ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Сорокина Владислава Сергеевича «Применение и развитие метода прямого разделения движений для исследования новых классов упругих динамических систем», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела.

Темой диссертационной работы В. С. Сорокина является применение и развитие Метода Прямого Разделения Движений (МПРД) а также разработка нового Метода Изменяющихся Амплитуд (МИА) для исследования новых классов упругих динамических систем. Методы, предлагаемые в работе, имеют более широкую область применимости и дают больший спектр решений, чем традиционные асимптотические и приближённые методы. Также данные методы оказываются применимыми для исследования систем, параметры которых изменяются и по времени и по пространственной координате.

Диссертационная работа состоит из пяти разделов и заключения.

Первый раздел представляет собой введение. В нём даётся краткая характеристика предмета исследования, обосновывается его актуальность. Проводится достаточно подробный обзор литературы по теме диссертации. Приводятся данные о традиционном Методе Прямого Разделения Движений. Отмечено, что при использовании традиционного МПРД частота внешнего колебательного воздействия на систему ω, как правило, предполагается высокой, то есть много большей собственной частоты системы. В результате такого воздействия обычно возникает движение системы $x(t)$, состоящее из двух составляющих – медленной $X(t)$ и быстрой $\psi(t,\omega t)$, так что вектор x можно представить в виде $x(t)= X(t)+\psi(t,\omega t)$. Основная идея традиционного МПРД состоит в переходе от исходных уравнений движения к уравнениям, описывающим поведение его медленной составляющей $X(t)$. Эта составляющая обычно представляет основной интерес, соответствующие ей уравнения, как правило, оказываются значительно проще, чем исходные уравнения для $x(t)$.

Второй раздел посвящен разработке, описанию и применению новой модификации МПРД для исследования динамики систем общего вида, допускающих разделение движений по времени. Модифицированный МПРД предполагает рассмотрение обезразмеренных уравнений, в частности осуществляется переход от исходного размерного времени t к безразмерному времени $\tau = \omega t$. Решение исходных уравнений движения предлагается разыскивать в форме

$x = X(T_1) + \psi(T_1, T_0)$, или, в более подробной записи, в виде $x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(T_1)\exp(ijT_0)$,

где новые масштабы времени определены как $T_0 = \tau,\ \ T_1 = \varepsilon T_0$. Здесь $\varepsilon \ll 1$ - искусственно введённый малый параметр, X - «медленная», а ψ - «быстрая», 2π - периодическая функция с нулевым средним. Таким образом, происходит отказ от использованного в традиционном МПРД требования о том, чтобы частота внешнего воздействия ω была много больше собственной частоты исходной системы. Введённый малый параметр ε является характеристикой разыскиваемого решения, а не рассматриваемых уравнений. Так что модифицированный МПРД может быть использован для решения уравнений, в которых выделить малый параметр не представляется возможным. В качестве примеров использования модифицированного МПРД рассмотрено несколько задач.

В качестве первого примера проведено исследование уравнения Матье без явного малого параметра. Проделан также дополнительный апостериорный анализ. Определены области параметров, в которых найденное решение описывает колебания с действительно медленно изменяющимися амплитудами. Было проведено сравнение найденного аналитического решения с результатами, получаемыми с помощью классической теории Флоке и функций Матье. Для проверки полученных результатов была проведена также серия численных экспериментов.

В качестве второго примера рассмотрена задача исследования отклика нелинейного параметрического усилителя в случае, когда соотношение между частотами параметрического и внешнего воздействий составляет два к одному. В качестве простейшей модели была использована нелинейность типа Дуффинга. Отметим, что при исследовании не накладывались требования на амплитуду внешнего воздействия и коэффициента нелинейности быть малыми. Показано, что амплитуда отклика усилителя может быть существенной в случае сколь угодно малой амплитуды внешнего воздействия, так что коэффициент усиления может принимать сколь угодно большие значения. Как следует из проведённого анализа, модифицированный МПРД применим для исследования нелинейных систем с сильным параметрическим воздействием.

В качестве третьего примера рассмотрено уравнение Ван дер Поля без явного малого параметра. Форма решения здесь отличается от используемых ранее: в ней присутствует неизвестная частота λ и отсутствует явная медленная компонента $x = X(T_1)$. Это связано с рассмотрением самовозбуждающихся колебаний в данной задаче и необходимостью определения частоты этих колебаний. В результате расчетов были найдены как установившиеся режимы колебаний рассматриваемой системы, так и нестационарные режимы колебаний.

Согласие полученных результатов с результатами численных экспериментов оказалось хорошим.

Как видно из рассмотренных примеров, модифицированный МПРД является удобным подходом к отысканию периодических и близких к периодическим решений, а также определению их устойчивости. Важное преимущество данного метода перед классическими асимптотическими методами заключается в его применимости к задачам, не содержащим малый параметр в явном виде. Подобно другим приближённым методам, для каждой рассматриваемой задачи модифицированный МПРД предоставляет явное условие, при выполнении которого полученные результаты являются справедливыми.

В третьем разделе изложен Метод Изменяющихся Амплитуд (МИА). Решение предлагается разыскивать в форме сходной с использованной ранее, $x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(t)\exp(ijt)$. Однако, в отличие от модифицированного МПРД, амплитуды $b_j(t)$ не предполагаются изменяющимися медленно по сравнению с гармониками $\exp(ijt)$. Так что в отличие от предложенного ранее метода в Методе Изменяющихся Амплитуд используется единый (безразмерный) масштаб времени t, и МИА оказывается применим для исследования динамики систем и структур, движения которых не допускают разделения на быстрые и медленные.

В качестве первого примера проведено исследование уравнения Матье в более широкой области изменения параметров. Основной интерес представляет определение областей устойчивости и неустойчивости рассматриваемого уравнения. В частности, получена граница устойчивости для третьего параметрического резонанса. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с классическими, в частности с диаграммой Айнса-Стретта. МИА предоставляет также явное условие, при выполнении которого приближение метода является допустимым, и найденное решение справедливо.

В качестве второго примера проведено исследование отклика нелинейного параметрического усилителя при наличии расстройки между частотами внешнего и параметрического воздействий. Вначале рассматривается линейный аналог исходного нелинейного уравнения с целью выявления линейных эффектов, которые возникают в рассматриваемой системе, а также дополнительной иллюстрации процедуры применения МИА. С помощью МИА было решено это линейное уравнение, для исследования которого традиционные методы, в частности подходы теории Флоке, являются неприменимыми. Было найдено единственное стационарное решение, являющееся квазипериодическим, а также определена его устойчивость, которая, как было показано, не зависит от параметров внешнего воздействия. Отмечено также, что в рассматриваемой задаче МИА предоставляет явное условие, при выполнении которого полученные результаты являются справедливыми. Далее рассмотрено исходное нелинейное уравнение. Отмечено, что процедура решения данного уравнения с помощью МИА несколько отличается от используемой ранее. В итоге получено стационарное решение уравнения, которое описывает квазипериодические колебания, подобно линейному случаю. Полученные результаты были проверены с помощью численных экспериментов, которые были проведены с помощью программы Wolfram Mathematica 7. Показано, что имеет место хорошее согласие между аналитическим и численным решением исходного уравнения. Для дальнейшей проверки полученных результатов была проведена также серия натурных экспериментов. Установлено, что экспериментально подтверждается основной результат, полученный аналитически, а именно тот факт, что максимальная амплитуда отклика усилителя оказывается больше при наличии расстройки между частотами, чем при её отсутствии.

В качестве третьего примера проведено исследование отклика нелинейного параметрического усилителя при одновременном наличии квадратичной и кубической нелинейностей. Как показывает проведённое исследование, присутствие квадратичной нелинейности наряду с кубической существенно влияет на отклик параметрического усилителя: изменяется число стационарных решений (устойчивых и неустойчивых), и при определённых соотношениях параметров удаётся получить близкий к линейному отклик с большой амплитудой. Таким образом, квадратичная нелинейность может быть важным фактором, определяющим основные характеристики усилителя, например, его коэффициент усиления; более того, такая нелинейность может быть введена в систему специально с целью улучшения характеристик усилителя.

В конце третьего раздела приведено обсуждение результатов, полученных с помощью МИА.

В четвертом разделе проведено исследование динамики структур, движения которых допускают разделение по пространственной координате, а не по времени с помощью модифицированного МПРД. В первую очередь рассматриваются пространственно периодические структуры. Решение исходных уравнений движения относительно безразмерной координаты x_0 предлагается разыскивать в форме $A = A_1(X_1) + \psi(X_1, X_0)$. Здесь масштабы координат X_1 и X_0 введены подобно описанному выше в главе 2: $X_0 = x_0$, $X_1 = \varepsilon X_0$, $\varepsilon \ll 1$; A_1 - «медленно изменяющаяся», а ψ - «быстро изменяющаяся», 2π - периодическая по безразмерной координате X_0 переменная, среднее за период по X_0 значение которой равно нулю. Таким образом, в задачу вводится малый параметр ε.

В качестве примера использования модифицированного МПРД рассмотрены колебания струны с переменным поперечным сечением, с косинусоидальными модуляциями параметров. Для решения уравнения колебаний струны используется классический метод разделения переменных. Тогда задача сводится к решению уравнения Матье при учёте граничных условий. В результате получены аналитические выражения, описывающие собственные формы колебаний струны, допускающие разделение по пространственной координате; также определены соответствующие им собственные частоты. Показано, что колебания струны на высоких собственных частотах содержат длинноволновую компоненту, что может иметь определённый интерес для приложений, так как указывает на свойство неоднородных периодических структур поддерживать длинноволновые колебания на высоких частотах. Для проверки полученных результатов была проведена серия численных экспериментов. Отмечено, что во всех случаях имеет место хорошее согласие между численными и аналитическими результатами.

В пятом разделе проведено исследование динамики пространственно периодических структур, движения которых не допускают разделения по координате, с помощью Метода Изменяющихся Амплитуд (МИА). При использовании МИА в рассматриваемых случаях предлагается разыскивать решение в виде $u(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(x)\exp(ijx)$. Здесь амплитуды $b_j(x)$ не полагаются изменяющимися медленно по сравнению с пространственными гармониками $\exp(ijx)$.

В качестве первого примера использования МИА рассматриваются поперечные колебания балки с переменным поперечным сечением в рамках модели Бернулли-Эйлера. Для решения уравнения в частных производных используется классическая процедура разделения переменных. В результате получают уравнение для функции $\Phi(x)$ при соответствующих граничных условиях. Решение уравнения для функции $\Phi(x)$ разыскивается в виде гармонического ряда с изменяющимися амплитудами. Большой интерес представляет нахождение дисперсионного соотношения, дающего зависимость частоты колебаний от волнового числа. Отмечено, что частота является периодической функцией волнового числа. Установлено, что при определённых значениях амплитуд модуляций возникают полосы частот запирания – диапазоны частот, в которых не может быть распространяющихся волн. Исследовано влияние модуляций на собственные частоты и формы колебаний балки. Для проверки полученных результатов была проведена серия численных экспериментов. Отмечено хорошее согласие между аналитическими и численными результатами. Проведенное исследование показывает, что МИА может быть использован для определения дисперсионных соотношений пространственно периодических структур в широком диапазоне частот. Более того, с его помощью могут быть найдены все собственные частоты структур, и соответствующие им собственные формы, в этом частотном диапазоне.

В качестве второго примера были определены дисперсионные соотношения и полосы частот запирания балки с периодическим по пространственной координате поперечным сечением при использовании теории Тимошенко. Эта теория учитывает влияние деформаций сдвига и инерции на поворот поперечного сечения, что делает её применимой в более широком диапазоне частот, чем теорию Бернулли-Эйлера. Колебания балки Тимошенко описываются двумя дифференциальными уравнениями в частных производных. Неизвестными являются поперечное перемещение $v(x,t)$ и угол поворота сечения $\alpha(x,t)$. Вначале рассматриваются дисперсионные соотношения однородной балки Тимошенко. Показано, что уравнение, описывающее дисперсионное соотношение балки Тимошенко имеет четыре решения – значения частоты ω, в то время как уравнение балки Бернулли-Эйлера предполагает два решения. Решение уравнений балки Тимошенко с периодическим по пространственной координате поперечным сечением найдено с помощью МИА. Проведено подробное исследование влияния параметра β, характеризующего гибкость балки Тимошенко, на дисперсионные соотношения балки. Установлено, что чем больше β, тем сильнее эффекты теории Тимошенко. Второй ключевой параметр, μ, является отношением модуля упругости к модулю сдвига материала балки. Отмечено, что увеличение параметра μ приводит к усилению эффектов, зависящих от параметра β. С целью проверки полученных результатов была проведена серия численных экспериментов. Отмечено, что имеет место хорошее согласие между аналитическими и численными результатами.

В качестве третьего примера рассмотрена задача о подавлении вибрации струны, находящейся под действием распределённой внешней нагрузки, с помощью пространственных модуляций её параметров. В качестве примера рассматриваются колебания струны под действием распределённой периодической по времени нагрузки. Вначале рассматривается случай пространственно гармонической нагрузки. Целью является определение такой модуляции площади поперечного сечения струны, которая обеспечит подавление вибрации в заданной точке струны. Для достижения этой цели предлагается использовать эффект параметрического ослабления колебаний. Дифференциальное уравнение, определяющее амплитуду колебаний, решается с помощью МИА. В результате определяются оптимальные параметры модуляции поперечного сечения струны, обеспечивающие существенное снижение вибрации в заданном месте струны. В дальнейшем рассматривается случай постоянной по координате внешней нагрузки, а также случай произвольно распределённой внешней нагрузки.

И здесь определены условия, при которых предлагаемая техника подавления вибраций является наиболее эффективной.

В качестве четвёртого примера рассмотрено влияние нелинейных факторов на дисперсионные соотношения и полосы запирания периодической балки Бернулли-Эйлера. Поскольку в реальных структурах граничные условия определяют характер нелинейности, в данном пункте работы рассматриваются ограниченные структуры. Уравнения движения приведены для двух случаев: для случая, когда ограничения на продольные движения концов балки отсутствуют и возможны большие прогибы и для случая, когда продольные движения обоих концов балки ограничены и имеет место связь изгиба с растяжением балки. В обоих случаях решение уравнений разыскивается в форме $w(x,t)=\varphi(x)\exp(i\omega t)+\bar{\varphi}(x)\exp(-i\omega t)$, где верхняя черта обозначает комплексное сопряжение. В результате получаются уравнения для переменной $\varphi(x)$. Решения этих уравнений разыскиваются с помощью МИА в виде гармонического ряда с изменяющимися амплитудами $\varphi(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(x)\exp(ijx)$. В итоге получены дисперсионные соотношения и полосы частот запирания в рассматриваемых задачах. Проверка полученных результатов проведена с помощью серии численных экспериментов. Отмечено хорошее согласие между аналитическими и численными результатами. Проведено также сравнение с результатами натурных экспериментов. В заключительной части отмечено, что среди рассмотренных источников нелинейности самое существенное влияние на дисперсионное соотношение оказывает нелинейная инерция.

В качестве пятого примера рассмотрено распространение продольных упругих волн в периодическом стержне в случае произвольной модуляции его поперечного сечения. Решение исходного уравнения в частных производных разыскивается в виде гармонических колебаний, в результате получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для амплитуды. Форма корригации рассматриваемого периодического стержня предполагается симметричной функцией общего вида. Для определения ширины и положения полос частот запирания используется МИА. Следуя методу, решение уравнения разыскивается в виде ряда по пространственным гармоникам с переменными амплитудами. Отдельно рассматриваются вопросы о ширине и положении нечётных и чётных полос запирания. Установлено, что ширина каждой нечётной полосы запирания зависит только от одной гармоники в разложении данной формы корригации. Ширина чётных полос запирания, однако, зависит от всех гармоник. Для общей несимметричной формы корригации получено, что форма и положение каждой полосы запирания контролируется только одной гармоникой в разложении данной формы корригации.

В качестве шестого примера рассмотрено распространение поперечных волн в продольно движущейся периодической струне. Продольная скорость движения струны предполагается имеющей колебательную составляющую. Изменения площади поперечного сечения струны полагаются гармоническими по пространственной координате. Приводится дифференциальное уравнение движения для случая, когда средняя по времени скорость движения струны равна нулю. Для изучения динамики струны с параметрами, изменяющимися и по времени и по координате используется МИА в более общей формулировке, чем во всех предыдущих случаях. Вначале находятся области параметрической неустойчивости для однородной струны, движущейся с переменной продольной скоростью. Затем находятся полосы частот запирания для неоднородной не движущейся струны. В дальнейшем рассматривается случай неоднородной струны, движущейся в продольном направлении с переменной скоростью. Особое внимание уделяется изучению возможности подавления параметрической неустойчивости колебаний струны путём введения пространственных модуляций её параметров.

В заключение пятого раздела отмечено, что здесь Метод Изменяющихся Амплитуд адаптирован и применён для исследования линейной и нелинейной динамики периодических структур, движения которых не допускают разделения по пространственной координате. Отмечено также, что рассмотренные в данном разделе задачи и полученные результаты составляют наиболее существенную часть диссертации.

Имеются и замечания по работе.

1. В подразделе 5.2.3 отмечено, что если λ_j является корнем характеристического уравнения, то и $\lambda_{j+m} = im + \lambda_j$ также будет корнем этого уравнения, здесь m - любое целое число. Однако доказательство этого утверждения не приведено. Нет также ссылок на какие-либо первоисточники.
2. В тексте работы многократно встречаются заявления о том, что некоторые выражения являются довольно громоздкими и поэтому не приводятся. Это затрудняет работу оппонента.

Несмотря на сделанные замечания, считаю, что работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям, представляемым на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. Избранная тема является весьма актуальной. Научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, являются полностью обоснованными, достоверными и новыми. Диссертация полностью соответствует критериям, установленным разделом II положения «О порядке присуждения учёных степеней». Диссертация является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение. Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты и положения, выдвигаемые для публичной защиты, и свидетельствует о личном вкладе автора диссертации в науку. Предложенные автором диссертации положения аргументированы и оценены по сравнению с другими известными решениями. Основные научные результаты опубликованы в двадцати пяти рецензируемых научных изданиях. В диссертации автор ссылается на автора и (или) источник заимствования материалов или отдельных результатов. При использовании в диссертации результатов научных работ, выполненных соискателем ученой степени лично и (или) в соавторстве, соискатель учёной степени отмечает это обстоятельство.

Считаю, что Владислав Сергеевич Сорокин заслуживает присвоения степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук
Исполов Юрий Григорьевич,
профессор кафедры
«Механика и процессы управления»,
т. 6813256, E-mail ispolov@mail.ru,
Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого,
195251, Санкт - Петербург,
Политехническая, 29.

Подпись Исполова Ю.Г.
УДОСТОВЕРЯЮ
Ведущий специалист
по кадрам Николаева М.А.
26. 09. 2016 г.

Подпись заверяю: