ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе Папкова Станислава Олеговича «Метод спектральной динамической жесткости в задачах колебания и устойчивости элементов конструкций», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация Папкова С.О. посвящена теоретическим и прикладным исследованиям, связанным с гармоническими колебаниями и устойчивостью пластин и ансамблей пластин (в том числе ортотропных), а также развитию метода спектральной динамической жесткости, с помощью которого получают свое решение ряд прикладных задач из указанной области.

1. Актуальность темы. При исследовании микро- и макро- конструкций на прочность и устойчивость, анализе влияния упругих характеристик элементов конструкций известные классические численные методы, такие как метод конечных элементов, зачастую не дают той точности и быстродействия, которые от них ожидаются/требуются. Одной из трудно преодолимых проблем является анализ высокочастотных колебаний. Несмотря на то, что уравнения теории упругости формально не выставляют никаких ограничений на частоту распространяющейся гармонической волны, решение прикладных задач в области высоких частот сопряжено со значительными трудностями. В связи с этим с целью моделирования механического поведения деформируемых тел в области высокочастотных колебаний развиваются альтернативные методы и подходы. Один их них состоит в отказе от модели математической теории упругости и переходе к более сложным континуальным моделям, в которых естественно возникают ограничения на прохождение высокочастотного сигнала. Представленный в диссертационной работе метод спектральной динамической жесткости не предполагает выхода за рамки теории упругости, но состоит в усовершенствовании расчетных схем и алгоритмов. Такие исследования также являются актуальными и востребованными в современной механике деформируемого твердого тела.

Кроме этого избранная тема диссертационной работы представляется актуальной для решения задач структурной механики, анализа высокочастотных колебаний и устойчивости элементов конструкций. Так, при моделировании полупроводниковых элементов в микроэлектронике требуется учитывать влияние механических (упругих) осцилляций для адекватного описания работы всей физической системы.

2. Структура работы и основное научное содержание разделов работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы (228 источников) и изложена на 295 страницах (включая 56 рисунков).

Во **введении** приводятся базовые сведения, касающиеся проблем, исследуемых в диссертационной работе, сформулированы цели работы, указаны аргументы в пользу актуальности, практической значимости и научной новизны диссертационного исследования, обсуждается основное содержание по главам, а также даны квалификационные характеристики диссертации.

В первой главе диссертации проводится обзор литературы по теме исследования. Дается описание основных методов построения аналитических решений в теории пластин, схематично обсуждается известный в научной литературе метод динамической жесткости для ансамбля пластин с шарнирно-опертыми краями. Указывается, что данный метод с помощью точных решений теории упругости для шарнирно-опертой пластины позволяет получить значения собственных частот ансамбля пластин в широком частотном диапазоне. Однако в случае иных форм граничных условий для пластин точное решение уравнения колебаний отсутствует, что существенно сужает область применимости такого подхода.

Вторая глава диссертации имеет ярко выраженную математическую направленность. Здесь соискатель излагает свои собственные результаты из теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Эта теория давно привлекала внимание, поскольку указанные системы уравнений часто возникали при решении прикладных задач (например, прикладных задач теории упругости). Так, в известной монографии Л.В. Канторовича и В.И. Крылова «Приближенные методы высшего анализа» (1941 г., второе издание) им уже уделяется внимание (с. 26-48) и отмечается большое количество научных публикаций, посвященных их исследованию и сформулированы четыре (три по представлению соискателя) основные задачи теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Новые результаты теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений даны соискателем в форме теорем. В тексте диссертации приводятся их строгие доказательства. Эти результаты, по-видимому, не имеют аналогов в современной литературе. Необходимо отметить, что при этом удается разработать ряд таких аспектов теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, которые позволяют эффективно исследовать бесконечные системы, характерные для математической теории упругости. Найден новый эффективный метод отыскания асимптотик решений регулярных бесконечных систем. В диссертации представлена новая техника определения собственных частот и собственных векторов операторов, представимых бесконечными матрицами. Именно это в итоге позволяет автору получить практически точные решения задач колебаний и устойчивости для ряда структурных элементов в виде прямоугольных пластин. В следующих главах диссертации представлен ряд примеров, детально раскрывающих данный подход.

На основе новых результатов, изложенных во второй главе, **в третьей главе** диссертации получены аналитические решения основных краевых задач колебаний и устойчивости для упругих прямоугольных ортотропных пластин (например, когда края пластины свободны, см. раздел 3.1). Соответствующее уравнение для прогиба пластины решается методом разделения переменных (раздел 3.1.1); подстановка решения в краевые условия приводит к квазирегулярным бесконечным системам (раздел 3.1.2), на основе которых определяются формы и частоты собственных колебаний. Находятся не только коэффициенты при первых модах, но и их асимптотика, что позволяет учесть остатки рядов и значительно повысить качество решения. Численные результаты сведены в раздел 3.1.4. Здесь дано сравнение с результатами решения той же самой задачи иными методами и экспериментальными данными (контурами узловых линий для некоторого числа начальных мод). В разделе 3.2 получено решение задачи о колебаниях прямоугольной ортотропной пластины с защемленными краями. Исследование реализовано по той же самой схеме, что и в 3.1. В разделе 3.3 выполнено решение задачи об устойчивости: комбинации критических нагрузок найдены, а затем изображены графически в виде узких локализованных зон; описаны формы потери устойчивости (раздел 3.3.2); указываются зоны статической стабильности при варьировании материальных постоянных. Таким образом, предложенный в третьей главе диссертации метод дает возможность построения аналитического решения задачи колебания и устойчивости пластин в значительно более широком диапазоне частот, по сравнению с известными методами. Более того удается определить верхние и нижние оценки собственных чисел. Приведенные в работе примеры показывают, что данные оценки могут быть сделаны весьма близкими, настолько что для значений собственных частот будут совпадать несколько первых значащих цифр, т.е. предлагаемый подход гарантирует высокую точность полученных результатов. Выполненные численные исследования для задач колебания ортотропных пластин со свободными краями и защемленными краями показывают хорошее совпадение с известными в литературе классическими результатами, полученными на основе энергетического подхода и численных методов (МКЭ).

Предложенный в диссертации подход позволяет выполнить анализ не только для одного конструктивного элемента, но и для их ансамблей. Он проводится **в**

четвертой главе диссертационной работы на основе разработанного спектрального метода динамической жесткости. Здесь (раздел 4.1) получены асимптотически точные формулы, реализующие спектральный метод динамической жесткости в случае ансамблей (пакетов) пластин, в том числе соответствующие системы бесконечных линейных уравнений и спектральные матрицы жесткости (раздел 4.2), связывающие значения граничных усилий и смещений пластины. Данный результат получен впервые для граничных условий достаточно общего вида. На основе матрицы жесткости элемента в виде отдельной пластины строится (раздел 4.3) алгоритм их объединения в общую DSM матрицу ансамбля пластин. Таким образом, можно констатировать, что здесь предложен новый спектральный метод анализа ансамблей пластин, эффективность которого подтверждена на примере задач для пластин полигонального сечения (см. раздел 4.4, где приводится численная реализация метода средствами Mathematica). Обсуждаются вопросы сходимости и вычислительной эффективности метода спектральной динамической жесткости в сравнении с методом конечных элементов.

В **пятой главе** разработанный математический аппарат позволил впервые получить аналитические решения для планарных колебаний прямоугольных ортотропных пластин (разделы 5.1 (силовые граничные условия), 5.2 (кинематические граничные условия), 5.3 (защемленные и свободные края)), пластин с геометрией в виде равнобокого креста (раздел 5.5), найдено асимптотически точное решение задачи о колебаниях упругого параллелепипеда под действием приложенных к граням напряжений в трехмерной постановке (раздел 5.6). Выполнив анализ бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, соответствующих задачам планарных колебаний прямоугольных пластин, соискателю удалось получить новые решения плоской задачи теории упругости о колебаниях ортотропных прямоугольных пластин при кинематических и силовых граничных условиях. Аналогично результатам третьей главы, собственные частоты колебаний пластины вычислялись на основе сформулированного во второй главе признака существования единственного решения у квазирегулярной бесконечной системы, что позволило построить для него близкие нижние и верхние оценки. Далее, для указанных решений бесконечных систем построены нетривиальные асимптотические формулы, позволяющие аналитически представить всю бесконечную совокупность неизвестных, а вместе с ней, и все коэффициенты тригонометрических рядов, определяющих решение краевой задачи. Представленные результаты позволяют заключить, что используемый метод является достаточно эффективным и может служить основой для анализа колебаний пластин в среднем и высоком диапазоне частот. В этой главе рассматривается плоская задача об установившихся вынужденных колебаниях равнобокого креста. Построено решение в форме тригонометрических рядов, для коэффициентов которых находятся двухчленные асимптотики, что позволяет улучшить их сходимость в окрестности угловых точек, и тем самым повысить качество решения. Показано, что даже малые концентраторы напряжений в углах пластины существенно меняют значения собственных частот колебаний. В этой же главе рассматривается задача о вынужденных установившихся колебаниях прямоугольного параллелепипеда. Здесь соискатель ищет решение в форме двойных рядов Фурье и сводит задачу к линейной системе относительно трех бесконечных матриц коэффициентов этих рядов. Развитая в диссертации теория позволяет найти асимптотику этих коэффициентов и впервые получить эффективное решение указанной задачи (аналитически сворачиваются остатки рядов и устраняются логарифмические особенности в решении). Проводится параметрическое исследование модельных задач, исследуется явление краевого резонанса для симметрично нагруженного прямоугольного бруса.

В **шестой главе** диссертации представлено решение задачи о панельном флаттере защемленной ортотропной пластины. Постановка задачи дается в разделе 6.1. Методы исследования флаттера можно разбить на две группы: методы, в которых строится и исследуется решение разрешающего дифференциального уравнения (точные методы), и численные методы, основанные на дискретизации соответствующего дифференциального оператора. При анализе флаттера прямоугольных пластин на основе точных методов обычно рассматривают пластины с шарнирно-закрепленными краями, для которых переменные задачи разделяются, и оказывается возможным построить явное аналитическое решение. Для пластин с закрепленными краями точное решение отсутствует и поэтому, как правило, используется вариационный подход. В диссертации (см. раздел 6.2) используется одна из модификаций метода Бубнова–Галеркина, когда в качестве базисных функций выбираются собственные формы колебаний пластины в вакууме, вычисленные на основе метода спектральной динамической жесткости. Выбор базиса обсуждается в разделе 6.2.2. Подстановка приближенного решения в разрешающее уравнение позволяет свести задачу об определении собственных значений, при удержании в расчетах первых N собственных форм, к вычислению собственных значений конечной матрицы N-го порядка. Используемый в диссертации подход по-видимому эквивалентен традиционной реализации метода Бубнова–Галеркина, но представляется более эффективным с вычислительной точки зрения. Особенности численной реализации указываются также в разделе 6.2.2. На основе анализа результатов численного моделирования делается вывод (см. раздел 6.2.3) о том, что для сходимости нужно удерживать в вычислениях не менее четырех первых базисных функций в каждом из направлений симметрии. При этом анализируется влияние точности построения базисных функций на основе метода спектральной динамической жесткости на точность полученного значения критической скорости. Показано, что незначительное искажение базисных функций приводит к существенной потере точности. Полученные результаты численного моделирования согласуются с физической сутью исследуемого явления, в частности, обнаружены две критические скорости, первая – дофлаттерная, при которой стоячие волны переходят в бегущие волны с ограниченной амплитудой, и вторая критическая скорость – флаттерная, при которой амплитуды бегущих волн начинают возрастать во времени. Данный эффект был отмечен ранее в научной литературе и подтвержден экспериментально.

В **заключении** приведены основные выводы работе.

Оценивая работу **в целом** следует сказать о том, что она по существу состоит в разработке методов аналитического решения задач колебания и устойчивости для анизотропных упругих пластин и их ансамблей с прямолинейными и плоскими границами, опираясь на аппарат теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений и их асимптотический анализ.

3. Научная новизна результатов исследования. Следует отметить, что в диссертации представлен новый метод спектральной динамической жесткости, опирающийся на полученные в работе новые аналитические решения для прямоугольных элементов, которые значительно расширяют круг приложений метода по сравнению с известным в литературе Dynamic Stiffness Method.

Новизна результатов также подтверждается публикациями в ведущих отечественных и зарубежных журналах.

Результаты исследований были представлены на многих международных конференциях, симпозиумах и научных семинарах. Каждый раздел диссертации достаточно полно представлен в публикациях, в том числе и зарубежных. Автор имеет 41 научную публикацию по теме диссертации.

Несмотря на то, что задачи колебания и устойчивости пластин имеют долгую историю, все полученные в работе аналитические решения для ортотропных пластин являются новыми. Стоит отметить, что соискателю удалось продемонстрировать сравнительную точность, эффективность и экономичность развитых им новых подходов.

4. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций. В основу диссертационного исследования соискателем была положена классическая математическая модель колебаний и устойчивости ортотропных тонких пластин. Автором диссертационной работы были тщательно изучены и проанализированы результаты других исследователей в этой области. На основе проведенного анализа им были предложены такие методы решения задач, сформулированных в качестве цели исследования, которые лучше всего поддаются обоснованию с точки зрения теории уравнений в частных производных математической физики и обеспечивают эффективные устойчивые схемы расчетов.

5. Достоверность. Достоверность результатов диссертационной работы определяется систематическим использованием принципов и методов механики сплошных деформируемых сред, метода разделения переменных математической физики в построении аналитических решений основных уравнений, применением асимптотических методов, методов вычислительной математики. Полученные результаты, обосновываются также строгостью используемых математических подходов, верификацией результатов математического моделирования на основе метода спектральной динамической жесткости при помощи известных в литературе эталонных решений. В работе выполнена проверка эффективности указанного метода в сравнении с данными конечно-элементных коммерческих продуктов (ABAQUS, NOSTRAN). Экспертная оценка научных статей рецензентами в ведущих научных журналах подтверждает достоверность результатов диссертации.

6. Практическая значимость. Результаты диссертационной работы в части математического моделирования и методов решения соответствующих краевых задач могут быть применены для исследования напряженно-деформированного состояния упругих сред и элементов конструкций, работающих в условиях стационарных и нестационарных внешних воздействий. Они могут быть использованы для анализа устойчивости к вибрации в технических системах. В таких отраслях как машиностроение, авиастроение развитый в диссертации метод спектральной динамической жесткости может оказаться востребованным при анализе ударных нагрузок, высокочастотных колебаниях элементов конструкций, анализе динамической устойчивости. Необходимо отметить, что в прикладных исследованиях обычно используются коммерческие программные продукты на основе метода конечных элементов. В диапазоне средних и высоких частот колебаний в задачах динамической устойчивости они оказываются малоэффективными, что также подтверждает практическую значимость диссертационного исследования.

7. Замечания

1. В тексте диссертации временами встречаются слова и обороты украинского языка (см., например, с. 110), что, в общем, не препятствует прочтению диссертации.
2. Некоторые разделы (например, раздел 3.3) не нашли никакого отражения при обсуждении результатов диссертационного исследования и в тексте автореферата.

3. Пятая глава диссертационной работы занимает более 100 страниц текста, содержит 287 занумерованных формул и уравнений. Она (на мой взгляд) включает избыточный материал. Ее можно существенно сократить, объединив материал, связанный с плоскими задачами, не переизлагая при этом схему исследования плоских задач, подробно описанную в предыдущих главах.

4. Соискатель иногда дублирует рассуждения и выкладки: например, в шестой главе (раздел 6.2) изложена схема построения базисных функций для метода Бубнова–Галеркина в задаче о флаттере ортотропной пластины, но подробное описание этой схемы (с небольшими отличиями) уже имеется в третьей главе.

5. Имеются принципиальные возражения по поводу термина «общее решение уравнения в частных производных». Во многих местах диссертационного исследования (например, на с. 63) соискатель утверждает, что им получено *общее* решение уравнения для прогибов пластины (формула (3.7) на с. 63), пригодное для выполнения *любого* граничного условия на кромках пластины. Обычно в упомянутый термин вкладывается несколько другой смысл. Что значит *любое* граничное условие? Думаю, что для *любого* граничного условия метод разделения переменных не позволит получить решение в форме сходящегося ряда. В принципе, все решения, полученные методом разделения переменных, я бы трактовал как *формальные*, а вот их приведение к практически сходящимся рядам интересная и важная часть диссертационного исследования.

6. В диссертационном исследовании по понятным причинам приходится оперировать с термином *точность*. Соискатель оперирует с ним легко и свободно. Хорошо известно, что теория пластин Кирхгофа–Лява сама по себе накладывает ограничения на частотные диапазоны, в пределах которых результаты расчетов можно считать приемлемыми и в известном смысле точными. Поэтому точность численного метода (сколь бы высокой она не была) не принесет никакого нового знания, особенно в диапазоне высоких частот. Таким образом результаты работы в этом плане укладываются в парадигму: *точное* решение *приближенно* сформулированной задачи. Не могу также согласиться с термином *точность,* использованным при вычислении интегралов; так на с. 220 рассматривается интеграл и о нем говорится, что он вычисляется *точно* в терминах гипергеометрической функции. На протяжении всей работы соискатель говорит о *точном* (асимптотически точном, инженерно точном) аналитическом решении сформулированных прикладных задач. Строго говоря, речь должна идти об аналитических решениях, но всегда о не *строгих* аналитических решениях. Даже в том

случае, когда на основании асимптотик удается свернуть остатки рядов, решение можно отнести к классу аналитических, но не *строгих* аналитических. Представления решений в форме рядов (которые соискатель трактует как точные и полные (см., например, с. 182)) я бы характеризовал не как точные и полные, а как формальные.

7. На с. 228 используется разложение Кельвина поля перемещений на безвихревую и вихревую части (формула (5.197)) и указывается, что для полноты представления Кельвина необходимо дополнительное условие: расходимость поля векторного потенциала равна нулю (формула (5.198)). Сначала замечу, что подобного рода условия в волновых теориях обычно называются *условиями калибровки*. Далее позволю себе принципиально не согласиться с утверждением автора: представление Кельвина полно и без условия нулевой расходимости векторного потенциала, более того имеется доказательство того, что навязывание калибровочного условия все же не лишает представление Кельвина свойства полноты. Более того, навязывание ряда других калибровочных условий (например, задание ненулевой расходимость поля векторного потенциала) снова не лишает представление Кельвина свойства полноты. Калибровочным условием нужно распоряжаться так, чтобы *максимально упростить* ход решения задачи. Чаще всего от него можно вообще отказаться и имеются многочисленные примеры того, как без него можно обойтись при решении задач об установившихся колебаниях упругих тел. В частности, можно задать значение какой-либо компоненты векторного потенциала (например, положить ее равной нулю).

8. Заключение по диссертационной работе.

Диссертация С.О. Папкова, представленная на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела», является завершенной научно-квалификационной работой, выполненной на достаточно высоком научном уровне. Полученные автором результаты представляются достоверными, выводы и заключения − в достаточной степени обоснованными. Основное содержание диссертации опубликовано в ведущих научных изданиях. Работа была апробирована на научных конференциях и симпозиумах различного уровня, включая международные. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.02.04.

Диссертационная работа соответствует всем критериям положения «О порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ № 842 от 24.09.2013 г. В целом можно констатировать, что в работе С.О. Папкова разработаны теоретические положения и получены прикладные результаты, которые в совокупности можно квалифицировать как научное достижение в области механики деформируемого твердого тела, относящейся к проблемам колебаний и устойчивости элементов конструкций и их анализу с помощью бесконечных систем алгебраических уравнений.

Учитывая изложенное выше можно заключить, что С.О. Папков заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела».

Официальный оппонент,
ведущий научный сотрудник
лаборатории моделирования в механике
деформируемого твердого тела
ИПМех РАН, д.ф.-м.н., профессор ____________ Радаев Ю.Н.

Адрес: 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1
Тел.: +7-965-425-07-27, +7-495-434-35-92
E-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Подпись Радаева Юрия Николаевича заверяю

Сведение о должностном лице,
заверяющем подпись
Ученый секретарь ИПМех РАН ____________ Котов М.А.

М.П.