^2}{(3-2k)} + \frac{\delta_{k0}(q_{mj}^2 + \bar{q}_{mj}^2)}{q_{mj}^2\bar{q}_{mj}^2} + \frac{aq_{mj}^2\bar{q}_{mj}^2}{q_{mj}^2 - \bar{q}_{mj}^2} \left[ \frac{H_k(q_{mj}a)}{q_{mj}^3H'_k(q_{mj}a)} - \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{\bar{q}_{mj}^3H'_k(\bar{q}_{mj}a)} \right] \right) - \\ &- \sum_{n=1}^{N^*} \frac{\alpha_{nk}^2 \left( \beta_{mj}^2 - \frac{v_2\Omega_y^2}{1-v_1v_2} \right) - \frac{v_2\Omega_y^2}{1-v_1v_2} (\beta_{mj}^2 - \Omega^2)}{\alpha_{nk}^2 (\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2) (\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)}; \end{aligned}$$

В отличие от анализа системы (5.125), бесконечная система (5.107), возникающая при исследовании защемленной пластины, уже не удовлетворяет условию (5.139). Поэтому вначале преобразуем систему (5.107) к виду, где это условие будет выполнено. Для этого используем замену переменных

$$x_m^c = \frac{v_2^{\lambda/4}}{\alpha_{mk}^\lambda} X_m^c; \quad y_m^c = \frac{v_1^{\lambda/4}}{\beta_{mj}^\lambda} Y_m^c \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5.148)$$

где  $\lambda \in [0; 1)$  - некоторый действительный параметр, который затем найдем из условия (5.139).

Бесконечная система для заземленной пластины с учетом замены (5.148) принимает вид

$$X_m^c = \frac{2\alpha_{mk}^{\lambda+1} (v_1/v_2)^{\lambda/4}}{\left(1 + \frac{v_2 E_1}{G(1-v_1 v_2)}\right) \Delta_{1,m}^c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{nj}^{-\lambda} Y_n^c}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} \quad (5.149)$$

$$Y_m^c = \frac{2\beta_{mj}^{\lambda+1} (v_2/v_1)^{\lambda/4}}{\left(1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}\right) \Delta_{2,m}^c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nj}^{-\lambda} X_n^c}{(\alpha_{nj}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nj}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} \quad (m = 1, 2, 3 \dots) \quad (5.150)$$

Регулярность этой бесконечной системы можно оценить при помощи формулы Эйлера – Маклорена, которая позволяет найти аналитическое представление для ряда

$$\begin{aligned} \Sigma_N^k(q; \lambda) = & \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(n-k/2)^{-\lambda}}{(n-k/2)^2 + q^2} = \frac{(N+1-k/2)^{-\lambda-1}}{\lambda+1} {}_2F_1\left(1; \frac{\lambda+1}{2}; \frac{\lambda+3}{2}; -\left(\frac{q}{N+1-k/2}\right)^2\right) + \\ & + \frac{(N+1-k/2)^{-\lambda}}{2\left((N+1-k/2)^2 + q^2\right)} \left(1 + \frac{\lambda}{6} \cdot \frac{1}{N+1-k/2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{N+1-k/2}{(N+1-k/2)^2 + q^2} - \right. \\ & \left. \frac{1}{360(N+1-k/2)} \left[ \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{(N+1-k/2)^2} + \frac{6\lambda^2}{(N+1-k/2)^2 + q^2} - \frac{24(1-\lambda)(N+1-k/2)^2}{\left((N+1-k/2)^2 + q^2\right)^2} \right] \right) \end{aligned}$$

Следует заметить, что если  $\text{Re } q \rightarrow +\infty$  то свойства гипергеометрической функции  ${}_2F_1(a; b; c; z)$  дают следующее асимптотическое значение этого ряда

$$\Sigma_N^k(q; \lambda) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{q^{-\lambda-1}}{\cos \frac{\pi \lambda}{2}} + O\left(\frac{1}{q^2}\right) \quad (5.151)$$

Используя  $\Sigma_N^k(q; \lambda)$ , ряды в условиях регулярности системы (5.149), (5.150) могут быть вычислены в виде

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{2m-1}^c = & \frac{2\alpha_{mk}^{\lambda+1} (v_1/v_2)^{\lambda/4}}{\left(1 + \frac{v_2 E_1}{G(1-v_1 v_2)}\right) \Delta_{1,m}^c} \left( \sum_{n=1}^{N^*} \frac{\beta_{nj}^{-\lambda}}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} + \frac{(b/\pi)^{\lambda+2}}{p_{mk}^2 - \bar{p}_{mk}^2} \times \right. \\ & \left. \times \left\{ \Sigma_{N^*}^j \left( \frac{b\bar{p}_{mk}}{\pi}; \lambda \right) - \Sigma_{N^*}^j \left( \frac{bp_{mk}}{\pi}; \lambda \right) \right\} \right) \quad (5.152) \end{aligned}$$

$$\tilde{S}_{2m}^c = \frac{2\beta_{mj}^{\lambda+1}(v_2/v_1)^{\lambda+4}}{\left(1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}\right) \left| \Delta_{2,m}^c \right|} \left( \sum_{n=1}^{N^*} \frac{\alpha_{nj}^{-\lambda}}{(\alpha_{nj}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nj}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} + \frac{(a/\pi)^{\lambda+2}}{q_{mj}^2 - \bar{q}_{mj}^2} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \Sigma_{N^*}^k \left( \frac{a\bar{q}_{mj}}{\pi}; \lambda \right) - \Sigma_{N^*}^k \left( \frac{aq_{mj}}{\pi}; \lambda \right) \right\} \right) \quad (5.153)$$

Далее, с помощью элементарного тождества

$$P^{\lambda+1} - \bar{P}^{\lambda+1} = 2y^{\frac{\lambda+1}{4}} \operatorname{sh} \left( \frac{\lambda+1}{4} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{x - \sqrt{x^2 - y}} \right) \quad (5.154)$$

где  $P = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - y}}$  и  $\bar{P} = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y}}$ , можно оценить асимптотическое поведение рядов (5.152), (5.153) при  $m \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{S}_{2m-1}^c = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{S}_{2m}^c = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\tau} \cdot \operatorname{sinh} \left( \frac{\lambda+1}{4} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\tau}}{1 - \sqrt{1-\tau}} \right)}{\sqrt{1-\sqrt{\tau}} \cdot \cos \frac{\pi\lambda}{2}} \cdot \theta_c \quad (5.155)$$

где  $\theta_c$  представлено ранее в формуле (5.136),  $\tau = \frac{v_1 v_2}{\left( \frac{E_2 v_1}{2G} - v_1 v_2 \right)^2}$ .

Таким образом, условие (5.139) приводит к следующему трансцендентному уравнению относительно  $\lambda$ :

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\tau} \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{\lambda+1}{4} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\tau}}{1 - \sqrt{1-\tau}} \right)}{\sqrt{1-\sqrt{\tau}}} \cdot \theta_c = \cos \frac{\pi\lambda}{2}, \quad (5.156)$$

которое является обобщением уравнения (5.57) на случай ортотропного материала пластины.

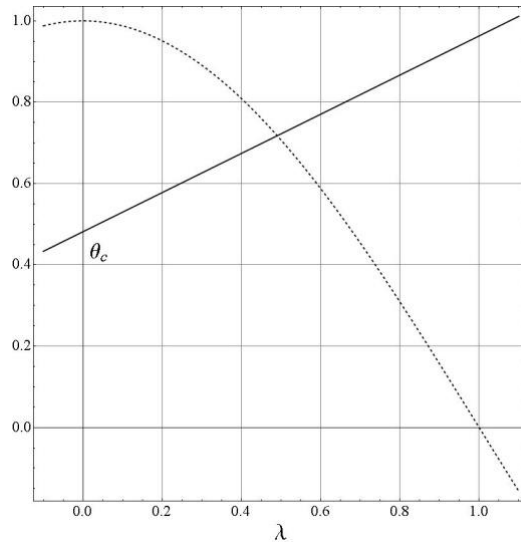


Рис. 5. 9 Левая и правая части уравнения (5.156)

Можно увидеть на рис. 4.9, что функция в левой части уравнения (5.156) монотонно возрастает с увеличением  $\lambda$  и равна  $\theta_c$  когда  $\lambda = 0$ . В силу того, что  $\theta_c < 1$  это приводит к существованию единственного решения уравнения (5.156) на интервале  $\lambda \in (0;1)$  для любой комбинации упругих констант.

Тогда для преобразованной бесконечной системы (5.149), (5.150) для защемленной пластины, после разложения по формулам (2.29) - (2.33), можно доказать существование ненулевого предел у нетривиального решения. Данное доказательство аналогично тому, что представлено в разделе 5.2 для изотропного материала. Заметим лишь, что здесь теорема 2.7 выполняется при

$$r_n^{(1)} = \beta_{nj}^{-\lambda}; \quad r_n^{(2)} = \alpha_{nk}^{-\lambda}; \quad \xi_m^{(1)} = \alpha_{mk}^{1-\lambda}; \quad \xi_m^{(2)} = \beta_{mj}^{1-\lambda}. \quad (5.157)$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_m^c = \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m^c = G_c \quad (5.158)$$

Как следствие, оказывается возможным описать асимптотическое поведение нетривиального решения системы (5.107), соответствующего собственной частоте защемленной пластины:

$$x_m^c = \frac{v_2^{\lambda/4}}{\alpha_{mk}^\lambda} G_c, \quad y_m^c = \frac{v_1^{\lambda/4}}{\beta_{mj}^\lambda} G_c \quad (m \rightarrow \infty) \quad (5.159)$$

Выражая из (5.159) предельную константу как

$$G_c = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_{N^*k}^\lambda x_{N^*}^c}{v_2^{\lambda/4}} + \frac{\beta_{N^*j}^\lambda y_{N^*}^c}{v_1^{\lambda/4}} \right) \quad (5.160)$$

получаем однородную конечную систему с нулевым определителем по методу улучшенной редукции

$$\begin{aligned} x_m^c &= \frac{2\alpha_{mk}}{\left(1 + \frac{v_2 E_1}{G(1-v_1 v_2)}\right) \Delta_{1,m}^c} \times \\ &\times \left( \sum_{n=1}^{N^*} \frac{y_n^c}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} + \frac{v_1^{\lambda/4} (b/\pi)^{\lambda+2}}{p_{mk}^2 - \bar{p}_{mk}^2} \left\{ \Sigma_{N^*}^j \left( \frac{b\bar{p}_{mk}}{\pi}; \lambda \right) - \Sigma_{N^*}^j \left( \frac{bp_{mk}}{\pi}; \lambda \right) \right\} G_c \right) \\ y_m^c &= \frac{2\beta_{mj}}{\left(1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}\right) \Delta_{2,m}^c} \times \\ &\times \left( \sum_{n=1}^{N^*} \frac{x_n^c}{(\alpha_{nj}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nj}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} + \frac{v_2^{\lambda/4} (a/\pi)^{\lambda+2}}{q_{mj}^2 - \bar{q}_{mj}^2} \left\{ \Sigma_{N^*}^k \left( \frac{a\bar{q}_{mj}}{\pi}; \lambda \right) - \Sigma_{N^*}^k \left( \frac{aq_{mj}}{\pi}; \lambda \right) \right\} G_c \right) \\ &\quad (m = 1, 2, 3, \dots, N^*) \end{aligned} \quad (5.161)$$

Таким образом, для краевых задач (5.67), (5.68) и (5.69), (5.70) представленный в диссертации подход позволяет найти всю последовательность неопределенных коэффициентов  $A_n, B_n, C_n, D_n$  в выражениях собственных форм колебаний, что дает возможность для параметрического исследования проблемы собственных планарных колебаний ортотропной прямоугольной пластины в случае защемленных или свободных краев.

Представленный подход, аналогично п.5.1 - п.5.2, позволяет провести анализ напряжений, возникающих при гармонических колебаниях пластины, при этом в исследованных выше бесконечных системах добавляются соответствующие граничным условиям свободные члены. На рис. 5.10 представлены графики нормальных напряжений в различных сечениях прямоугольника в случае возбуждения колебаний заданными на границе  $x = \pm a$  постоянными нормальными напряжениями  $\frac{1-v_1 v_2}{E_1} \sigma_{xx} = -1$  на частоте колебаний  $\Omega = 1.47$ , близкой к первой собственной частоте ортотропной пластины  $a/b = 3/2, v_1 = 0.072, v_2 = 0.036; E_1 = 1.2, E_2 = 0.6, G = 0.07 [\times 10^5 \text{ кг/см}^2]$ .

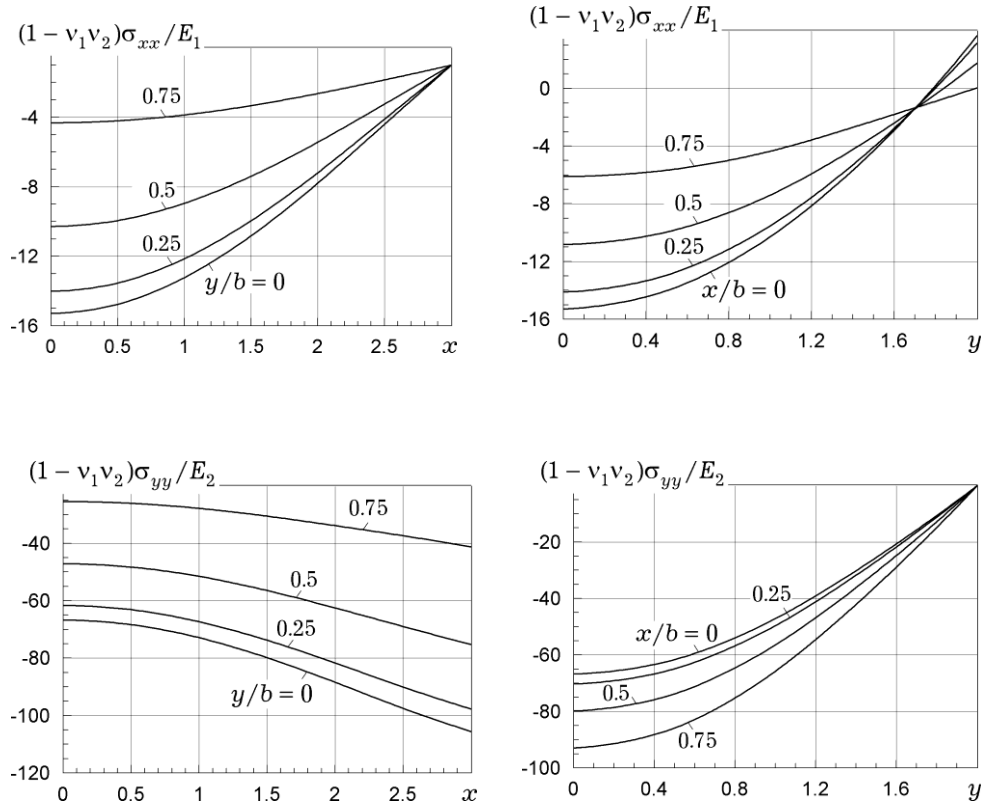


Рис.5.10. Значения напряжений в прямоугольнике при возбуждении колебаний нормальными напряжениями

Нормальные напряжения  $\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1} \sigma_{xx}$  наибольших значений ( $-15.29$ ) достигают в центре прямоугольника убывая к его границам, а нормальные напряжения  $\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1} \sigma_{yy}$  своих наибольших значений ( $-88.39$ ) достигают посредине сторон  $x = \pm a$ . При этом касательные напряжения оказываются достаточно малы:  $|\sigma_{xy}| \leq 3.6G$ .

#### 5.4. Спектр собственных частот планарных колебаний прямоугольной пластины.

Полученные в предыдущем разделе асимптотически точные решение задачи о собственных колебаниях прямоугольной пластины позволяют провести параметрическое исследование спектра собственных частот пластины, а также собственных форм колебаний для рассмотренных двух типов граничных условий.

Ниже представлены численные результаты при вариации геометрии пластины и упругих свойств материала. Численная реализация описанного подхода осуществлялась в среде пакета Mathematica 8.0.

#### 5.4.1. Пластина с защемленными краями.

Для проверки предложенной теории, вначале была проведено сравнение вычисленных согласно предложенному подходу собственных частот с известными результатами в литературе. В табл. 5.8 показаны первые три собственные частоты защемленной ортотропной пластины, соответствующие полностью симметричным модам, когда варьируются отношение сторон и упругие константы пластины. Рядом в табл. 5.8 даны аналогичные результаты, представленные D.J.Gorman [167]. Можно увидеть, что оба подхода дают очень близкие результаты, поэтому для сравнения собственные частоты вычислялись с точностью до 5 значащих цифр. Далее, в табл. 5.9 было проведено сравнение с первыми собственными частотами изотропной пластины, вычисленных согласно методу рядов Фурье [159] и методу Ритца [158]. Опять наблюдается полное совпадение, как и ожидалось, метод Ритца дает немного завышенные результаты.

Использование описанной методики позволяет построить спектр вынужденных установившихся колебаний прямоугольной призмы под действием смещений (СССС) и сравнить его со спектром краевой задачи

$$\mathbf{u}_x|_{x=\pm a} = \mathbf{u}_y|_{x=\pm a} = \mathbf{u}_y|_{y=\pm b} = \sigma_{xy}|_{y=\pm b} = 0,$$

для которой на гранях  $x = \pm a$  граничные условия не изменяются, а при  $y = \pm b$  полагаем равными нулю нормальную составляющую вектора смещений и касательные напряжения. Такие граничные условия являются аналогом условия СССС при поперечных колебаниях пластины и допускают аналитическое решение.

На рис. 5.11 представлена зависимость собственных значений изотропной пластины от геометрии призмы  $\eta = b/a$  при коэффициенте Пуассона  $\nu^* = 0.2$  для симметричных по обеим осям мод колебаний. Из рисунка следует, что расположение спектральных кривых для двух типов краевых условий имеет качественное сходство.



Таблица 5.8. Собственные частоты колебаний  $\lambda^2 = \Omega_x$  для полностью симметричных мод квадратной защемленной пластины при  $E_2/E_1 = \kappa; \nu_1 = 0.3/\sqrt{\kappa}; \nu_2 = 0.3\sqrt{\kappa}; G/E_1 = \sqrt{\kappa}/2.6$

$\kappa$	1.0		1.5		2.0	
$b/a$	[167]	Диссертация	[167]	Диссертация	[167]	Диссертация
1.0	2.929	2.9293	3.118	3.1178	3.181	3.1814
	3.354	3.3537	3.745	3.7447	4.012	4.0119
	3.641	3.6405	4.127	4.1272	4.634	4.6337
1.5	2.188	2.1881	2.586	2.5856	2.850	2.8499
	2.981	2.9812	3.166	3.1660	3.270	3.2703
	3.197	3.1967	3.342	3.3417	3.527	3.5267
2.0	1.762	1.7621	2.090	2.0897	2.352	2.3525
	2.813	2.8133	3.027	3.0267	3.133	3.1327
	2.936	2.9359	3.119	3.1191	3.193	3.1930

Таблица 5.9. Собственные частоты колебаний  $\lambda = 2\Omega_x$  для полностью симметричных мод квадратной защемленной пластины.

№ моды	1	2	3	4	5	6	7	8
[158]	3.555	3.555	4.235	5.186	5.859	5.895	5.895	6.708
[159]	3.554	3.554	4.236	5.185	5.859	5.896	-	-
Диссертация	3.555	3.555	4.235	5.186	5.859	5.894	5.894	6.708

Главное отличие заключается в том, что кривые для СССС не пересекаются, в отличие от кривых СССС, кроме этого, для граничных условий СССС нет аналога нулевой моды. Нижняя собственная частота СССС оказывается соответствующей ветви дисперсионного уравнения СССС с номером {1,1}. Для второй собственной частоты СССС можно поставить в соответствие на интервале  $\eta \in [1; 2.1]$  ветвь с номером {1,2} и для  $\eta > 2.1$  ветвь с номером {2,1}. Аналогично, для третьей собственной частоты СССС на  $\eta \in [1; 2.1]$  соответствует ветвь с номером {2,1}; на  $\eta \in [2.1; 3.2]$  ветвь с номером {1,2}, и при  $\eta > 3.2$  ветвь с номером {3,1}. При этом, сходство между данными дисперсионными кривыми возрастает по мере увеличения отношения сторон пластины  $\eta$ .

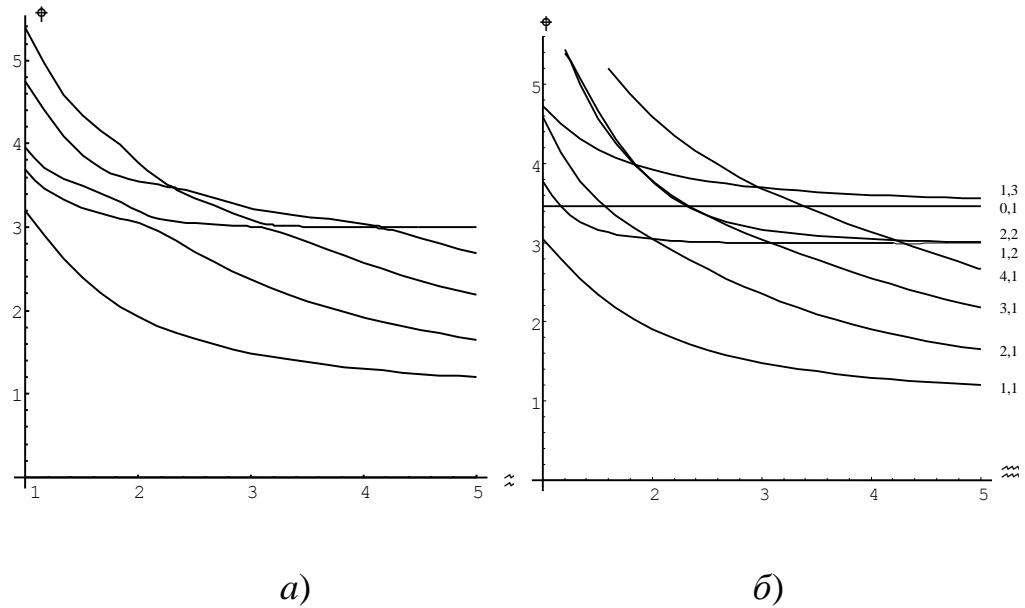


Рис. 5.11 Зависимость собственных частот изотропной пластины от отношения сторон  $\eta = b/a$  ( $a$  – CCCC,  $b$  – CCSS)

В табл. 5.10 представлено сравнение первых пяти собственных частот задачи CCCC с собственными значениями CCSS (без учета нулевой моды) изотропной пластины  $\nu^* = 0.2$ .

Таблица 5.10. Первые собственные частоты квадратной изотропной пластины  $\nu^* = 0.2$  для симметричных мод

	$\eta = 1$		$\eta = 3$		$\eta = 5$	
	CCCC	CCSS	CCCC	CCSS	CCCC	CCSS
$\Omega_1$	3.191	3.043	1.487	1.482	1.199	1.197
$\Omega_2$	3.686	3.771	2.369	2.347	1.651	1.647
$\Omega_3$	3.950	4.591	3.005	2.993	2.184	2.174
$\Omega_4$	4.742	4.722	3.091	3.043	2.687	2.667
$\Omega_5$	5.397	5.557	3.226	3.165	2.992	2.989

Из данных таблицы следует, что с увеличением отношения сторон пластины  $\eta$ , собственные значения при упрощенных граничных условиях CCSS приближаются к собственным значениям задачи CCCC. При  $\eta \geq 5$  отличие между собственными значениями одного порядкового номера данных краевых задач не

превосходит 0.3%, что с учетом погрешности модели позволяет сделать вывод о их совпадении.

Расположение кривых на рис. 5.11 (а) качественно напоминает случай возбуждения колебаний пластины заданными на границе напряжениями [39] (случай пластины со свободными краями): первая собственная частота монотонно убывает, следующие за ней частоты образуют «плато», соответствующее краевому резонансу. Однако в данном случае собственные частоты  $\Omega_n^F$  на рис.5.9 (а) лежат выше соответствующих собственных частот  $\Omega_n^*$  задачи о возбуждении колебаний напряжениями. Так при  $\nu^* = 0.2; \eta = 1$  значения первых четырех собственных частот для этих задач следующие.

Таблица 5.11. Собственные частоты изотропной квадратной пластины  $\nu^* = 0.2; \eta = 1$  в случае свободных и защемленных краев

$n$	1	2	3	4
$\Omega_n^F$	3.191	3.686	3.950	4.742
$\Omega_n^*$	1.415	1.627	2.733	3.271

Зависимость первой собственной частоты защемленной квадратной изотропной пластины (призмы) для разных значений  $\eta$  от материала дана на рис. 5.12. Заметим, что в случае поперечных колебаний (глава 3) собственные частоты защемленной пластины не зависят от материала. С увеличением коэффициента Пуассона  $\nu^*$  наблюдается возрастание первой собственной частоты пластины для любых соотношений ее сторон. Если для квадратного сечения данная зависимость почти линейная, то с ростом  $\eta$  нелинейная составляющая все более увеличивается.

Реализуя, описанный выше подход к построению собственных форм колебаний, получаем для них представление через нетривиальное решение системы (5.161). При относительно небольшом объеме вычислений, получаем удовлетворительную точность для собственных форм колебаний. Увеличивая порядок конечных систем в методе улучшенной редукции, получаем возможность добиться заданной точности.

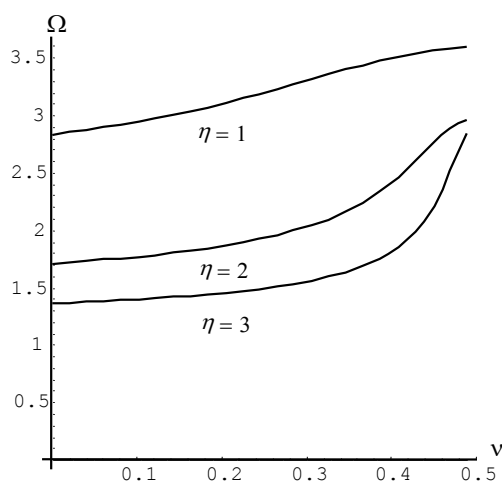


Рис. 5.12. Зависимость от материала для первой собственной частоты заземленной квадратной изотропной пластины для разных значений  $\eta$

Вычисления показывают, что вдоль кривых на рис. 5.11 (а) собственные формы меняются мало, в тоже время вблизи «плато», например при  $\eta = 2.2$ , где приближаются вторая и третья собственные частоты  $\Omega_2^* = 2.93$  и  $\Omega_3^* = 3.09$ , наблюдаются существенные различия между собственными модами (рис. 5.13). На рис. 5.13 (а) и рис. 5.13 (б) представлены компоненты  $u_{00}$  и  $v_{00}$  для второй собственной моды, соответственно на рис. 5.13 (в) и рис. 5.13 (г) данные компоненты для третьей собственной моды.

Представленные в этом разделе диссертации результаты показывают, что предложенный подход дает возможность для определения собственных частот (форм) колебаний пластины с высокой степенью точности, что, вообще говоря, демонстрируют и многие другие методы в низком и среднем диапазоне частот. Однако, при возрастании частоты колебаний каждый из вышеупомянутых методов сходится к точному решению с увеличением числа членов ряда, представляющих решение, и, как следствие, с увеличением порядка аппроксимирующей конечной системы линейных уравнений. Разработанный в диссертации подход сводит задачу к конечной системе фиксированного порядка в любом диапазоне частот.

В известной литературе не удалось найти значений собственных частот для высокого диапазона частот, которые можно было бы взять для проверки. По этой причине были вычислены первые 64 собственные частоты квадратной ортотропной пластины с заземленными краями (табл. 5.12).

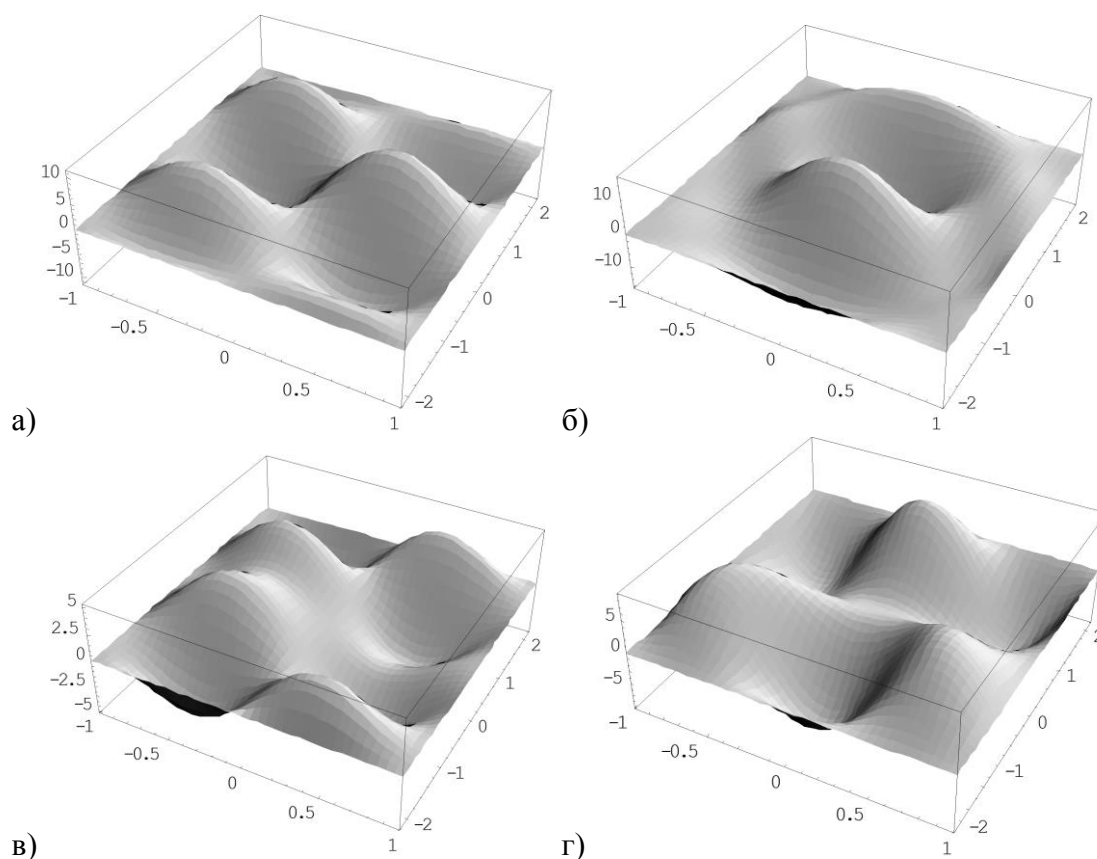


Рис. 5.13. Собственные формы колебаний, вблизи «плато» собственных частот

Таблица 5.12. Собственные частоты защемленной квадратной пластины при  $\kappa = 2$  ( $E_2/E_1 = \kappa$ ;  $\nu_1 = 0.3/\sqrt{\kappa}$ ;  $\nu_2 = 0.3\sqrt{\kappa}$ ;  $G/E_1 = \sqrt{\kappa}/2.6$ )

№	Тип симметрии ( $k, j$ )			
	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
1	4.5220	3.4104	2.6685	3.5379
2	5.7025	4.8393	4.9723	4.4859
3	6.5862	5.8540	6.1115	6.3159
4	7.4237	7.1060	7.0466	6.5358
5	8.3884	7.9286	7.4891	7.2326
6	8.9201	8.4559	8.0624	8.2226
7	8.9589	9.6161	8.6543	9.3291
8	9.8526	9.7603	9.3959	9.5429
9	10.7791	9.9303	10.2694	9.6836
10	11.4060	10.6333	10.5459	10.2720
11	11.6178	11.0361	11.0992	10.7190
12	11.8674	11.3083	11.4638	11.3424
13	12.6865	11.8747	11.9065	11.8672
14	12.8452	12.6740	12.3370	12.3458
15	13.3606	12.9611	12.7785	12.6613
16	13.6999	13.1557	13.1072	12.7907

#### 5.4.2. Пластина со свободными краями.

Для пластины со свободными краями также вначале проведем сравнение полученных результатов с результатами известными в литературе. Так в табл. 5.13 представлены собственные частоты изотропной квадратной пластины в сравнении со значениями частот, полученными с использованием метода рядов Фурье [159] и метода суперпозиции [164]. В работе [164] использовалась одна из модификаций метода суперпозиции, при которой собственные частоты находились как нули определителя редуцированной системы уравнений. Несмотря на то, что собственные частоты пластины находились на основе различных подходов, данные табл. 5.13 показывают, что все три метода дают практически идентичные результаты.

Таблица 5.13. Собственные частоты колебаний  $\lambda = 2\Omega_x$  для квадратной изотропной пластины со свободными краями ( $\nu^* = 0.3$ )

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8
[164]	2.3206	2.4716	2.4716	2.6284	2.9874	3.4522	3.7232	3.7232
[159]	2.321	2.472	2.472	2.629	2.988	3.452	-	-
Диссертация	2.3206	2.4716	2.4716	2.6284	2.9874	3.4522	3.7232	3.7232

Далее, в табл. 5.14 представлены собственные частоты симметричных по обеим осям мод для квадратной изотропной пластины со свободными краями. Вычисленные значения собственных частот сравнивались со значениями, полученными на основе метода суперпозиции [169] и на основе вариационного подхода [146]. N.S. Bardell [146] пропустил первую фундаментальную частоту  $\lambda^2 = \Omega_x = 1.314$  для этого типа симметрии. Также результаты вычислений показывают, что эта частота, отмеченная в [146] как третья собственная для кососимметричных по оси  $Ox$  и симметричных по  $Oy$  мод, в действительности первая для полностью симметричных мод.

Зависимость первых собственных частот пластины со свободными краями от отношения сторон  $\eta = b/a$  представлена на рис. 5.14 для симметричных по обеим осям мод, и на рис. 5.15 для кососимметричных по обеим осям мод колебаний в случае изотропного материала с коэффициентом Пуассона  $\nu^* = 0.145$ .

Таблица 5.14. Собственные частоты колебаний  $\lambda^2 = \Omega_x$  для квадратной изотропной пластины со свободными краями ( $\nu^* = 0.3$ )

$N$	1	2	3	4
[169]	1.314	1.494	1.726	2.523
[146]	-	1.494	1.726	-
Диссертация	1.3142	1.4937	1.7261	2.5228

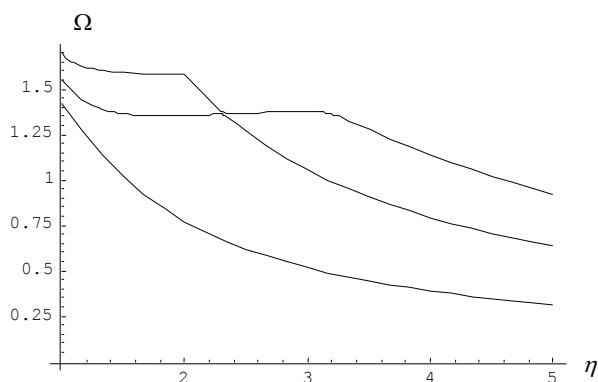


Рис.5.14. Зависимость собственных частот пластины от отношения ее сторон для симметричных мод колебаний

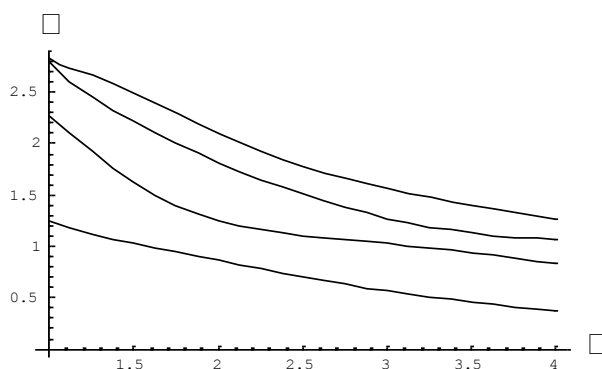


Рис. 5.15 - Зависимость собственных частот пластины от отношения ее сторон для кососимметричных мод колебаний

Для собственных форм колебаний, соответствующих определенной ветви собственных значений, как правило, характерна слабая вариация. Рассмотрим собственные формы призмы, соответствующие первой собственной частоте для симметричных мод изотропной пластины ( $\nu^* = 0.145$ ) при  $\eta = 1$  ( $\Omega_L^1 = \sqrt{2}$  - мода Ламе) и при  $\eta = 2$  ( $\Omega^1 = 0.771$ ).

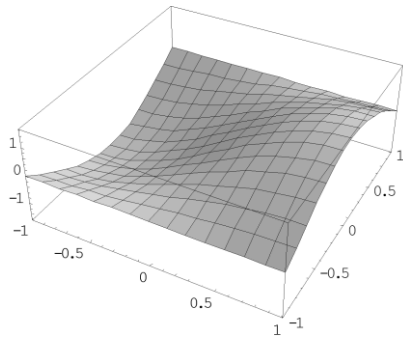
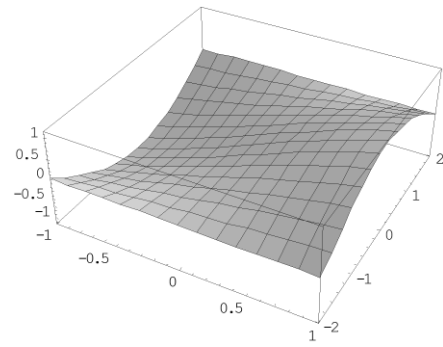
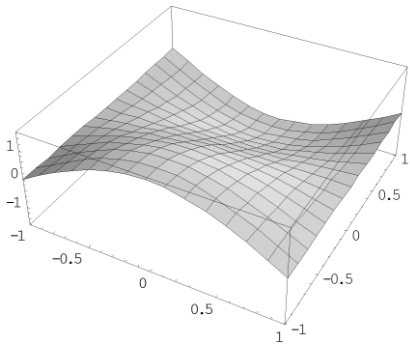
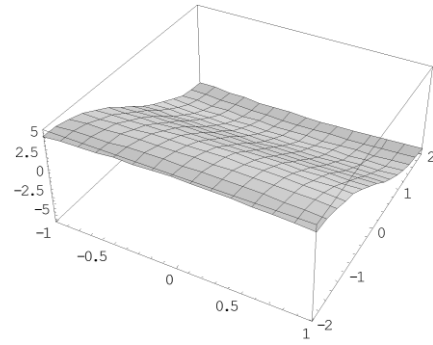
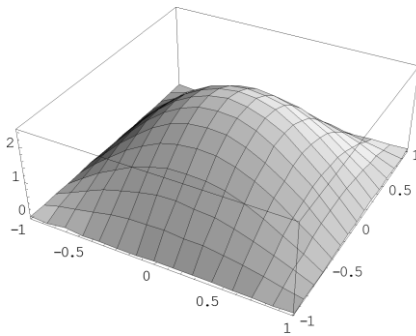
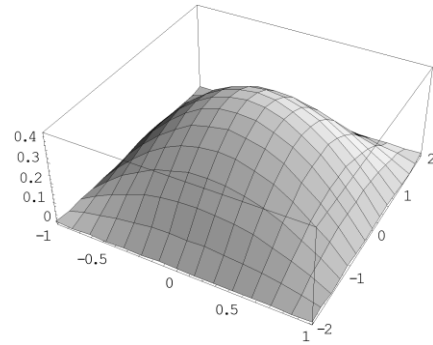
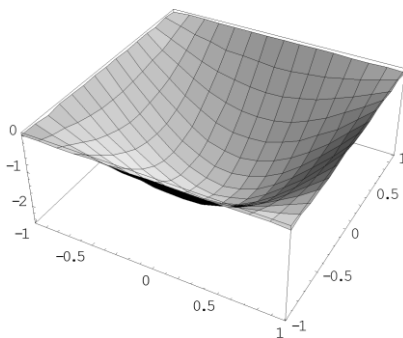
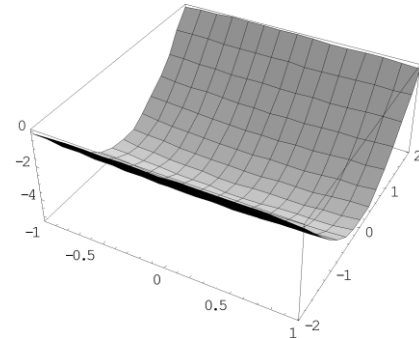
a.1)  $u(x, y)$  при  $\eta=1$ a.2)  $u(x, y)$  при  $\eta=2$ b.1)  $v(x, y)$  при  $\eta=1$ b.2)  $v(x, y)$  при  $\eta=2$ c.1)  $\sigma_{xx}$  при  $\eta=1$ c.2)  $\sigma_{xx}$  при  $\eta=2$ d.1)  $\sigma_{yy}$  при  $\eta=1$ d.2)  $\sigma_{yy}$  при  $\eta=2$ 

Рис.5.16. Собственные формы колебаний для первых собственных частот.



На рис. 5.16 представлены компоненты вектора смещений и тензора напряжений для указанных собственных форм. Как известно [39], первая ветвь собственных значений (рис. 5.14) не образует форм типа краевого резонанса, поэтому некоторые качественные отличия наблюдаются лишь для  $\nu_{00}$  и  $\sigma_{yy}^{00}$  в связи с увеличением сечения призмы в два раза по оси  $Oy$ . Остальные характеристики деформированного состояния имеют одинаковый качественный характер. Более сложная картина наблюдается вблизи краевого резонанса. На рис. 5.17 представлены 2-я и 3-я собственные частоты призмы в окрестности частоты краевого резонанса для симметричных мод изотропной пластины ( $\nu^* = 0.145$ ).

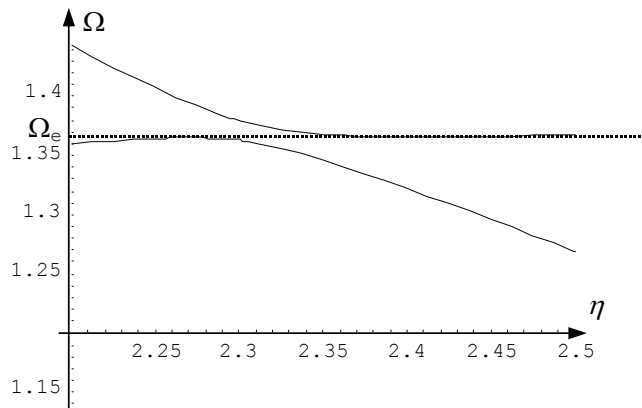


Рис.5.17. Вторая и третья собственные частоты пластины в окрестности краевого резонанса.

Прежде всего, заметим, что хотя в литературе [39 и др.] под частотой краевого резонанса для конечных упругих тел понимается некая постоянная величина  $\Omega_e = 1.36$ , характеризующаяся локализацией движений вблизи границы тела, из рис. 5.14, 5.17 следует, что здесь имеется слабая зависимость от отношения сторон  $\eta$ .

Рассмотрим первые три собственные формы колебаний для изотропного материала при  $\nu^* = 0.145$ . На рис. 5.18 представлены для данного случая компоненты собственных форм смещений  $\nu_{00}$  в различных сечениях пластины.

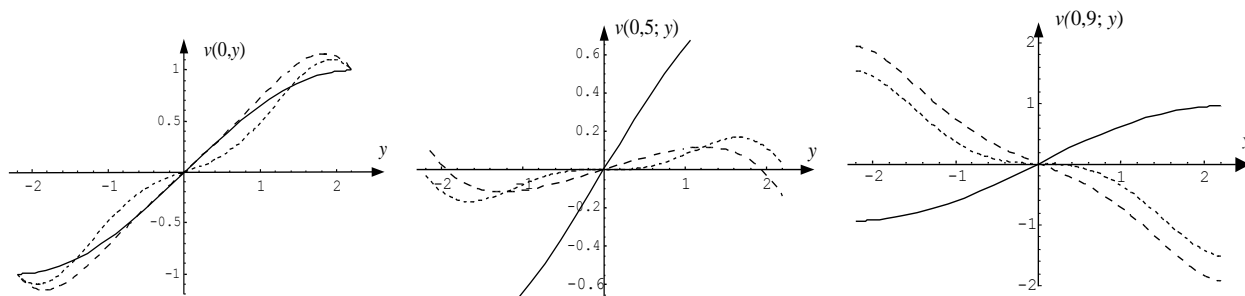


Рис.5.18 Собственные формы колебаний  $v(x, y)$ :

—— при  $\Omega^1 = 0.702435$ , - - - - - при  $\Omega^2 = 1.359858$ , ..... при  $\Omega^3 = 1.441748$ .

При данном отношении сторон призмы, согласно рис. 5.17, близок к краевой резонанс. Это можно увидеть в сечении  $x = 0.9$  где вторая и третья собственные формы имеют практически одинаковое распределение. Можно сделать вывод, что именно благодаря интерференции данных мод происходит локализация колебаний вблизи границы призмы на частотах близких к краевому резонансу. Отметим также в сечениях  $x = 0$  и  $x = 0.5$  все три собственные формы находятся в одной фазе. На краю призмы со фазными являются только собственные формы второй и третьей собственной частоты, а собственная форма первой собственной частоты находится в противоположной фазе. На рис. 5.17 вторая и третья ветви собственных частот наиболее близки при  $\eta = 2.31$ . Рассмотрим здесь соответствующие собственные формы (рис. 5.19). Представленные данные показывают, что эти собственные формы, после соответствующего масштабирования отличаются незначительно. Вычисляя их среднее квадратичное отклонение можно получить  $\sigma = 2.7\%$ . Таким образом, в районе краевого резонанса собственные формы второй и третьей собственных частот колебаний практически совпадают. При уменьшении  $\eta$  данный тип колебаний соответствует собственным формам второй частоты, при увеличении  $\eta$  - собственным формам третьей собственной частоты.

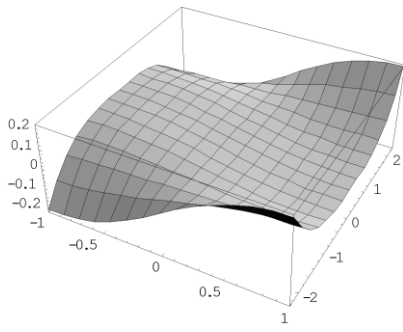
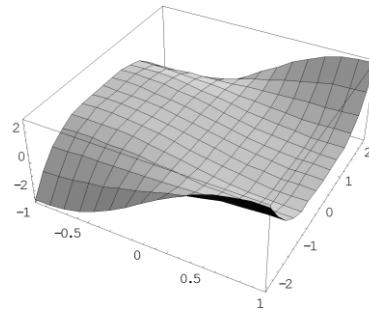
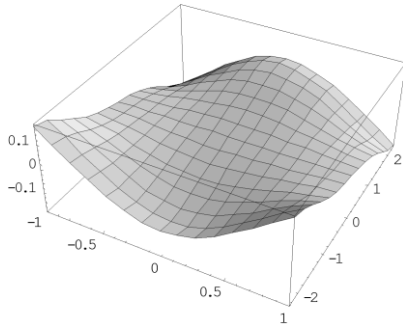
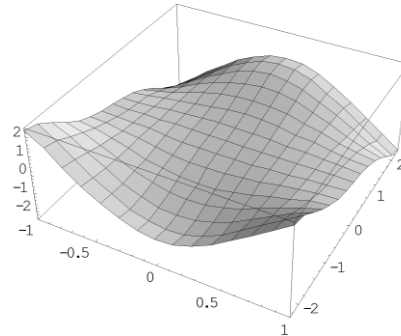
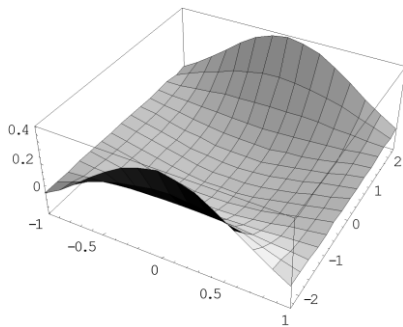
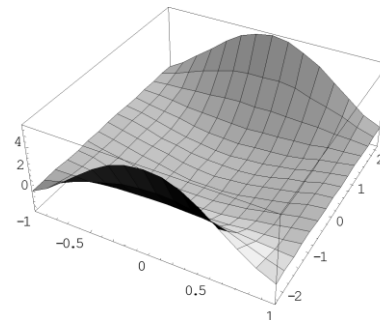
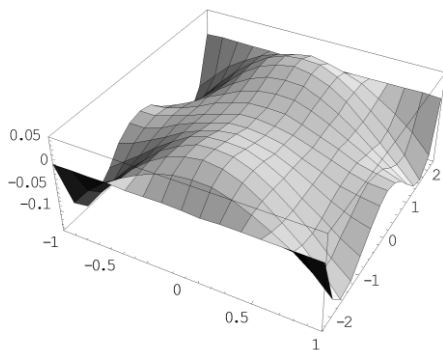
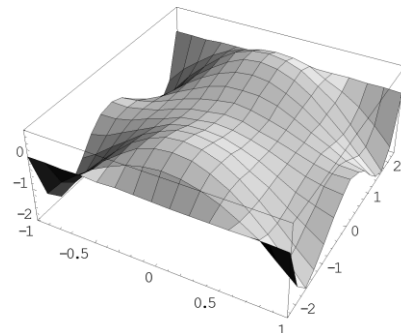
a.1)  $u(x, y)$  при  $\Omega^2 = 1.36275$ a.2)  $u(x, y)$  при  $\Omega^3 = 1.37309$ b.1)  $v(x, y)$  при  $\Omega^2 = 1.36275$ b.2)  $v(x, y)$  при  $\Omega^3 = 1.37309$ c.1)  $\sigma_{xx}$  при  $\Omega^2 = 1.36275$ c.2)  $\sigma_{xx}$  при  $\Omega^3 = 1.37309$ d.1)  $\sigma_{yy}$  при  $\Omega^2 = 1.36275$ d.2)  $\sigma_{yy}$  при  $\Omega^3 = 1.37309$ 

Рис.5.19 Собственные формы колебаний при  $\eta = 2.31$  соответствующие второй и третьей собственным частотам вблизи краевого резонанса.

Таблица 5.15. Собственные частоты квадратной пластины со свободными краями при  $\kappa = 2$  ( $E_2/E_1 = \kappa$ ;  $\nu_1 = 0.3/\sqrt{\kappa}$ ;  $\nu_2 = 0.3\sqrt{\kappa}$ ;  $G/E_1 = \sqrt{\kappa}/2.6$ )

$n$	Тип симметрии ( $k, j$ )			
	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
1	2.0570	1.8204	2.3302	1.9567
2	2.5037	3.1020	3.1998	3.5751
3	4.2834	4.1879	4.1771	4.1437
4	5.0895	5.4294	4.4808	4.6004
5	6.1848	5.6409	5.3442	5.5091
6	6.4371	6.3656	5.7881	6.2992
7	6.9261	6.7579	6.5835	6.5669
8	7.7371	7.0483	7.3966	7.1149
9	8.2168	7.4885	7.6763	7.5604
10	8.7504	8.2888	8.4758	8.1106
11	9.1640	8.4730	8.8706	8.5428
12	9.5567	9.3237	9.3101	8.7361
13	9.9650	9.7719	9.4529	9.3615
14	10.5311	9.8295	9.7003	9.6698
15	10.6419	10.1987	10.0101	10.3607
16	10.8766	11.1128	10.4929	10.7950

В отличие от симметричных мод, для любого типа кривой симметрии спектральные кривые не образуют плато. Это можно наблюдать на рис.5.15.

В завершении данного раздела представлены значения первых 64 собственных частот квадратной ортотропной пластины со свободными краями (табл. 5.15). Так как достоверные результаты для значений собственных частот в среднем и высоком диапазоне частот отсутствуют в известной литературе, то данные результаты могут выступать в качестве эталонных.

### 5.5. Продольные колебания пластины крестообразного сечения.

Балки крестообразного сечения являются широко распространенными элементами конструкций. В случае кручения решение данной задачи возможно построить в аналитической форме и свести к численным оценкам бесконечных

систем линейных алгебраических уравнений, при этом использование асимптотики неизвестных при численной реализации позволяет на порядок повысить точность [154] по сравнению с использованием простой редукции [1].

При исследовании составных акустических волноводов со сложной геометрией оказывается эффективным аналитико-численный метод частичных областей [39], являющийся модификацией метода суперпозиции применительно к задачам акустики. В рамках данного метода предложена методика использования известного характера особенности на ребре волновода для исследования асимптотики неизвестных коэффициентов в общем решении задачи.

Следуя идее о возможности использования известных особенностей волновых полей для улучшения качества решения, а также результаты для упругого прямоугольника, представленные в данной главе диссертации, здесь предлагается эффективный алгоритм решения задачи об установившихся вынужденных колебаниях изотропной пластины крестообразного сечения (рис. 5.19).

#### 5.5.1. Постановка задачи и общее решение уравнений Ламе.

Рассмотрим задачу о плоской деформации неограниченной в направлении оси  $Oz$  балки крестообразного сечения (рис. 5.20) под действием симметричной граничной нагрузки. В силу связи между обобщенным плоским напряженным состоянием и плоской деформацией эта же задача с точностью до пересчета коэффициента Пуассона  $\nu^* = \frac{\nu}{1+\nu}$  дает решение задачи о продольных колебаниях пластины того же сечения.

Из геометрии области следует, что напряженное состояние определяется напряженным состоянием областей  $ABCD$  (обозначим характеристики в этой области индексом - I) и  $CEFD$  (индекс - II). Из симметрии задачи следует, что для

$$\text{области } BGHC \quad \sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{yy}^{\text{II}}(y, x); \sigma_{yy}(x, y) = \sigma_{xx}^{\text{II}}(y, x); \sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{xy}^{\text{II}}(y, x);$$

$$\text{области } F_1E_1BA \quad \sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{xx}^{\text{II}}(-x, y); \sigma_{yy}(x, y) = \sigma_{yy}^{\text{II}}(-x, y); \sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{xy}^{\text{II}}(-x, y);$$

$$\text{области } G_1ADH_1 \quad \sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{yy}^{\text{II}}(-y, x); \sigma_{yy}(x, y) = \sigma_{xx}^{\text{II}}(-y, x); \sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{xy}^{\text{II}}(-y, x).$$

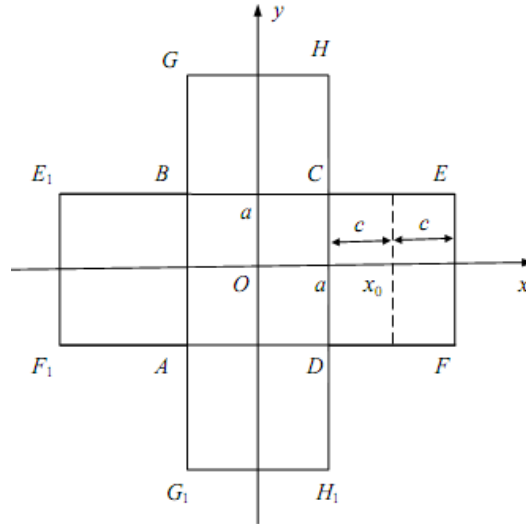


Рис.5.20. Геометрия области

Полагая координаты  $(x, y)$  безразмерными к некоторому линейному размеру  $h$ , получаем, что вектор смещений  $\vec{u} = \{u_x \vec{i} + u_y \vec{j}\} e^{-i\omega t}$  должен удовлетворять уравнениям движения Ламе (5.1). Граничные условия и условия сопряжения для областей  $ABCD$  и  $CEFD$  запишем следующим образом:

$$\text{при } y = \pm a \quad (x \in [x_0 - c, x_0 + c]): \quad \frac{1}{2G} \sigma_{yy}^{\text{II}} = g(x) e^{-i\omega t}; \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^{\text{II}} = 0; \quad (5.162)$$

$$\text{при } x = x_0 + c \quad (y \in [-a, a]): \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xx}^{\text{II}} = f(y) e^{-i\omega t}; \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^{\text{II}} = 0; \quad (5.163)$$

условия сопряжения при  $x = a \quad (y \in [-a, a]):$

$$\frac{1}{2G} \sigma_{xx}^{\text{I}} = \frac{1}{2G} \sigma_{xx}^{\text{II}}; \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^{\text{I}} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^{\text{II}}; \quad u_x^{\text{I}} = u_x^{\text{II}}; \quad u_y^{\text{I}} = u_y^{\text{II}}. \quad (5.164)$$

Общее решение (5.1) для каждой из областей строим согласно методу суперпозиции, в области  $ABCD$  – симметричное по обеим координатам, в области  $CEFD$  – симметричное по  $y$ .

$$u_x^{\text{I}} = C_0 \sin \Omega_1 x - \sum_{m=1}^{\infty} \left( C_m \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \text{ch } p_{1m} y + D_m \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \text{ch } p_{2m} y \right) \sin \alpha_m x + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \text{sh } p_{1m} x + D_m \text{sh } p_{2m} x) \cos \alpha_m y; \quad (5.165)$$

$$u_y^{\text{I}} = C_0 \sin \Omega_1 y + \sum_{n=1}^{\infty} (C_m \text{sh } p_{1m} y + D_m \text{sh } p_{2m} y) \cos \alpha_m x - \quad (5.166)$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \left( C_m \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \operatorname{ch} p_{1m} x + D_m \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \operatorname{ch} p_{2m} x \right) \sin \alpha_m y;$$

где  $\alpha_m = \frac{\pi m}{a}$ ,  $p_{lm}^2 = \alpha_m^2 - \Omega_l^2$  ( $l=1, 2$ ),  $\Omega_1 = \frac{\omega h}{c_1}$ ,  $\Omega_2 = \frac{\omega h}{c_2}$ ,  $c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$  – скорость

продольной волны,  $c_2 = \sqrt{G/\rho}$  – скорость сдвиговой волны;

$$\begin{aligned} u^{\text{II}} = & \bar{C}_0 \sin \Omega_1(x-x_0) + \tilde{C}_0 \cos \Omega_1(x-x_0) - \sum_{m=1}^{\infty} \left( \bar{A}_m \frac{\bar{\alpha}_m}{\bar{p}_{1m}} \operatorname{ch} \bar{p}_{1m} y + \bar{B}_m \frac{\bar{p}_{2m}}{\bar{\alpha}_m} \operatorname{ch} \bar{p}_{2m} y \right) \times \\ & \times \sin \bar{\alpha}_m(x-x_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \tilde{A}_m \frac{\tilde{\alpha}_m}{\tilde{p}_{1m}} \operatorname{ch} \tilde{p}_{1m} y + \tilde{B}_m \frac{\tilde{p}_{2m}}{\tilde{\alpha}_m} \operatorname{ch} \tilde{p}_{2m} y \right) \cos \tilde{\alpha}_m(x-x_0) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \bar{C}_m \operatorname{sh} p_{1m}(x-x_0) + \bar{D}_m \operatorname{sh} p_{2m}(x-x_0) + \tilde{C}_m \operatorname{ch} p_{1m}(x-x_0) + \tilde{D}_m \operatorname{ch} p_{2m}(x-x_0) \right) \cos \alpha_m y; \end{aligned} \quad (5.167)$$

$$v^{\text{II}} = \bar{A}_0 \sin \Omega_1 y + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \bar{A}_m \operatorname{sh} \bar{p}_{1m} y + \bar{B}_m \operatorname{sh} \bar{p}_{2m} y \right) \cos \bar{\alpha}_m(x-x_0) + \quad (5.168)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \tilde{A}_m \operatorname{sh} \tilde{p}_{1m} y + \tilde{B}_m \operatorname{sh} \tilde{p}_{2m} y \right) \sin \tilde{\alpha}_m(x-x_0) - \sum_{m=1}^{\infty} \left( \bar{C}_m \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \operatorname{ch} p_{1m}(x-x_0) + \right. \\ & \left. + \bar{D}_m \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \operatorname{ch} p_{2m}(x-x_0) + \tilde{C}_m \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \operatorname{sh} p_{1m}(x-x_0) + \tilde{D}_m \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \operatorname{sh} p_{2m}(x-x_0) \right) \sin \alpha_m y; \end{aligned}$$

где  $\bar{\alpha}_m = \pi m/c$ ;  $\tilde{\alpha}_m = \pi(m-1/2)/c$ ,  $\bar{p}_{lm}^2 = \bar{\alpha}_m^2 - \Omega_l^2$ ;  $\tilde{p}_{lm}^2 = \tilde{\alpha}_m^2 - \Omega_l^2$  ( $l=1, 2$ ).

Формулы для смещений (5.164) – (5.168) позволяют найти выражения для напряжений в каждой из областей согласно известным формулам

$$\frac{\sigma_{\tau s}}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{\tau s} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\tau}}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial \tau} \right), \quad (5.169)$$

где  $\delta_{\tau s}$  – символы Кронекера.

Представленные выше формулы для смещений и напряжений тождественно удовлетворяют уравнениям колебаний (5.1) и обладают достаточной полнотой для выполнения условий (5.162) – (5.164).

### 5.5.2. Сведение к бесконечной системе линейных уравнений.

В предыдущих разделах этой главы показано, что при решении второй основной граничной задачи для прямоугольника для основных четырех типов симметрии форма общего решения (5.164) – (5.168) позволяет свести задачу к квазирегулярной бесконечной системе относительно неопределенных коэффициентов. Используем данный факт для сведения поставленной граничной

задачи к бесконечной системе. Для этого положим, что на стыке областей  $ABCD$  и  $CEFD$  нормальные и касательные напряжения являются известными величинами, для которых справедливо разложение в ряды Фурье:

$$\frac{\sigma_{xx}^I(a, y)}{2G} = \frac{\sigma_{xx}^{II}(x_0 - c, y)}{2G} = \sigma_{xx}(y) = X_0 + \sum_{m=1}^{\infty} X_m \cos \alpha_m y; \quad (5.170)$$

$$\frac{\sigma_{xy}^I(a, y)}{2G} = \frac{\sigma_{xy}^{II}(x_0 - c, y)}{2G} = \sigma_{xy}(y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \alpha_m y; \quad (5.171)$$

Тогда, разбивая нормальную граничную нагрузку  $\sigma_{yy}^{II}/2G = g(x) = \bar{g}(x) + \tilde{g}(x)$  на два слагаемых, отвечающих симметричному и кососимметричному случаям, можно заменить задачу (5.162) – (5.164) на три задачи для прямоугольника. Здесь и далее для области  $CEFD$  величины с прямой чертой отвечают случаю симметрии по обеим осям, с волной – кососимметричному по  $x$  и симметричному по  $y$ .

$$\text{Для } ABCD \text{ при } x = \pm a \quad (y \in [-a, a]): \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xx}^I = \sigma_{xx}(y); \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^I = \sigma_{xy}(y). \quad (5.172)$$

Для  $CEFD$  симметричная задача при  $x = x_0 \pm c \quad (y \in [-a, a]):$

$$\frac{1}{2G} \bar{\sigma}_{xx}^{II} = \frac{\sigma_{xx}(y) + f(y)}{2}; \quad \frac{1}{2G} \bar{\sigma}_{xy}^{II} = \mp \frac{\sigma_{xy}(y)}{2}. \quad (5.173)$$

и при  $y = \pm a \quad (x \in [x_0 - c, x_0 + c]):$

$$\frac{1}{2G} \bar{\sigma}_{yy}^{II} = \bar{g}(x); \quad \frac{1}{2G} \bar{\sigma}_{xy}^{II} = 0. \quad (5.174)$$

Для  $CEFD$  кососимметричная задача при  $x = x_0 \pm c \quad (y \in [-a, a]):$

$$\frac{1}{2G} \tilde{\sigma}_{xx}^{II} = \pm \frac{f(y) - \sigma_{xx}(y)}{2}; \quad \frac{1}{2G} \tilde{\sigma}_{xy}^{II} = \frac{\sigma_{xy}(y)}{2}. \quad (5.175)$$

$$\text{и при } y = \pm a \quad (x \in [x_0 - c, x_0 + c]): \quad \frac{1}{2G} \tilde{\sigma}_{yy}^{II} = \pm \tilde{g}(x); \quad \frac{1}{2G} \tilde{\sigma}_{xy}^{II} = 0. \quad (5.176)$$

Таким образом, задачи (5.172), (5.173) – (5.174) и (5.175) – (5.176) в случае известных напряжений (5.170) – (5.171) на стыке областей позволяют полностью найти решение задачи в каждом из прямоугольников. Используя условия сопряжения для компонентов вектора смещений при  $x = \pm a \quad (y \in [-a, a]):$

$$u_x^I = u_x^{II}; \quad u_y^I = u_y^{II},$$

можно замкнуть систему и определить величины  $X_m, Y_m$ .



Форма общего решения такова, что условия на касательные напряжения выполняются точно для всех трех задач (5.172) – (5.176), что приводит к следующим соотношениям между коэффициентами

$$C_m = -D_m \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2\alpha_m^2} \frac{\text{sh } p_{2m}a}{\text{sh } p_{1m}a} - \frac{Y_m}{\alpha_m \text{sh } p_{1m}a}; \quad (5.177)$$

$$\bar{C}_m = -\bar{D}_m \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2\alpha_m^2} \frac{\text{sh } p_{2m}c}{\text{sh } p_{1m}c} + \frac{Y_m}{2\alpha_m \text{sh } p_{1m}c}; \quad \bar{A}_m = -\bar{B}_m \frac{\bar{\alpha}_m^2 + \bar{p}_{2m}^2}{2\bar{\alpha}_m^2} \frac{\text{sh } \bar{p}_{2m}a}{\text{sh } \bar{p}_{1m}a}. \quad (5.178)$$

$$\tilde{C}_m = -\tilde{D}_m \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2\alpha_m^2} \frac{\text{ch } p_{2m}c}{\text{ch } p_{1m}c} - \frac{Y_m}{2\alpha_m \text{ch } p_{1m}c}; \quad \tilde{A}_m = -\tilde{B}_m \frac{\tilde{\alpha}_m^2 + \tilde{p}_{2m}^2}{2\tilde{\alpha}_m^2} \frac{\text{sh } \tilde{p}_{2m}a}{\text{sh } \tilde{p}_{1m}a}. \quad (5.179)$$

Из равенства  $u_x^I(a, y) = u_x^{II}(x_0 - c, y)$  или

$$C_0 \sin \Omega_1 a + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \text{sh } p_{1m}a + D_m \text{sh } p_{2m}a) \cos \alpha_m y = -\bar{C}_0 \sin \Omega_1 c + \tilde{C}_0 \cos \Omega_1 c - \\ - \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{C}_m \text{sh } p_{1m}c + \bar{D}_m \text{sh } p_{2m}c + \tilde{C}_m \text{ch } p_{1m}c + \tilde{D}_m \text{ch } p_{2m}c) \cos \alpha_m y,$$

следует, что исключая  $C_m, \bar{C}_m, \tilde{C}_m$  на основе (5.177 – 5.179), получаем

$$C_0 \sin \Omega_1 a = -\bar{C}_0 \sin \Omega_1 c + \tilde{C}_0 \cos \Omega_1 c, \quad (5.180)$$

$$D_m \text{sh } p_{2m}a = \tilde{D}_m \text{ch } p_{2m}c - \bar{D}_m \text{sh } p_{2m}c. \quad (5.181)$$

Пусть заданная граничная нагрузка допускает разложения в ряды

$$f(y) = f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cos \alpha_m y; \quad \bar{g}(x) = \bar{g}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{g}_m \cos \bar{\alpha}_m (x - x_0);$$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{g}_m \sin \tilde{\alpha}_m (x - x_0).$$

Используя разложения [115] гиперболических функций по полной системе тригонометрических функций в соотношениях для нормальных напряжений (5.172) – (5.176) и для условия сопряжения  $u_y^I(a, y) = u_y^{II}(x_0 - c, y)$ , получаем бесконечную систему уравнений относительно величин  $C_0, \bar{C}_0, \tilde{C}_0, \bar{A}_0$  и  $\{D_m, \bar{D}_m, \tilde{D}_m, \bar{B}_m, \tilde{B}_m, X_m, Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ . Данную систему можно упростить, если исключить на основе (5.180) – (5.181) неопределенные коэффициенты области

*ABCD*. Кроме того из системы исключаются  $\{X_m\}_{m=0}^{\infty}$  при помощи сложения уравнений системы. Тогда, обозначив неизвестные как

$$\bar{x}_0 = \bar{C}_0 \sin \Omega_1 c; \quad \tilde{x}_0 = \tilde{C}_0 \cos \Omega_1 c; \quad \bar{z}_0 = \bar{A}_0 \sin \Omega_1 a, \quad (5.182)$$

$$\bar{x}_m = \frac{(-1)^m \bar{D}_m \operatorname{sh} p_{2m} c}{c \alpha_m}, \quad \tilde{x}_m = \frac{(-1)^m \tilde{D}_m \operatorname{ch} p_{2m} c}{c \alpha_m},$$

$$\bar{z}_m = \frac{(-1)^{m+1} \bar{B}_m \operatorname{sh} \bar{p}_{2m} a}{a \bar{\alpha}_m}, \quad \tilde{z}_m = \frac{(-1)^m \tilde{B}_m \operatorname{sh} \tilde{p}_{2m} a}{a \tilde{\alpha}_m}, \quad y_m = (-1)^m Y_m \left( 1 + \frac{v \Omega_1^2}{(1-2v) \alpha_m^2} \right),$$

получаем бесконечную систему в форме ( $m = 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} 0.1. & \left( \frac{1-v}{1-2v} \operatorname{ctg} \Omega_1 a + \frac{v}{(1-2v) \Omega_1 a} - \frac{1-v}{1-2v} \operatorname{tg} \Omega_1 c \right) \Omega_1 \tilde{x}_0 - \\ & - \left( \frac{1-v}{1-2v} \operatorname{ctg} \Omega_1 a + \frac{v}{(1-2v) \Omega_1 a} + \frac{1-v}{1-2v} \operatorname{ctg} \Omega_1 c \right) \Omega_1 \bar{x}_0 - \frac{v \bar{z}_0}{(1-2v) a} = \\ & = \frac{v \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2a(1-2v)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{c(\tilde{x}_n - \bar{x}_n)}{\alpha_n p_{1n}^2} + \frac{a \bar{z}_n}{\bar{\alpha}_n \bar{p}_{1n}^2} - \frac{a \tilde{z}_n}{\tilde{\alpha}_n \tilde{p}_{1n}^2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{a p_{1n}^2}; \\ 0.2. & - \frac{1-v}{1-2v} \Omega_1 \operatorname{tg} \Omega_1 c \tilde{x}_0 + \frac{1-v}{1-2v} \Omega_1 \operatorname{ctg} \Omega_1 c \bar{x}_0 + \frac{v \bar{z}_0}{(1-2v) a} = - \frac{v \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2v)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\bar{z}_n}{\bar{\alpha}_n \bar{p}_{1n}^2} + \frac{\tilde{z}_n}{\tilde{\alpha}_n \tilde{p}_{1n}^2} \right) + f_0; \\ 0.3. & \frac{v \bar{x}_0}{(1-2v) c} + \frac{1-v}{1-2v} \Omega_1 \operatorname{ctg} \Omega_1 a \bar{z}_0 = \frac{v \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_n}{\alpha_n p_{1n}^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{2c p_{1n}^2} + \bar{g}_0; \\ 1.1. & \Delta_m^1 \tilde{x}_m - \Delta_m^2 \bar{x}_m - \Delta_m^{y1} y_m = - \frac{c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\alpha_n, \alpha_m) (\tilde{x}_n - \bar{x}_n) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\bar{\alpha}_n, \alpha_m) \bar{z}_n + \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\tilde{\alpha}_n, \alpha_m) \tilde{z}_n - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{\alpha_n^2 + p_{1m}^2} + \frac{2v \Omega_1^2 (\tilde{x}_0 - \bar{x}_0 - \bar{z}_0)}{(1-2v) a p_{1m}^2}; \\ 1.2. & \tilde{\Delta}_m^c \tilde{x}_m + \bar{\Delta}_m^c \bar{x}_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\bar{\alpha}_n, \alpha_m) \bar{z}_n + \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\tilde{\alpha}_n, \alpha_m) \tilde{z}_n - \\ & - \frac{\alpha_m (\alpha_m^2 + p_{2m}^2) y_m}{2p_{1m} (\alpha_m^2 + \frac{v \Omega_1^2}{1-2v}) \operatorname{sh} 2p_{1m} c} + \frac{2v \Omega_1^2 \bar{z}_0}{(1-2v) a p_{1m}^2} + (-1)^m f_m; \\ 1.3. & \bar{\Delta}_m^a \bar{z}_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\alpha_n, \bar{\alpha}_m) \bar{x}_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{c (\alpha_n^2 + \bar{p}_{1m}^2)} - \frac{2v \Omega_1^2 \bar{x}_0}{(1-2v) c \bar{p}_{1m}^2} + (-1)^{m+1} \bar{g}_m; \\ 1.4. & \tilde{\Delta}_m^a \tilde{z}_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\alpha_n, \tilde{\alpha}_m) \tilde{x}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{c (\alpha_n^2 + \tilde{p}_{1m}^2)} - \frac{2v \Omega_1^2 \tilde{x}_0}{(1-2v) c \tilde{p}_{1m}^2} + (-1)^m \tilde{g}_m; \\ 1.5. & \Delta_m^3 \bar{x}_m - \Delta_m^4 \tilde{x}_m + \Delta_m^{y2} y_m = \frac{c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} M_2(\alpha_n, \alpha_m) (\tilde{x}_n - \bar{x}_n) + \sum_{n=1}^{\infty} M_2(\bar{\alpha}_n, \alpha_m) \bar{z}_n - \end{aligned}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} M_2(\tilde{\alpha}_n, \alpha_m) \tilde{z}_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha_m^2 \alpha_n y_n}{a \left( \alpha_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right) (\alpha_n^2 + p_{1m}^2)} + \frac{2\alpha_m^2 (\tilde{x}_0 - \bar{x}_0 - \bar{z}_0)}{ap_{1m}^2};$$

где  $M_1(x, y) = \frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2 - \Omega_1^2} \left( \frac{2y^2}{x^2 + y^2 - \Omega_2^2} - \frac{\nu \Omega_2^2}{x^2} \right);$

$$M_2(x, y) = \frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} \cdot \frac{2y^2 x}{x^2 + y^2 - \Omega_1^2} \left( \frac{1}{x^2 + y^2 - \Omega_2^2} + \frac{1-\nu}{x^2} \right);$$

$$\Delta_m^1 = c\alpha_m \left( p_{2m} (\operatorname{th} p_{2m} c + \operatorname{cth} p_{2m} a) - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1m}} (\operatorname{th} p_{1m} c + \operatorname{cth} p_{1m} a) \right);$$

$$\Delta_m^2 = c\alpha_m \left( p_{2m} (\operatorname{cth} p_{2m} c + \operatorname{cth} p_{2m} a) - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1m}} (\operatorname{cth} p_{1m} c + \operatorname{cth} p_{1m} a) \right);$$

$$\Delta_m^3 = c\alpha_m \left( p_{2m} (\operatorname{cth} p_{2m} c + \operatorname{cth} p_{2m} a) - \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2p_{1m}} (\operatorname{cth} p_{1m} c + \operatorname{cth} p_{1m} a) \right);$$

$$\Delta_m^4 = c\alpha_m \left( p_{2m} (\operatorname{th} p_{2m} c + \operatorname{cth} p_{2m} a) - \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2p_{1m}} (\operatorname{th} p_{1m} c + \operatorname{cth} p_{1m} a) \right);$$

$$\Delta_m^{y1} = \frac{\alpha_m (\alpha_m^2 + p_{2m}^2)}{4p_{1m} \left( \alpha_m^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right)} (2\operatorname{cth} p_{1m} a + \operatorname{cth} p_{1m} c + \operatorname{th} p_{1m} c);$$

$$\Delta_m^{y2} = \frac{\alpha_m^3}{2p_{1m} \left( \alpha_m^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right)} (2\operatorname{cth} p_{1m} a + \operatorname{cth} p_{1m} c + \operatorname{th} p_{1m} c);$$

$$\tilde{\Delta}_m^c = c\alpha_m \left( p_{2m} \operatorname{th} p_{2m} c - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1m}} \operatorname{th} p_{1m} c \right);$$

$$\bar{\Delta}_m^c = c\alpha_m \left( p_{2m} \operatorname{cth} p_{2m} c - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m} c \right);$$

$$\tilde{\Delta}_m^a = a\tilde{\alpha}_m \left( \tilde{p}_{2m} \operatorname{cth} \tilde{p}_{2m} a - \frac{(\tilde{\alpha}_m^2 + \tilde{p}_{2m}^2)^2}{4\tilde{\alpha}_m^2 \tilde{p}_{1m}} \operatorname{cth} \tilde{p}_{1m} a \right);$$

$$\bar{\Delta}_m^a = a\bar{\alpha}_m \left( \bar{p}_{2m} \operatorname{cth} \bar{p}_{2m} a - \frac{(\bar{\alpha}_m^2 + \bar{p}_{2m}^2)^2}{4\bar{\alpha}_m^2 \bar{p}_{1m}} \operatorname{cth} \bar{p}_{1m} a \right).$$

### 5.5.3. Асимптотика решения бесконечной системы.

Согласно решению задачи о плоской деформации бесконечного кругового сектора [62], для входящего угла  $\pi < 2\alpha < 2\pi$  напряжения в вершине сектора (рис. 5.21) имеют особенность порядка  $O(r^{\lambda-1})$  при  $r \rightarrow 0$ , где  $r$  – расстояние до вершины угла,  $\lambda = \frac{a_1}{2\alpha}$ ,  $a_k + ib_k$  – корни уравнения

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} + \frac{\sin z}{z} = 0,$$

упорядоченные по возрастанию действительной части.

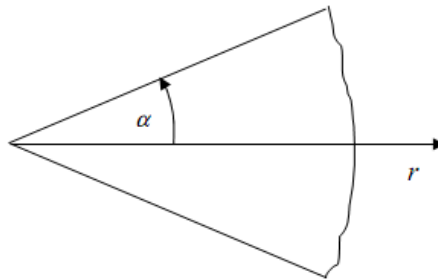


Рис.5.21. Бесконечный круговой сектор

В случае входящего прямого угла  $2\alpha = 3\pi/2$ , первый корень  $a_1 = 2,565819$  является действительным, откуда  $\lambda = 0,544483$ . Тогда в окрестности вершины входящего угла  $C$  (см. рис. 5.20) напряжения имеют такой же характер особенности. В частности, для касательных напряжений на границе областей  $ABCD$  и  $CEFD$  найдется такая константа  $K$ , что

$$\tau_{xy}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin \alpha_n y \approx K(a-y)^{\lambda-1} \quad (y \rightarrow a-0).$$

В таком случае функция  $\tau_{xy}(y) - K(a-y)^{\lambda-1}$  уже не будет иметь особенности при  $y \in [0, a]$ , то есть ее коэффициенты Фурье должны убывать согласно лемме Римана-Лебега [126] как  $O(1/\alpha_n)$ . Откуда следует при  $n \rightarrow \infty$

$$Y_n = \frac{2K}{a} \int_0^a (a-y)^{\lambda-1} \sin \alpha_n y dy + O(1/\alpha_n). \quad (5.183)$$

Интеграл (5.183) вычисляется точно [115] при помощи гипергеометрической функции

$$Y_n = \frac{2K(-1)^{n+1} a^\lambda \alpha_n}{\lambda + 1} {}_1F_2\left(\frac{1+\lambda}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3+\lambda}{2}; -\frac{a^2 \alpha_n^2}{4}\right) + O(1/\alpha_n),$$

известная асимптотика которой при  $n \rightarrow \infty$  дает

$$Y_n = \frac{2K(-1)^{n+1} \Gamma(\lambda) \sin \frac{\pi\lambda}{2}}{a\alpha_n^\lambda} + O(1/\alpha_n). \quad (5.184)$$

Таким образом, согласно (5.184) для введенных (5.182) неизвестных должно выполняться асимптотическое равенство

$$y_n = \frac{c\Omega_1^2}{1-2\nu} \frac{G_y}{\alpha_n^\lambda} + O(1/\alpha_n). \quad (5.185)$$

Аналогично, рассматривая поведение нормальных напряжений  $\sigma_{xx}(y)$ , можно доказать существование такой константы  $G_x$ , что

$$(-1)^n X_n = \frac{c\Omega_1^2}{1-2\nu} \frac{G_x}{\alpha_n^\lambda} + O(1/\alpha_n). \quad (5.186)$$

Равенства (5.185) и (5.186), в свою очередь, позволяют исследовать асимптотическое поведение неизвестных  $\{\bar{x}_m, \bar{z}_m\}$  и  $\{\tilde{x}_m, \tilde{z}_m\}$ . Для этого отдельно рассмотрим бесконечные системы относительно этих неизвестных.

Система для четной составляющей в области  $CEFD$  имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \text{ctg} \Omega_1 c \bar{x}_0 + \frac{\nu}{(1-2\nu)a} \bar{z}_0 = -\frac{\nu\Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_n}{\bar{\alpha}_n \bar{p}_{1n}^2} + \frac{X_0 + f_0}{2}; \\ \frac{\nu}{(1-2\nu)c} \bar{x}_0 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \text{ctg} \Omega_1 a \bar{z}_0 = \frac{\nu\Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_n}{\alpha_n p_{1n}^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{2cp_{1n}^2} + \bar{g}_0; \\ \bar{\Delta}_m^c \bar{x}_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\bar{\alpha}_n, \alpha_m) \bar{z}_n + \frac{2\nu\Omega_1^2 \bar{z}_0}{(1-2\nu)ap_{1m}^2} - \frac{\alpha_m (\alpha_m^2 + p_{2m}^2) \text{cth} p_{1m} c}{4p_{1m} (\alpha_m^2 + \nu\Omega_1^2 / (1-2\nu))} y_m + \\ + \frac{(-1)^m (X_m + f_m)}{2}; \\ \bar{\Delta}_m^a \bar{z}_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\alpha_n, \bar{\alpha}_m) \bar{x}_n + \frac{2\nu\Omega_1^2 \bar{x}_0}{(1-2\nu)c\bar{p}_{1m}^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{c(\alpha_n^2 + \bar{p}_{1m}^2)} + (-1)^m \bar{g}_m; \end{array} \right. \quad (5.187)$$

Система для нечетной составляющей в области  $CEFD$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \operatorname{tg} \Omega_1 c \tilde{x}_0 \bar{z}_0 = \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}_n}{\tilde{\alpha}_n \tilde{p}_{1n}^2} + \frac{X_0 - f_0}{2}; \\ \tilde{\Delta}_m^c \tilde{x}_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\tilde{\alpha}_n, \alpha_m) \tilde{z}_n + \frac{2\nu \Omega_1^2 \bar{z}_0}{(1-2\nu) a p_{1m}^2} + \frac{\alpha_m (\alpha_m^2 + p_{2m}^2) \operatorname{th} p_{1m} c}{4 p_{1m} (\alpha_m^2 + \nu \Omega_1^2 / (1-2\nu))} y_m - \\ \quad - \frac{(-1)^m (X_m - f_m)}{2}; \\ \tilde{\Delta}_m^a \tilde{z}_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\alpha_n, \tilde{\alpha}_m) \tilde{x}_n - \frac{2\nu \Omega_1^2 \tilde{x}_0}{(1-2\nu) c \tilde{p}_{1m}^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{c(\alpha_n^2 + \tilde{p}_{1m}^2)} + (-1)^m \tilde{g}_m; \end{array} \right. \quad (5.188)$$

Учитывая (5.185), (5.186), найдем асимптотическое поведение свободных членов систем (5.187), (5.188) на основе асимптотики ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{c(\alpha_n^2 + \bar{p}_{1m}^2)} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{c(\alpha_n^2 + \tilde{p}_{1m}^2)} \approx \frac{a \Omega_1^2 \alpha_m^{-\lambda} G_y}{(2-4\nu) \sin \pi \lambda / 2}.$$

Следовательно, свободные члены в системах (5.187), (5.188) ведут себя как  $O(\alpha_m^{-\lambda})$ . Проведем замену переменных в данных системах

$$\bar{x}_m = \bar{G}_x \alpha_m^{-\lambda} + \bar{x}_m^R; \quad \bar{z}_m = \bar{G}_z \bar{\alpha}_m^{-\lambda} + \bar{z}_m^R; \quad \tilde{x}_m = \tilde{G}_x \alpha_m^{-\lambda} + \tilde{x}_m^R; \quad \tilde{z}_m = \tilde{G}_z \tilde{\alpha}_m^{-\lambda} + \tilde{z}_m^R,$$

подбирая  $\bar{G}_x, \bar{G}_z, \tilde{G}_x, \tilde{G}_z$  таким образом, чтобы после замены свободные члены систем были порядка  $O(1/\alpha_m)$ .

Квазирегулярные бесконечные системы (5.187), (5.188) подробно исследованы при решении второй основной граничной задачи для прямоугольника (разделы 5.1 и 5.3). При свободных членах порядка  $O(1/\alpha_m)$  для единственных ограниченных решений бесконечных систем будет справедлив асимптотический закон:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m \bar{x}_m^R = \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_m \bar{z}_m^R = \bar{G}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m \tilde{x}_m^R = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_m \tilde{z}_m^R = \tilde{G}.$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при главных членах асимптотики свободных членов систем после замены, можно найти, что

$$\bar{G}_x = -\tilde{G}_x = \frac{\sin^2 \frac{\pi \lambda}{2} (G_y - G_x) + \lambda G_y}{\lambda^2 - \sin^2 \frac{\pi \lambda}{2}}; \quad \bar{G}_z = -\tilde{G}_z = \frac{\sin \frac{\pi \lambda}{2} ((1+\lambda)G_y + \lambda G_x)}{\lambda^2 - \sin^2 \frac{\pi \lambda}{2}} \quad (5.189)$$

Таким образом, получаем при  $m \rightarrow \infty$ :

$$\bar{x}_m = \frac{\bar{G}_x}{\alpha_m^\lambda} + \frac{\bar{G}}{\alpha_m}; \quad \bar{z}_m = \frac{\bar{G}_z}{\alpha_m^\lambda} + \frac{\bar{G}}{\alpha_m}; \quad \tilde{x}_m = -\frac{\bar{G}_x}{\alpha_m^\lambda} + \frac{\tilde{G}}{\alpha_m}; \quad \tilde{z}_m = -\frac{\bar{G}_z}{\alpha_m^\lambda} + \frac{\tilde{G}}{\alpha_m}. \quad (5.190)$$

#### 5.5.4. Примеры численной реализации.

Построенный асимптотический закон (5.189), (5.190) для неизвестных позволяет свернуть остатки рядов в бесконечной системе и свести задачу к решению конечной системы относительно первых неизвестных и предельных констант  $\bar{G}_x, \bar{G}_z, \bar{G}, \tilde{G}$  согласно алгоритму улучшенной редукции.

Рассмотрим в качестве примера задачу о колебаниях креста только под воздействием нагрузки  $f(y)=1$ . Выполнение граничных условий для равнобокого креста ( $c/a = 1$ ) при частоте колебаний  $\Omega = 0.5$  и  $\nu=0.3$  дано в табл. 5.16:

Таблица 5.16 Выполнение граничных условий для равнобокого креста

$j$	0	1	2	3	4	5
$\sigma_{xx}(x_0 + c, ja/5)/2G$	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	1.0019
$\sigma_{yy}(a + 2jc/5, a)/2G$	$\infty$	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	-0.0018

Выполнение условий сопряжения областей на  $CD$  представлено в следующей таблице, при этом условия на  $\sigma_{xy}$  и  $u_x$  выполняются тождественно, условия на  $\sigma_{xx}$  и  $u_y$  выполняются из решения бесконечной системы, а условие сопряжения напряжений  $\sigma_{yy}$  должно выполняться априорно при корректном решении задачи.

Таблица 5.17 Выполнение условий сопряжения для равнобокого креста

$j$	0	1	2	3	4	5
$\sigma_{xx}^I(a, ja/5)/2G$	1.8961	1.8966	1.9069	1.9527	2.1703	$\infty$
$\sigma_{xx}^{II}(a, ja/5)/2G$	1.8965	1.8984	1.9047	1.9545	2.1697	$\infty$
$u_y^I(a, ja/5)$	0	0.0813	0.1686	0.2703	0.4035	0.7090
$u_y^{II}(a, ja/5)$	0	0.0813	0.1686	0.2703	0.4035	0.7051
$\sigma_{yy}^I(a, ja/5)/2G$	1.3892	1.4102	1.4824	1.6476	2.0857	$\infty$
$\sigma_{yy}^{II}(a, ja/5)/2G$	1.3844	1.4054	1.4776	1.6428	2.0809	$\infty$

В вычислениях удерживалась конечная система из 200 уравнений. При этом знание асимптотики (5.189), (5.190) является существенным для качества полученного решения. Ниже в табл. 5.18 представлено выполнение сопряжения напряжений  $\sigma_{yy}$  при использовании для решения системы метода простой редукции (в системе удерживается первые 200 уравнений и неизвестных).

Представленный алгоритм позволяет найти решение для любых значений параметров задачи, при этом характер выполнения граничных условий остается тем же. В табл. 5.19 представлены значения первых собственных частот для различной геометрии при  $\nu = 0.3$ . При увеличении толщины сторон креста спектр собственных частот сдвигается в более высокую область. Наличие концентраторов напряжений в области приводит к тому, что даже при малых значениях  $c/a$  собственные частоты продолжают существенно отличаться от частот бруса квадратного сечения.

Таблица 5.18 Выполнение условий сопряжения для равнобокого креста (метод простой редукции)

$j$	0	1	2	3	4	5
$\sigma_{yy}^I(a, ja/5)/2G$	1.4447	1.4656	1.5379	1.7032	2.1416	$\infty$
$\sigma_{yy}^{II}(a, ja/5)/2G$	1.33014	1.3511	1.4233	1.5887	2.0273	$\infty$

Таблица 5.19. Значения собственных частот изотропного креста для различной геометрии при  $\nu = 0.3$ .

$n$	1	2	3	4	5
$\Omega_n (c/a = 0.1)$	1.808	2.342	3.506	3.950	4.836
$\Omega_n (c/a = 0.5)$	1.147	1.515	1.818	2.716	2.855
$\Omega_n (c/a = 1)$	0.701	1.472	1.585	2.171	2.351
$\Omega_n (c/a = 2)$	0.385	1.100	1.474	1.514	1.797

Распределение нормальных напряжений  $\sigma_{xx}/2G$  представлено на рис. 5.22 для частоты колебаний  $\Omega = 0.5$  и  $\nu = 0.3$  для различной геометрии области. Данная частота вынужденных колебаний расположена далеко от собственных частот



креста в обоих случаях, поэтому значения напряжений сравнительно невелики. Особенности в углу носят локальный характер. Значения напряжений для случая  $c/a = 0.5$  являются положительными, так как частота колебаний находится ниже первой собственной частоты, для случая  $c/a = 2$  частота колебаний находится между первыми двумя собственными частотами, что приводит к противоположному знаку напряжений.

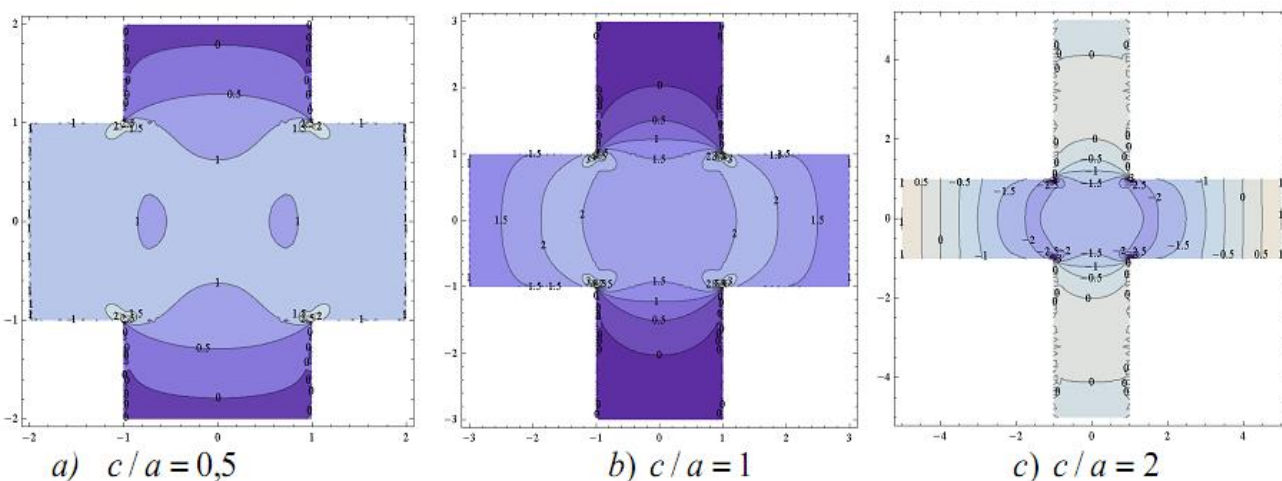


Рис.5.22. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_{xx} / 2G$

## 5. 6. Колебания прямоугольного параллелепипеда в трехмерной постановке

### 5.6.1. Общее решение для прямоугольного параллелепипеда.

Прямоугольный брус и пластина являются одними из наиболее часто встречающихся элементов структурной механики, поэтому интерес к решениям (особенно точным решениям) для данных объектов не угасает с момента становления механики твердого тела до сегодняшних дней. Первую попытку решения задачи о колебаниях прямоугольного параллелепипеда можно найти в мемуарах Lamé G. [183], где было построено общее решение в форме рядов Фурье с неопределенными коэффициентами. Сложность определения данных коэффициентов и оказалась тем камнем преткновения, который не позволил решить поставленную задачу. Подход Lamé, позднее названный методом суперпозиции, был существенно развит в последующие годы в работах E. Mathieu [196], С.П. Тимошенко [125], S. Iguchi [177] и D.J. Gorman [164 -167] для

исследования продольных и поперечных колебаний прямоугольных пластин и используется в третьей и четвертой главах представленной диссертации. При использовании данного подхода, как правило, ряды представляющие решение урезаются, и коэффициенты рядов Фурье определяются из конечной системы линейных уравнений. Использование полных рядов ведет к бесконечной системе линейных уравнений относительно данных коэффициентов.

Решение в рядах для общего трехмерного случая динамической задачи было представлено J. R. Hutchinson and S. D. Zillmer [176]. Отметим также недавнюю работу Y. Qu [224], где на основе модифицированного вариационного подхода, использующего разложение компонент смещений в тройные ряды по ортогональным полиномам, исследуются собственные частоты прямоугольного параллелепипеда при смешанных краевых условиях. Вариационный подход используется также в [201] для исследования трехмерных колебаний прямоугольных пластин и в [174] для исследования параллелепипеда с трещиной.

Анализ литературы показывает, что относительно небольшое число работ посвящено проблеме колебаний прямоугольного параллелепипеда именно в трехмерной постановке, при этом в последнее время большей популярностью пользуется вариационный подход. Данное небольшое число публикаций, по-видимому, связано с тем, что относительная простота постановки задачи не дает каких-либо преимуществ в вычислительном плане, и как следствие, отсутствует эффективное решение задачи, которое можно было бы использовать в более сложных моделях.

Как известно, гармонические колебания однородного и линейно-упругого прямоугольного параллелепипеда под действием приложенных к его граням нагрузок с частотой  $\omega$  описываются в терминах вектора смещений  $\mathbf{U} \cdot e^{-i\omega t}$  при помощи уравнения Lamé

$$(1 - 2\nu)\Delta\mathbf{U} + \text{grad div } \mathbf{U} + \frac{(1 - 2\nu)\rho\omega^2}{G}\mathbf{U} = 0 \quad (5.191)$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $\rho$  - плотность материала,  $G$  - модуль сдвига.

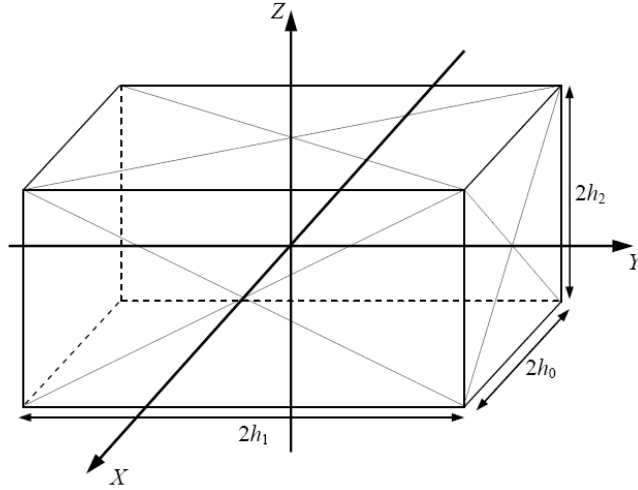


Рис. 5.23. Координатная система для прямоугольного параллелепипеда

Пусть в исходных декартовых координатах параллелепипед описывается как  $(X, Y, Z) \in \{-h_1; h_1\} \times \{-h_2; h_2\} \times \{-h_3; h_3\}$ . Перейдем к безразмерным координатам и смещениям делением на некоторый характерный размер. В частности, выбирая в качестве такой величины  $h_1$ , введем безразмерные координаты и смещения

$$x = X / h_1, \quad y = Y / h_1, \quad z = Z / h_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{u} = \mathbf{U} / h_1 \quad (5.192)$$

Обозначим также безразмерные частоты колебаний как

$$\Omega_j = \frac{\omega h_1}{c_j} \quad (j = 1, 2) \quad (5.193)$$

где  $c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$  и  $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  - скорости распространения продольных и поперечных волн в изотропной неограниченной среде соответственно.

Для краткости изложения положим также, что колебания вызываются только нормальными нагрузками, симметричными относительно координатных плоскостей

$$\text{при } x = \pm 1: \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xx} = F_1(y, z); \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy} = 0; \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xz} = 0 \quad (5.194)$$

$$\text{при } y = \pm b: \quad \frac{1}{2G} \sigma_{yy} = F_2(x, z); \quad \frac{1}{2G} \sigma_{yx} = 0; \quad \frac{1}{2G} \sigma_{yz} = 0 \quad (5.195)$$

$$\text{при } z = \pm c: \quad \frac{1}{2G} \sigma_{zz} = F_3(x, y); \quad \frac{1}{2G} \sigma_{zx} = 0; \quad \frac{1}{2G} \sigma_{zy} = 0 \quad (5.196)$$

где  $b = h_2 / h_1$ ;  $c = h_3 / h_1$ .

Для построения общего решения уравнения (5.191) используем разложение вектора смещений  $\mathbf{u}$  при помощи векторного  $\mathbf{a}$  и скалярного потенциалов  $\varphi$

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{a} \quad (5.197)$$

При этом доказано [69], что для полноты представления (5.197) необходимо добавить условие того, что векторный потенциал представляет собой соленоидальное поле

$$\text{div } \mathbf{a} = 0 \quad (5.198)$$

В этом случае потенциалы удовлетворяют двум уравнениям Гельмгольца

$$\Delta \varphi + \Omega_1^2 \varphi = 0; \quad \Delta \mathbf{a} + \Omega_2^2 \mathbf{a} = 0 \quad (5.199)$$

Используя стандартную технику разделения переменных для уравнений (5.199) и связь компонент векторного потенциала посредством (5.198), получаем следующие выражения для потенциалов:

$$\varphi = A_{nm}^1 \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \text{ch } p_{nm,1} z + A_{nm}^5 \cos \alpha_n x \text{ch } q_{nm,1} y \cos \gamma_m z + A_{nm}^9 \text{ch } g_{nm,1} x \cos \beta_n y \cos \gamma_m z; \quad (5.200)$$

$$\mathbf{a}_x = A_{nm}^2 \cos \alpha_n x \sin \beta_m y \text{sh } p_{nm,2} z + A_{nm}^6 \cos \alpha_n x \text{sh } q_{nm,2} y \sin \gamma_m z + \frac{\beta_n A_{nm}^{11} + \gamma_m A_{nm}^{12}}{g_{nm,2}} \text{ch } g_{nm,2} x \sin \beta_n y \sin \gamma_m z; \quad (5.201)$$

$$\mathbf{a}_y = A_{nm}^3 \sin \alpha_n x \cos \beta_m y \text{sh } p_{nm,2} z + \frac{\alpha_n A_{nm}^6 + \gamma_m A_{nm}^8}{q_{nm,2}} \sin \alpha_n x \text{ch } q_{nm,2} y \sin \gamma_m z + A_{nm}^{11} \text{sh } g_{nm,2} x \cos \beta_n y \sin \gamma_m z; \quad (5.202)$$

$$\mathbf{a}_z = \frac{\alpha_n A_{nm}^2 + \beta_m A_{nm}^3}{p_{nm,2}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \text{ch } p_{nm,2} z + A_{nm}^8 \sin \alpha_n x \text{sh } q_{nm,2} y \cos \gamma_m z + A_{nm}^{12} \text{sh } g_{nm,2} x \sin \beta_n y \cos \gamma_m z \quad (5.203)$$

где

$$\alpha_n = \pi n; \beta_n = \pi n / b; \gamma_n = \pi n / c, \quad (5.204)$$

$$p_{nm,j} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_j^2}; q_{nm,j} = \sqrt{\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_j^2}; g_{nm,j} = \sqrt{\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_j^2} \quad (5.205)$$

Тогда выражения смещений можно записать следующим образом

$$\begin{aligned}
u_x = & \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( -\alpha_n A_{nm}^1 \operatorname{ch} p_{nm,1} z + V_3^2 (\alpha_n, \beta_m) \operatorname{ch} p_{nm,2} z \right) \sin \alpha_n x \cos \beta_m y - \\
& - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \alpha_n A_{nm}^5 \operatorname{ch} q_{nm,1} y - V_8^6 (\alpha_n, \gamma_m) \operatorname{ch} q_{nm,2} y \right) \sin \alpha_n x \cos \gamma_m z + \\
& + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( g_{nm,1} A_{nm}^9 \operatorname{sh} g_{nm,1} x + (\beta_n A_{nm}^{12} - \gamma_m A_{nm}^{11}) \operatorname{sh} g_{nm,2} x \right) \cos \beta_n y \cos \gamma_m z
\end{aligned} \tag{5.206}$$

$$\begin{aligned}
u_y = & - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \beta_m A_{nm}^1 \operatorname{ch} p_{nm,1} z - V_2^3 (\beta_m, \alpha_n) \operatorname{ch} p_{nm,2} z \right) \cos \alpha_n x \sin \beta_m y + \\
& + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( q_{nm,1} A_{nm}^5 \operatorname{sh} q_{nm,1} y + (\gamma_m A_{nm}^6 - \alpha_n A_{nm}^8) \operatorname{sh} q_{nm,2} y \right) \cos \alpha_n x \cos \gamma_m z + \\
& + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( -\beta_n A_{nm}^9 \operatorname{ch} g_{nm,1} x + V_{12}^{11} (\beta_n, \gamma_m) \operatorname{ch} g_{nm,2} x \right) \sin \beta_n y \cos \gamma_m z
\end{aligned} \tag{5.207}$$

$$\begin{aligned}
u_z = & \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( p_{nm,1} A_{nm}^1 \operatorname{sh} p_{nm,1} z + (\alpha_n A_{nm}^3 - \beta_m A_{nm}^2) \operatorname{sh} p_{nm,2} z \right) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y + \\
& + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( -\gamma_m A_{nm}^5 \operatorname{ch} q_{nm,1} y + V_6^8 (\gamma_m, \alpha_n) \operatorname{ch} q_{nm,2} y \right) \cos \alpha_n x \sin \gamma_m z - \\
& - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \gamma_m A_{nm}^9 \operatorname{ch} g_{nm,1} x - V_{11}^{12} (\gamma_m, \beta_n) \operatorname{ch} g_{nm,2} x \right) \cos \beta_n y \sin \gamma_m z
\end{aligned} \tag{5.208}$$

$$\text{где } V_j^k(\alpha, \beta) = \frac{\alpha \beta A_{nm}^k - (\alpha^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^j}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \Omega_2^2}}.$$

Компоненты вектора смещений, в свою очередь, позволяют найти компоненты тензора напряжений согласно известным формулам

$$\frac{\sigma_{\tau s}}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{\tau s} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_{\tau}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial \tau} \right), \tag{5.209}$$

где  $\delta_{\tau s}$  - символ Кронекера.

В частности, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{xx}}{2G} = & - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \left( \alpha_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right) A_{nm}^1 \operatorname{ch} p_{nm,1} z + \frac{\alpha_n ((\alpha_n^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^3 - \alpha_n \beta_m A_{nm}^2)}{p_{nm,2}} \operatorname{ch} p_{nm,2} z \right) \times \\
& \times \cos \alpha_n x \cos \beta_m y - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \left( \alpha_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right) A_{nm}^5 \operatorname{ch} q_{nm,1} y + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_n (\alpha_n \gamma_m A_{nm}^6 - (\alpha_n^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^8)}{q_{nm,2}} \operatorname{ch} q_{nm,2} y \right) \cos \alpha_n x \cos \gamma_m z + \\
& + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( (\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2 / 2) A_{nm}^9 \operatorname{ch} g_{nm,1} x + (\beta_n A_{nm}^{12} - \gamma_m A_{nm}^{11}) g_{nm,2} \operatorname{ch} g_{nm,2} x \right) \cos \beta_n y \cos \gamma_m z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{yy}}{2G} = & - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \left( \beta_m^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right) A_{nm}^1 \operatorname{ch} p_{nm,1} z + \frac{\beta_m (\alpha_n \beta_m A_{nm}^3 - (\beta_m^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^2)}{p_{nm,2}} \operatorname{ch} p_{nm,2} z \right) \times \\
& \times \cos \alpha_n x \cos \beta_m y + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( (\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2 / 2) A_{nm}^5 \operatorname{ch} q_{nm,1} y + q_{nm,2} (\gamma_m A_{nm}^6 - \alpha_n A_{nm}^8) \times \right. \\
& \times \operatorname{ch} q_{nm,2} y \left. \right) \cos \alpha_n x \cos \gamma_m z - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \left( \beta_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right) A_{nm}^9 \operatorname{ch} g_{nm,1} x + \right. \\
& \left. + \frac{\beta_n ((\beta_n^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^{12} - \beta_n \gamma_m A_{nm}^{11})}{g_{nm,2}} \operatorname{ch} g_{nm,2} x \right) \cos \beta_n y \cos \gamma_m z; \\
\frac{\sigma_{zz}}{2G} = & \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( (\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_2^2 / 2) A_{nm}^1 \operatorname{ch} p_{nm,1} z + p_{nm,2} (\alpha_n A_{nm}^3 - \beta_m A_{nm}^2) \operatorname{ch} p_{nm,2} z \right) \times \\
& \times \cos \alpha_n x \cos \beta_m y - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \left( \gamma_m^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right) A_{nm}^5 \operatorname{ch} q_{nm,1} y + \frac{\gamma_m ((\gamma_m^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^6 - \alpha_n \gamma_m A_{nm}^8)}{q_{nm,2}} \times \right. \\
& \times \operatorname{ch} q_{nm,2} y \left. \right) \cos \alpha_n x \cos \gamma_m z - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \left( \gamma_m^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right) A_{nm}^9 \operatorname{ch} g_{nm,1} x + \right. \\
& \left. + \frac{\gamma_m (\beta_n \gamma_m A_{nm}^{12} - (\gamma_m^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^{11})}{g_{nm,2}} \operatorname{ch} g_{nm,2} x \right) \cos \beta_n y \cos \gamma_m z; \\
\frac{\sigma_{xy}}{2G} = & \sum_{n,m=1}^{\infty} \left( \alpha_n \beta_m A_{nm}^1 \operatorname{ch} p_{nm,1} z + \frac{\beta_m (\alpha_n^2 - \Omega_2^2 / 2) A_{nm}^3 - \alpha_n (\beta_m^2 - \Omega_2^2 / 2) A_{nm}^2}{p_{nm,2}} \operatorname{ch} p_{nm,2} z \right) \times \\
& \times \sin \alpha_n x \sin \beta_m y - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \alpha_n q_{nm,1} A_{nm}^5 \operatorname{sh} q_{nm,1} y + (\alpha_n \gamma_m A_{nm}^6 - (\alpha_n^2 - \Omega_2^2 / 2) A_{nm}^8) \operatorname{sh} q_{nm,2} y \right) \times \\
& \times \sin \alpha_n x \cos \gamma_m z - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \beta_n g_{nm,1} A_{nm}^9 \operatorname{sh} g_{nm,1} x + ((\beta_n^2 - \Omega_2^2 / 2) A_{nm}^{12} - \beta_n \gamma_m A_{nm}^{11}) \operatorname{sh} g_{nm,2} x \right) \times \\
& \times \sin \beta_n y \cos \gamma_m z; \\
\frac{\sigma_{xz}}{2G} = & - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \alpha_n p_{nm,1} A_{nm}^1 \operatorname{sh} p_{nm,1} z + ((\alpha_n^2 - \Omega_2^2 / 2) A_{nm}^3 - \alpha_n \beta_m A_{nm}^2) \operatorname{sh} p_{nm,2} z \right) \sin \alpha_n x \times \\
& \times \cos \beta_m y + \sum_{n,m=1}^{\infty} \left( \alpha_n \gamma_m A_{nm}^5 \operatorname{ch} q_{nm,1} y + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_n (\gamma_m^2 - \Omega_2^2 / 2) A_{nm}^6 - \gamma_m (\alpha_n^2 - \Omega_2^2 / 2) A_{nm}^8}{q_{nm,2}} \operatorname{ch} q_{nm,2} y \right) \sin \alpha_n x \sin \gamma_m z - \\
& - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \gamma_m g_{nm,1} A_{nm}^9 \operatorname{sh} g_{nm,1} x + (\beta_n \gamma_m A_{nm}^{12} - (\gamma_m^2 - \Omega_2^2 / 2) A_{nm}^{11}) \operatorname{sh} g_{nm,2} x \right) \cos \beta_n y \sin \gamma_m z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{yz}}{2G} = & - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \beta_m p_{nm,1} A_{nm}^1 \operatorname{sh} p_{nm,1} z + (\alpha_n \beta_m A_{nm}^3 - (\beta_m^2 - \Omega_2^2/2) A_{nm}^2) \operatorname{sh} p_{nm,2} z \right) \cos \alpha_n x \times \\ & \times \sin \beta_m y - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \gamma_m q_{nm,1} A_{nm}^5 \operatorname{sh} q_{nm,1} y + ((\gamma_m^2 - \Omega_2^2/2) A_{nm}^6 - \alpha_n \gamma_m A_{nm}^8) \operatorname{sh} q_{nm,2} y \right) \times \\ & \times \cos \alpha_n x \sin \gamma_m z + \sum_{n,m=1}^{\infty} \left( \beta_n \gamma_m A_{nm}^9 \operatorname{ch} g_{nm,1} x + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_m (\beta_n^2 - \Omega_2^2/2) A_{nm}^{12} - \beta_n (\gamma_m^2 - \Omega_2^2/2) A_{nm}^{11}}{g_{nm,2}} \operatorname{ch} g_{nm,2} x \right) \sin \beta_n y \sin \gamma_m z; \end{aligned}$$

Выражения для компонентов смещений (5.206) – (5.208) удовлетворяют уравнению (5.191) при любых значениях неопределенных коэффициентов  $A_{nm}^j$ , и обладают достаточным произволом для удовлетворения граничных условий (5.192).

Используя формулы для касательных напряжений, получаем на гранях  $x = \pm 1$  из граничных условий (5.194) равенства

$$\begin{aligned} \left. \frac{\sigma_{xy}}{2G} \right|_{x=\pm 1} &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \beta_n g_{nm,1} A_{nm}^9 \operatorname{sh} g_{nm,1} + \left( \left( \beta_n^2 - \frac{\Omega_2^2}{2} \right) A_{nm}^{12} - \beta_n \gamma_m A_{nm}^{11} \right) \operatorname{sh} g_{nm,2} \right) \sin \beta_n y \cos \gamma_m z = 0 \\ \left. \frac{\sigma_{xz}}{2G} \right|_{x=\pm 1} &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \left( \gamma_m g_{nm,1} A_{nm}^9 \operatorname{sh} g_{nm,1} + \left( \beta_n \gamma_m A_{nm}^{12} - \left( \gamma_m^2 - \frac{\Omega_2^2}{2} \right) A_{nm}^{11} \right) \operatorname{sh} g_{nm,2} \right) \cos \beta_n y \sin \gamma_m z = 0 \end{aligned}$$

В силу полноты представления по тригонометрической системе функций следует, что коэффициенты данных рядов должны быть нулями

$$\beta_n g_{nm,1} A_{nm}^9 \operatorname{sh} g_{nm,1} + ((\beta_n^2 - \Omega_2^2/2) A_{nm}^{12} - \beta_n \gamma_m A_{nm}^{11}) \operatorname{sh} g_{nm,2} = 0; \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

$$\beta_n g_{n0,1} A_{n0}^9 \operatorname{sh} g_{n0,1} + (\beta_n^2 - \Omega_2^2/2) A_{n0}^{12} \operatorname{sh} g_{n0,2} = 0; \quad (m = 0, n = 1, 2, \dots)$$

$$\gamma_m g_{nm,1} A_{nm}^9 \operatorname{sh} g_{nm,1} + (\beta_n \gamma_m A_{nm}^{12} - (\gamma_m^2 - \Omega_2^2/2) A_{nm}^{11}) \operatorname{sh} g_{nm,2} = 0; \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

$$\gamma_m g_{0m,1} A_{0m}^9 \operatorname{sh} g_{0m,1} - (\gamma_m^2 - \Omega_2^2/2) A_{0m}^{11} \operatorname{sh} g_{0m,2} = 0; \quad (n = 0, m = 1, 2, \dots),$$

что позволяет найти связь между неопределенными коэффициентами

$$A_{nm}^{11} = \frac{\gamma_m g_{nm,1}}{g_{nm,2}^2 + \Omega_2^2/2} \cdot \frac{\operatorname{sh} g_{nm,1}}{\operatorname{sh} g_{nm,2}} A_{nm}^9 \quad (n = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots) \quad (5.210)$$

$$A_{nm}^{12} = -\frac{\beta_n g_{nm,1}}{g_{nm,2}^2 + \Omega_2^2/2} \cdot \frac{\operatorname{sh} g_{nm,1}}{\operatorname{sh} g_{nm,2}} A_{nm}^9 \quad (n = 1, 2, \dots; m = 0, 1, \dots) \quad (5.211)$$

Можно заметить, что если бы касательные напряжения в (5.194) были бы отличны от нуля, то это привело бы к появлению в правых частях равенств (5.210), (5.211) их коэффициентов Фурье. То есть сделанное допущение о равенстве нулю касательных напряжений на гранях не ограничивает общности предлагаемого подхода.

Аналогично, рассматривая касательные напряжения на других гранях параллелепипеда, можно получить следующие равенства

$$A_{nm}^6 = -\frac{\gamma_m q_{nm,1}}{q_{nm,2}^2 + \Omega_2^2 / 2} \cdot \frac{\text{sh } q_{nm,1} b}{\text{sh } q_{nm,2} b} A_{nm}^5 \quad (n = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots) \quad (5.212)$$

$$A_{nm}^8 = \frac{\alpha_n q_{nm,1}}{q_{nm,2}^2 + \Omega_2^2 / 2} \cdot \frac{\text{sh } q_{nm,1} b}{\text{sh } q_{nm,2} b} A_{nm}^5 \quad (n = 1, 2, \dots; m = 0, 1, \dots) \quad (5.213)$$

$$A_{nm}^2 = \frac{\beta_m p_{nm,1}}{p_{nm,2}^2 + \Omega_2^2 / 2} \cdot \frac{\text{sh } p_{nm,1} c}{\text{sh } p_{nm,2} c} A_{nm}^1 \quad (n = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots) \quad (5.214)$$

$$A_{nm}^3 = -\frac{\alpha_n p_{nm,1}}{p_{nm,2}^2 + \Omega_2^2 / 2} \cdot \frac{\text{sh } p_{nm,1} c}{\text{sh } p_{nm,2} c} A_{nm}^1 \quad (n = 1, 2, \dots; m = 0, 1, \dots) \quad (5.215)$$

Таким образом, все компоненты вектора смещений и тензора напряжений могут быть записаны при помощи трех бесконечных матриц  $A_{nm}^1, A_{nm}^5, A_{nm}^9$ , которые обеспечивают достаточный произвол для выполнения оставшихся граничных условий на нормальные напряжения. Полагая, что граничные напряжения допускают разложения в ряды Фурье

$$F_1(y, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm,1} \cos \beta_n y \cos \gamma_m z \quad (5.216)$$

$$F_2(x, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm,2} \cos \alpha_n x \cos \gamma_m z \quad (5.217)$$

$$F_3(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm,3} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \quad (5.218)$$

и раскладывая выражения нормальных напряжений на соответствующих гранях параллелепипеда по той же системе функций, получаем из равенства коэффициентов разложения бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов:



$$(1-\nu)\Omega_1 \operatorname{ctg} \Omega_1 x_{00} + \nu y_{00} + \nu z_{00} + \nu \Omega_1^2 \Omega_2^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_{j0} + y_{j0}}{\alpha_j (\alpha_j^2 - \Omega_1^2)} = (1-2\nu) f_{00,1} \quad (5.219)$$

$$\nu x_{00} + (1-\nu)\Omega_1 b \operatorname{ctg} \Omega_1 b y_{00} + \nu z_{00} + \nu \Omega_1^2 \Omega_2^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{j0} + z_{j0}}{\beta_j (\beta_j^2 - \Omega_1^2)} = (1-2\nu) f_{00,2} \quad (5.220)$$

$$\nu x_{00} + \nu y_{00} + (1-\nu)\Omega_1 c \operatorname{ctg} \Omega_1 c z_{00} + \nu \Omega_1^2 \Omega_2^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{0j} + y_{0j}}{\gamma_j (\gamma_j^2 - \Omega_1^2)} = (1-2\nu) f_{00,3} \quad (5.221)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{nm,1} x_{nm} &= \delta_{m0} M_0(\beta_n, \gamma_m) y_{00} + \delta_{n0} M_0(\gamma_m, \beta_n) z_{00} + e_{nm} M(0, \gamma_m, \beta_n) y_{0m} + e_{nm} M(0, \beta_n, \gamma_m) z_{0n} + \\ &+ (2-\delta_{n0}) \sum_{j=1}^{\infty} M(\alpha_j, \gamma_m, \beta_n) y_{jm} + (2-\delta_{m0}) \sum_{j=1}^{\infty} M(\alpha_j, \beta_n, \gamma_m) z_{jn} + (-1)^{n+m} M_1(\beta_n, \gamma_m) f_{nm,1}; \end{aligned} \quad (5.222)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{nm,2} y_{nm} &= \delta_{m0} M_0(\alpha_n, \gamma_m) x_{00} + \delta_{n0} M_0(\gamma_m, \alpha_n) z_{00} + e_{nm} M(0, \gamma_m, \alpha_n) x_{0m} + e_{nm} M(0, \alpha_n, \gamma_m) z_{n0} + \\ &+ (2-\delta_{n0}) \sum_{j=1}^{\infty} M(\beta_j, \gamma_m, \alpha_n) x_{jm} + (2-\delta_{m0}) \sum_{j=1}^{\infty} M(\beta_j, \alpha_n, \gamma_m) z_{nj} + (-1)^{n+m} M_1(\alpha_n, \gamma_m) f_{nm,2}; \end{aligned} \quad (5.223)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{nm,3} z_{nm} &= \delta_{m0} M_0(\alpha_n, \beta_m) x_{00} + \delta_{n0} M_0(\beta_m, \alpha_n) y_{00} + e_{nm} M(0, \beta_m, \alpha_n) x_{m0} + e_{nm} M(0, \alpha_n, \beta_m) y_{n0} + \\ &+ (2-\delta_{n0}) \sum_{j=1}^{\infty} M(\gamma_j, \beta_m, \alpha_n) x_{mj} + (2-\delta_{m0}) \sum_{j=1}^{\infty} M(\gamma_j, \alpha_n, \beta_m) y_{nj} + (-1)^{n+m} M_1(\alpha_n, \beta_m) f_{nm,3}; \end{aligned} \quad (5.224)$$

где  $\delta_{mn}$  - символы Кронекера,  $e_{nm} = (1-\delta_{n0})(2-\delta_{m0})$ ,

$$\Delta_{nm,1} = \frac{g_{nm,2}^2 + \Omega_2^2 / 2}{g_{nm,1}} \operatorname{cth} g_{nm,1} - \frac{(\beta_n^2 + \gamma_m^2) g_{nm,2}}{g_{nm,2}^2 + \Omega_2^2 / 2} \operatorname{cth} g_{nm,2} \quad (5.225)$$

$$\Delta_{nm,2} = b \left( \frac{q_{nm,2}^2 + \Omega_2^2 / 2}{q_{nm,1}} \operatorname{cth} q_{nm,1} b - \frac{(\alpha_n^2 + \gamma_m^2) q_{nm,2}}{q_{nm,2}^2 + \Omega_2^2 / 2} \operatorname{cth} q_{nm,2} b \right) \quad (5.226)$$

$$\Delta_{nm,3} = c \left( \frac{p_{nm,2}^2 + \Omega_2^2 / 2}{p_{nm,1}} \operatorname{cth} p_{nm,1} c - \frac{(\alpha_n^2 + \beta_m^2) p_{nm,2}}{p_{nm,2}^2 + \Omega_2^2 / 2} \operatorname{cth} p_{nm,2} c \right); \quad (5.227)$$

а также

$$M_1(\beta, \gamma) = \frac{\beta + \gamma}{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \Omega_2^2}; \quad M_0(\beta, \gamma) = \frac{2\nu\Omega_1^2}{1-2\nu} \cdot \frac{M_1(\beta, \gamma)}{\beta^2 - \Omega_1^2};$$

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} \cdot \frac{M_1(\beta, \gamma)}{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \Omega_1^2)} \left( \frac{2\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \Omega_2^2} + \nu(2\beta^2 - \Omega_2^2) \right).$$

При этом неизвестные  $x_{nm}$ ,  $y_{nm}$  и  $z_{nm}$  в бесконечной системе (5.219) - (5.224)

связаны с коэффициентами  $A_{nm}^1, A_{nm}^5, A_{nm}^9$  следующим образом

$$A_{nm}^1 = \frac{(-1)^{n+m} (2p_{nm,2}^2 + \Omega_2^2)c}{(\alpha_n + \beta_m) p_{nm,1} \operatorname{sh} p_{nm,1} c} z_{nm} \quad (n+m \neq 0); \quad A_{00}^1 = -\frac{cz_{00}}{\Omega_1 \sin \Omega_1 c} \quad (5.228)$$

$$A_{nm}^5 = \frac{(-1)^{n+m} (2q_{nm,2}^2 + \Omega_2^2) b}{(\alpha_n + \gamma_m) q_{nm,1} \operatorname{sh} q_{nm,1} b} y_{nm} \quad (n+m \neq 0); \quad A_{00}^5 = -\frac{by_{00}}{\Omega_1 \sin \Omega_1 b} \quad (5.229)$$

$$A_{nm}^9 = \frac{(-1)^{n+m} (2g_{nm,2}^2 + \Omega_2^2)}{(\beta_n + \gamma_m) g_{nm,1} \operatorname{sh} g_{nm,1}} x_{nm} \quad (n+m \neq 0); \quad A_{00}^9 = -\frac{x_{00}}{\Omega_1 \sin \Omega_1} \quad (5.230)$$

Заметим, что первые три уравнения системы (5.219) - (5.221) выводятся из равенства постоянных составляющих нормальной нагрузки, остальные уравнения (5.222) - (5.224) соответствуют индексам  $n+m \neq 0$ .

### 5.6.2. Анализ и решение бесконечной системы.

При исследовании бесконечных систем линейных алгебраических уравнений зачастую удается доказать существование ограниченного решения показав, что в некотором функциональном пространстве оператор, соответствующий бесконечной матрице в правой части системы, является сжимающим. В частности, это выполняется, если бесконечная система, записанная в канонической форме

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} Z_n + F_m \quad (m=1,2,\dots), \quad (5.231)$$

является регулярной или квазирегулярной. Для таких систем во второй главе диссертации был разработаны условия, позволяющие как анализ разрешимости системы (теорема 2.8) и затем локализацию собственных значений задачи (условие (2.46)), так и анализ асимптотических свойств решения системы (теорема 2.7), дающий возможность для построения эффективного численного алгоритма. Применение данной теории было представлено в третьей и четвертой главах для анализа плоских задач.

Чтобы применить данный подход к рассматриваемой трехмерной задаче об установившихся колебаниях упругого параллелепипеда, запишем бесконечную систему (5.219) – (5.224) в каноническом виде (5.231). Для этого, прежде всего, введем компактные обозначения для коэффициентов и свободных членов системы

$$\begin{cases} x_{nm} = \sum_{j=0}^{\infty} (a_{nmj}^x z_{jn} + b_{nmj}^x y_{jm}) + F_{nm}^x; \\ y_{nm} = \sum_{j=0}^{\infty} (a_{nmj}^y z_{nj} + b_{nmj}^y x_{jm}) + F_{nm}^y; \\ z_{nm} = \sum_{j=0}^{\infty} (a_{nmj}^z y_{nj} + b_{nmj}^z x_{mj}) + F_{nm}^z; \end{cases} \quad (n, m = 0, 1, \dots) \quad (5.232)$$

В отличие от рассматриваемых ранее задач, неизвестные в системе (5.232) зависят от двух индексов, а коэффициенты (5.232) от трех индексов, и простая редукция системы связана с удержанием уже  $N^2$  уравнений и неизвестных. Схожая проблема – проблема размерности, часто возникает при использовании численных методов, где она решается путем использования аппарата теории матриц.

Чтобы использовать матричный анализ в данном случае, предлагается провести взаимнооднозначное отображение множества индексов системы (5.232) на натуральный ряд по закону:

$$k = k(n, m) = \begin{cases} (m+1)^2 - 2(m-n), & n \leq m \\ (n+1)^2 - 2(n-m) + 1, & n > m \end{cases} \quad (5.233)$$

и обратно

$$n = n(k) = \begin{cases} \sqrt{k} - 1, & \sqrt{k} \in \mathbf{N} \\ [\sqrt{k}], & \sqrt{k} \notin \mathbf{N} \text{ and } (k + [\sqrt{k}]) - \text{чет} \\ (k - [\sqrt{k}]^2 - 1) / 2, & \sqrt{k} \notin \mathbf{N} \text{ and } (k + [\sqrt{k}]) - \text{нечет} \end{cases} \quad (5.234)$$

$$m = m(k) = \begin{cases} \sqrt{k} - 1, & \sqrt{k} \in \mathbf{N} \\ (k - [\sqrt{k}]^2 - 2) / 2, & \sqrt{k} \notin \mathbf{N} \text{ and } (k + [\sqrt{k}]) - \text{чет} \\ [\sqrt{k}], & \sqrt{k} \notin \mathbf{N} \text{ and } (k + [\sqrt{k}]) - \text{нечет} \end{cases} \quad (5.235)$$

где  $[x]$  – целая часть действительного  $x$ .

Логические условия в формулах (5.233) – (5.235) легко реализуются на любом из языков программирования и позволяют получить аналитическое представление следующего отображения

$n \setminus m$	0	1	2	3	4	5	...
0	1	2	5	10	17	26	...
1	3	4	7	12	19	28	...
2	6	8	9	14	21	30	...
3	11	13	15	16	23	32	...
4	18	20	22	24	25	34	...
5	27	29	31	33	35	36	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Бесконечная система (5.232) после переиндексации переменных примет вид

$$\begin{cases} x_k = \sum_{l=1}^{\infty} (A_{kl}^x z_l + B_{kl}^x y_l) + F_k^x; \\ y_k = \sum_{l=1}^{\infty} (A_{kl}^y z_l + B_{kl}^y x_l) + F_k^y; \quad (k=1,2,\dots) \\ z_k = \sum_{l=1}^{\infty} (A_{kl}^z y_l + B_{kl}^z x_l) + F_k^z; \end{cases} \quad (5.236)$$

Коэффициенты бесконечной системы (5.236) выражаются аналитически через коэффициенты исходной бесконечной системы через логические условия. В частности для заданной пары индексов  $(k, l)$  можно найти по (5.234), (5.235) значения  $n = n(k)$  и  $m = m(k)$ . Тогда

$$A_{kl}^x = \begin{cases} a_{nmj}^x, & \text{if } \left( j = \frac{2n - n^2 + l}{2} \in \mathbf{N} \wedge j \leq n \right) \vee (j = \sqrt{l - 2n} + 1 \in \mathbf{N} \wedge j > n), \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5.237)$$

$$B_{kl}^x = \begin{cases} b_{nmj}^x, & \text{if } \left( j = \frac{2m - m^2 + l}{2} \in \mathbf{N} \wedge j \leq m \right) \vee (j = \sqrt{l - 2m} + 1 \in \mathbf{N} \wedge j > m), \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5.238)$$

$$A_{kl}^y = \begin{cases} a_{nmj}^y, & \text{if } (j = \sqrt{l - 2n + 1} + 1 \in \mathbf{N} \wedge j \geq n) \vee (j = (l - (n - 1)^2) / 2 \in \mathbf{N} \wedge j < n), \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5.239)$$

$$B_{kl}^y = \begin{cases} b_{nmj}^y, & \text{if } \left( j = \frac{2m - m^2 + l}{2} \in \mathbf{N} \wedge j \leq m \right) \vee (j = \sqrt{l - 2m} + 1 \in \mathbf{N} \wedge j > m), \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5.240)$$

$$A_{kl}^z = \begin{cases} a_{nmj}^z, & \text{if } (j = \sqrt{l - 2n + 1} + 1 \in \mathbf{N} \wedge j \geq n) \vee (j = (l - (n - 1)^2) / 2 \in \mathbf{N} \wedge j < n), \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5.241)$$

$$B_{kl}^z = \begin{cases} b_{nmj}^z, & \text{if } (j = \sqrt{l - 2m + 1} + 1 \in \mathbf{N} \wedge j \geq m) \vee (j = (l - (m - 1)^2) / 2 \in \mathbf{N} \wedge j < m), \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5.242)$$

где  $\wedge$  - булевская конъюнкция,  $\vee$  - дизъюнкция.

Тогда после замены

$$Z_{3k-2} = x_k; Z_{3k-1} = y_k; Z_{3k} = z_k, k = 1, 2, \dots \quad (5.243)$$

бесконечная система окажется записанной в форме (5.41), с учетом следующих обозначений

$$\begin{aligned} M_{3k-2,3l-2} &= 0; M_{3k-2,3l-1} = B_{kl}^x; M_{3k-2,3l} = A_{kl}^x; F_{3k-2} = F_k^x; \\ M_{3k-1,3l-2} &= B_{kl}^y; M_{3k-1,3l-1} = 0; M_{3k-1,3l} = A_{kl}^y; F_{3k-1} = F_k^y; \\ M_{3k,3l-2} &= B_{kl}^z; M_{3k,3l-1} = A_{kl}^z; M_{3k,3l} = 0; F_{3k} = F_k^z. \end{aligned} \quad (5.244)$$

Оценим регулярность исследуемой бесконечной системы на основе значения известного ряда [115]:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+\alpha)(j^2+p^2)} = \frac{\psi(1+ip)(1-i\alpha/p) + \psi(1-ip)(1+i\alpha/p) - 2\psi(1+\alpha)}{2(\alpha^2+p^2)}, \quad (5.245)$$

где  $\psi(z)$  – дигамма функция.

Значения рядов из условий регулярности можно вычислить точно для любых  $n, m$ . Приведем данные формулы только для больших значений этих индексов, обеспечивающих положительность коэффициентов системы:

$$\begin{aligned} 1 - \rho_{3k-2} &= \sum_{j=0}^{\infty} (|a_{nmj}^x| + |b_{nmj}^x|) = |a_{nm0}^x| + |b_{nm0}^x| + \frac{\Omega_1^2(\beta_n + \gamma_m)}{(1-2\nu)|\Delta_{nm,1}|(\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2/2)} \times \\ &\times \left( \frac{(\gamma_m^2 + \nu\beta_n^2 - \nu\Omega_2^2/2 + (1-2\nu)\gamma_m^2 g_{nm,2}^2 / \Omega_1^2)}{\pi(2\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_1^2)} \left( \psi\left(1 + i \frac{g_{nm,1}}{\pi}\right) \left(1 - i \frac{\beta_n}{g_{nm,1}}\right) + \right. \right. \\ &\psi\left(1 - i \frac{g_{nm,1}}{\pi}\right) \left(1 + i \frac{\beta_n}{g_{nm,1}}\right) - 2\psi\left(1 + \frac{\beta_n}{\pi}\right) - \frac{(1-2\nu)\gamma_m^2 g_{nm,2}^2 / \Omega_1^2}{\pi(2\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2)} \left( \psi\left(1 + i \frac{g_{nm,2}}{\pi}\right) \left(1 - i \frac{\beta_n}{g_{nm,2}}\right) + \right. \\ &\left. \left. + \psi\left(1 - i \frac{g_{nm,2}}{\pi}\right) \left(1 + i \frac{\beta_n}{g_{nm,2}}\right) - 2\psi\left(1 + \frac{\beta_n}{\pi}\right) \right) + \frac{(\beta_n^2 + \nu\gamma_m^2 - \nu\Omega_2^2/2 + (1-2\nu)\beta_n^2 g_{nm,2}^2 / \Omega_1^2)}{\pi(\beta_n^2 + 2\gamma_m^2 - \Omega_1^2)} \times \right. \\ &\left. \times \left( \psi\left(1 + i \frac{g_{nm,1}}{\pi}\right) \left(1 - i \frac{\gamma_m}{g_{nm,1}}\right) + \psi\left(1 - i \frac{g_{nm,1}}{\pi}\right) \left(1 + i \frac{\gamma_m}{g_{nm,1}}\right) - 2\psi\left(1 + \frac{\gamma_m}{\pi}\right) \right) - \right. \\ &\left. - \frac{(1-2\nu)\beta_n^2 g_{nm,2}^2 / \Omega_1^2}{\pi(\beta_n^2 + 2\gamma_m^2 - \Omega_2^2)} \left( \psi\left(1 + i \frac{g_{nm,2}}{\pi}\right) \left(1 - i \frac{\gamma_m}{g_{nm,2}}\right) + \psi\left(1 - i \frac{g_{nm,2}}{\pi}\right) \left(1 + i \frac{\gamma_m}{g_{nm,2}}\right) - 2\psi\left(1 + \frac{\gamma_m}{\pi}\right) \right) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 - \rho_{3k-1} &= \sum_{j=0}^{\infty} (|a_{nmj}^y| + |b_{nmj}^y|) = |a_{nm0}^y| + |b_{nm0}^y| + \frac{b\Omega_1^2(\alpha_n + \gamma_m)}{(1-2\nu)|\Delta_{nm,2}|(\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2/2)} \times \\
&\times \left( \frac{(\gamma_m^2 + \nu\alpha_n^2 - \nu\Omega_2^2/2 + (1-2\nu)\gamma_m^2 q_{nm,2}^2 / \Omega_1^2)}{\pi(2\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_1^2)} \left( \psi \left( 1 + i \frac{q_{nm,1}b}{\pi} \right) \left( 1 - i \frac{\alpha_n}{q_{nm,1}} \right) + \right. \right. \\
&+ \psi \left( 1 - i \frac{q_{nm,1}b}{\pi} \right) \left( 1 + i \frac{\alpha_n}{q_{nm,1}} \right) - 2\psi \left( 1 + \frac{\alpha_n b}{\pi} \right) \left. \right) - \frac{(1-2\nu)\gamma_m^2 q_{nm,2}^2 / \Omega_1^2}{\pi(2\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2)} \left( \psi \left( 1 + i \frac{q_{nm,2}b}{\pi} \right) \left( 1 - i \frac{\alpha_n}{q_{nm,2}} \right) + \right. \\
&+ \psi \left( 1 - i \frac{q_{nm,2}b}{\pi} \right) \left( 1 + i \frac{\alpha_n}{q_{nm,2}} \right) - 2\psi \left( 1 + \frac{\alpha_n b}{\pi} \right) \left. \right) + \frac{(\alpha_n^2 + \nu\gamma_m^2 - \nu\Omega_2^2/2 + (1-2\nu)\alpha_n^2 q_{nm,2}^2 / \Omega_1^2)}{\pi(\alpha_n^2 + 2\gamma_m^2 - \Omega_1^2)} \times \\
&\times \left( \psi \left( 1 + i \frac{q_{nm,1}b}{\pi} \right) \left( 1 - i \frac{\gamma_m}{q_{nm,1}} \right) + \psi \left( 1 - i \frac{q_{nm,1}b}{\pi} \right) \left( 1 + i \frac{\gamma_m}{q_{nm,1}} \right) - 2\psi \left( 1 + \frac{\gamma_m b}{\pi} \right) \right) - \\
&- \frac{(1-2\nu)\alpha_n^2 q_{nm,2}^2 / \Omega_1^2}{\pi(\alpha_n^2 + 2\gamma_m^2 - \Omega_2^2)} \left( \psi \left( 1 + i \frac{q_{nm,2}b}{\pi} \right) \left( 1 - i \frac{\gamma_m}{q_{nm,2}} \right) + \psi \left( 1 - i \frac{q_{nm,2}b}{\pi} \right) \left( 1 + i \frac{\gamma_m}{q_{nm,2}} \right) - 2\psi \left( 1 + \frac{\gamma_m b}{\pi} \right) \right) \Bigg); \\
1 - \rho_{3k} &= \sum_{j=0}^{\infty} (|a_{nmj}^z| + |b_{nmj}^z|) = |a_{nm0}^z| + |b_{nm0}^z| + \frac{c\Omega_1^2(\alpha_n + \beta_m)}{(1-2\nu)|\Delta_{nm,3}|(\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_2^2/2)} \times \\
&\times \left( \frac{(\beta_m^2 + \nu\alpha_n^2 - \nu\Omega_2^2/2 + (1-2\nu)\beta_m^2 p_{nm,2}^2 / \Omega_1^2)}{\pi(2\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_1^2)} \left( \psi \left( 1 + i \frac{p_{nm,1}c}{\pi} \right) \left( 1 - i \frac{\alpha_n}{p_{nm,1}} \right) + \right. \right. \\
&+ \psi \left( 1 - i \frac{p_{nm,1}c}{\pi} \right) \left( 1 + i \frac{\alpha_n}{p_{nm,1}} \right) - 2\psi \left( 1 + \frac{\alpha_n c}{\pi} \right) \left. \right) - \frac{(1-2\nu)\beta_m^2 p_{nm,2}^2 / \Omega_1^2}{\pi(2\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_2^2)} \left( \psi \left( 1 + i \frac{p_{nm,2}c}{\pi} \right) \left( 1 - i \frac{\alpha_n}{p_{nm,2}} \right) + \right. \\
&+ \psi \left( 1 - i \frac{p_{nm,2}c}{\pi} \right) \left( 1 + i \frac{\alpha_n}{p_{nm,2}} \right) - 2\psi \left( 1 + \frac{\alpha_n c}{\pi} \right) \left. \right) + \frac{(\alpha_n^2 + \nu\beta_m^2 - \nu\Omega_2^2/2 + (1-2\nu)\alpha_n^2 p_{nm,2}^2 / \Omega_1^2)}{\pi(\alpha_n^2 + 2\beta_m^2 - \Omega_1^2)} \times \\
&\times \left( \psi \left( 1 + i \frac{p_{nm,1}c}{\pi} \right) \left( 1 - i \frac{\beta_m}{p_{nm,1}} \right) + \psi \left( 1 - i \frac{p_{nm,1}c}{\pi} \right) \left( 1 + i \frac{\beta_m}{p_{nm,1}} \right) - 2\psi \left( 1 + \frac{\beta_m c}{\pi} \right) \right) - \\
&- \frac{(1-2\nu)\alpha_n^2 p_{nm,2}^2 / \Omega_1^2}{\pi(\alpha_n^2 + 2\beta_m^2 - \Omega_2^2)} \left( \psi \left( 1 + i \frac{p_{nm,2}c}{\pi} \right) \left( 1 - i \frac{\beta_m}{p_{nm,2}} \right) + \psi \left( 1 - i \frac{p_{nm,2}c}{\pi} \right) \left( 1 + i \frac{\beta_m}{p_{nm,2}} \right) - 2\psi \left( 1 + \frac{\beta_m c}{\pi} \right) \right) \Bigg);
\end{aligned}$$

Чтобы доказать квазирегулярность бесконечной системы найдем асимптотику данных рядов. Так как данные ряды имеют зависимость от двух индексов, то рассмотрим при  $n \rightarrow \infty$  линейную зависимость между индексами

$$\gamma_m = \kappa_x \beta_n; \gamma_m = \kappa_y \alpha_n; \beta_m = \kappa_z \alpha_n; \quad (5.246)$$

соответственно для каждого из трех рядов. Переходя к пределу с учетом (5.246), можно найти схожие зависимости для всех трех рядов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} (|a_{nmj}^{\mu}| + |b_{nmj}^{\mu}|) = R(\kappa_{\mu}) \quad (\mu \in \{x, y, z\}), \quad (5.247)$$

$$\text{где } R(\kappa) = \frac{2(1+\kappa)}{\sqrt{1+\kappa^2}} \left( \frac{(1+\nu)\kappa^2 + 2\nu}{\pi(2+\kappa^2)^2} \left( \ln(1+\kappa^2) + \frac{\pi}{\sqrt{1+\kappa^2}} \right) + \frac{(1+\nu+2\nu\kappa^2)\kappa^2}{\pi(1+2\kappa^2)^2} \left( \ln\left(1+\frac{1}{\kappa^2}\right) + \frac{\pi\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} \right) + \frac{\kappa^2}{\pi(2+\kappa^2)} - \frac{\kappa^2}{2(2+\kappa^2)\sqrt{1+\kappa^2}} + \frac{1}{\pi(1+2\kappa^2)} - \frac{\kappa}{2(1+2\kappa^2)\sqrt{1+\kappa^2}} \right).$$

Функция  $R(\kappa)$  не зависит от отношения сторон призмы, а только от коэффициента Пуассона  $\nu$ , для значения  $\nu = 0.25$ , график этой функции дан на рис.5.24.

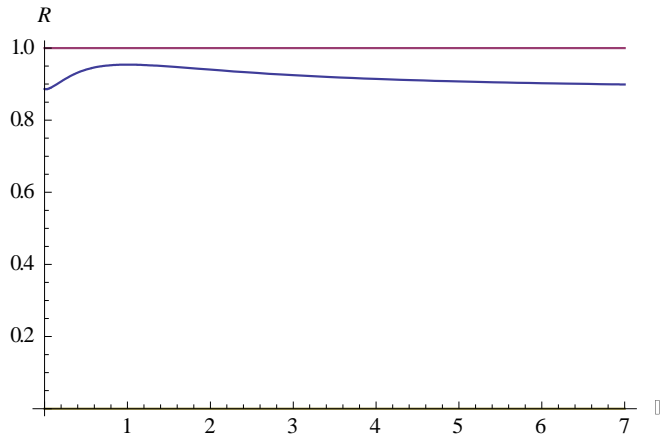


Рис.5.24. График предельных значений рядов из условий регулярности.

Максимальное значение достигается при  $\kappa = 1$  и равно  $R_{\max} = 0.954$ , что доказывает квазирегулярность системы. Более того, так как для любых соотношений  $n$  и  $m$ , предельное значение меньше единицы, то из выполнения условий предложенной теоремы 2.8 следует существование и единственность ограниченного решения. На рис.5.25 показана проверка условия

$$T(\Omega) = 1 + \inf_{k > N} \left( \rho_k / \sum_{n=1}^N |M_{kn}| \right) - \max_{j=1..N} \sum_{i=1}^N |c_{ij}| \sum_{n=N+1}^{\infty} |M_{in}| > 0 \quad (5.248)$$

для куба при  $\nu = 0.25$  при изменении безразмерной частоты колебаний  $\Omega = \frac{2\omega h_0}{\pi c_2}$ .

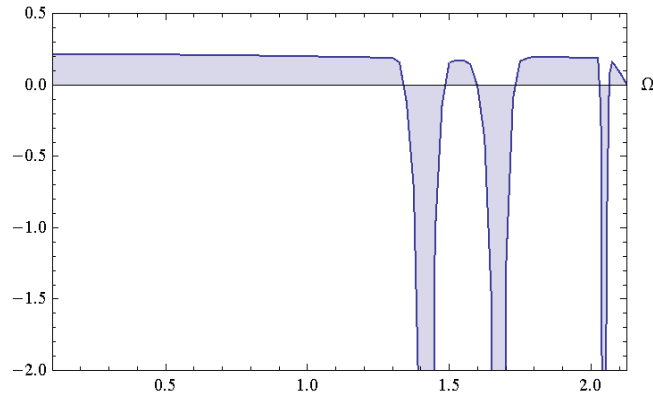


Рис.5.25. Выполнение условий теоремы существования для куба

Номер  $N$  выбирался как номер  $N_R$ , начиная с которого выполняются условия регулярности. Можно увидеть, что на достаточно большом диапазоне частот выполняется условие теоремы  $T(\Omega) > 0$ , что при непрерывной нормальной нагрузке приведет к выполнению (6) и существованию для системы единственного ограниченного решения. На рис.5.25, как будет показано ниже, три интервала  $T(\Omega) < 0$  соответствуют собственным частотам параллелепипеда. Диапазон частот, для которого не выполняются условия теоремы можно сузить увеличением в (5.248)  $N$  до тех пор, пока не будет локализована с некоторой точностью собственная частота (для поперечных и продольных колебаний прямоугольных пластин это было реализовано в предыдущих главах диссертации). Однако для трехмерной призмы этот прием вызывает трудности в вычислительном плане из-за больших значений  $N_R = N_R(\Omega)$ .

Далее, пусть вектор смещений  $\mathbf{u}$  является непрерывным со своими первыми двумя частными производными всюду внутри и на границе параллелепипеда. Тогда для анализа смещений на гранях параллелепипеда может быть использована хорошо известная асимптотическая формула [131] для коэффициентов Фурье четной функции  $f(t)$  одного аргумента  $t \in [-T, T]$ , непрерывной со своей производной  $f'(t)$  и второй производной  $f''(t)$ , удовлетворяющей условиям Дирихле

$$f_n \sim \frac{2(-1)^n}{T\xi_n^2} f'(T), \quad n \rightarrow \infty \quad (5.249)$$

где  $\xi_n = \pi n / T$ .



Выражая смещения через неизвестные (5.228) - (5.230), можно получить следующие выражения для нормальных смещений на гранях параллелепипеда

$$u_x(\pm 1, y, z) = -\frac{x_{00}}{\Omega_1} - \Omega_2^2 \sum_{n+m \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} x_{nm}}{\beta_n + \gamma_m} \cos \beta_n y \cos \gamma_m z \quad (5.250)$$

$$u_y(x, \pm b, z) = -\frac{by_{00}}{\Omega_1} - b\Omega_2^2 \sum_{n+m \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} y_{nm}}{\alpha_n + \gamma_m} \cos \alpha_n x \cos \gamma_m z \quad (5.251)$$

$$u_z(x, y, \pm c) = -\frac{cz_{00}}{\Omega_1} - c\Omega_2^2 \sum_{n+m \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} z_{nm}}{\alpha_n + \beta_m} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \quad (5.252)$$

В частности, формула (5.249) применительно к первому равенству (5.250) дает следующее асимптотическое равенство при  $m \rightarrow \infty$ :

$$-\Omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} x_{nm}}{\beta_n + \gamma_m} \cos \beta_n y \sim \frac{2(-1)^m}{c\gamma_m^2} \frac{\partial u_x}{\partial z}(1, y, c) \quad (5.253)$$

и коэффициенты ряда Фурье по  $\cos \beta_n y$  могут быть выражены по определению

$$x_{nm} \sim \frac{\beta_n + \gamma_m}{\beta_n^2 \gamma_m^2} \cdot \frac{2(-1)^{n+1}}{bc\Omega^2(1 + \delta_{n0})} \cdot \int_{-b}^b \frac{\partial u_x}{\partial z}(1, y, c) \cos \beta_n y dy \quad (5.254)$$

Аналогичным образом, при  $n \rightarrow \infty$  получаем

$$x_{nm} \sim \frac{\beta_n + \gamma_m}{\beta_n^2 \gamma_m^2} \cdot \frac{2(-1)^{m+1}}{bc\Omega^2(1 + \delta_{m0})} \cdot \int_{-c}^c \frac{\partial u_x}{\partial y}(1, b, z) \cos \gamma_m z dz \quad (5.255)$$

В силу сделанных предположений о непрерывности производных, интегралы в формулах (5.254), (5.255) конечны и зависят от одного индекса, что позволяет их вместе со стоящим рядом сомножителем взять в качестве неопределенных коэффициентов, описывающих асимптотику бесконечной матрицы  $x_{nm}$  по строкам и столбцам соответственно

$$G_n^{1r} = \frac{2(-1)^{n+1}}{bc\Omega^2(1 + \delta_{n0})} \cdot \int_{-b}^b \frac{\partial u_x}{\partial z}(1, y, c) \cos \beta_n y dy \quad (5.256)$$

$$G_m^{1c} = \frac{2(-1)^{m+1}}{bc\Omega^2(1 + \delta_{m0})} \cdot \int_{-c}^c \frac{\partial u_x}{\partial y}(1, b, z) \cos \gamma_m z dz \quad (5.257)$$

Очевидно, что при возрастании номеров строк  $n$  и столбцов  $m$  данные последовательности стремятся к общему пределу

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m^{1c} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n^{1r} = G_1 = -\frac{4}{bc\Omega^2} \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z}(1, b, c) \quad (5.258)$$

Таким образом, асимптотика неизвестных  $x_{nm}$  при достаточно большом  $N$  имеет вид

$$\frac{(\beta_n^2 + \delta_{n0})(\gamma_m^2 + \delta_{m0})}{\beta_n + \gamma_m} x_{nm} \sim \begin{cases} G_m^{1c}, & n > N, m = 0, 1, \dots, N \\ G_n^{1r}, & m > N, n = 0, 1, \dots, N \\ G_1, & n > N, m > N \end{cases} \quad (5.259)$$

Рассматривая выражения граничных смещений (5.251) и (5.252), можно аналогичным образом получить асимптотику неизвестных  $y_{nm}$  и  $z_{nm}$ :

$$\frac{(\alpha_n^2 + \delta_{n0})(\gamma_m^2 + \delta_{m0})}{\alpha_n + \gamma_m} y_{nm} \sim \begin{cases} G_m^{2c}, & n > N, m = 0, 1, \dots, N \\ G_n^{2r}, & m > N, n = 0, 1, \dots, N \\ G_2, & n > N, m > N \end{cases} \quad (5.260)$$

$$\frac{(\alpha_n^2 + \delta_{n0})(\beta_m^2 + \delta_{m0})}{\alpha_n + \beta_m} z_{nm} \sim \begin{cases} G_m^{3c}, & n > N, m = 0, 1, \dots, N \\ G_n^{3r}, & m > N, n = 0, 1, \dots, N \\ G_3, & n > N, m > N \end{cases} \quad (5.261)$$

где  $\lim_{m \rightarrow \infty} G_m^{jc} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n^{jr} = G_j$  ( $j=1, 2, 3$ ).

Далее, асимптотический анализ уравнений бесконечной системы позволяет установить более детальную зависимость между предельными константами  $G_m^{jc}, G_n^{jr}, G_j$ . В частности, подставляя асимптотику (5.260) и (5.261) в уравнения системы (5.222) и используя асимптотическое равенство

$$\Delta_{nm,1} \sim -\frac{\Omega_1^2}{2(1-2\nu)\sqrt{\beta_n^2 + \gamma_m^2}} + O\left(\frac{1}{\gamma_m^2}\right), \quad m \rightarrow \infty \quad (5.262)$$

можно увидеть, что уравнения (5.222) при больших номерах  $m$  имеют вид

$$\frac{G_n^{1r}}{\gamma_m^2} \sim -\frac{2G_n^{3c}}{\sqrt{\beta_n^2 + \gamma_m^2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^2 + \beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_1^2} \left( \frac{2\gamma_m^2}{\alpha_j^2 + \beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2} + \frac{\nu(2\beta_n^2 - \Omega_2^2)}{\alpha_j^2} \right) + O\left(\frac{1}{\gamma_m^3}\right) \quad (5.263)$$

Ряд, входящий в (5.263) допускает аналитическое суммирование

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^2 + \beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_1^2} \left( \frac{2\gamma_m^2}{\alpha_j^2 + \beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2} + \frac{\nu(2\beta_n^2 - \Omega_2^2)}{\alpha_j^2} \right) = \\ & = \frac{\gamma_m^2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \left( \frac{\text{cth } g_{nm,2}}{g_{nm,2}} - \frac{\text{cth } g_{nm,1}}{g_{nm,1}} \right) - \frac{\gamma_m^2}{g_{nm,1}^2 g_{nm,2}^2} + \frac{\nu(2\beta_n^2 - \Omega_2^2)}{g_{nm,1}^2} \left( \frac{1}{6} - \frac{\text{cth } g_{nm,1}}{2g_{nm,1}} + \frac{1}{2g_{nm,1}^2} \right) \end{aligned} \quad (5.264)$$

на основе известных формул [115]

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^2 + p^2} = \frac{\text{cth } p}{2p} - \frac{1}{2p^2}; \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^2} = \frac{1}{6} \quad (5.265)$$

Тогда, учитывая тождество

$$g_{nm,1}^2 - g_{nm,2}^2 = \Omega_2^2 - \Omega_1^2 \quad (5.266)$$

и асимптотику радикалов (5.15) при  $m \rightarrow \infty$

$$g_{nm,1} \sim g_{nm,2} \sim \gamma_m + O(1/\gamma_m) \quad (5.267)$$

$$\frac{\text{cth } g_{nm,2}}{g_{nm,2}} - \frac{\text{cth } g_{nm,1}}{g_{nm,1}} \sim \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\gamma_m^3} \quad (5.268)$$

асимптотическое уравнение (5.263) принимает вид

$$\frac{G_n^{1r}}{\gamma_m^2} \sim -\frac{G_n^{3c}}{\gamma_m^2} + O\left(\frac{1}{\gamma_m^3}\right) \quad (5.269)$$

Откуда следует, что

$$G_n^{1r} = -G_n^{3c} \quad (5.270)$$

Анализ асимптотики уравнений бесконечной системы (5.223) и (5.224) позволяет получить схожие зависимости для других предельных констант

$$G_m^{2r} = -G_m^{3r}, \quad G_m^{1c} = -G_m^{2c} \quad (5.271)$$

В свою очередь, равенства (5.270) и (5.271) дают зависимости между  $G_j$ :

$$G_1 = -G_3 = G_2 = -G_1 \quad (5.272)$$

которое возможно лишь при

$$G_1 = G_2 = G_3 = 0 \quad (5.273)$$

Асимптотические формулы (5.259) - (5.261) дают возможность выразить предельные константы  $G_m^{jc}, G_n^{jr}$  через неизвестные с достаточно большими индексами, например

$$G_m^{1c} = -G_m^{2c} = \frac{\gamma_m^2 + \delta_{m0}}{2} \left( \frac{x_{Nm} \beta_N^2}{\beta_N + \gamma_m} - \frac{y_{Nm} \alpha_N^2}{\alpha_N + \gamma_m} \right) \quad (5.274)$$

$$G_m^{3c} = -G_m^{1r} = \frac{\beta_m^2 + \delta_{m0}}{2} \left( \frac{z_{Nm} \alpha_N^2}{\alpha_N + \beta_m} - \frac{x_{mN} \gamma_N^2}{\gamma_N + \beta_m} \right) \quad (5.275)$$

$$G_m^{2r} = -G_m^{3r} = \frac{\alpha_m^2 + \delta_{m0}}{2} \left( \frac{y_{mN}\gamma_N^2}{\gamma_N + \alpha_m} - \frac{z_{mN}\beta_N^2}{\beta_N + \alpha_m} \right) \quad (5.276)$$

и тем самым замкнуть систему относительно первых неизвестных  $x_{nm}, y_{nm}$  и  $z_{nm}$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ):

$$\begin{cases} x_{nm} = \sum_{j=0}^N (a_{nmj}^x z_{nj} + b_{nmj}^x y_{jm}) + S_{nm}^{11} G_n^{3c} + S_{nm}^{12} G_m^{2c} + F_{nm}^x; \\ y_{nm} = \sum_{j=0}^N (a_{nmj}^y z_{nj} + b_{nmj}^y x_{jm}) + S_{nm}^{21} G_n^{3r} + S_{nm}^{22} G_m^{1c} + F_{nm}^y; \\ z_{nm} = \sum_{j=0}^N (a_{nmj}^z y_{nj} + b_{nmj}^z x_{mj}) + S_{nm}^{31} G_n^{2r} + S_{nm}^{32} G_m^{1r} + F_{nm}^z; \end{cases} \quad (n, m = 0, 1, \dots, N) \quad (5.277)$$

где остатки рядов

$$\begin{aligned} S_{nm}^{11} &= \sum_{j=N+1}^{\infty} a_{nmj}^x \frac{\alpha_j + \beta_n}{\alpha_j^2 (\beta_n^2 + \delta_{n0})}; & S_{nm}^{12} &= \sum_{j=N+1}^{\infty} b_{nmj}^x \frac{\alpha_j + \gamma_m}{\alpha_j^2 (\gamma_m^2 + \delta_{0m})}; \\ S_{nm}^{21} &= \sum_{j=N+1}^{\infty} a_{nmj}^y \frac{\alpha_n + \beta_j}{\beta_j^2 (\alpha_n^2 + \delta_{n0})}; & S_{nm}^{22} &= \sum_{j=N+1}^{\infty} b_{nmj}^y \frac{\beta_j + \gamma_m}{\beta_j^2 (\gamma_m^2 + \delta_{0m})}; \\ S_{nm}^{31} &= \sum_{j=N+1}^{\infty} a_{nmj}^z \frac{\alpha_n + \gamma_j}{\gamma_j^2 (\alpha_n^2 + \delta_{n0})}; & S_{nm}^{32} &= \sum_{j=N+1}^{\infty} b_{nmj}^z \frac{\beta_m + \gamma_j}{\gamma_j^2 (\beta_m^2 + \delta_{0m})}. \end{aligned}$$

сворачиваются аналитически.

Заметим, что при численной реализации решения системы (5.277) использовалась переиндексация (5.233) – (5.235), которая позволяет свести задачу к известным алгоритмам линейной алгебры.

Таким образом, решение данной конечной системы (5.277) позволяет найти при помощи формул (5.259) - (5.261) и (5.274) - (5.276) все три бесконечные матрицы неопределенных коэффициентов.

Если в одном из направлений размер параллелепипеда достаточно велик, то известно, что напряженно-деформированное состояние адекватно описывается моделью плоской деформации. В этом случае из формул для напряжений (5.209) можно получить решение для двумерного прямоугольника. В частности, для бесконечного вдоль оси  $Oz$  параллелепипеда получаем компоненты тензора напряжений в форме:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{xx}^P}{2G} &= -\frac{1-\nu}{1-2\nu} x_{00} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin \Omega_1} - \frac{\nu b y_{00} \cos \Omega_1 y}{(1-2\nu) \sin \Omega_1 b} - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\beta_n x_{n0} \left( g_{n0,2} \frac{\operatorname{ch} g_{n0,2} x}{\operatorname{sh} g_{n0,2}} - \frac{(2\beta_n^2 - \Omega_2^2)^2}{4\beta_n^2 g_{n0,1}} \frac{\operatorname{ch} g_{n0,1} x}{\operatorname{sh} g_{n0,1}} \right) \cos \beta_n y + \\
&+ b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\alpha_n y_{n0} \left( q_{n0,2} \frac{\operatorname{ch} q_{n0,2} y}{\operatorname{sh} q_{n0,2} b} - \left( \alpha_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right) \frac{(2\alpha_n^2 - \Omega_2^2) \operatorname{ch} q_{n0,1} y}{2\alpha_n^2 q_{n0,1} \operatorname{sh} q_{n0,1} b} \right) \cos \alpha_n x; \\
\frac{\sigma_{yy}^P}{2G} &= -\frac{\nu}{1-2\nu} x_{00} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin \Omega_1} - \frac{(1-\nu) b y_{00} \cos \Omega_1 y}{(1-2\nu) \sin \Omega_1 b} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\beta_n x_{n0} \left( g_{n0,2} \frac{\operatorname{ch} g_{n0,2} x}{\operatorname{sh} g_{n0,2}} - \left( \beta_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right) \frac{(2\beta_n^2 - \Omega_2^2) \operatorname{ch} g_{n0,1} x}{2\beta_n^2 g_{n0,1} \operatorname{sh} g_{n0,1}} \right) \cos \beta_n y - \\
&- b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\alpha_n y_{n0} \left( q_{n0,2} \frac{\operatorname{ch} q_{n0,2} y}{\operatorname{sh} q_{n0,2} b} - \frac{(2\alpha_n^2 - \Omega_2^2)^2}{4\alpha_n^2 q_{n0,1}} \frac{\operatorname{ch} q_{n0,1} y}{\operatorname{sh} q_{n0,1} b} \right) \cos \alpha_n x; \\
\frac{\sigma_{xy}^P}{2G} &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_{n0} (2\beta_n^2 - \Omega_2^2) \left( \frac{\operatorname{sh} g_{n0,1} x}{\operatorname{sh} g_{n0,1}} - \frac{\operatorname{sh} g_{n0,2} x}{\operatorname{sh} g_{n0,2}} \right) \sin \beta_n y - \\
&- b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_{n0} (2\alpha_n^2 - \Omega_2^2) \left( \frac{\operatorname{sh} q_{n0,1} y}{\operatorname{sh} q_{n0,1} b} - \frac{\operatorname{sh} q_{n0,2} y}{\operatorname{sh} q_{n0,2} b} \right) \sin \alpha_n x.
\end{aligned}$$

Данная задача была рассмотрена в работе [39] на основе метода суперпозиции, ее более детальный анализ представлен в разделе 5.1. Сверяя коэффициенты рядов в представленных выше формулах для напряжений с упомянутым решением для плоской задачи, можно найти, что эти решения идентичны, если положить коэффициенты  $z_m, x_m$  из [39] как соответственно  $2\beta_m x_{m0}$  и  $2\alpha_m y_{m0}$ . Заметим, что бесконечная система (5.219) – (5.224) в случае плоской деформации (отличны от нуля только  $x_{m0}$  и  $y_{m0}$ ) также оказывается совпадающей с бесконечной системой из [39]. Используя теорию лимитант (теорема 2.7) для решения бесконечной системы относительно  $z_m, x_m$  доказывается существование общего предела (см. раздел 5.1)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = -\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = K,$$

зависящего от частоты и вида нагрузки. Там же, используя данное предельное соотношение, для решения соответствующей бесконечной системы строится эффективный численный алгоритм, названный методом улучшенной редукции.

Если воспользоваться выведенной асимптотикой для трехмерного случая, можно увидеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n x_{n0} = G_0^{1c} \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n y_{n0} = G_0^{2c}.$$

Но из равенств (5.271) следует, что  $G_0^{1c} = -G_0^{2c}$ , то есть полученная асимптотика (5.259) – (5.261) описывает асимптотическое поведение неизвестных в случае плоской деформации.

### 5.6.3. Анализ и улучшение сходимости.

Описанная выше редукция бесконечной системы и вычисление характеристик напряженно-деформированного состояния были реализованы в среде пакета Mathematica. Так как построенное решение *a priori* удовлетворяет уравнениям колебаний, то точность представленного решения будет характеризоваться точностью выполнения граничных условий в зависимости от порядка решаемой системы  $3(N+1)^2$  и частоты колебаний  $\Omega = 2\Omega_2/\pi$ . Рассмотрим в качестве первого примера куб ( $a = b = 1$ ) под действием равных и постоянных нормальных нагрузок по всем граням

$$\frac{1}{2G} \sigma_{xx}(\pm 1, y, z) = \frac{1}{2G} \sigma_{yy}(x, \pm b, z) = \frac{1}{2G} \sigma_{zz}(x, y, \pm c) = P \quad (5.278)$$

В силу полной симметрии граничной задачи (5.278) неизвестные в бесконечной системе также равны между собой и симметричны по индексам

$$x_{nm} = x_{mn} = y_{nm} = y_{mn} = z_{nm} = z_{mn} \quad (5.279)$$

Тогда подстановка (5.279) в уравнения (5.274) - (5.276) дает равенство нулю всех предельных констант  $G_m^{jc}, G_m^{jr}$  и нормальные напряжения можно представить в виде суммы конечных отрезков рядов Фурье:

$$\frac{\sigma_{xx}^N}{2G} = -\frac{(1-\nu)x_{00} \cos \Omega_1 x}{(1-2\nu) \sin \Omega_1} - \frac{\nu b y_{00} \cos \Omega_1 y}{(1-2\nu) \sin \Omega_1 b} - \frac{\nu c z_{00} \cos \Omega_1 z}{(1-2\nu) \sin \Omega_1 c} + \quad (5.280)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n+m \neq 0}^N \frac{(-1)^{n+m} x_{nm}}{\beta_n + \gamma_m} \left( \frac{(2g_{nm,2}^2 + \Omega_2^2)^2}{2g_{nm,1}} \frac{\operatorname{ch} g_{nm,1} x}{\operatorname{sh} g_{nm,1}} - 2(\beta_n^2 + \gamma_m^2) g_{nm,2} \frac{\operatorname{ch} g_{nm,2} x}{\operatorname{sh} g_{nm,2}} \right) \cos \beta_n y \cos \gamma_m z + \\
& + b \sum_{n+m \neq 0}^N \frac{(-1)^{n+m} y_{nm}}{\alpha_n + \gamma_m} \left( 2q_{nm,2} \alpha_n^2 \frac{\operatorname{ch} q_{nm,2} y}{\operatorname{sh} q_{nm,2} b} - \frac{(2q_{nm,2}^2 + \Omega_2^2)}{q_{nm,1}} \left( \alpha_n^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1-2v} \right) \frac{\operatorname{ch} q_{nm,1} y}{\operatorname{sh} q_{nm,1} b} \right) \times \cos \alpha_n x \cos \gamma_m z \\
& + c \sum_{n+m \neq 0}^N \frac{(-1)^{n+m} z_{nm}}{\alpha_n + \beta_m} \left( 2p_{nm,2} \alpha_n^2 \frac{\operatorname{ch} p_{nm,2} z}{\operatorname{sh} p_{nm,2} c} - \frac{(2p_{nm,2}^2 + \Omega_2^2)}{p_{nm,1}} \left( \alpha_n^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1-2v} \right) \frac{\operatorname{ch} p_{nm,1} z}{\operatorname{sh} p_{nm,1} c} \right) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y
\end{aligned}$$

В табл. 5.20 представлено выполнение граничного условия (5.278) на нормальные напряжения  $\sigma_{xx}(\pm 1, y, z) / 2GP = 1$  при  $v = 0.25$ , которое по построению должно выполняться из бесконечной системы, когда частота колебаний  $\Omega = 0.5$  находится в нижнем диапазоне частот. В вычислениях полагалось  $N = 2$ , то есть решалась конечная система 9 уравнений. Можно увидеть, что решение такой системы делает возможным хорошее выполнение граничных условий, включая ребра и углы куба.

Таблица 5.20. Выполнение граничного условия (5.278) на нормальные напряжения  $\sigma_{xx}(\pm 1, y, z) / 2GP = 1$  при  $v = 0.25$

$z_i \setminus y_j$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.0	1.000311	1.000126	0.999993	1.000268	1.000210	1.000014
0.2	1.000126	0.999937	0.999806	1.000106	1.000089	0.999872
0.4	0.999993	0.999806	0.999676	0.999986	1.000009	0.999756
0.6	1.000268	1.000106	0.999986	1.000224	1.000195	0.999949
0.8	1.000210	1.000089	1.000009	1.000195	1.000140	0.999988
1.0	1.000014	0.999872	0.999756	0.999949	0.999988	0.999951

Ниже представлено распределение нормальных напряжений по сечениям куба для данного численного примера.

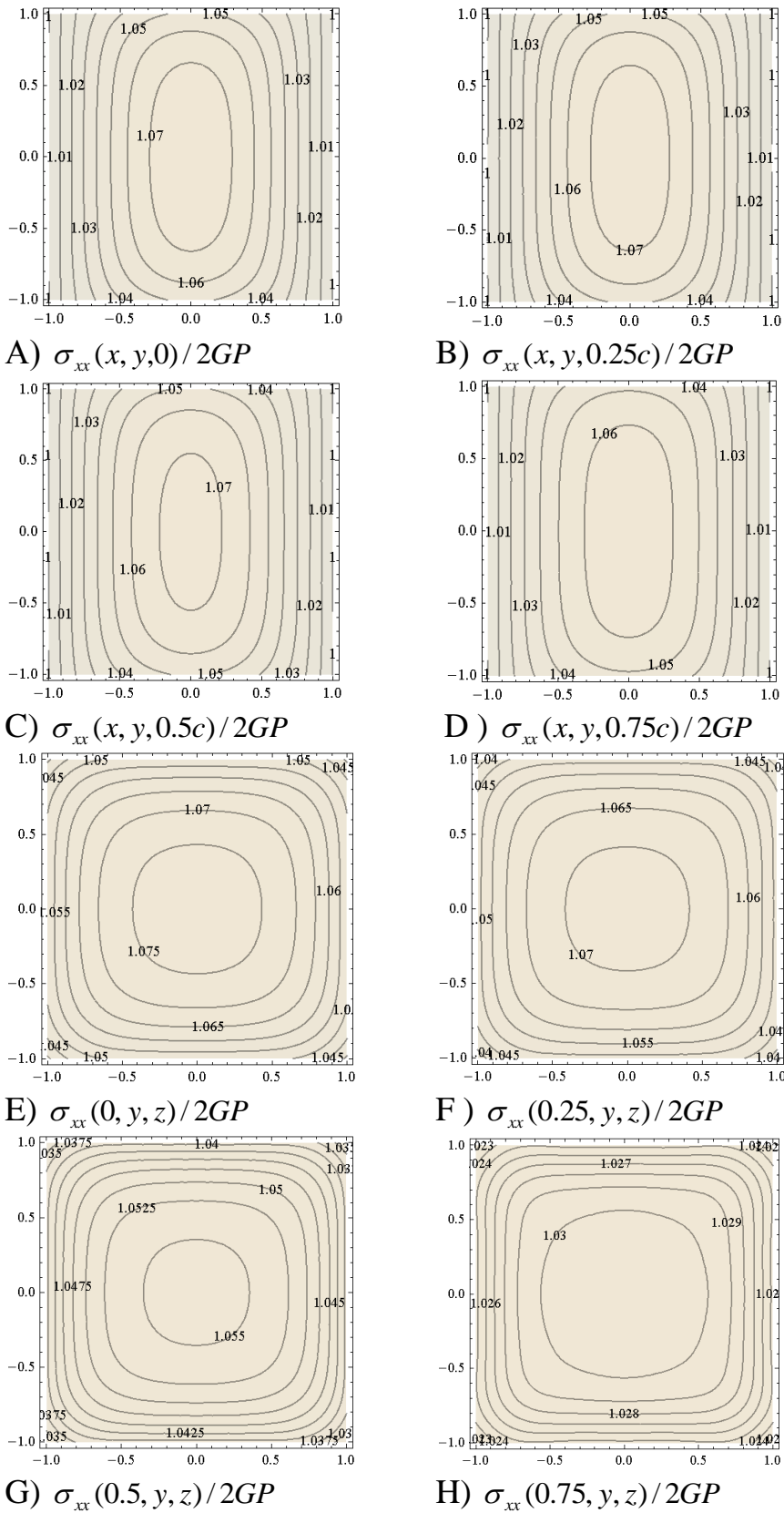


Рис.5.26 Распределение нормальных напряжений по сечениям куба из примера (5.278)



Напряжения меняются мало, достигая своих наибольших значений в центре куба. Эти значения превосходят граничные напряжения не более чем на 8%. Очевидно, что относительно небольшие значения напряжений и хорошее выполнение граничных условий оказываются возможными в этом примере благодаря полной симметрии и достаточному удалению частоты колебаний  $\Omega = 0.5$  от собственной частоты  $\Omega_1^L = \sqrt{2} = 1,414\dots$ , которая совпадает здесь с частотой моды Ламе.

В качестве второго примера рассмотрим куб, нагруженный только по двум противоположным граням равной симметричной нагрузкой, то есть

$$\frac{1}{2G}\sigma_{xx}(\pm 1, y, z) = P; \frac{1}{2G}\sigma_{yy}(x, \pm b, z) = \frac{1}{2G}\sigma_{zz}(x, y, \pm c) = 0, \quad (5.281)$$

при  $\nu = 0.25$  и частоте колебаний  $\Omega = 1.5$ , которая отличается на 6% от первой собственной частоты колебаний куба. Симметрия задачи относительно осей  $Oy$  и  $Oz$  приводит к следующим зависимостям между неизвестными

$$y_{nm} = z_{nm}, \quad x_{nm} = x_{mn}. \quad (5.282)$$

Несмотря на схожесть задач (5.278) и (5.281), отсутствие полной симметрии в (5.281) приводит к существенным отличиям при численной реализации. В частности, для данного примера предельные константы уже оказываются отличными от нуля, их значения приведены в табл. 5.21. Формулы (5.282) дают следующие зависимости между предельными константами

$$G_m^{1c} = G_m^{1r} = -G_m^{2c} = -G_m^{3c} \quad \text{и} \quad G_m^{2r} = G_m^{3r} = 0, \quad (5.283)$$

поэтому в табл. 5.21 представлена только одна из этих констант.

Таблица 5.21. Значения предельных констант для (5.281)

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7
$G_m^{1c} / P$	-2.140	-0.5259	0.0329	0.1355	0.1643	0.1677	0.1615	0.1520

Можно также отметить достаточно медленное убывание предельных констант, которое указывает на их существенный вклад в решение вблизи границы. Этот факт иллюстрирует табл. 5.22, где представлены граничные

значения напряжений  $\sigma_{xx}^N(\pm 1, z, y)/2GP$ , которые вычисляются согласно (5.193) при  $N=9$ , то есть без учета остатков рядов.

Таблица 5.22. Граничные значения напряжений  $\sigma_{xx}^N(\pm 1, z, y)/2GP$  для (5.91) при  $N=9$  (простая редукция бесконечной системы)

$z_i \setminus y_j$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.0	0.768234	0.766953	0.762454	0.750560	0.697587	-1.993493
0.2	0.766953	0.765665	0.761145	0.749197	0.696005	-2.005993
0.4	0.762454	0.761145	0.756552	0.744446	0.690641	-2.041037
0.6	0.750560	0.749197	0.744446	0.732038	0.677331	-2.093939
0.8	0.697587	0.696005	0.690641	0.677331	0.621125	-2.189813
1.0	-1.993493	-2.005993	-2.041037	-2.093939	-2.189813	-5.020999

Данные табл. 5.22. показывают неудовлетворительное выполнение граничных условий, более того, увеличение порядка конечной системы до 7500 ( $N=49$ ) фактически улучшает ситуацию только вдали от ребер куба (см. табл. 5.23). Подобная ситуация для нормальных напряжений наблюдается и на других гранях куба.

Таблица 5.23. Граничные значения напряжений  $\sigma_{xx}^N(\pm 1, z, y)/2GP$  для (5.281) при  $N=49$  (простая редукция бесконечной системы)

$z_i \setminus y_j$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.0	0.970962	0.970904	0.970709	0.970413	0.969701	-1.902126
0.2	0.970904	0.970846	0.970650	0.970352	0.969636	-1.913724
0.4	0.970709	0.970650	0.970455	0.970156	0.969436	-1.945108
0.6	0.970413	0.970352	0.970156	0.969851	0.969122	-1.986039
0.8	0.969701	0.969636	0.969436	0.969122	0.968385	-2.019445
1.0	-1.902125	-1.913724	-1.945108	-1.986039	-2.019445	-5.013229

Слабая сходимость представленного решения может быть объяснена присутствием логарифмических особенностей в окрестности ребер параллелепипеда для рядов, представляющих нормальные напряжения. Действительно, учитывая асимптотику неизвестных (5.259) - (5.261), можно

увидеть, что выражения нормальных напряжений содержат ряды, которые допускают аналитическое улучшение сходимости на основе формул [115]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n\xi} \cos n\tau = \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} \ln 2(\cosh \xi + \cos \tau),$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\alpha_n \xi} = \frac{\exp(-\alpha_{N+1} \xi)}{1 - \exp(-\pi \xi)} \quad (5.284)$$

Тогда, при  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  ненулевые предельные константы добавляют в выражение для нормальных напряжений (5.280) следующее слагаемое:

$$R_N = 2\nu b \Gamma_N^{3r} \left( x, \frac{1}{\pi} \right) \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(c-z)}{b} + \cos \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(b-y)}{c} + \cos \frac{\pi z}{c}} - \frac{c-z}{2b} + \frac{b-y}{2c} + S_N \left( \frac{c-z}{b}, \frac{y}{b} \right) - S_N \left( \frac{b-y}{c}, \frac{z}{c} \right) \right\} +$$

$$+ b^2 c \Gamma_N^{3c} \left( \frac{y}{b}, \frac{b}{\pi} \right) \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(c-z)}{c} + \cos \frac{\pi x}{c}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(1-x)}{c} + \cos \frac{\pi z}{c}} - \frac{c-z}{2} + \frac{1-x}{2c} + (c-z)(-1)^{N+1} \operatorname{Re} \frac{e^{-\alpha_{N+1}(c-z-ix)}}{1 + e^{-\pi(c-z-ix)}} + \right.$$

$$+ S_N(c-z, x) - S_N \left( 1-x, \frac{z}{c} \right) \left. \right\} + c^2 b \Gamma_N^{2c} \left( \frac{z}{c}, \frac{c}{\pi} \right) \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(b-y)}{b} + \cos \frac{\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(1-x)}{b} + \cos \frac{\pi y}{b}} - \right.$$

$$\left. - \frac{b-y}{2} + \frac{1-x}{2b} + (b-y)(-1)^{N+1} \operatorname{Re} \frac{e^{-\alpha_{N+1}(b-y-ix)}}{1 + e^{-\pi(b-y-ix)}} + S_N(b-y, x) - S_N \left( 1-x, \frac{y}{b} \right) \right\} \quad (5.285)$$

где  $\Gamma_N^\sigma(\xi, \tau) = \frac{\Omega_1^2}{\pi^2(1-2\nu)} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n G_n^\sigma}{n^2 + \delta_{n0} \tau^2} \cos \pi n \xi$ ;  $S_N(\xi, \tau) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n} e^{-n\xi} \cos \pi n \tau$ ,

отвечающее аналитически свернутым остаткам рядов на основе (5.284):

$$\frac{\sigma_{xx}}{2G} = \frac{\sigma_{xx}^N}{2G} + R_N \quad (5.286)$$

Зависимости между предельными константами позволяют объединить сингулярности под общим знаками логарифмов (5.285), что в силу конечности пределов

$$\lim_{\xi \rightarrow h} \ln \frac{\operatorname{ch} \pi(h-\xi) - 1}{\cos \pi \xi / h + 1} = 2 \ln h; \quad \lim_{\xi \rightarrow h} \frac{h-\xi}{1 - e^{-\pi(h-\xi)}} = \frac{1}{\pi} \quad (5.287)$$

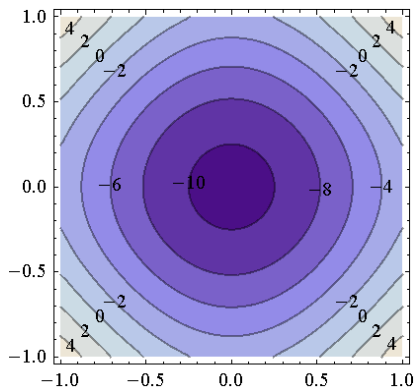
позволяет избавиться от особенности вблизи ребер параллелепипеда.

Табл. 5.24. показывает результаты проверки граничного условия  $\sigma_{xx}(1, y_j, z_i) / 2GP = 1$  после аналитического улучшения сходимости (5.286) при  $N=9$ .

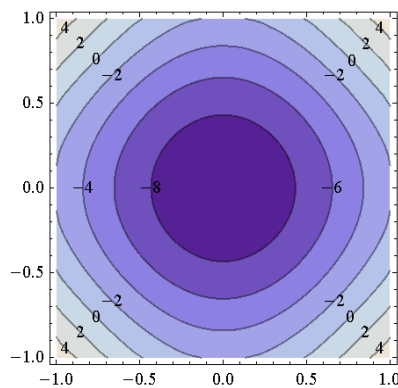
Максимальная погрешность наблюдается в угловой точке в 2,4%. Таким образом, полученная асимптотика неизвестных позволяет значительно улучшить качество решения задачи.

Таблица 5.24. Граничные значения напряжений  $\sigma_{xx}^N(\pm 1, z, y)/2GP$  для (5.281) при  $N=9$  (улучшенная редукция бесконечной системы)

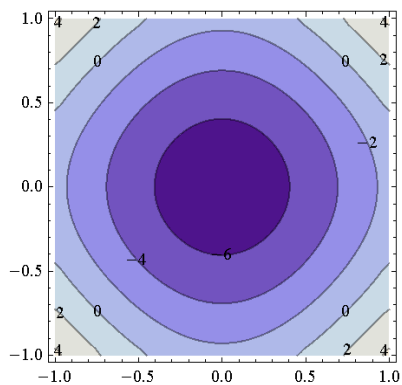
$z_i \setminus y_j$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.0	1.00088	1.00089	1.00091	1.00097	1.00117	1.01148
0.2	1.00089	1.00089	1.00091	1.00098	1.00117	1.01147
0.4	1.00091	1.00091	1.00094	1.00100	1.00120	1.01141
0.6	1.00097	1.00098	1.00100	1.00106	1.00127	1.01131
0.8	1.00117	1.00117	1.00120	1.00127	1.00151	1.01133
1.0	1.01148	1.01147	1.01141	1.01131	1.01133	1.02371



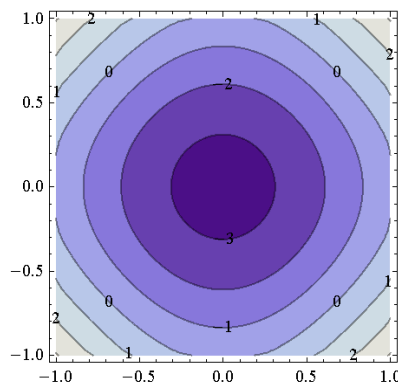
A)  $\sigma_{xx}(0, y, z)/2GP$



B)  $\sigma_{xx}(0.25, y, z)/2GP$



C)  $\sigma_{xx}(0.5, y, z)/2GP$



D)  $\sigma_{xx}(0.75, y, z)/2GP$

Рис.5.27. Распределение нормальных напряжений по сечениям куба из примера (5.281)

На рис. 5.27 представлены значения нормальных напряжений  $\sigma_{xx}(x, y, z)/2GP$  в различных сечениях куба для данного примера (5.281). Близость частот вынужденных колебаний к собственной частоте, здесь дает на порядок большие значения напряжений, по сравнению с предыдущим примером граничной нагрузки. Наибольшие значения напряжений достигаются в центре куба, убывая к его граням.

#### 5.6.4. Спектр собственных частот симметричных колебаний упругого параллелепипеда.

Представленный выше асимптотический анализ бесконечной системы позволяет эффективно редуцировать ее решение к конечной системе линейных алгебраических уравнений и провести анализ спектра колебаний параллелепипеда как нулей определителя редуцированной системы. При вычислениях полагалось  $N=9$ , что обеспечивает необходимую точность для собственных частот, в том числе и близко расположенных. Табл. 6. показывает сходимость собственных частот параллелепипеда к собственным частотам продольных колебаний квадратной пластины, представленным в [167] для  $\nu = 0.25$ , при уменьшении толщины параллелепипеда. Как и следовало ожидать, с уменьшением толщины собственные частоты параллелепипеда сходятся к соответствующим частотам пластины.

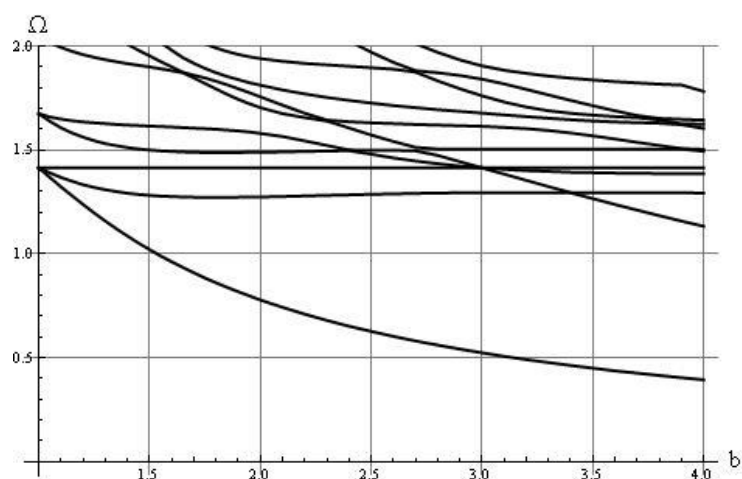
Таблица 5.25. Сходимость собственных частот параллелепипеда к собственным частотам квадратной пластины ( $\nu = 0.25$ ) при уменьшении толщины параллелепипеда

Номер собственной частоты	Отношение сторон $1:b:c$			Собственные частоты пластины [167]
	1:1:0.2	1:1:0.1	1:1:0.05	
1	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
2	1.5760	1.5772	1.5776	1.5780
3	1.7683	1.7725	1.7734	1.7738
4	2.6860	2.6889	2.6896	2.6898
5	3.2145	3.2196	3.2208	3.2223

Таблица 5.26. Собственные частоты колебаний параллелепипеда ( $\nu = 0.25$ )

1:b:c	Собственные частоты				
	1	2	3	4	5
1:1:1	1.4142	1.6734	2.0475	2.3613	2.6549
1:1:2	0.7784	1.2743	1.4142	1.4893	1.5808
1:1:3	0.5238	1.2946	1.4139	1.4141	1.4142
1:1:4	0.3940	1.1335	1.2929	1.3870	1.4142
1:2:2	0.7071	0.7822	0.8648	1.3023	1.3778
1:2:3	0.5158	0.6899	0.8082	1.0349	1.2963
1:2:4	0.3914	0.6849	0.7987	0.8660	1.1481
1:3:3	0.4714	0.5243	0.5857	0.8922	1.0661
1:3:4	0.3831	0.4702	0.5483	0.7516	0.9290

Далее были вычислены собственные частоты колебаний параллелепипеда при различном отношении его сторон (табл. 5.26). Представленные ниже графики на рис. 5.28 – 5.30 показывают изменение первых десяти собственных частот параллелепипеда в зависимости от его размеров. Заметим, что табл. 5.26 содержит близкие значения собственных частот, в частности для отношения сторон 1:1:3, это же можно увидеть на рис. 5.29, что в некоторой степени характеризует точность представленного подхода.

Рис. 5.28. Первые десять собственных частот параллелепипеда ( $\nu = 0.25$ ,  $c = 1$ )

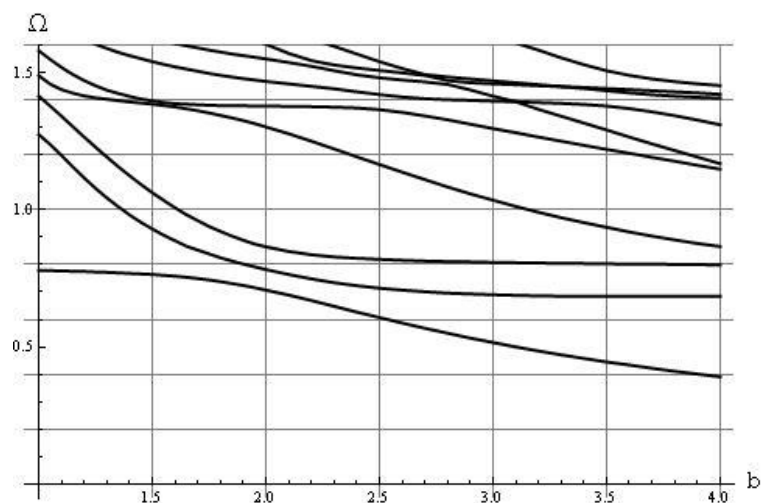


Рис. 5.29. Первые десять собственных частот параллелепипеда ( $\nu=0.25$ ,  $c=2$ )

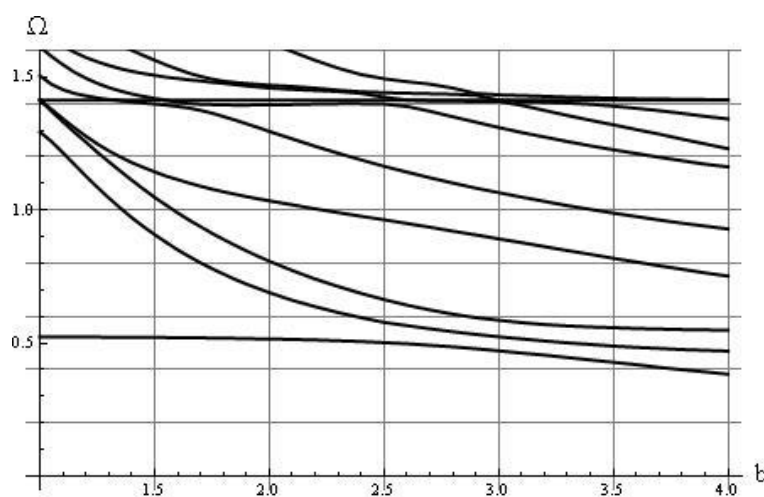


Рис.5.30. Первые десять собственных частот параллелепипеда ( $\nu=0.25$ ,  $c=3$ )

На всех трех рисунках имеются горизонтальные участки, так называемые плато, на которых собственная частота практически не меняется, здесь лишь происходит смена порядкового номера частоты. Например, на рис.5.28 вторая частота меняет первую при  $b \approx 3.5$ , на втором и третьем рисунках такая смена частот наблюдается в окрестности  $b \approx 1.5$  и т.д. Как известно, такое поведение спектральных кривых для бесконечного прямоугольного бруса и конечного цилиндра [39] было объяснено наличием явления краевого резонанса, которое выражается в концентрации колебаний вблизи краев объекта. Для конечного параллелепипеда явление краевого резонанса также имеет экспериментальное подтверждение. Представленный подход дает возможность теоретического анализа явления краевого резонанса для конечного параллелепипеда.

### 5.7. Краткие выводы по главе 5.

В пятой главе диссертации представлены асимптотически точные решения плоской задачи теории упругости о колебаниях ортотропных прямоугольных пластин при кинематических и силовых граничных условиях. Этот результат удастся получить на основе анализа бесконечных систем линейных уравнений соответствующих задачам планарных колебаний ортотропных пластин, который позволяет построить в аналитической форме асимптотику их нетривиального решения и на его основе предложить алгоритм для определения с заданной точностью решения бесконечных систем. Также как и в третьей главе диссертации, собственные частоты колебаний вычислялись на основе сформулированного во второй главе признака (2.46), который впервые дает возможность для эффективного определения верхних и нижних границ собственных частот пластины. Представленные в диссертации результаты снабжены многочисленными примерами, в которых результаты вычислений по предложенному в диссертации алгоритму сверяются с известными в литературе результатами. На основе данного сравнения можно сделать вывод о том, что полученные асимптотически точные решения для задач о планарных колебаниях прямоугольных пластин, являются наиболее точными и эффективными из имеющихся аналитических решений, и дают возможность для анализа пластин в высокочастотном диапазоне.

Приложение полученных результатов для построения асимптотически точных решений для пластин с более сложной геометрией представлено в разделе 5.5. на примере равнобокого креста. Полученное решение показывает, что наличие даже малых концентраторов напряжений в углах пластины существенно меняет значения собственных частот колебаний.

В пятой главе диссертации впервые построено асимптотически точное трехмерное решение для вынужденных установившихся колебаний прямоугольного параллелепипеда. Данное решение может служить как для непосредственного анализа колебаний, так и в качестве эталонного при отладке численных и численно-аналитических методов.



Предлагаемая модификация метода суперпозиции для трехмерной задачи дает возможность получить решение задачи об установившихся вынужденных колебаниях параллелепипеда с высокой точностью для любого вида непрерывных нагрузок и значения частоты, в том числе и для частот близких к резонансным частотам. Исходя из самых общих предположений относительно поведения коэффициентов рядов Фурье, удастся построить алгоритм улучшенной редукции для определения первых неизвестных в бесконечной системе и коэффициентов в асимптотической формуле, описывающей это решение при неограниченном возрастании номеров. Это позволяет свернуть остатки рядов в выражениях напряжений и устранить логарифмические особенности на гранях параллелепипеда, которые при использовании метода простой редукции (построении приближенного решения краевой задачи в виде конечного отрезка ряда Фурье) не исчезают и не дают возможности выполнить с удовлетворительной точностью заданные граничные условия.

Результаты главы опубликованы в статьях [75 – 78, 82, 84, 85, 87, 89, 92, 207 – 209, 213], представлены на научных конференциях [90, 94 – 98, 100, 103, 104, 214].

## ГЛАВА 6. ФЛАТТЕР ЗАЩЕМЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

### 6.1. Постановка задачи и общее решение

Задачам панельного флаттера посвящена обширная литература, что связано с тем, что пластины (панели) являются одними из основных структурных элементов в аэрокосмических аппаратах. Динамическая потеря устойчивости панели, которая возникает в силу перекачки энергии от воздушного потока к пластине, может привести к вибрациям конструкции, в том числе и с большими амплитудами, что связано с рисками в эксплуатации аппарата. При этом панельным флаттером называется явление возникновения автоколебаний системы пластина – воздушный поток.

В монографиях [23], [30] представлены основные классические результаты по флаттеру прямоугольных пластин, в том числе в линейной постановке. В линейном приближении поршневой теории, при исследовании конечных и бесконечных пластин с шарнирно-опертыми краями, удается явно выписать аналитическое решение задачи и провести анализ флаттера [14]. Как правило, флаттер в линейной постановке появляется благодаря сближению и слиянию двух соседних собственных форм пластины при возрастании колебаний.

Методы исследования флаттера прямоугольных пластин можно разбить на две основные группы – точные методы, в которых строится и исследуется решение разрешающего дифференциального уравнения, и методы, основанные на дискретизации дифференциального оператора – метод конечных элементов [149], [215], методы с насыщением [2], [49], [54].

Панель, закрепленная в жесткой раме, также относится к одному из базовых структурных элементов. Тем не менее, даже в линейном приближении для пластин с закрепленными краями точное решение отсутствует, традиционно используются методы численного решения, такие как метод конечных элементов [149]. При этом данная задача и в настоящее время вызывает интерес.

В статье [212] представлен новый подход к построению аналитических решений задач колебания ортотропных пластин. Этот подход предлагается использовать для построения базисных функций метода Бубнова – Галеркина в задаче панельного флаттера прямоугольной ортотропной пластины под действием планарных усилий. Исследуется скорость сходимости метода, приводятся примеры численной реализации.

Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластину, занимающую область  $K = \{(x, y) : |x| \leq a, |y| \leq b\}$  толщины  $h$ , обтекаемую потоком газа в направлении оси  $Ox$ . Упругие свойства материала можно описать при помощи четырех упругих констант. В частности, с помощью модуля Юнга  $E_1$  вдоль направления оси  $x$ , модуля сдвига  $G$  и двух коэффициентов Пуассона  $\nu_{12}$  и  $\nu_{21}$ . Предположим также наличие сжимающих (растягивающих) сил в плоскости пластины  $N_x$  и  $N_y$ , направленных вдоль координатных осей. Как известно [23, 30], в этом случае уравнение, описывающее динамические колебания пластины относительно прогиба пластины  $W(x, y, t)$  имеет вид

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \varepsilon \rho h \frac{\partial W}{\partial t} + P = 0 \quad (6.1)$$

где  $\rho$  – плотность материала,  $h$  – толщина пластины,  $\varepsilon$  – коэффициент затухания,

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_2 = \frac{\nu_{21} E_1 h^3}{12\nu_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_3 = D_{12} + 2D_{66}; \quad D_{66} = \frac{Gh^3}{12}; \quad D_{12} = \nu_{12} D_2.$$

Согласно поршневой теории [23], составляющая аэродинамического давления  $P$  может быть представлена при сверхзвуковых скоростях через прогиб пластины

$$P = \frac{\kappa p_0}{c_0} \left( \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (6.2)$$

где  $p_0$  – давление в невозмущенном потоке,  $c_0$  – скорость звука в невозмущенном потоке,  $\kappa$  – показатель политропы газа,  $U$  – скорость потока.

Пусть амплитудное значение прогиба  $w(x, y)$ , т. е.  $W = we^{\sigma t}$ , тогда получаем следующую задачу на собственные значения в случае защемленных краев пластины:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + U_0 D_1 \frac{\partial w}{\partial x} = \lambda D_1 w \quad (6.3)$$

$$\text{при } x = \pm a: w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (6.4)$$

$$\text{при } y = \pm b: w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (6.5)$$

$$\text{где } U_0 = a^3 \frac{\kappa p_0}{c_0 D_1} U, \quad \lambda D_1 = -\rho h \sigma^2 - \sigma \left( \varepsilon \rho h + \frac{\kappa p_0}{c_0} \right).$$

Как известно, решение задачи на собственные значения (6.3)-(6.5) позволяет ответить на вопрос об устойчивости колебаний. Действительно, колебания пластины будут устойчивы при  $\text{Re } \sigma < 0$  и наоборот, при  $\text{Re } \sigma > 0$  являются неустойчивыми. Для удобства обозначим  $\Omega^2 = \frac{\rho h}{D_1} \sigma^2$  и  $g = \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} \varepsilon + \frac{\kappa p_0}{c_0 \sqrt{D_1 \rho h}}$ , тогда критерием устойчивости движения будет условие

$$\begin{cases} \Omega^2 + g\Omega + \lambda = 0 \\ \text{Re } \Omega < 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Заметим, что краевая задача (6.3)-(6.5) достаточно хорошо изучена [49, 54], в частности известно, что  $\text{Re } \lambda > 0$ , с увеличением параметра скорости  $U_0$  собственные значения  $\lambda$  последовательно переходят в комплексную область.

## 6.2. Метод Бубнова – Галеркина в задаче о флаттере защемленной пластины

### 6.2.1. Общая схема метода Бубнова – Галеркина.

Для построения решения задачи (6.3)-(6.5) используем метод Бубнова – Галеркина, в предположении, что известна система собственных функций пластины  $\{\phi_m(x, y)\}$  в вакууме, соответствующая собственным частотам  $\{\omega_m\}$ :

$$D_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = D_1 \omega^2 \phi \quad (6.7)$$

$$\text{при } x = \pm a: \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (6.8)$$

$$\text{при } y = \pm b: \phi = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (6.9)$$

Решение будем искать в виде разложения по собственным формам задачи (6.7) - (6.9):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m \phi_m(x, y) \quad (6.10)$$

которые по построению удовлетворяют краевым условиям (6.4)-(6.5).

Подстановка (6.10) в дифференциальное уравнение (6.3) согласно методу Бубнова – Галеркина, с учетом ортогональности собственных форм  $\{\phi_m(x, y)\}$  в области  $K$ , приводит к однородной бесконечной системе алгебраических уравнений вида:

$$\left(\lambda - \omega_m^2\right) \xi_m = U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_K \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \phi_m dK}{\int_K \phi_m^2 dK} \xi_n \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (6.11)$$

Определитель данной системы представляет собой дисперсионное уравнение для определения собственных чисел  $\lambda$ . В случае шарнирно-опертых краев пластины, когда удастся явным образом выразить собственные частоты и формы колебаний, в [23] доказываемость сходимости данного бесконечного (нормального) определителя. В представленном случае защемленных краев пластины краевая задача (6.7)-(6.9) не имеет явного аналитического решения, в силу чего процесс сходимости метода Бубнова - Галеркина для пластины с защемленными краями не исследован.

### 6.2.2 Базисные функции и особенности численной реализации.

Для построения общего решения уравнения (6.7) используем метод, представленный в третьей главе диссертации. Следуя данному подходу, общее решение задачи может быть представлено в виде суммы четных и нечетных составляющих по каждой из координат

$$\phi = \phi_{00} + \phi_{01} + \phi_{10} + \phi_{11}$$

где  $\phi_{00}$  - четная по обеим координатам,  $\phi_{01}$  - четная по  $x$  и нечетная по  $y$ , и т.п.

Разделяя переменные в уравнении (6.7), получаем общее решение в виде суммы тригонометрических рядов

$$\phi_{kj} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n H_j(p_{nk}y) + B_n H_j(\bar{p}_{nk}y)) T_k(\alpha_{nk}x) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n H_k(q_{nj}x) + D_n H_k(\bar{q}_{nj}x)) T_j(\beta_{nj}y) \quad (6.12)$$

где тригонометрические и гиперболические функции в зависимости от типа симметрии обозначены как

$$T_j(z) = \begin{cases} \cos z, & j=0 \\ \sin z, & j=1 \end{cases}; \quad H_j(z) = \begin{cases} \text{ch } z, & j=0 \\ \text{sh } z, & j=1 \end{cases}.$$

Константы разделения выбираются в форме, обеспечивающей полноту тригонометрических рядов (6.12) на границе пластины. Как это было показано в главе 3, это может быть сделано несколькими способами, в частности в форме

$$\alpha_{nj} = \frac{\pi}{a} \left( n - \frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right), \quad \beta_{nj} = \frac{\pi}{b} \left( n - \frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right), \quad (6.13)$$

Величины  $p_{nk}, \bar{p}_{nk}$  и  $q_{hj}, \bar{q}_{hj}$  являются корнями следующих характеристических уравнений

$$D_2 p^4 + (N_y - 2D_3 \alpha^2) p^2 + D_1 \alpha^4 - N_x \alpha^2 - D_1 \omega^2 = 0, \quad (6.14)$$

$$D_1 q^4 + (N_x - 2D_3 \beta^2) q^2 + D_2 \beta^4 - N_y \beta^2 - D_1 \omega^2 = 0, \quad (6.15)$$

которые выражаются аналитически как корни биквадратных уравнений

$$p = \sqrt{\frac{2D_3 \alpha^2 - N_y + \sqrt{D_p}}{2D_2}}, \quad \bar{p} = \sqrt{\frac{2D_3 \alpha^2 - N_y - \sqrt{D_p}}{2D_2}}, \quad (6.16)$$

$$q = \sqrt{\frac{2D_3 \beta^2 - N_x + \sqrt{D_q}}{2D_2}}, \quad \bar{q} = \sqrt{\frac{2D_3 \beta^2 - N_x - \sqrt{D_q}}{2D_2}}. \quad (6.17)$$

где

$$D_p = (N_y - 2D_3 \alpha^2)^2 - 4D_2 (D_1 \alpha^4 - N_x \alpha^2 - D_1 \omega^2), \quad (6.18)$$

$$D_q = (N_x - 2D_3 \beta^2)^2 - 4D_1 (D_2 \beta^4 - N_y \beta^2 - D_1 \omega^2). \quad (6.19)$$

Дискриминанты (6.18) - (6.19) являются знакопеременными в зависимости от комбинации параметров задачи и констант разделения  $\alpha_{nk}$ ,  $\beta_{nj}$  и были исследованы в п.3.2.

Относительно величин  $p_{nk}, \bar{p}_{nk}$  и  $q_{hj}, \bar{q}_{hj}$  следует заметить, что согласно теореме Виета для уравнений (6.14) - (6.15), выражения вида

$$\begin{aligned} D_1(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2) &= D_2(\beta_{mj}^2 + p_{nk}^2)(\beta_{mj}^2 + \bar{p}_{nk}^2) = \\ &= D_1\alpha_{nk}^4 + 2D_3\alpha_{nk}^2\beta_{mj}^2 + D_2\beta_{mj}^4 - D_1\omega^2 \end{aligned} \quad (6.20)$$

обязательно являются действительными.

Таким образом, общее решение (6.12) тождественно удовлетворяет разрешающему уравнению (6.7) и обладает достаточной полнотой для выполнения любых граничных условий.

Выбор констант разделения в форме (6.13) приводит для любого типа симметрии к тождеству

$$T_k(\alpha_{nk}a) = T_j(\beta_{nj}b) = 0,$$

что в случае защемленных краев пластины позволяет выполнить краевые условия (6.8) - (6.9) для функции прогиба  $\phi(x, y)$  тождественно, если положить, что неопределенные коэффициенты в общем решении связаны соотношениями

$$C_n = -D_n \frac{H_k(\bar{q}_{nj}a)}{H_k(q_{nj}a)}; \quad A_n = -B_n \frac{H_j(\bar{p}_{nk}b)}{H_j(p_{nk}b)}. \quad (6.21)$$

Подстановка соотношений (6.21) в оставшиеся краевые условия на углы поворота дает функциональные равенства

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi_{kj}}{\partial x} \right|_{x=a} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n H_j(\bar{p}_{nk}b) \alpha_{nk} \left( \frac{H_j(\bar{p}_{nk}y)}{H_j(\bar{p}_{nk}b)} - \frac{H_j(p_{nk}y)}{H_j(p_{nk}b)} \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} D_n H_k(\bar{q}_{nj}a) \left( \bar{q}_{nj} \frac{H'_k(\bar{q}_{nj}a)}{H_k(\bar{q}_{nj}a)} - q_{nj} \frac{H'_k(q_{nj}a)}{H_k(q_{nj}a)} \right) T_j(\beta_{nj}y) = 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_{kj}}{\partial y} \right|_{y=b} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_j(\bar{p}_{nk}b) \left( \bar{p}_{nk} \frac{H'_j(\bar{p}_{nk}b)}{H_j(\bar{p}_{nk}b)} - p_{nk} \frac{H'_j(p_{nk}b)}{H_j(p_{nk}b)} \right) T_k(\alpha_{nk}x) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n D_n H_k(\bar{q}_{nj}a) \beta_{nj} \left( \frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{H_k(\bar{q}_{nj}a)} - \frac{H_k(q_{nj}x)}{H_k(q_{nj}a)} \right) = 0 \quad (6.23)$$

Для определения последовательностей коэффициентов Фурье  $B_n$  и  $D_n$  используем разложения входящих в равенства (6.22), (6.23) гиперболических функций по системам тригонометрических функций. При этом схожесть разложения  $\operatorname{ch} z$  по системе  $\cos \frac{\pi(2n-1)}{2h} z$  и  $\operatorname{sh} z$  по системе  $\sin \frac{\pi n z}{h}$  на отрезке  $z \in [-h; h]$  дает возможность записать эти разложения для всех четырех случаев симметрии вместе

$$\frac{H_j(\bar{p}_{nk}y)}{H_j(\bar{p}_{nk}b)} - \frac{H_j(p_{nk}y)}{H_j(p_{nk}b)} = \frac{2(\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \beta_{mj} T_j(\beta_{mj}y)}{(\beta_{mj}^2 + \bar{p}_{nk}^2)(\beta_{mj}^2 + p_{nk}^2)} \quad (6.24)$$

$$\frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{H_k(\bar{q}_{nj}a)} - \frac{H_k(q_{nj}x)}{H_k(q_{nj}a)} = \frac{2(\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha_{mk} T_k(\alpha_{mk}x)}{(\alpha_{mk}^2 + \bar{q}_{nj}^2)(\alpha_{mk}^2 + q_{nj}^2)}. \quad (6.25)$$

Подстановка разложений (6.24) и (6.25) в функциональные равенства (6.22), (6.23) приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений следующего вида

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} Z_n \quad (m=1, 2, \dots), \quad (6.26)$$

относительно неизвестных

$$Z_{2m-1} = \frac{D_1}{a} (-1)^m D_m H_k(\bar{q}_{mj}a) (\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2), \quad Z_{2m} = \frac{\sqrt[4]{D_1 D_2^3}}{b} (-1)^{m+1} B_m H_j(\bar{p}_{mk}b) (\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2),$$

где обозначено

$$M_{2m-1, 2n-1} = 0; \quad M_{2m-1, 2n} = 4 \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \frac{2}{\Delta_{1,m}} \frac{\alpha_{nk}}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)}$$

$$M_{2m, 2n-1} = 4 \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \frac{2}{\Delta_{2,m}} \frac{\beta_{nj}}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)}; \quad M_{2m, 2n} = 0.$$

$$\Delta_{1,m} = \frac{a}{\beta_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} \left( \bar{q}_{mj} \frac{H'_k(\bar{q}_{mj}a)}{H_k(\bar{q}_{mj}a)} - q_{mj} \frac{H'_k(q_{mj}a)}{H_k(q_{mj}a)} \right)$$

$$\Delta_{2,m} = \frac{b}{\alpha_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} \left( \bar{p}_{mk} \frac{H'_j(\bar{p}_{mk}b)}{H_j(\bar{p}_{mk}b)} - p_{mk} \frac{H'_j(p_{mk}b)}{H_j(p_{mk}b)} \right).$$



Заметим, что система (6.26) с точностью до обозначений совпадает с бесконечной системой (3.48), которая детально исследована в п.3.2. В частности, доказана квазирегулярность этой системы и найдена асимптотика ее нетривиального решения

$$Z_{2m-1} = \frac{Z_\infty D_1^{\frac{1}{4}}}{\beta_{mj}}; \quad Z_{2m} = \frac{Z_\infty D_2^{\frac{1}{4}}}{\alpha_{mk}} \quad (m \rightarrow \infty). \quad (6.27)$$

Известное асимптотическое поведение неизвестных  $Z_m$  позволяет их найти при помощи метода улучшенной редукции и построить собственные формы колебаний пластины с заземленными краями с любой требуемой точностью в форме

$$\begin{aligned} \phi_{kj} = & \frac{b}{\sqrt[4]{D_1 D_2^3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} Z_{2n}}{\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2} \left( \frac{H_j(\bar{p}_{nk} y)}{H_j(\bar{p}_{nk} b)} - \frac{H_j(p_{nk} y)}{H_j(p_{nk} b)} \right) T_k(\alpha_{nk} x) + \\ & + \frac{a}{D_x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n Z_{2n-1}}{\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2} \left( \frac{H_k(\bar{q}_{nj} x)}{H_k(\bar{q}_{nj} a)} - \frac{H_k(q_{nj} x)}{H_k(q_{nj} a)} \right) T_j(\beta_{nj} y) \end{aligned} \quad (6.28)$$

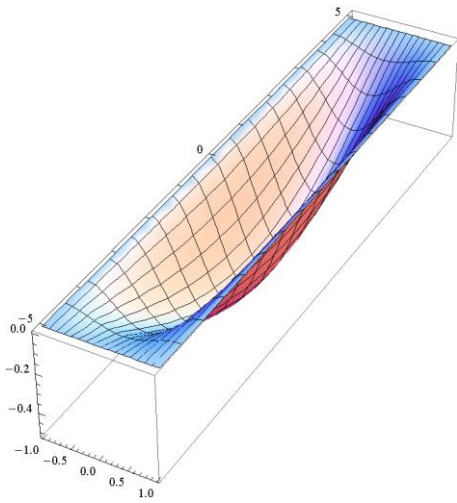
В качестве иллюстрации, на рис. 6.1 представлены нормированные в пространстве  $L_2$  собственные формы колебаний удлиненной ортотропной пластины ( $b/a = 5$ ) с параметрами  $D_1/D_2 = 3, D_3 = \sqrt{D_1 D_2}, N_x = N_y = 0$ .

Известно, что динамический краевой эффект имеет место лишь вблизи границ пластины, что позволяет представить основную часть собственной формы вдали от границы в виде произведения тригонометрических функций. Эта идея лежит в основе асимптотического метода и в принятых обозначениях порождающее решение имеет вид

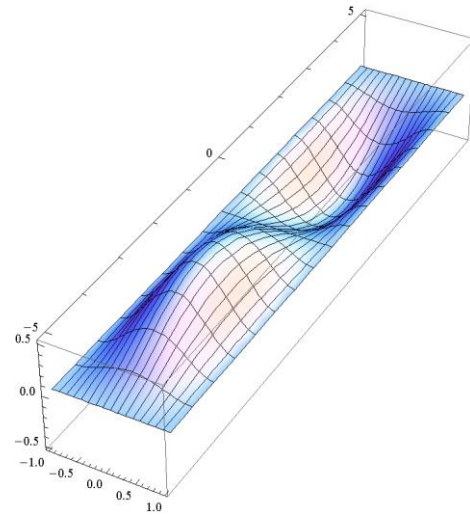
$$\phi_{mn}^0 = T_j(\gamma_{1m} x) T_k(\gamma_{2n} y), \quad (6.29)$$

где  $\gamma_{1m}, \gamma_{2n}$  - волновые числа в направлении каждой из осей.

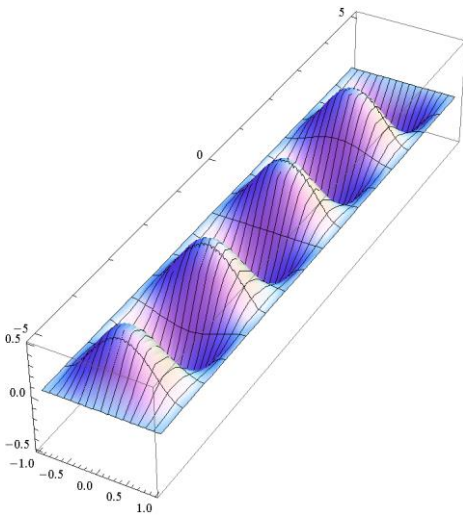
На рис. 6.1 практически все представленные собственные формы могут быть описаны формулой (6.29), за исключением пятнадцатой моды, где краевые эффекты приводят к существенному влиянию. Таким образом, для удлиненных пластин влияние краевого эффекта может приводить к искажению порождающего решения (6.29).



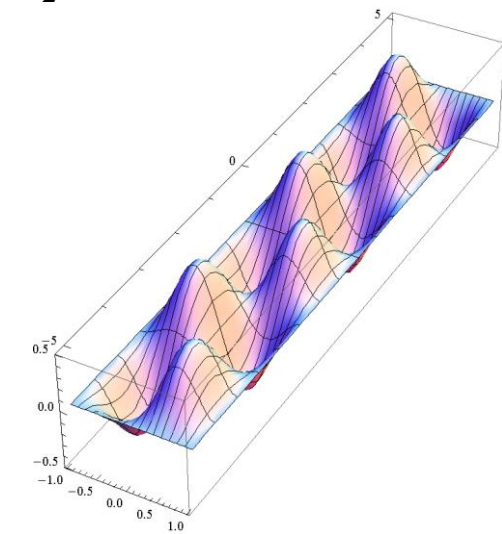
$$\omega_1 = 5.6292$$



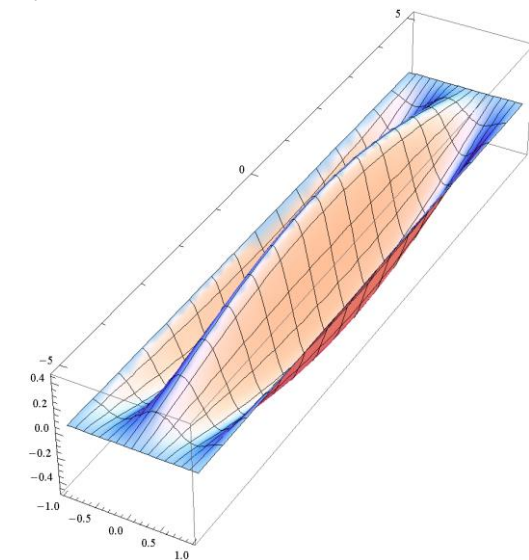
$$\omega_2 = 5.7389$$



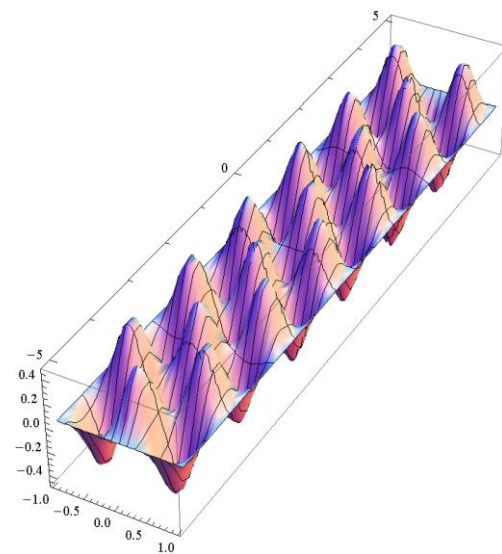
$$\omega_7 = 8.4384$$



$$\omega_{12} = 17.0999$$



$$\omega_{15} = 30.2742$$



$$\omega_{20} = 37.5058$$

Рис. 6.1. Собственные формы колебаний прямоугольной пластины ( $b/a = 5$ ) с параметрами  $D_1/D_2 = 3, D_3 = \sqrt{D_1 D_2}, N_x = N_y = 0$

Заметим, что построенные собственные формы пластины в вакууме (6.28) разделяются на четыре типа по четности относительно координатных осей. Это приводит к разреженности матрицы системы (6.11) метода Бубнова – Галеркина. Действительно, интеграл

$$\int_K \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \phi_m dK$$

будет отличен от нуля лишь в случае, когда совпадает четность обоих сомножителей под знаком интеграла. Таким образом, для ненулевого значения интеграла собственная форма  $\phi_m$  является четной по  $x$ , то  $\phi_n$  - нечетная, и наоборот.

Проводя редукцию системы (6.11), при удержании в расчетах первых  $N$  собственных форм, задачу об определении  $\lambda$  можно свести к вычислению собственных значений конечной матрицы  $N$ -го порядка

$$\Lambda_{mn} = \omega_m^2 \delta_{mn} + U_0 \int_K \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \phi_m dK \quad (6.30)$$

при условии, что собственные формы предварительно нормированы  $\int_K \phi_m^2 dK = 1$ .

Данный подход эквивалентен традиционной процедуре метода Бубнова – Галеркина с выписыванием дисперсионного уравнения в виде определителя, но представляется более эффективным с вычислительной точки зрения.

### 6.2.3. Сходимость метода.

На рис. 6.2. представлена блок-схема определения параметра критической скорости при помощи описанной выше вычислительной процедуры. Вначале задается некоторое начальное значение параметра скорости  $U_0^*$ , после определения при заданном параметре  $U_0$ , собственных значений  $\{\lambda_j\}$ , для каждого из собственных значений определялись соответствующие корни квадратного уравнения  $\{\Omega_j^\pm\}$ , которые затем проверялись согласно критерию устойчивости (6.6).

Проводя вычисления в цикле с малым шагом по параметру скорости  $U_0$  при фиксированном порядке матрицы (6.30) находилось критическое значение параметра скорости  $U_0^{kp}$ , при котором одно из значений  $\{\Omega_j^\pm\}$  становится чисто комплексным, что свидетельствует о переходе в область неустойчивого движения.

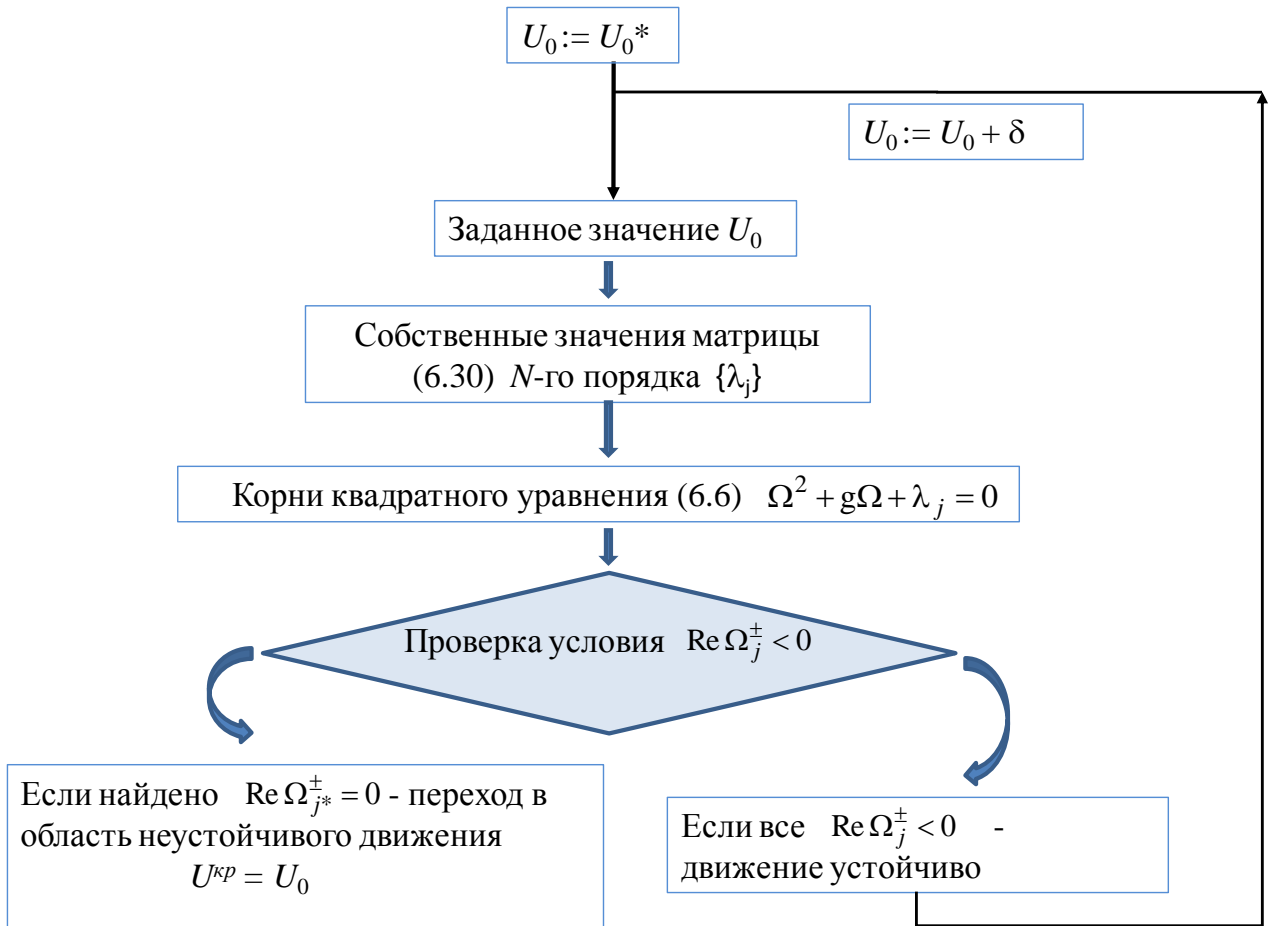


Рис. 6.2. Блок-схема определения критической скорости

В табл. 6.1 представлена сходимость метода Бубнова – Галеркина при варьировании параметров задачи. Рассматривалась стальная пластина с упругими параметрами  $\rho = 7.8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 1.9982 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0,3$ . Параметры воздушного потока следующие  $p_0 = 1.0126 \cdot 10^5$  Па,  $\rho_0 = 1.2928$  кг/м<sup>3</sup>,  $\kappa = 1.4$ . В представленных примерах предполагалось отсутствие затухания  $\varepsilon = 0$ , при моделировании ортотропных свойств материала предполагалось, что по оси  $Ox$  жесткость  $D_1$  соответствует стальной пластине, а жесткость  $D_2$  по оси  $Oy$  изменяется в некотором отношении, при этом  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ .

Таблица 6.1. Сходимость метода Бубнова – Галеркина.

$N$	$U_0$			
	$D_1 = D_2$ $N_x = N_y = 0$ $b/a = 1$	$D_1 = 3D_2$ $N_x = N_y = 0$ $b/a = 1$	$D_1 = D_2$ $N_x = N_y = 0.5\pi^2 D_1$ $b/a = 1$	$D_1 = D_2$ $N_x = N_y = 0$ $b/a = 5$
8	119.90	98.68	89.05	62.64
12	105.45	102.02	83.87	62.56
16	106.39	93.89	84.31	62.62
20	106.39	93.89	84.31	62.52
24	106.39	93.89	84.31	62.52

Из представленных данных можно увидеть, что удовлетворительная точность полученных результатов начинает наблюдаться уже при  $N \geq 16$ . Заметим, что отношение сторон пластины не влияет на характер сходимости.

На рис.6.3 представлена эволюция собственных значений краевой задачи  $\Omega$  с увеличением параметра скорости  $U_0$  для квадратной изотропной пластины. Можно увидеть на рис. 6.3а, что для заземленной квадратной панели критическая скорость соответствует сближению и слиянию первых двух собственных частот колебаний. Более подробный анализ действительной части  $\text{Re } \Omega_1$  (рис.6.3б) показывает, что вначале происходит ветвление постоянной действительной части при  $U_{\text{доф}} = 105.78$ , и только после этого одна из ветвей  $\text{Re } \Omega_1^+$  становится положительной. Данная картина согласуется с результатами работы [66], где было предложено различать две критические скорости, первую – дофлаттерную, при которой движения панели переходят из стоячих волн в бегущие волны с ограниченной амплитудой, и вторую критическую скорость – флаттерную, при которой амплитуды бегущих волн начинают возрастать во времени. Из представленных данных следует, что обе критические скорости для заземленной панели отличаются незначительно, менее чем на 1%, однако отождествлять их не следует, что делается, например, в работе [215].

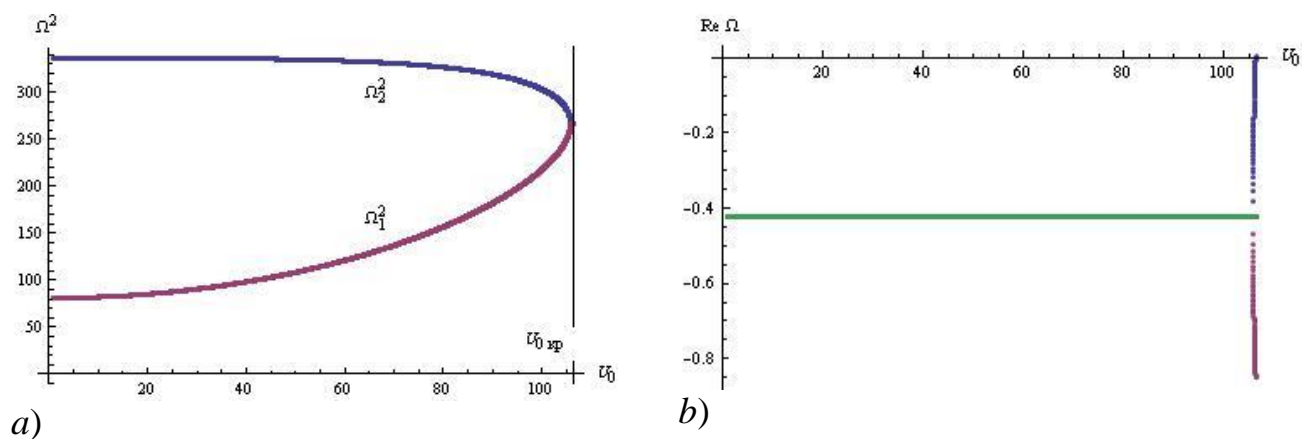


Рис.6.3. Слияние первых двух частот для квадратной изотропной пластины

Похожая картина наблюдается на рис.6.4, где представлены собственные частоты для удлиненной панели  $a:b=1:5$ . Здесь флаттер достигается благодаря слиянию шестой и седьмой собственных частот (рис.6.4a), в данном случае дофлаттерная критическая скорость  $U_{доф} = 62.33$ , в то время как  $U_0^{KP} = 62.52$ , то есть здесь отличие оказывается еще менее заметным.

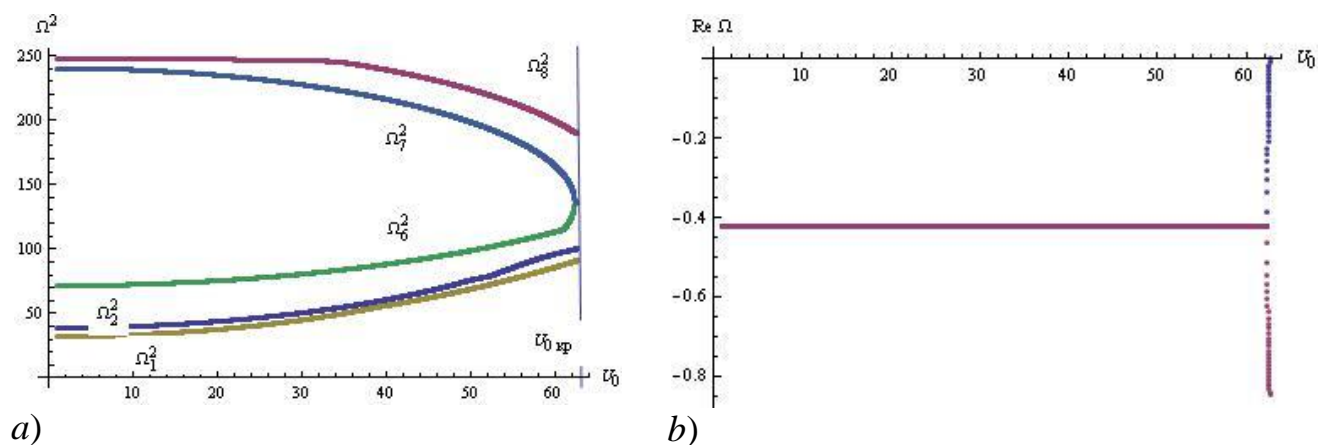


Рис.6.4. Слияние 6-й и 7-й частот для удлиненной изотропной пластины

### 6.3. Численные результаты

Для верификации полученных результатов проведем сравнение полученных значений критической скорости, в частности критического давления

$$\bar{\lambda}_{cr} = \frac{\rho_0 a^3 U^2}{D \sqrt{M^2 - 1}},$$

где  $M$  – число Маха, в сравнении с результатами [149]. Эти данные представлены в табл. 2 для квадратной изотропной пластины

Таблица 6.2. Сверка с известными результатами

Источник, метод	$\bar{\lambda}_{cr}$
Durvasula, метод Рэля-Ритца 16 членов, балочные функции	838
Kornecki, метод Галеркина 4 члена, функции Iguchi	616
Sabderris, МКЭ	880
Present, Метод Бубнова - Галеркина	883

Данные табл. 6.2 показывают, что расчеты по представленному методу дают схожие результаты с расчетами методом конечных элементов и удовлетворительно совпадают с результатами метода Рэля –Ритца в 16-ти членном приближении.

В следующей табл. 6.3. дано сравнение критической скорости для квадратной пластины, движущейся в воздушном потоке при увеличении толщины пластины  $h$  для двух типов граничных условий. Для шарнирно-опертой пластины (SSSS) значения критической скорости

$$v = \frac{U}{c_0}$$

взяты из [2], для жестко-защемленной пластины (CCCC) вычислялись на основе представленного алгоритма.

Как и ожидалось, значения критической скорости для защемленной пластины существенно выше по сравнению со свободно-опертой пластиной. С увеличением толщины пластины критическая скорость также растет.

Таблица 6.3. Значения критической скорости  $v$  для свободно опертой и заземленной квадратной пластины

$h$	SSSS [2]	CCCC
0.0050	1.0615	1.7327
0.0063	2.0991	3.4351
0.0072	3.1324	5.1578
0.0079	4.1523	6.8417
0.0085	5.1805	8.5419

Рассмотрим результаты расчетов для заземленной пластины, выполненные при тех же значениях механических параметров, которые представлены в табл. 6.1. Варьировались относительный размер  $b$ , усилия в плоскости пластины  $N_x$  и  $N_y$ , свойства материала и параметр скорости  $U_0$ .

В табл. 6.4. представлены результаты тестовых расчетов для изотропной стальной квадратной пластины при различной планарной нагрузке.

Таблица 6.4. Различные случаи нагрузки (изотропный материал)

$N_x$	$N_y$	$U_0$
0	0	106.39
$0.5\pi^2 D_1$	$0.5\pi^2 D_1$	84.31
$-0.5\pi^2 D_1$	$-0.5\pi^2 D_1$	130.06
0	$\pi^2 D_1$	106.34

Соответствующие формы потери устойчивости показаны ниже на рис. 6.5 для изотропных панелей при отсутствии планарных нагрузок. Заметим, что анализ собственных форм показывает, что влияние планарных нагрузок на форму потери устойчивости незначительно.



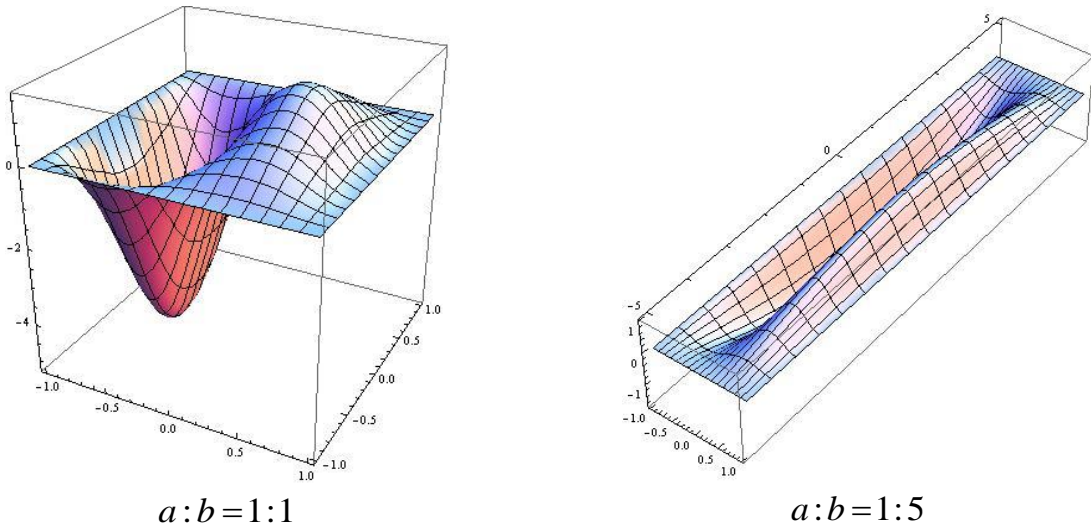


Рис.6.5. Собственные формы потери динамической устойчивости

Заметим, что величины планарных усилий выбраны таким образом, чтобы оставаться в зоне статической устойчивости защемленной пластины (рис. 6.6). Из представленных данных можно увидеть, что растяжение дает большее значение критического параметра. При этом форма потери устойчивости остается практически неизменной.

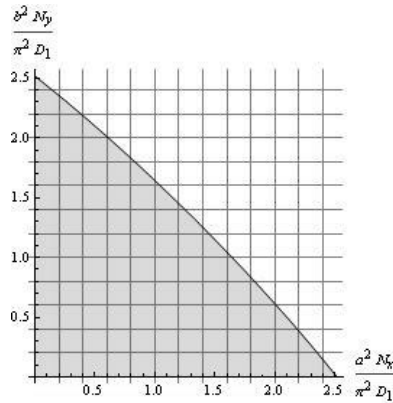


Рис. 6.6. Зона статической устойчивости изотропной пластины  
(серый цвет)

Для анализа влияния планарных нагрузок на потерю устойчивости ортотропной панели, рассматривалась квадратная пластина с параметрами жесткости  $D_1$  соответствующей стальной пластине, жесткость  $D_2 = D_1/3$ ,

$D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ . В табл. 6.5 представлены критические значения параметра  $U_0^{kp}$  для квадратной пластины при различных случаях планарной нагрузки.

Таблица 6.5. Различные случаи нагрузки (ортотропный материал)

$N_x$	$N_y$	$U_0$
0	0	93.89
$0.5\pi^2 D_1$	$0.5\pi^2 D_1$	73.40
$-0.5\pi^2 D_1$	$-0.5\pi^2 D_1$	116.01
$\pi^2 D_1$	0	53.11
0	$\pi^2 D_1$	80.07

Сжатие пластины в направлении движения газа приводит к уменьшению критической скорости, растяжение в направлении перпендикулярном движению газа дает увеличение критической скорости. Можно увидеть из данных табл.6.5, что сжатие ортотропной пластины в направлении перпендикулярном движению, незначительно снижает значение критической скорости. Отметим, что в работе [149], отмечается, что данные нагрузки не влияют на критическую скорость. Представленные же здесь результаты показывают, что в случае ортотропного материала влияние имеется, хоть и незначительное.

#### 6.4. Краткие выводы по главе 6

Представленный в данном разделе алгоритм позволяет провести исследование динамической устойчивости прямоугольных ортотропных пластин на основе метода Бубнова–Галеркина. Исследование сходимости метода указывает, что сходимость обеспечивается при  $N \geq 16$ , требуется брать не менее четырех первых базисных функций в каждом из направлений симметрии. Сходимость метода и точность полученных результатов во многом зависят от точности построения собственных форм пластины в вакууме. В представлении (6.28) выявлены нормированные собственные формы более

чувствительные к погрешности, для таких форм погрешность в определении собственной частоты в 0,5%, может приводить к 100% погрешности в выполнении граничных условий, что соответственно искажает коэффициенты матрицы для метода Бубнова – Галеркина. Этот факт требует вычисления собственных частот и форм пластины в вакууме с избыточной точностью, что позволяет избежать погрешности при применении метода Бубнова – Галеркина в данном базисе.

Результаты расчетов показывают следующие качественные зависимости:

- равномерно сжимающие нагрузки на пластину приводят к уменьшению критического значения параметра скорости, динамическая неустойчивость наступает на более медленных скоростях;

- нагрузки, сжимающие пластину только в направлении перпендикулярном движению, приводят к значительно более медленному уменьшению критического значения параметра скорости по сравнению с равномерно нагруженной пластиной;

- растягивающие пластину нагрузки, приводят к увеличению критического значения параметра скорости;

- форма потери динамической устойчивости для квадратной пластины мало меняется при варьировании параметров;

- увеличение сторон пластины в направлении, перпендикулярном потоку, а также уменьшение жесткости пластины в данном направлении приводит к уменьшению критической скорости.

Заметим также, что представленные расчеты для удлиненной панели показывают, что флаттер может достигаться не обязательно на первых модах, в тестовом примере критической модой является шестая.

Представленный подход легко обобщается на случай произвольного направления вектора скорости относительно сторон пластины и может служить основой для более детального анализа флаттера прямоугольника в зависимости от упругих свойств материала пластины.

Результаты данного раздела опубликованы в статьях [93], [105].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнен комплекс исследований по построению аналитических решений для ряда задач колебания и устойчивости тел полигонального сечения, цель которого заключалась в разработке спектрального метода динамической жесткости для анализа ансамблей пластин при произвольных граничных условиях. На данной основе представлен высокоточный подход к исследованию механического поведения тонких пластин полигонального сечения, балок полигонального сечения и конечного прямоугольного параллелепипеда при гармонических колебаниях в широком диапазоне частот.

Основные результаты состоят в следующем:

- 1) Построен новый эффективный спектральный метод динамической жесткости для анализа пластин и их ансамблей. Используя полученные решения для задачи колебания пластин, строится спектральная матрица жесткости, связывающая значения граничных усилий и смещений пластины. Данный результат получен впервые для произвольной комбинации классических граничных условий. На основе матрицы жесткости элемента в виде отдельной пластины, строится алгоритм их объединения в общую DSM матрицу ансамбля пластин. Таким образом, построен новый метод, подобный к Dynamic stiffness method, эффективность которого численно подтверждена на примере задач для пластин полигонального сечения.
- 2) Впервые получены решения для ряда задач колебания и устойчивости прямоугольных ортотропных пластин, позволяющих описать структурный элемент в виде прямоугольной пластины, в том числе для среднего и высокого диапазона частот колебаний.
- 3) Проведен анализ напряжений вблизи углов прямоугольника, крестообразной области, который показывает, что усечение бесконечных рядов, представляющих напряжения приводит к возникновению явления Гиббса, что не дает возможности достоверно описать напряжения вблизи углов. Улучшение сходимости рядов в выражениях напряжений, на основе найденных аналитически асимптотик решений бесконечных систем,

позволяет избежать явления Гиббса и получить эффективное решение во всей полигональной области.

- 4) Впервые получены аналитические решения для вынужденных гармонических колебаний пластин с геометрией в виде равнобокого креста, которые позволяют описать возникающие смещения и напряжения вблизи угловых точек области, вблизи резонансных частот.
- 5) Найдено в замкнутой форме асимптотически точное решение задачи о колебаниях упругого параллелепипеда в трехмерной постановке под действием приложенных к граням напряжений. Асимптотика решений соответствующей бесконечной системы позволяет аналитически улучшить сходимость рядов в выражениях напряжений и исследовать спектр собственных частот, показать наличие краевого резонанса.
- 6) Впервые представлено решение задачи о панельном флаттере защемленной ортотропной панели на основе метода Бубнова – Галеркина, где в качестве базисных функций предлагается брать собственные формы колебаний панели в вакууме, вычисленные на основе метода спектральной динамической жесткости.
- 7) Разработан ряд аспектов теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, которая позволяет эффективно исследовать полученные бесконечные системы. Впервые получен эффективный метод для отыскания асимптотик решения регулярных бесконечных систем. Учитывая, что квазирегулярную бесконечную систему всегда можно разложить на совокупность регулярных систем, представленная теорема 2.7 также дает возможность для исследования асимптотик квазирегулярных бесконечных систем.

Решения представленных в диссертации задач имеют самостоятельное практическое значение, состоящее в том, что высокочастотные колебания перечисленных выше объектов встречаются в различных прикладных задачах технического характера (микро- и наноэлектронике, в задачах строительной механики, при моделировании технических систем, в геофизике и др.), также данные решения могут быть использованы для параметрической оптимизации, для анализа устойчивости к вибрации технических систем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х. Кручение упругих тел. – М.: Физматгиз, 1963. 683 с.
2. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Численно - аналитическое исследование флаттера пластины произвольной формы в плане // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 60, вып. 1. С. 171 - 174.
3. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
4. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1967. 258с.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: прочность, устойчивость и колебания. – М.: Наука, 1987. 360 с.
7. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок // Изв. АН СССР. ОТН, 1960, №1. С. 159 – 166.
8. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. 288 с.
9. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Изд-во «Наука», 1965. 560 с.
10. Бабешко В.А., Пельц С.П. Колебание плит на упругом слое // Изд-во АН СССР «Механика твердого тела», 1976. №1. С. 131-135.
11. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Топологический метод решения граничных задач и блочные элементы // ДАН. 2013. Т. 449. № 6. С. 657-660.
12. Бабич Д.В., Борисенко В.И., Шпакова С.Г. Свободные колебания пластинки со сосредоточенными массами // АН УССР «Прикладная механика», 1969. т.5, в.5. С. 71-75.
13. Бажанов В.Л., Гольденблат И. И., Копнов В.А., Поспелов А.Д., Синюков А.М. Пластинки и оболочки из стеклопластиков. Учебное пособие для вузов. Под ред. И. И. Гольденבלата. – М.: Высшая школа, 1970. – 408 с.
14. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об одной задаче динамической устойчивости прямоугольной пластины в сверхзвуковом потоке газа // Доклады национальной академии наук Армении, Т. 114, №3, 2014. С. 213 -221.

- 15.Бондаренко П. С. К вопросу о единственности для бесконечных систем линейных уравнений // Мат. Сборник, 1951. 29, № 2. С. 403 - 418.
- 16.Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатие, 1987. 295 с.
- 17.Болотин В.В., Макаров Б.П., Мищенко Г.В., Швейко Ю.Ю. Асимптотический метод исследования спектра упругих пластинок // Расчеты на прочность, Вып.6. М.: Машгиз, 1960. С. 231 – 253.
- 18.Болотин В.В., Григолюк Э.И. Устойчивость упругих и неупругих систем // Механика в СССР за 50 лет. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1972. Т.3. С. 325-363.
- 19.Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
- 20.Болотин В.В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1965. Вып. 11. С. 31- 63.
- 21.Болотин В.В. Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1965. Вып. 12. С. 3- 31.
- 22.Болотин В.В. Современные направления в области динамики пластин и оболочек. - Киев, Наукова думка, 1962. С. 16-32.
- 23.Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Гос. изд. физ. - мат. литературы, 1961. 341 с.
- 24.Власов А.Г. Метод переопределенных рядов в некоторых краевых задачах математической физики // Вопр. динам. Теории распространения сейсм. волн, 1959. 3. С. 403-463.
25. Власов Б.Ф. Об уравнениях теории изгиба пластин // Изд. АН СССР ОТН, 1957. №12. С. 57-60.
- 26.ВласовВ.З. Общая теория оболочек и ее приложение к технике. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
- 27.Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Госиздат физ. мат. литературы, 1960.492 с.
28. Власов В.З. Избранные труды, т.1. – М.: изд-во АН СССР, 1962. 528 с.

29. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. - М.: Наука, 1972, 432 с.
30. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. 984 с.
31. Ворович И.И., Шленев М.А. Пластины и оболочки // Механика – 1963. Итоги науки. - М.: ВИНТИ, 1965. С. 91 -177.
32. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. - М.: Наука, 1979. 320 с.
33. Ворович И.И., Александров В. М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. - М.: Наука, 1974. 456 с.
34. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. – М.: Науч. мир, 1999. 246 с.
35. Галиныш А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям // Исследования по теории пластин и оболочке. Казань. Изд-во КГУ. 1970. №7. С. 24-26.
36. Гомилко А.М. Закон асимптотических выражений в теории функциональных уравнений в  $K_\sigma$ -пространствах // Укр. мат. журнал, 1987. т. 39, №5. С. 551-554.
37. Григолюк Э.Н., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. 272с.
38. Григолюк Э.И. Метод Бубнова. Истоки. Формулировки. Развитие. - М.: НИИ Механики МГУ, 1996, 58 с.
39. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
40. Гринченко В.Т., Вовк И.В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. – К.: Наукова думка, 1986. 240 с.
41. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
42. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Динамическая задача теории упругости для прямоугольной призмы // Прикладная механика. 1971. 8, №9. С. 50 – 57.
43. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. - Киев. Вища школа. 1982. 350 с.
44. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1971. 276 с.



45. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. — Киев: Наук. думка, 1972. 256 с.
46. Егорычев О.О. Колебания плоских элементов конструкций. — М.: АСВ, 2005. 240 с.
47. Елисеев В.В. Механика упругих тел. - СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. 341 с.
48. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука. 1970. 280 с.
49. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Колебания прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика, 1994. №4. С. 40 – 44.
50. Иванова Е. А. Асимптотический и численный анализ высокочастотных свободных прямоугольных пластин // Изв. РАН Мех. тверд, тела (Изв. АН СССР Мех. тверд, тела), 1998. №2. С. 163-174.
51. Канторович Л. В. О функциональных уравнениях // Уч. зап. ЛГУ, 1937. № 3 (17). С. 24 - 50.
52. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. 752с.
53. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа – 5-е изд. - М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
54. Кийко И.А, Алгозин С.Д. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука, 2006. 248 с.
55. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. - М.: ГИТТЛ, 1956. 192 с.
56. Коренев Б.Г., Пановко Я.Г. «Динамический расчет сооружений» // Сб. Строительная механика в СССР 1917-1967. - М.: Стройиздат, 1969. С. 280-329.
57. Коялович Б.М. Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова, 1930. Т. 3. С.41–167.
58. Коялович Б. М. К теории бесконечных систем линейных уравнений // Труды Физ.- мат. ин.- та им. В. А. Стеклова, 1932. 2, №4. С.1 - 16.
59. Кузьмин Р. О. К теории бесконечных систем линейных уравнений // Труды Физ. -мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1931. 2, № 2. С. 18 – 41.
60. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977. 416 с.

- 61.Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – Л - М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1947. 355 с.
- 62.Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. 940 с.
- 63.Мелешко В.В., Гринченко В.Т., Папков С.О. Резонансные колебания пластин: от Хладни и Ритца до наших дней / XIV Межд. конференция: Современные проблемы механики сплошной среды. 2010, Ростов-на-Дону. С.27.
- 64.Мелешко В.В., Папков С.О. Закон асимптотических выражений Бубнова Кояловича // Вестник Днепропетровского университета. Серия «Механика». Вып 15, Т.2, № 5, 2011. С. 163 – 174.
- 65.Мелешко В.В., Папков С.О., Ван Хейст Г.Я.Ф. Закон асимптотических выражений Бубнова-Кояловича в задаче изгиба жестко-защемленной прямоугольной пластины // Известия Вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск. 2009. С.82-87.
- 66.Мовчан А.А. Об устойчивости панелей, движущихся в газе // ПММ, 1957. т.21. в.2. С. 231-243.
- 67.Мышкис А. Д. Математика для вузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971. 632 с.
- 68.Немировский Ю.В., Самсонов В.И. Анализ исследований по динамическому поведению КМ-конструкций // Моделирование в механике. Новосибирск. Ин-т теорет. и прикладной механики, 1993, т. 7(24), № 4, С. 110 – 116.
- 69.Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. 872 с
- 70.Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
- 71.Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.,М.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
- 72.Орел В. Р. Определение свободных колебаний упругой пластинки с помощью N-параметрических собственных функций бигармонического оператора // Докл. АН СССР,-1988. 303. №2. С. 326-329.
- 73.Пановко Я.Г., Губанов И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. - М.: Наука, 1967. 420 с.
- 74.Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1985. 288с.

75. Папков С.О., Чехов В.Н. О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе // Доклады НАН Украины. 2004. №10. С.57-62.
76. Папков С.О. Динамическая задача для прямоугольной призмы // Вестник СевГТУ. Сер. «Механика, энергетика, экология». 2005. Вып. 67. С. 5-18.
77. Папков С.О. Спектр собственных частот кососимметричных колебаний прямоугольной призмы // Вестник СевГТУ. Сер. «Физика и математика». 2005. Вып. 70. С.148 -157.
78. Папков С.О. Установившиеся вынужденные колебания призмы при заданных на границе смещениях // Акустический вестник. 2008. Т.11. №4. С.36-43.
79. Папков С.О., Мелешко В.В. Изгибные колебания прямоугольной пластины со свободными краями // Теоретическая и прикладная механика. 2009. В.46. С.104-111.
80. Папков С.О., Мелешко В.В. Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1909) до наших дней // Акустический вестник. 2009. Т.12. №4. С.34-51.
81. Папков С.О., Мелешко В.В. Собственные формы колебаний упругих прямоугольных пластин со свободными краями // Сборник трудов XIV Межд. конференции: Современные проблемы механики сплошной среды. 2010, Ростов-на-Дону. С. 217-222.
82. Папков С.О. Бесконечные системы линейных уравнений в случае первой основной граничной задачи для прямоугольной призмы // Динамические системы. 2010. Вып. 28. С. 89-98.
83. Папков С.О. Обобщение закона асимптотических выражений Кояловича на случай неотрицательной бесконечной матрицы // Динамические системы. 2011. Т.1 (29), № 2. С. 255-267.
84. Папков С.О. Планарные колебания прямоугольной пластины в случае первой основной граничной задаче // Динамические системы. 2011. Т.1 (29), № 1. С. 41-51.
85. Папков С.О. Установившиеся вынужденные колебания прямоугольной ортотропной призмы // Математические методы и физико-механические поля, 55, №2, 2012. С. 177-185.

86. Папков С.О., Чехов В.Н. Исследование регулярности бесконечной системы алгебраических уравнений и определение критических нагрузок в задаче об устойчивости сжатой прямоугольной пластины // Доклады НАН Украины. 2012 №12. С. 55-60.
87. Папков С.О., Чехов В.Н. Предельные лимитанты в задачах динамики для прямоугольной призмы // Прикладная механика. 2013. №5. С. 62-76.
88. Папков С.О. Элемент в виде прямоугольной пластины в рамках Dynamic Stiffness Method // Динамические системы. 2013. Т.3 (31), № 1-2. С. 95-101.
89. Папков С.О. Гармонические колебания призмы с сечением в виде креста // Математические методы и физико-механические поля. 2013. 56. №3. С.170-181.
90. Папков С.О. Пространственная динамическая задача теории упругости для параллелепипеда // Математические методы и физико-механические поля. 2014. 57, № 2. С. 97 – 111.
91. Папков С.О. Колебания прямоугольной ортотропной пластины со свободными краями: анализ и решение бесконечной системы // Акустический журнал. 2015, т. 61, №2. С. 152-160.
92. Папков С.О. Асимптотически точное решение задачи о гармонических колебаниях упругого параллелепипеда // Известия РАН Механика твердого тела. 2017. № 6 С. 109-125.
93. Папков С.О. Флаттер защемленной ортотропной прямоугольной пластины // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т.10, №4. С. 361-374.
94. Папков С.О., Чехов В.Н. Исследование нестационарного деформирования упругой прямоугольной призмы / Dynamical system modelling and stability investigation. May, 2005. Kiev: Kiev University. P. 315.
95. Папков С.О., Чехов В.Н. Асимптотики решений регулярных бесконечных систем в задачах динамики для упругой прямоугольной призмы / Актуальные проблемы механики твердого деформируемого тела. Материалы IV межд. науч. конф. июнь, 2006. Донецк: ДонНУ. С. 289-291.
96. Папков С.О., Чехов В.Н. Исследование бесконечной системы линейных уравнений в задаче о колебаниях призмы при заданных на границе смещениях / Восьмая Крымская международная математическая школа. Сентябрь, 2006 г. Симферополь: ТНУ. С. 136.

97. Папков С.О. Собственные частоты колебаний призмы в случае кинематических граничных условий / Прикладные задачи математики и механики. Материалы XV межд. науч. конф. Севастополь. Сентябрь, 2007. С. 3-7.
98. Папков С.О. Спектр колебаний прямоугольной призмы под действием вынуждающих смещений / Акустический симпозиум «Консонанс-2007», Киев, Институт гидромеханики. С. 35.
99. Папков С.О. Метод суперпозиции в задаче аналитического построения фигур Хладни / Прикладные задачи математики и механики. Материалы XVIII межд. науч. конф. Севастополь. Сентябрь 2010. С. 3-8.
100. Папков С.О., Чехов В.Н. Метод предельных лимитант для установившихся колебаний прямоугольной призмы / Десятая Крымская международная математическая школа. Сентябрь 2010 г. Симферополь: ТНУ. С. 110.
101. Папков С.О. Свободные колебания прямоугольной ортотропной пластины / Прикладные задачи математики и механики. Материалы XIX межд. науч. конф. Севастополь. Сентябрь 2011. С. 3-8.
102. Папков С.О. Новый подход к точному определению критических нагрузок в задачах статической устойчивости пластин / Прикладные задачи математики и механики. XX межд. науч. конф. Севастополь, сентябрь 2012. С. 3-8.
103. Папков С.О., Чехов В.Н. Приложение теории бесконечных систем к задачам колебания ортотропных пластин / Моделирование, управление и устойчивость (MCS) 2012, Крым, Севастополь, 10-14 сентября, 2012. С.57.
104. Папков С.О. Динамическая задача теории упругости для трехмерного параллелепипеда / Прикладные задачи математики и механики. XXII межд. науч. конф. Севастополь, сентябрь 2014. С. 3-8.
105. Папков С.О. Динамическая устойчивость защемленной ортотропной панели/ Прикладные задачи математики. XXV межд. науч. конф. Севастополь, сентябрь 2017. С. 42-46.
106. Перцев А. К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин. - Л.: Судостроение, 1987 320 с.
107. Петрашень Г.И., Хинен Э.В. Об инженерных уравнениях колебаний неидеально-упругих тонких пластин // АН СССР, труды математического института им В.А.Стеклова. - Л.: изд-во «Наука, 1968, С. 151-183.

108. Петрашень Г.И., Хинен Э.В. Об условиях применимости инженерных уравнений колебаний неидеально-упругих пластин // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Изд-во «Наука», 1971. №11. С.48-56.
109. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
110. Пожуев В.И. Влияние величины постоянной скорости нагрузки на реакцию пластины, лежащей на упругом основании // АН СССР, «Механика твердого тела». 1981. №6. С.112-118.
111. Поручков В.Б. Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. 327 с.
112. Пшеничнов Т.И. Метод декомпозиций решения уравнений и краевых задач // М.: ДАН СССР. 1985. т.282. №4. С.792-794.
113. Пшеничников Г. И., Скоринов А. В. Свободные колебания ортотропной прямоугольной пластины с упругим контуром // Изв. РАН. Сер. Мех. тверд. тела. 1992. №2. С. 166-169
114. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник / Под общ. ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. - М.: Машиностроение, 1968, Т. 3. 508 с.
115. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А.Брычков, О.И. Маричев – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1981, 800 с.
116. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. 711 с.
117. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R - функции в задачах теории пластин. - Киев: Наук. думка, 1987, 176 с.
118. Сагомоян А.Я. Волны напряжений в сплошных средах. - М.: изд-во МГУ. 1985, 416 с.
119. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т. 1. - М.: Наука, 1994. 526 с.
120. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т. 2. - М.: Наука, 1994. 560 с.
121. Селезов И.Г. Исследование распространения упругих волн в плитах и оболочках // Тр. конф. по теор. пластин и оболочек. 1960. Казань. С.347-352.

122. Селезов И.Г. Концентрация гиперболичности в теории упругих динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. 1969. В.1. Киев. Наукова думка. С. 131-137.
123. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. - Л.: Судостроение, 1972. 340 с.
124. Сорокин Е.С., Архипов А.С. Исследование свободных поперечных колебаний балки, как плоской задачи колебания упругости // Строительная механика. 1966. М.: Стройиздат. С. 134-141.
125. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. 635 с.
126. Тимошенко С.П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. 4-е изд. - М.: Наука, 1984. 474 с.
127. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. 576 с.
128. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ., 1948. 12. 33. С.287-300
129. Федоров Ф.М. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и их приложения. – Новосибирск: Наука, 2011. 311с.
130. Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.
131. Филиппов И.Г., Егорычев О.А. Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах. - М.: Машиностроение. 1983. 269 с.
132. Филиппов И.Г., Чебан В.Г. Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. - Кишинев. Штиинца. 1988. 190 с.
133. Чехов В.Н., Пан А.В. Об улучшении сходимости рядов для бигармонической задачи в прямоугольнике // Динамические системы, 2008. №3. С. 135–144.
134. Чехов В.Н., Пан А.В. Про граничні вирази лімітант Кояловича // Доповіді НАН України, 2007. №3. С. 31–36.
135. Banerjee J.R. A simplified method for the free vibration and flutter analysis of bridge decks // Journal of Sound and Vibration, 2003. 260. P. 829-845.
136. Banerjee J.R. and Su H. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of a spinning composite beam // Computers & Structures, 2006. 84. P. 1208-1214.
137. Banerjee J.R. and Williams F.W. Vibration of composite beams- an exact method using symbolic computation // Journal of Aircraft, 1995. 32, P. 636-642.

138. Banerjee J.R. Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* // 1989, 28. P. 1283-1298.
139. Banerjee J.R. Development of an exact dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of a twisted Timoshenko beam // *Journal of Sound and Vibration*, 2004. 270. P. 379-401.
140. Banerjee J.R. Dynamic stiffness formulation for structural elements: A general approach // *Computers & Structures*. 1997, 63. P.101-103.
141. Banerjee J.R. Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method // *Journal of Sound and Vibration*, 2000. 233. P. 857-875.
142. Banerjee J.R., Papkov S.O., Liu X., Kennedy D. Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case // *Journal of Sound and Vibration*. 2015. 342. P. 177 - 199.
143. Banerjee J.R., Su H. and Jayatunga C. A dynamic stiffness element for free vibration analysis of composite beams and its application to aircraft wings // *Computers & Structures*, 2008. 86. P. 573-579.
144. Bardell N.S., Dunsdon J.M. and Langley R.S. Free vibration analysis of thin coplanar rectangular plate assemblies – Part I: theory, and initial results for specially orthotropic plates // *Composite Structures*, 1996. 34, P. 129-43.
145. Bardell N.S., Dunsdon J.M. and Langley R.S. Free vibration analysis of thin coplanar rectangular plate assemblies – Part II: theory, and initial results for specially orthotropic plates // *Composite Structures*, 1996. 34, P. 145-62
146. Bardell N.S., Langley R.S., Dunson J.M. On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates // *Journal of Sound and Vibration*. 1996. 191 (3) P. 459–467.
147. Bercin A.N. Free vibration solution for clamped orthotropic plates using the Kantorovich method // *Journal of Sound and Vibration*, 1996. 196 (2), P. 243-247.
148. Bhaskar K. and Sivaram A. Untruncated infinite series superposition method for accurate flexural analysis of isotropic/orthotropic rectangular plates with arbitrary edge conditions // *Composite Structures*, 2008. V 83 (1) P. 83-92.
149. Bismarck-Nasr M.N. Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells // *Appl. Mech Rev.* 1992. vol. 42. no 12, part 1. P. 461- 482.



150. Boscolo M. and Banerjee J.R. Dynamic stiffness elements and their applications for plates using first order shear deformation theory // *Computers& Structures*. 2011. 89 P. 395-410.
151. Boscolo M., Banerjee J.R. Dynamic stiffness formulation for composite Mindlin plates for exact modal analysis of structures. Part I: theory // *Computers&Structures*, 2012. 96 (97). P. 61–73.
152. Boscolo M., Banerjee J.R. Dynamic stiffness formulation for composite Mindlin plates for exact modal analysis of structures. Part II: results and applications // *Computers&Structures*, 2012. 96 (97). P. 73–84.
153. Casimir J.B., Kevorkian S., Vinh T. The dynamic stiffness matrix of two-dimensional elements: application to Kirchhoff's plate continuous elements // *Journal of Sound and Vibration*. 2005. 287, P. 571–589
154. Chekhov Val.N. Stress State of a Cross-Base Prism under Torsion // *Int. Appl. Mech*, 2008. 44, № 11. P. 1265–1278.
155. Damanpack A.R., Khalili S.M.R. High-order free vibration analysis of sandwich beams with a flexible core using dynamic stiffness method // *Journal of Sound and Vibration*, 2012. 94. P. 1503-1514.
156. Davis A.M. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: discussion of non-uniqueness // *Proc. Royal Society London*, 2003. A459, P. 409-412.
157. Dawe D.J. and Craig T.J. The vibration and stability of symmetrically-laminated composite rectangular plates subjected to in-plane stresses // *Composite Structures*, 1986. 5 (4), P. 281-307.
158. Dozio L. Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with arbitrary elastic boundaries // *Mechanics Research Communications*, 2010. 37, P. 627–635.
159. Du J., Li W.L., Jin G., Yang T., Liu Z. An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges // *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 306, P. 908–927.
160. Fazzolari F.A. A refined dynamic stiffness element for free vibration analysis of cross-ply laminated composite cylindrical and spherical shallow shells // *Journal of Sound and Vibration*, 2014. 62. P. 143-158.
161. Felix D.H., Bambill D.V. and Rossit C.A., A note on buckling and vibration of clamped orthotropic plate under in-plane loads // *Structural Engineering and Mechanics*, 2011, Vol. 39 No 1, P. 115-123.

162. Fromme J.A., Leissa A.W. Free vibration of the rectangular parallelepiped // *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1970. 48. 1, Part 2, P. 290-298.
163. Ghorbel O., Casimir J.B., Hammami L., Tawfig I., Haddar M. Dynamic stiffness formulation for free orthotropic plates // *Journal of Sound and Vibration*, 2015. 346. P. 361-375.
164. Gorman D.J. Accurate analytical type solutions for the free in-plane vibration of clamped and simply supported rectangular plates // *Journal of Sound and Vibration*, 2004. 276 P. 311–333.
165. Gorman D.J. Accurate free vibration analysis of clamped orthotropic plates by the method of superposition // *Journal of Sound and Vibration*. 1990. 140(3) P. 391-411.
166. Gorman D.J. Accurate free vibration analysis of the completely free orthotropic plate by the method of superposition // *Journal of Sound and Vibration*. 1993. 165(3) P. 409-420.
167. Gorman D.J. Accurate in-plane free vibration analysis of rectangular orthotropic plates // *Journal of Sound and Vibration*, 2009. 323, P. 426–443.
168. Gorman D.J. Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with two opposite edges simply supported // *Journal of Sound and Vibration*, 2006. 294 (1-2) P. 131-161.
169. Gorman D.J. Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition // *Journal of Sound and Vibration*, 2004. 272, P. 831–851.
170. Gorman D.J. Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastic support normal to the boundaries // *Journal of Sound and Vibration*, 2005. 285, P. 941–966.
171. Hellinger E., Toeplitz O. Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen // *Math/ Ann*, 1910. № 69. P. 289 – 330.
172. Hencky H. *Der Spannungszustand in rechteckigen Platten* (Dissertation). – München: Oldenbourg, 1913.
173. Huang M., Ma X.Q., Sakiyama T., Matuda H. and Morita C. Free vibration analysis of orthotropic rectangular plates with variable thickness and general boundary conditions // *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 288, P. 931-55.
174. Huang C.S., McGee O.G., Wang K.P. Three-dimensional vibrations of cracked rectangular parallelepipeds of functionally graded material // *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013. 70. P. 1-25.

175. Hutchinson J.R. Axisymmetric Vibrations of a Solid Elastic Cylinder Encased in a Rigid Container // JASA. 1967, vol. 42, №2. P. 398 -402.
176. Hutchinson J. R., Zillmer S. D. Vibration of a free rectangular parallelepiped // Journal of Applied Mechanics. 1983, 50. P. 123-130.
177. Iguchi S. Die Eigenschwingungen mit Klangfiguren der freien rechteckigen Platte // Ingenieur Archiv, 1953 band XXI P. P. 304-322.
178. Irie T, Yamada G, Narita Y, Cross-shaped free vibration of I-shaped and L-shaped plates clamped at all edges // Journal of Sound and Vibration, 1978. 61 (4) P. 571-583.
179. Jones R. and Milne B.J. Application of the extended Kantorovich method to the vibration of clamped rectangular plates // Journal of Sound and Vibration, 1976. 45 P. 309-16.
180. Kaldas M.M. and Dickinson S.M. Vibration and buckling calculations for rectangular plates subjected to complicated in-plane stress distributions by using numerical integration in a Rayleigh-Ritz analysis // Journal of Sound and Vibration, 1981. 75 (2) P. 151-162.
181. Kang S.W. and Atluri S.N. Free vibration analysis of arbitrarily shaped polygonal plates with simply supported edges using a sub-domain method // Journal of Sound and Vibration, 2009. 327, P. 271 - 284.
182. Kosmodamianskii A.S. Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity for Multiply Connected Plates: Survey // Int. Appl. Mech. 1983. **19**, N 12. P. 1045–1061.
183. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'Élasticité des corps solides, Paris: Mallet-Bachelier, 1852.
184. Laura P.A.A. and Luisoni L.E., Transverse vibrations of clamped rectangular plates of generalized orthotropy subjected to in-plane forces // Journal of Mechanical Design, 1979. 102 (2), P. 399-404.
185. Lee U, Lee J. Spectral-element method of Levy-type plates subjected to dynamic loads // Journal of Engineering Mechanics. 1999. Feb. P. 243-247.
186. Leissa A.W. and Ayoub E.F. Vibration and buckling of a simply supported rectangular plate subjected to a pair of in-plane concentrated forces // Journal of Sound and Vibration, 1988, 127 (1), P. 155-171.

187. Leissa A.W. Free vibration of rectangular plates // Journal of Sound and Vibration. 1973. 26-31. P. 257- 293.
188. Leissa A.W. Vibration of Plates (NASA SP-160). - Washington, DC: Government Printing office; 1969, 353 p.
189. Li N. Forced vibration of the clamped orthotropic rectangular plate by the superposition method // Journal of Sound and Vibration, 1993.158 (2) P. 307-316.
190. Liu X., Papkov S., J.R. Banerjee. An analytical solution for free transverse vibration of plates with arbitrary boundary conditions / Twelfth Int. Conf. on Computational Structures Technology. Stirlingshire, Scotland. 2014. Paper 36, P. 1-18. DOI: 10.4203/ ccp. 106.36.
191. Liu X, Banerjee J.R. An exact spectral-dynamic stiffness method for free flexural vibration analysis of orthotropic composite plate assemblies – Part I: Theory. // Composite Structures, 2015. 132. P. 1274 -1287.
192. Liu X, Banerjee J.R. An exact spectral-dynamic stiffness method for free flexural vibration analysis of orthotropic composite plate assemblies – Part II: Applications. // Composite Structures, 2015. 132. P. 1288 -1302.
193. Liu X, Banerjee J.R. Free vibration analysis for plates with arbitrary boundary conditions using a novel spectral dynamic stiffness method // Computers & Structures, 2016. 164, Issue C. P. 108 – 126.
194. Lyon R.H., De Jong R.G. Theory and Application of Statistical Energy Analysis. – Boston: Butterworth-Heinemann, 1995. 288 p.
195. Ma C. C., Huang C. H. Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plates //Journal of Sound and Vibration, 271. 2004. P.493-506.
196. Mathieu E., Theorie del’elasticite des corps solides. – Paris: Gauthier-Villars, (1890) 140-181.
197. Meleshko V.V. and Gomilko A.M. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // Proc. Royal Society London, 1997. A453, P. 2139-2160.
198. Meleshko V.V. Bending of an elastic rectangular clamped plate: exact versus ‘engineering’ solutions // Journal of Elasticity, 1997. 48, P. 1-50.
199. Mindlin R.D., Fox E.A. Vibrations and waves in elastic bars of rectangular cross section // ASME, Journal of Applied Mechanics, March 1960, P. 152-158.
200. Mindlin R.D., Medick M.A. Extensional vibrations of elastic plates // J. Appl. Mech., 1959. 26, № 4. P. 541-569.

201. Nagino H., Mikami T., Mizusawa T. Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method // *Journal of Sound and Vibration*, 2008. 37. P. 329-353.
202. Nefovska-Danilovich M., Petronijevic M. In-plane free vibration and response analysis of isotropic rectangular plates using the dynamic stiffness method // *Computers & Structures*, 2015. 152. P. 82-95.
203. Nefovska - Danilovich M., Kolarevich N., Marjanovich M., Petronijevich M. Shear deformable dynamic stiffness elements for a free vibration analysis of composite plate assemblies – Part I: Theory // *Composite Structures*, 2017. 159. P. 728 - 744.
204. Onoe M. The contour vibrations of thin rectangular plates // *J. Acoust. Amer.* 1958. 30, №11. P.1159-1164.
205. Pagani A, Boscolo M, Banerjee J, Carrera E. Exact dynamic stiffness elements based on one-dimensional higher-order theories for free vibration analysis of solid and thin-walled structures // *Journal of Sound and Vibration*, 2013. 332. P. 6104-6127.
206. Pagani A, Carrera E, Boscolo M, Banerjee J. R. Refined dynamic stiffness elements applied to free vibration analysis of generally laminated composite beams with arbitrary boundary conditions // *Composite structures*, 2014. 110 (23). P. 305-316.
207. Papkov S.O. A new method for analytical solution of in-plane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems // *Journal of Sound and Vibration*. 2016. 369. P. 228 - 245.
208. Papkov S.O. Harmonic vibrations of a cross – base prism // *Journal of Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 205, No 5. P. 691-705.
209. Papkov S.O. Steady-state forced vibrations of a rectangular orthotropic plate // *Journal of Mathematical Sciences*. 2013. Vol. 192, No 6. P. 691-702.
210. Papkov S.O. Vibrations of a Rectangular Orthotropic Plate with Free Edges: Analysis and Solution of an Infinite System // *Acoustical Physics*. 2015. Vol. 61, No. 2. P. 136–143.
211. Papkov S.O., Banerjee J.R. A new method for free vibration and bucking analysis of rectangular orthotropic plates // *Journal of Sound and Vibration*. 2015. 339. P. 342 – 358.

212. Papkov S.O., Chekhov V.N. Buckling of Thin Elastic Plates and Regular Infinite Systems of the Linear Algebraic Equations / ICCES 2012. Abstracts of ICCES'12, Crete, Greece. P. 54-55.
213. Papkov S.O., Chekhov V.N. Limiting Limitants in Dynamic Problems for a Rectangular Prism // Int. Applied Mechanics. 2013. Vol. 49, No 5. P. 555-569.
214. Papkov S.O. Three - dimensional dynamic problem of the theory of elasticity for a parallelepiped // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 215, No 2. P. 121-142.
215. Prakash T., Ganapathi M. Supersonic flutter characteristics of functionally graded flat panels including thermal effects // Composite structures, 2006. 72. P. 10-18.
216. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis. 2nd ed. - CRC Press; 2003. 835 p.
217. Riesz F. Sur la decomposition des operations fonctionnelles // Atti Congresso Bologna. 1928. № 3. P. 143 – 148
218. Ritz W., Uber eine neue methode zur losung gewisser variations problem der mathematischen physic // Journal fur Reine und Angewandte Mathematik, 1909. 135 P. 1-61.
219. Sakata T., Takahashi K. and Bhat R.B. Natural frequencies of orthotropic rectangular plates obtained by iterative reduction of the partial differential equation // Journal of Sound and Vibration, 1996. 189, P. 89-101.
220. Sundara Raja Iyengar K. T. and M.K. Prabhakara. A Three Dimensional Elasticity Solution for Rectangular Prism under End Loads // ZAMM, 1969. 49 (Heft 6), P. 321-332.
221. Stöckmann H. J. Chladni meets Napoleon // The European Physical Journal: Special Topics, 2007. V. 145 P. 15-23.
222. Trubert M. and Nash W.A. Effect of Membrane forces on lateral vibrations of rectangular plates // Tech. Note No2 Eng. Mech. Div. University Florida, 1960.
223. Tsay C.S. and Reddy J.N. Bending, stability and free vibrations of thin orthotropic plates by simplified mixed finite elements // Journal of Sound and Vibration, 1978. V. 59 P. 307-11.
224. Yegao Qu, Guoqing Yuan, Shihao Wu, Guang Meng. Three-dimensional elasticity solution for vibration analysis of composite rectangular parallelepiped // European Journal of Mechanics- A/Solids, 2013. 42. P. 376-394.

225. Wang G. and Wereley N.M. Free in-plane vibration of rectangular plates // *AIAA Journal*, 2002. 40. P. 953–959.
226. Weinstein A. and Chien W.Z. On the vibrations of a clamped plate under tension // *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 1943, Vol. 1 P. 61-68.
227. Wittrick W.H. and Williams F.W. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1971. 24. P. 263-84.
228. Xing Y.F. and Liu B. New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plate // *Composite Structures*. 2009. 89. P. 567-74.