

Институт Проблем машиноведения
Российской Академии Наук
(ИПМаш РАН)

На правах рукописи

Вавилов Дмитрий Сергеевич

**Структурные преобразования в материале при
нестационарном воздействии**

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

(01.02.04. механика деформируемого твёрдого тела)

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук Ю.И. Мещеряков

Санкт-Петербург, 2017

Оглавление

Введение

Глава1. Проблема описания структурных преобразований.

Обзор литературы..... 7

§1.1 Эксперименты по высокоскоростному деформированию..... 7

§1.2 Невыпуклая потенциальная энергия..... 12

§1.3 Многокомпонентная механика..... 19

Глава2. Постановка задачи. Кинематическое растяжение

стержня..... 26

§2.1 Динамические уравнения относительно центра масс 26

§2.2 Квазистатическая задача. Линейный случай..... 29

§2.3 Немонотонная определяющая диаграмма 35

§2.4 Влияние относительного смещения на макропараметры 43

Глава3. Особенности использования метода переменного

интервала..... 49

§3.1 Метод переменного интервала. Ключевая идея 49

§3.2 Простые примеры..... 51

§3.3 Динамическая термоупругость..... 56

Глава4. Дискретная модель 67

§4.1 Одномерные цепочки..... 67

§4.2 Динамика дискретного элемента..... 73

§4.3 Модельная задача..... 82

Глава5. Континуальная модель	92
§5.1 Дисперсионные кривые	92
§5.2 Континуально-дискретная аналогия	98
§5.3 Численное интегрирование	104
§5.4 Оценка параметров. Качественное сравнение с экспериментом	113

Заключение

Литература	119
-------------------------	------------

Введение

Актуальность темы

Современный уровень развития промышленности ставит перед механикой сплошных сред задачу расчёта прочности и прогнозирования поведения материалов при кратковременных интенсивных воздействиях, которое может существенным образом отличаться от его работы в условиях статического нагружения. Одной из интересных и важных задач в данной области является описание структурных преобразований материала, связанное с изменениями в его кристаллической решётке и происходящее за чрезвычайно малые времена, не превышающие несколько микросекунд. Интерес к данной проблеме обусловлен интенсивным развитием экспериментальных методик в области высокоскоростного деформирования при ударно-волновых процессах. Многочисленные эксперименты по динамическому деформированию [31-33] свидетельствуют о том, что в определённом диапазоне воздействий в материале могут происходить изменения в кристаллической решетке (образование дефектов, двойников, полос локализованного сдвига и.т.п.) Исследование этих процессов охватывает широкий круг вопросов, таких как контроль прочностных характеристик материалов, создание материалов с улучшенными свойствами, оценка локальных напряжений и деформаций.

Цель работы

Основная цель работы заключается в создании модели, раскрывающей механизм передачи энергии с макроуровня на внутренние степени свободы и позволяющей объяснить эффект уменьшения амплитуды первоначального импульса в материале за счёт структурных преобразований, который был отмечен в экспериментальных работах по высокоскоростному деформированию металлов.

Методы исследования и достоверность научных результатов

Рассмотренная в данной работе модель сплошной среды, описывающая переход материала в новое состояние, основана на механике многокомпонентных сред, которой посвящено большое количество работ [56-59]. Исследование вопроса о влиянии динамики на структурное преобразование материала приводит к нелинейной задаче Коши, приближённое аналитическое решение которой строится методом переменного интервала [91,92]. Данное решение позволяет произвести оценку длительности структурных преобразований в материале, которая сравнивается со значением, определяемым из численного решения задачи с использованием конечно-разностной схемы интегрирования уравнений в частных производных. Согласованность обоих подходов свидетельствует о достоверности полученных результатов, которые сопоставляются с экспериментальными данными по высокоскоростному деформированию.

Результаты выносимые на защиту:

1. Разработка модели, учитывающая динамику структурных преобразований
2. Определение критической величины деформации, соответствующей началу неустойчивого участка на определяющей диаграмме, и её связи с микропараметрами материала.
3. Оценка длительности процесса структурных преобразований и напряжения, приводящего к переходу материала в новое состояние.
4. Исследование эффекта уменьшения амплитуды начального импульса при ударном воздействии, наблюдаемого в экспериментах по высокоскоростному деформированию, за счёт динамики внутренних степеней свободы.

Научная новизна и практическая значимость

В данной работе структурное преобразование материала рассматривается как сложный динамический процесс, обусловленный нелинейными силами взаимодействия, зависящими от внутренних степеней свободы материала. Немонотонная диаграмма, соответствующая материалу, подверженному переходу в новое состояние, не задаётся, а получается в результате решения задачи. Использование континуально-дискретной аналогии позволило провести анализ модели сплошной среды, основываясь на результатах исследования динамики одного элемента из её структурно-реологической модели, который представляет собой двухстепенной осциллятор с нелинейной связью между массами. Предложенная модель может быть использована при разработке энергопоглощающих материалов, выполняющих защитную функцию при ударном воздействии.

Апробация работы и публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах [27, 28, 54, 67,68,81,106]. Результаты диссертации докладывались на нескольких международных конференциях: European Solid Mechanics Conference (Грац, Австрия, 2012), GAMM-2013 (Нови-Сад, Сербия, 2013), International Conference on Theoretical and Applied Mechanics (Венеция, Италия, 2014) , European Nonlinear Dynamics Conference (Вена, Австрия, 2014), International Symposium on Shock Waves (Тель-Авив, Израиль,2015), а также на Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 2013) и на семинаре на кафедре теоретической механики в Санкт-Петербургском государственном университете (2017).

Глава1. Проблема описания структурных преобразований. Обзор литературы

§1.1 Эксперименты по высокоскоростному деформированию

С середины XXв. стремительное развитие автомобилестроения, авиационной техники, ядерной энергетики и других отраслей промышленности поддерживает неослабевающий интерес исследователей к проблеме поведения твёрдых тел под действием интенсивных кратковременных нагрузок. Многие отечественные и зарубежные учёные внесли большой вклад в изучение динамики материалов как области упругих, так и пластических деформаций, так что данному вопросу посвящена обширная библиография [1,2,3,4,5], рост которой не прекращается и в настоящее время [6,7,8,9,10].

Хорошо известно, что анализ упругих колебательных систем, выполненный на основе динамической и статической постановки задачи, приводит к различным результатам. Учёт инерционных сил значительно влияет на величину прогиба балки или критической силы, при которой происходит потеря её устойчивости [11, 12]. Поэтому в сопромате и в теории колебаний используется понятие коэффициента динамичности, как функции, зависящей как от вида нагрузки, так и от свойств самой системы, и связывающей статическую характеристику системы с её динамическим аналогом [13, 14]. К сожалению, такой подход не всегда оправдан. Очень часто оказывается, что переход к динамике ведёт к возникновению совершенно новых явлений, которые не происходят в квазистатическом приближении. Недавние опыты по нагреванию металлических пластин лазерным облучением субмикросекундной длительности показывают, что отличие между динамикой и статикой сказывается не только в количественном отношении, но может приводить к качественно другой

картине отклика системы на внешнее воздействие, противоречащей традиционным представлениям[15].

Свойства материалов также существенно зависят от вида нагрузки, определяемого её частотным спектром. К примеру, динамический предел текучести металлов может значительно превосходить статический предел текучести, а материалы, проявляющие пластические свойства при медленном нагружении, при больших скоростях деформации, как правило, разрушаются хрупким образом [16]. Поэтому расчёт прочности и прогнозирование долговечности конструкций при работе в условиях динамических воздействий требуют проведения большого числа экспериментальных работ по определению характеристик материала при высокоскоростном нагружении. За последние 100 лет, начиная с работ Шарпи по испытанию на изгиб надрезанных образцов[17], была проделана колоссальная работа по созданию экспериментальных методов исследования динамического сопротивления[18].

На сегодняшний день одним из основных инструментов изучения свойств материалов при динамическом деформировании является ударно-волновое нагружение образцов, осуществляемое металлическими ударниками, разогнанными с помощью взрывного устройства или газовой пушки до скорости, меняющейся в диапазоне от сотен м/с до нескольких км/с [19]. Схема генерации и регистрации ударных волн представлена на рис.1.1 [20].

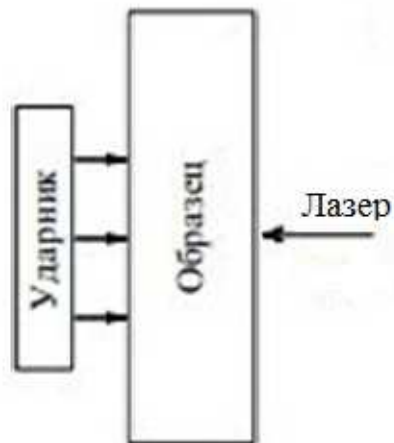


Рис.1.1. Схема генерации и регистрации ударных волн

В этих опытах с помощью интерферометра определяется скорость свободной поверхности тыльной стороны мишени, которой обычно является круглая пластина толщиной от 2 до 15 мм. Её диаметр выбирается так, чтобы деформацию можно было считать одноосной. Типичный временной профиль скорости металлического образца изображён на рис. 1.2 [21].

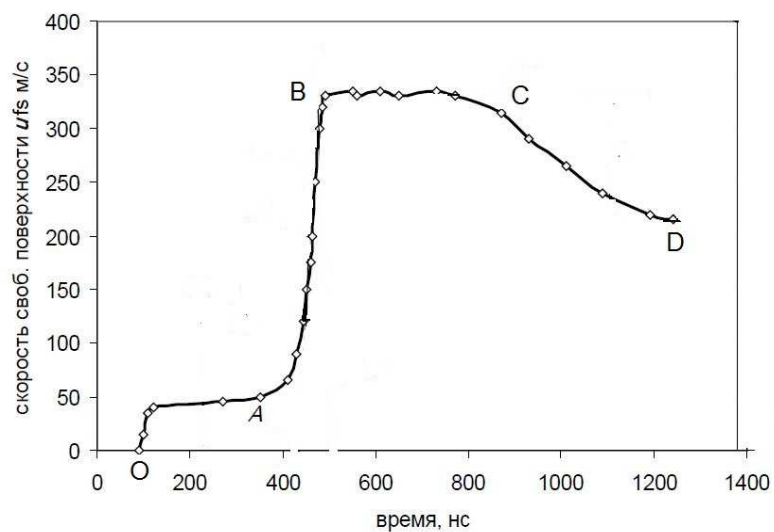


Рис.1.2. Типичный временной профиль скорости

Он состоит из четырех основных участков: кривая OA представляет собой упругий предвестник, за которым начинает развиваться пластический фронт АВ, далее зависимость выходит на плато ВС, где скорость остаётся почти постоянной, и, наконец, за ним следует фронт разгрузки (участок CD). Профиль скорости содержит в себе ключевую информации о динамических свойствах материала. По нему производится расчёт таких важных характеристик, как откольная прочность [22] и динамический предел текучести, исследуется вопрос их зависимости от температуры [23,24]. Также он часто используется для построения определяющих уравнений при динамическом нагружении, для создания феноменологических моделей деформирования и разрушения [25,26] или, наоборот, для сравнения экспериментальных данных с предсказаниями математической модели [27, 28].

Одним из интересных и перспективных направлений в механике твёрдого тела является изучение фазового преобразования материала при высоких скоростях деформирования $10^4 - 10^7 \text{ c}^{-1}$, когда сложная перестройка кристаллической структуры происходит за чрезвычайно малые времена, не превышающие несколько микросекунд [20,29,30]. С помощью микроструктурного анализа было установлено, что в определённом диапазоне скоростей ударника в результате прохождения волны по материалу в нем формируются устойчивые сетчатые образования размером $0.1 - 0.3 \text{ мкм}$, не исчезающие после снятия внешнего напряжения [31]. Исследования показывают, что зерна с данной структурой обладают более высокой микротвёрдостью по сравнению с "чистым" материалом, что способствует увеличению его откольной прочности. На макро-уровне процесс структурообразования проявляется в виде энергетических потерь, которые могут быть зафиксированы экспериментально. Дело в том, что в случае их отсутствия при симметричном ударе, когда волновые сопротивления ударника и мишени равны, то массовая скорость в мишени

равна половине скорости ударника $U_m = \frac{1}{2}U_{imp}$. С другой стороны, известно, что при выходе на свободную поверхность происходит удвоение массовой скорости $U_m = \frac{1}{2}U_{fs}$. Таким образом, в идеальном случае $U_{imp} = U_{fs}$ [21]. Данное соотношение выполняется до некоторого критического значения скорости удара, однако, при его дальнейшем увеличении оно нарушается и образуется так называемый дефект скорости $U_{def} = U_{imp} - U_{fs}$ (рис.1.3), обусловленный наличием энергетического порога структурной неустойчивости кристаллической решётки [32].

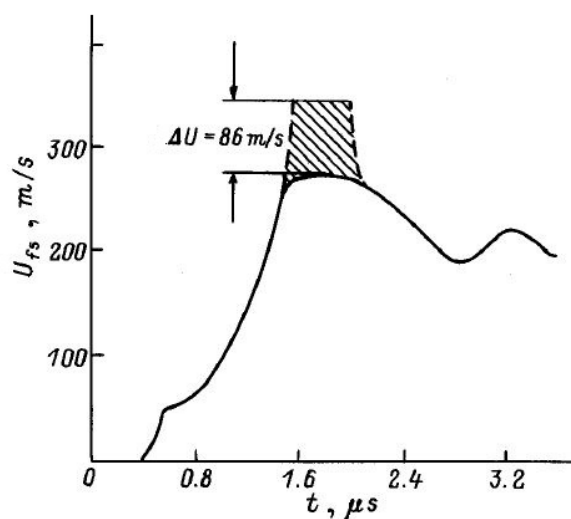


Рис.1.3. Временной профиль скорости

для мишени из Ni-Cr-Mo стали

Получается, что в определённом диапазоне воздействий достаточно существенная часть энергии уходит на преобразование внутренней структуры. При этом процесс перестройки обычно сопровождается быстрыми осцилляциями на пластическом фронте (рис.1.4), возникающими

сразу после прохождения упругого предвестника, длительность которых не превышает 0.15 – 0.3 мкс.

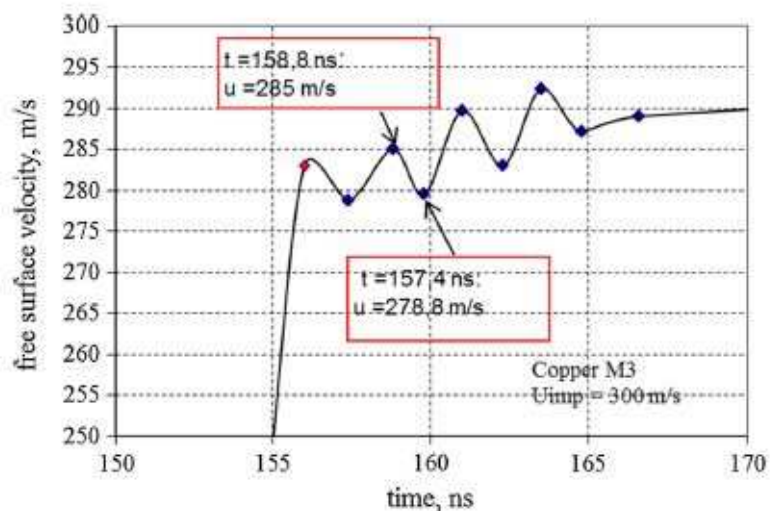


Рис.1.4. Осцилляции на пластическом фронте

Они свидетельствуют о том, что перестройка структуры представляет собой сложный динамический процесс, затрагивающий несколько масштабных уровней [33]. Отметим, что данный результат был получен для широкого класса металлических материалов, что указывает на необходимость создания моделей, учитывающих возможность перехода материала в новое состояние.

§1.2 Невыпуклая потенциальная энергия

При описании изменений внутренней структуры материала с позиции сплошной среды возникает следующая трудность. Механика сплошных сред оперирует с дифференциальными уравнениями, полученными из фундаментальных законов сохранения при стремлении объёма интегрирования к нулю. Данная процедура предоставляет возможность использовать математический аппарат для решения задач, но необходимо

учитывать, что при её применении не принимается во внимание дискретное строение материала. Считается, что его свойства не изменяются при дроблении на сколь угодно малые части. В противном случае будет невозможно осуществить вышеуказанный предельный переход [34]. Таким образом, классический подход сужает область применения механики сплошной среды, так как он не соответствует вышеперечисленным экспериментальным результатам, свидетельствующим о том, что в определенном диапазоне воздействий в материале происходят фазовые превращения, связанные с образованием и развитием неоднородностей в кристаллической решётке. Для выхода из сложившейся ситуации материал наделяется новыми степенями свободы, отвечающими динамике его внутренней микроструктуры. Построение теорий, учитывающих влияние микроструктуры на макропараметры, является одной из важнейших задач механики сплошных сред. Эта проблема включает широкий круг вопросов, таких как условия зарождения новой фазы, эволюция и устойчивость межфазной границы, оценка локальных деформаций и напряжений. В рамках механики сплошных сред можно выделить два подхода к её решению.

Первый из них заключается во внесении качественных изменений в определяющее уравнение, которые позволили бы учесть возможность структурных преобразований. Ярким примером здесь служит гипотеза о немонотонной связи между напряжением σ и деформацией ε (рис.1.5), часто встречающаяся в статьях, посвященных фазовым переходам [35,36,37,38], следствием которой является невыпуклость потенциальной энергии (рис.1.6).

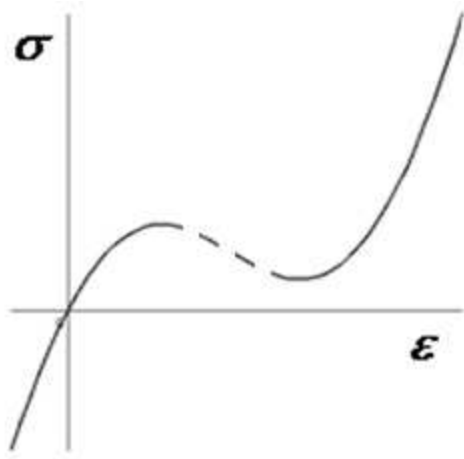


Рис.1.5. Немонотонная диаграмма

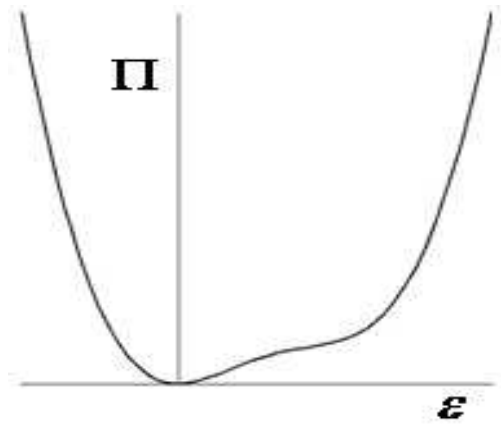


Рис.1.6. Невыпуклый потенциал

Главной особенностью подобных диаграмм является невозможность однозначно определить деформацию при заданной статической нагрузке. Ниспадающая ветвь, обозначенная пунктирной линией на диаграмме, разделяет две устойчивые фазы материала. В качестве дискретного элемента реологической модели, отражающей подобную зависимость, удобно брать механическое устройство известное в литературе под названием фермы Мизеса [39,40]. Наличие неустойчивого участка на определяющей кривой означает, что при достижении критического значения деформации происходит локальная потеря устойчивости кристаллической решётки, т.е материал теряет способность сопротивляться внешней нагрузке. При дальнейшем деформировании эта способность восстанавливается.

Если условие $\sigma''(\varepsilon) \neq 0$ не выполняется для всех возможных значений деформации, то, принято говорить, что система уравнений нелинейной теории упругости, которую в одномерном случае можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}, \quad (1.1)$$

где v - это скорость материальных частиц, не относится к истинно нелинейным [41], для которых в работах [42,43,44] установлены существование и единственность решения в классе обобщённых функций. Для уравнений, в которых потенциальная энергия не является строго выпуклой функцией, по-видимому, настолько общих теорем не доказано, хотя получено достаточно много важных частных результатов. Поэтому рассмотрение подобных проблем требует привлечения дополнительных соотношений.

В физике конденсированных сред изменение потенциальной энергии, приводящее к существованию у неё нескольких минимумов, соответствующих новому состоянию материала, обеспечивается введением нового параметра в уравнение состояния, называемого параметром порядка, регулирующего переход в другую фазу [45,46,47]. Так как в случае малых деформаций зависимость напряжения от деформации не может содержать нелинейные члены [48], то очень часто она задаётся в виде кусочно-линейной функции [49,50,51], изображённой на рис.1.7.

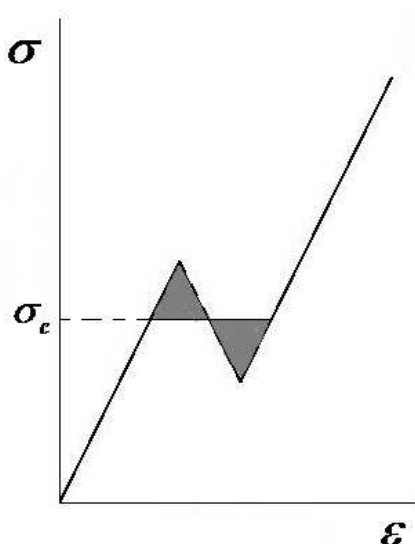


Рис.1.7. Кусочно-линейная зависимость

В роли новой степени свободы в материале с немонотонной определяющей кривой выступает движущаяся межфазная граница, на которой происходит скачок деформации, а дополнительным соотношением служит кинетическое уравнение, связывающее скорость движения границы с диссипацией энергией на ней. В работе [52] показано, что данное уравнение позволяет построить единственное решение начально-краевой задачи, допускающее скачок деформации на границе.

В качестве иллюстрации рассмотрим одномерную задачу о полубесконечном теле с определяющей кривой [53]

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E_- \varepsilon, & \varepsilon < \varepsilon_c \\ E_+ \varepsilon, & \varepsilon \geq \varepsilon_c \end{cases}, \quad (1.2)$$

график которой изображён на рис.1.8.

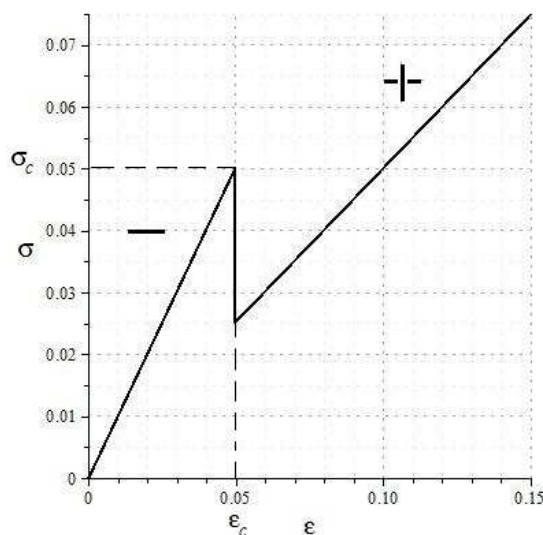


Рис.1.8. Билинейная зависимость

Если через $v(x,t)$ обозначить скорость материальных частиц, то при малых деформациях их колебания описываются уравнением

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad (1.3)$$

где ρ_0 - это плотность в равновесном состоянии. Предположим, что в начальный момент времени к левому торцу внезапно прикладывается постоянная нагрузка $\sigma|_{x=0} = \sigma_0 H(t)$. Здесь $H(t)$ обозначает функцию Хевисайда. Требуется определить напряжённо-деформированное состояние образца.

Когда величина нагрузки σ_0 не превосходит критического значения напряжения σ_c (рис.1.5), по стержню распространяется со скоростью $c_- = \sqrt{\frac{E_-}{\rho_0}}$ волна деформации в виде ступеньки высотой $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_-}$. В случае $\sigma_0 > \sigma_c$ волновой процесс характеризуется двумя фронтами [54]. Первый из них представляет собой упругий предвестник, движущийся со скоростью c_- . Возникновение второго связано с переходом материала из фазы "-" в фазу "+" Его скорость $\dot{l}(t)$ заранее неизвестна и должна быть найдена при решении задачи. Распределение деформаций, полученное численным интегрированием уравнения (1.3) и соответствующее описанной физической картине, показано на рис.1.9.

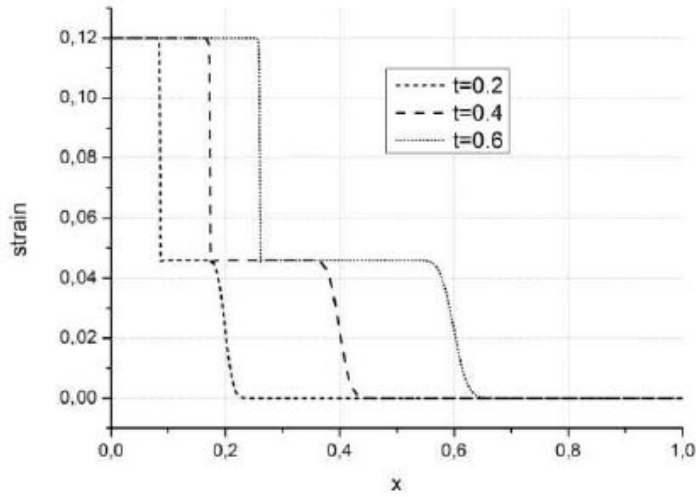


Рис.1.9. Распределение деформаций

Для определения положения границы $l(t)$, разделяющей две области с различными состояниями материала, воспользуемся уравнением баланса импульса (1.3) и уравнением баланса масс

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (1.4)$$

интегрирование которых через движущуюся границу приводит к следующим соотношениям, где квадратными скобками обозначен скачок величины на границе:

$$\begin{aligned} [\sigma] &= -\rho_0 \dot{l} [v] \\ [\rho] \dot{l} &= \rho_0 [v] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Исходя из этих условий и считая, что напряжение в фазе "-" совпадает с напряжением на границе, получим:

$$\tilde{i}^2 = \frac{\dot{l}^2}{c_-^2} = \frac{[\sigma]}{\frac{\sigma_+}{\zeta} - \sigma_-}, \quad (1.6)$$

где $\zeta = \frac{c_+^2}{c_-^2} < 1$. Отсюда следует, что скорость движения границы возрастает с увеличением приложенного напряжения, но при этом она ограничена сверху значением параметра ζ .

Моделирование фазовых переходов с помощью невыпуклой потенциальной энергии получило очень широкое распространение, однако здесь обращает на себя внимание несколько существенных вопросов. Первый из них связан с написанием кинетического уравнения, которое, являясь по своей сути реологическим соотношением, не вытекает из фундаментальных законов и допускает достаточно широкий произвол при его формулировке. Единственное ограничение на него накладывается универсальным диссипативным неравенством, которому оно обязано удовлетворять. Другой вопрос касается определения критического напряжения, при котором начинается структурный переход. Здесь тоже возможны различные формулировки. Простейшая из них состоит в том, что данная величина находится согласно правилу Максвелла [55], устанавливающего для системы, находящейся в условии термодинамического равновесия, равенство заштрихованных площадей на рис.1.6. Кроме того, использование данного подхода не даёт возможности исследовать динамику процесса образования новой фазы, так как предполагается, что межфазная граница возникает сразу же при достижении критического напряжения.

§1.3 Многокомпонентная механика

Альтернативный подход к задачам со структурными изменениями состоит в рассмотрении модели многокомпонентных сред, представляющей собой совокупность N взаимодействующих континуумов. Предполагается, что в каждой точке объёма определены плотности ρ_i и скорости v_i

($i = 1, 2, \dots, N$) [56,57,58,59]. Тогда уравнения баланса масс и импульса для каждой из компонент записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i) &= \sum_{j=1, i \neq j}^N J_{ij} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i + \sum_{j=1, i \neq j}^N \mathbf{R}_{ij} &= \rho_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \sum_{j=1, i \neq j}^N J_{ij} \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (1.7)$$

где \mathbf{R}_{ij} - сила взаимодействия между i -й и j -й составляющими. Через $\boldsymbol{\sigma}$ обозначен тензор напряжений Коши, оператор $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ означает взятие материальной производной. Функции J_{ij} характеризуют интенсивность обмена массой между компонентами и могут применяться при протекании в среде химических реакций. Из закона сохранения массы для всей среды следует, что $J_{ij} = -J_{ji}$, аналогично, из закона сохранения импульса - $\mathbf{R}_{ij} = -\mathbf{R}_{ji}$.

Такой способ описания, при котором деформируемое твердое тело рассматривается как многокомпонентная среда, значительно расширяет возможности механики сплошной среды и позволяет описывать различные процессы, протекающие на разных масштабных уровнях. В наиболее общем случае каждая из сред характеризуется не только плотностью и скоростью, но и своей температурой. Тогда систему уравнений следует дополнить уравнением теплопроводности для каждой из компонент и учесть обмен между ними не только импульсом, но и энергией. Двухтемпературные модели, часто применяющиеся при рассмотрении проблем о лазерном облучении тонких пленок, проанализированы в работах [34,60,61]. Большое преимущество многокомпонентного подхода по сравнению с гипотезой о немонотонной определяющей характеристики состоит в том, что при его использовании межфазная граница не вводится явным образом, а возникает естественным путём, как результат решения задачи. Фаза материала в

фиксированной точке может быть определена как концентрация соответствующей компоненты [62]. Правда, в этом случае приходится определять источники членов и силы взаимодействия между компонентами, что, как и задание кинетического уравнения, представляет собой непростой вопрос с неоднозначным ответом.

Если выбирать между двумя различными подходами к моделированию внутреннего преобразования материала, то для описания опытов по высокоскоростному деформированию наиболее подходящим выглядит использование многокомпонентной механики, так как она в большей степени соответствует экспериментальным данным (рис.1.4), показывающим, что деформируемое твердое тело является многоуровневой системой [63,64], подверженной переходу в новое состояние. Для простоты ограничимся рассмотрением только двухуровневой модели. Представим, что сложная кристаллическая структура состоит из двух решёток, связанных между собой нелинейными силами взаимодействия, каждая из которых представляет континуум, в каждой точке которого задаётся две величины: скорость и плотность (рис.1.5).

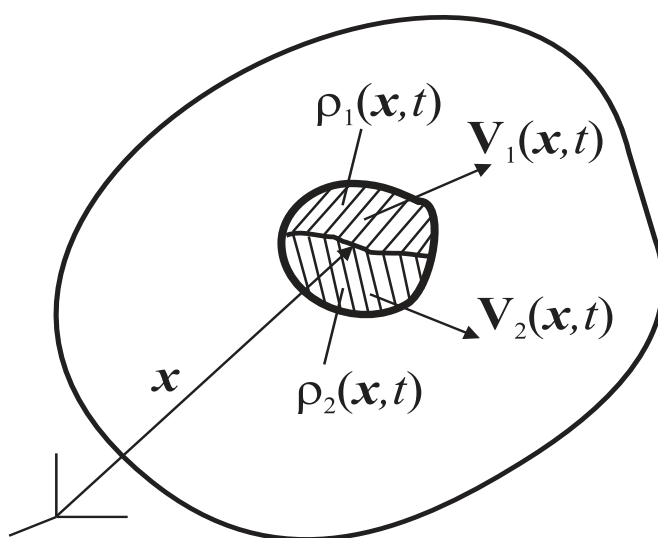


Рис.1.10. Двухкомпонентный континуум

В случае малых деформаций в уравнениях (1.7) вместо материальной производной можно писать частную производную по времени. Будем предполагать, что для обеих компонент выполняется закон Гука, и что обмена массой между ними не происходит. Тогда в рамках одномерной модели [65] в отсутствие источников членов J_{ij} уравнения баланса импульса принимают вид

$$\begin{aligned} E_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \rho_{10} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - R &= 0 \\ E_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \rho_{20} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь $u_i (i = 1, 2)$ - перемещение каждой из компонент, E_i - модуль юнга, ρ_{i0} - плотность в равновесном ненагруженном состоянии. Для удобства записи введено обозначение $R_{12} = R$. Данная одномерная модель наглядно изображается с помощью роликовой модели [66], в которой под структурным преобразованием подразумевается относительное движение шариков из верхнего ряда, которые стремятся занять впадины на нижнем ряду под действием сил внутреннего взаимодействия (рис.1.11).

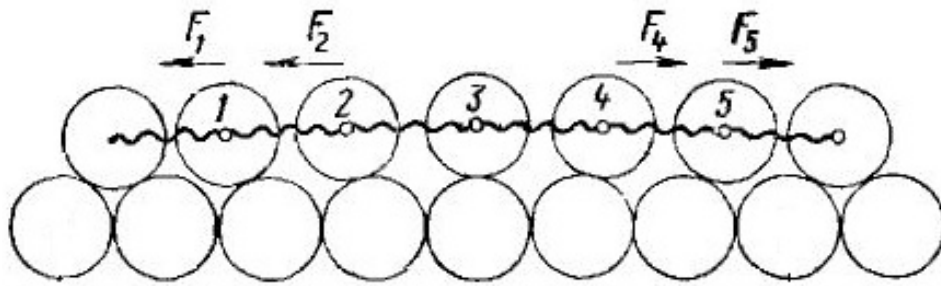


Рис.1.11. Роликовая модель

Естественно предположить, что аналитическое выражение для силы взаимодействия между компонентами состоит из двух слагаемых, первое из которых определяется нелинейно-упругой связью между компонентами, а второе представляет собой диссипативную составляющую

$$R = R_1(u_1 - u_2) + R_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2). \quad (1.9)$$

При выборе функций R_1 и R_2 требуется учесть возможность перехода материала из одного состояния в другое. Это означает, что нелинейно-упругая связь обязана иметь нетривиальное устойчивое положение равновесия [67]. Кроме этого, сила взаимодействия должна отражать периодичность сложной решётки, структура которой не изменяется при взаимном смещении компонент на величину, кратную периоду d . Отсюда следует, что одним из самых простых вариантов для задания силы является выражение

$$R = K \sin \lambda z + \nu \dot{z}, \quad (1.10)$$

где $z = u_1 - u_2$ обозначает относительное перемещение, параметр K определяет максимальное значение силы взаимодействия, а коэффициент ν характеризует диссипацию. Величина $\lambda = \frac{2\pi}{d}$ обратно пропорциональна периоду кристаллической структуры.

В качестве примера системы, где действует сила, определяемая выражением (1.10), рассмотрим нелинейное уравнение математического маятника с вязким трением

$$\ddot{\varphi} + 2b\dot{\varphi} + \sin \varphi = 0, \quad (1.11)$$

В консервативной системе при $n = 0$ интеграл энергии имеет вид

$$\dot{\varphi}^2 + 2(1 - \cos \varphi) = 2E \quad (1.12)$$

Точки минимумов потенциальной энергии определяются выражением $\varphi_0 = 2\pi k$, $k \in Z$. При специальном выборе энергии $E = 2$, которого можно добиться положив $\dot{\varphi}(0) = 2$ и $\varphi(0) = 0$, маятник будет совершать лимитационное движение по сепаратрисе $\varphi(t) = 4 \arctg(e^t) - \pi$ [68]. Если значение начальной скорости меньше окажется меньше вышеуказанного значения, то маятник после завершения динамического процесса снова вернётся в исходное состояние, в противном случае он окажется в ненулевом положении равновесия. На рисунках 1.12, 1.13 представлены результаты численного интегрирования уравнения (1.11), показывающие развитие во времени колебаний материальной точки, и соответствующие им фазовые портреты при $b = 0.02$.

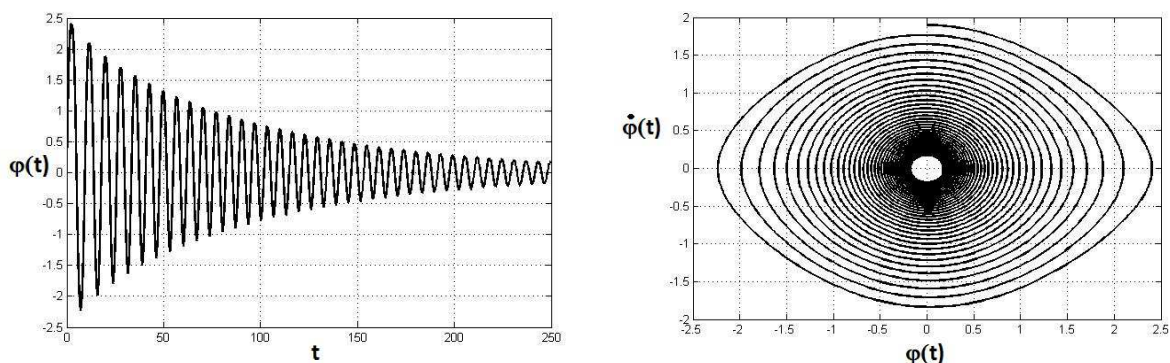


Рис.1.12 Зависимость $\varphi(t)$ и фазовый портрет системы, $\dot{\varphi}(0) = 1.9$

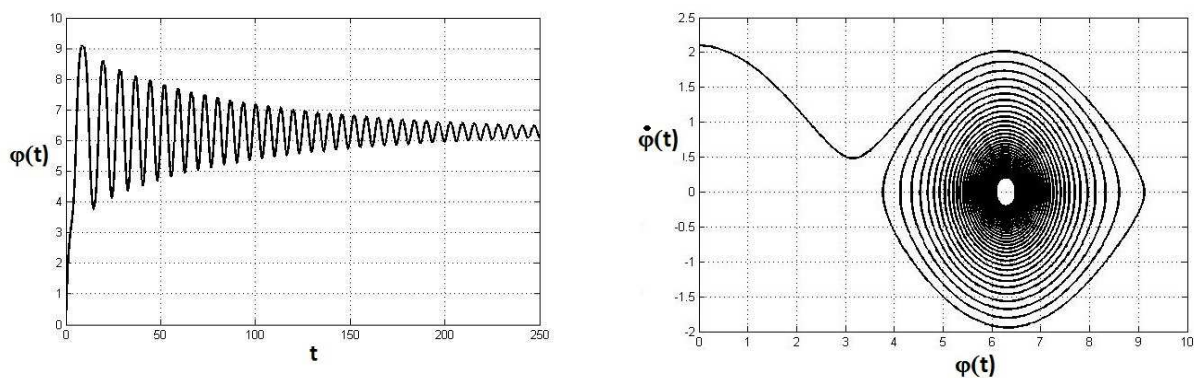


Рис.1.13. Зависимость $\varphi(t)$ и фазовый портрет системы, $\dot{\varphi}(0) = 2.1$

Уже на простом примере проявляется характерное свойство систем с несколькими равновесными конфигурациями: существование порогового значения воздействия, при котором происходят качественные изменения в их динамике [69].

Таким образом, в данной работе за основу приняты уравнения (1.8), но параметром, определяющим переход из одного состояния в другое является не концентрация, а относительное перемещение компонент. Вообще говоря, он представляет из себя сложное и многообразное явление, происходящее под действием разнообразных факторов, таких как температура, химическое воздействие, излучение и.т.п. В настоящей работе в качестве причины структурной перестройки выступает исключительно механическое воздействие. Везде, за исключением третьей главы, в которой рассматривается динамическая задача термоупругости, считается, что все процессы протекают при одной той же температуре. Действие других факторов исключается. Также предполагается, что каждая из компонент подчиняется закону Гука и не принимаются во внимание пластические свойства сплошной среды. Основная цель предложенной модели состоит в изучении динамики структурного превращения без явного введения межфазной границы и в нахождении тех условий, при которых оно происходит.

Глава 2. Постановка задачи. Кинематическое растяжение стержня

§2.1 Динамические уравнения относительно центра масс

Уравнения (1.7) записаны относительно двух континуумов, но экспериментально измеряемым параметром является перемещение не каждого из них в отдельности, а некоторая средняя величина, вклад в которую вносится и той и другой компонентной. Будем считать, что этой величиной, содержащей информацию о физическом состоянии системы, является перемещение центра масс $U = \frac{\rho_{10}u_1 + \rho_{20}u_2}{\rho_{10} + \rho_{20}}$. Тогда уравнения двухкомпонентной среды, рассматриваемые в полубесконечной области $0 < x < \infty$, удобно переписать относительно центра масс U и разности смещений $z = u_1 - u_2$ [70,71]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c_u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c_z^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \beta R(z, \dot{z}) + \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где введены следующие обозначения: $c_u^2 = \frac{E_1 + E_2}{\rho_{10} + \rho_{20}}$, $c_z^2 = \frac{E_1 E_2 (\rho_{10} + \rho_{20})}{(E_1 + E_2) \rho_{10} \rho_{20}}$.

Параметры α , β и γ определяются физическими свойствами материала:

$$\alpha = \frac{E_2 \rho_{10} - E_1 \rho_{20}}{(E_1 + E_2)(\rho_{10} + \rho_{20})}, \quad \beta = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}, \quad \gamma = \frac{E_2 \rho_{10} - E_1 \rho_{20}}{E_1 E_2}.$$

Начальные условия считаются нулевыми. Постановка граничных условий является одним из трудных вопросов в механике многокомпонентных сред, так как неясно, какое условие ставить на каждую из компонент. Допустим, что напряжение в сечении $x = 0$ распределено пропорционально плотности компонент

$$E_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\rho_{i0} \sigma_{imp}(t)}{\rho_{10} + \rho_{20}}, \quad (i = 1, 2), \quad (2.2)$$

где $\sigma_{imp}(t)$ - это напряжение на границе, задающееся в виде прямоугольного импульса $\sigma_{imp}(t) = \sigma_0 (H(t) - H(t - t_0))$ высотой σ_0 и длительностью t_0 , который моделирует воздействие ударника на мишень (рис. 1.1). Через $H(t)$ здесь обозначена функция Хевисайда. Во всяком случае, это предположение не противоречит правилу суммирования напряжений, в соответствии с которым общее напряжённое состояние образца равно сумме напряжений в каждой из компонент $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. При переходе у новым переменным U и z граничные условия (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} &= \sigma_{imp}(t) \left(\frac{\rho_{10}^2}{E_1(\rho_{10} + \rho_{20})^2} + \frac{\rho_{20}^2}{E_2(\rho_{10} + \rho_{20})^2} \right) \\ \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=0} &= \sigma_{imp}(t) \frac{(E_2 \rho_{10} - E_1 \rho_{20})}{(\rho_{10} + \rho_{20}) E_1 E_2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

На противоположной границе будем использовать условия стандартного вида, при которых перемещение при $x \rightarrow \infty$ полагается равным нулю, что отвечает волнам уходящим на бесконечность

$$U|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad z|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.4)$$

В результате мы приходим к системе уравнений (2.1), которая совместно с граничными условиями (2.3) и (2.4) представляет собой динамическую задачу о поведении материала с двумя уровнями, первый из которых соответствует макродвижению, регистрируемому при проведении опыта, а второй описывает микроструктурные изменения. По сути, относительное перемещение играет роль внутренней степени свободы, на которую в определённом диапазоне воздействий может происходить передача энергии от центра масс при структурном преобразовании. Процесс перестройки в данной модели связывается с динамикой внутренней переменной, а под новой фазой подразумевается область материала, где функция z занимает новое равновесное состояние. Второе из уравнений

системы (2.1) представляет собой нелинейное уравнение Клейна-Гордона, осложнённое дополнительным слагаемым, выражающим влияние инерционных сил на относительное смещение. Данное уравнение занимает важное место в теории нелинейных волн, так как оно часто встречается в разнообразных приложениях [72,73,74], к которым относятся физика дислокаций, моделирование сейсмических явлений, описание джозефсоновского перехода и т.д.

Полученные уравнения можно рассматривать и с другой точки зрения. Снова предположим, что мы рассматриваем не каждую из компонент по отдельности, а всю среду относительно её центра масс, для которого уравнение баланса импульса имеет вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - (\rho_{10} + \rho_{20})\ddot{U} = 0, \quad (2.5)$$

и пусть определяющее уравнение материала задано следующим выражением

$$\sigma = (E_1 + E_2) \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \alpha \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad (2.6)$$

представляющим собой аналог соотношения Дюамеля-Неймана, обобщающего закон Гука для термоупругости [75]. Для стержневой модели оно записывается в виде [76]

$$\sigma = E(\varepsilon - \alpha_T T), \quad (2.7)$$

где ε - это деформация стержня, T - изменение его температуры, а через α_T обозначен коэффициент линейного температурного расширения материала. Тогда после подстановки (2.6) в уравнение баланса импульса (2.5) мы приходим к первому из уравнений (1.12). Смысл закона Дюамеля-Неймана заключается в том, что он отделяет длинноволновую область спектра от высокочастотных колебаний, вызванных тепловым движением, которое характеризуется таким параметром как температура. Чтобы определить

данный параметр, необходимо записать уравнение теплопроводности, для которого в литературе существует множество различных вариантов, представленных как параболическим и гиперболическим типами, так и нелинейными уравнениями или уравнениями с переменными коэффициентами [77,78,79]. Здесь мы имеем аналогичную ситуацию. Первое из уравнений (2.1) описывает движение на макроскопическом уровне, тогда как уравнение для относительного смещения соответствует динамике высокочастотных внутренних степеней свободы, ответственных за структурную перестройку, которая, как показывает опыт (рис.1.3), в определённом диапазоне воздействий может оказывать существенное влияние на поведение центра масс.

§2.2 Квазистатическая задача. Линейный случай

Перед изучением динамики системы, описываемой уравнениями (2.1), было бы интересно установить связь между двумя различными подходами к описанию структурных преобразований, о которых было рассказано в первой главе. Формализуя поставленный вопрос, попытаемся выяснить можно ли не постулировать немонотонную связь между напряжением и деформацией, аналогичной той, которая изображена на рис.1.4, а получить её в результате решения задачи, исходя из двухуровневой модели. Так как в данной задаче требуется найти усилие, развиваемое в результате процесса деформирования, то здесь лучше воспользоваться не силовым, а кинематическим граничным условием. С этой целью обратимся к задаче о квазистатическом растяжении двухкомпонентного стержня конечной длины l , один торец которого закреплён, а другой движется в соответствии с заданной зависимостью от времени $U_0(t)$. Опуская производные по времени в системе уравнений (2.1), получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \beta K \sin \lambda z\end{aligned}\quad (2.8)$$

Первое из уравнений системы (2.8) интегрируется элементарно, и, следовательно, задача сводится к построению решения второго уравнения, которое нужно дополнить соответствующими граничными условиями

$$z|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = U_0(t). \quad (2.9)$$

Нетрудно заметить, что граничных условий (2.9) не хватает, чтобы установить зависимость напряжения от деформации. Для корректной постановки задачи необходимо ещё одно дополнительное граничное условие. Ранее уже было высказано предположение, о том, что напряжение на торце распределено пропорционально плотности компонент (2.2). Если воспользоваться им, то краевая задача (2.8, 2.9) после введения безразмерных

переменных $\xi = \frac{x}{l}$, $w = z\lambda$, $P = \frac{\sigma}{E_1 + E_2}$, $u = \frac{U}{l}$, $\varepsilon_0(t) = \frac{U_0(t)}{l}$ принимает вид

$$\begin{aligned}w_{\xi\xi} - \eta \sin w &= 0 \\ w|_{\xi=0} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=1} = \frac{Pr(E_1 + E_2)\lambda l}{E_1 E_2 \rho_0}, \quad w|_{\xi=1} = \frac{\rho_0(E_1 + E_2)\lambda l}{r}(\varepsilon_0 - P),\end{aligned}\quad (2.10)$$

где $\eta = K\beta\lambda^2$, $r = E_2\rho_{10} - E_1\rho_{20}$, $\rho_0 = \rho_{10} + \rho_{20}$. После исключения величины P приходим к задаче со смешанными краевыми условиями

$$\begin{aligned}w_{\xi\xi} - \eta \sin w &= 0 \\ w_{\xi=0} &= 0, \quad w|_{\xi=1} + \frac{\partial w}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=1} \frac{\rho_0^2 E_1 E_2}{r^2} = \frac{\rho_0(E_1 + E_2)\lambda \varepsilon_0}{r}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) описывает статический прогиб струны на подложке с потенциальной энергией $\Pi(w) = \eta(1 - \cos w)$ (рис.2.1), имеющей целую серию

положений равновесия $z = \pi k, k \in Z$, которые при чётных k являются устойчивыми, а при нечётных - неустойчивыми.

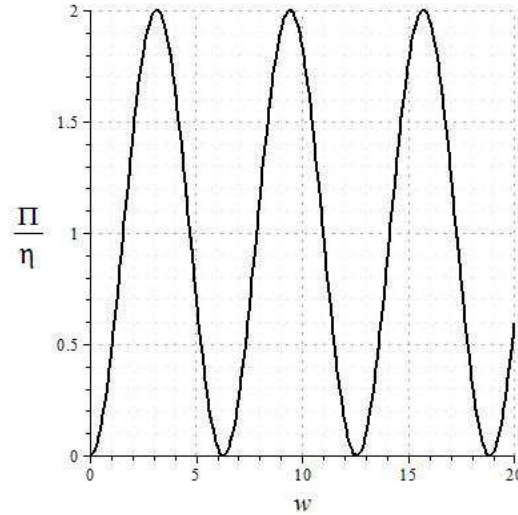


Рис.2.1. Потенциальная энергия

В окрестности нулевого положения равновесия при малых относительных смещениях, когда допустимо считать, что $\sin w \sim w$, спектр однородного линейного оператора пуст, и в таком случае неоднородная краевая задача (2.11) имеет единственное решение

$$w = A\varepsilon_0 \operatorname{sh}(\sqrt{\eta}\xi), \quad (2.12)$$

где $A = \frac{(E_1 + E_2)r}{\rho_0 E_1 E_2 \sqrt{\eta} \operatorname{ch} \sqrt{\eta}} \frac{\lambda}{\left(1 + \frac{r^2}{\rho_0^2 E_1 E_2} \frac{\operatorname{th} \sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta}}\right)}$. Для деформации центра масс и

зависимости $P(\varepsilon_0)$ получаются следующие выражения:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \varepsilon_0 \left(\frac{\alpha A}{\lambda} (\sqrt{\eta} \operatorname{ch}(\sqrt{\eta}\xi) - 1) + 1 \right) \quad (2.13)$$

$$P = E_{ef} \varepsilon_0, E_{ef} = \left(1 + \frac{r^2 \operatorname{th} \sqrt{\eta}}{\rho_0^2 E_1 E_2 \sqrt{\eta}} \right)^{-1}. \quad (2.14)$$

Коэффициент E_{ef} в (2.14) представляет собой аналог модуля Юнга для однокомпонентного материала.

До сих пор ничего не было сказано о соотношении параметров, входящих в предложенную модель. Теперь необходимо ввести ряд предположений относительно физических характеристик. Из первого уравнения системы (2.8) следует, что при равенстве скоростей продольной

звуковой волны $c_i = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_{i0}}}$ ($i=1,2$) относительное смещение z не влияет на

деформацию центра масс, так как параметр α обращается в ноль. Величина E_{ef} в этом случае равна 1, что соответствует классической формуле

параллельного соединения пружин. Поэтому предположим, что между скоростями имеется небольшое отличие, которое может заключаться как в модулях Юнга E_i , так и в плотностях ρ_i . Для определённости положим, что

$\rho_{10} = \rho_{20}$, а относительная разница жёсткостей является малой величиной,

которую обозначим через $\delta = \frac{E_2 - E_1}{E_2} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2^2} = 1 - m^2 \ll 1$. Тогда имеет

смысл переформулировать задачу (2.11) следующим образом:

$$w_{\xi\xi} - \theta^2 \sin w = 0, \quad (2.15)$$

$$w_{\xi=0} = 0, w \Big|_{\xi=1} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \frac{4m^2}{\delta^2} = \frac{2(1+m^2)p_2\varepsilon_0}{\delta} \quad (2.16)$$

а выражения (2.12-2.14) представить в виде:

$$w = A\varepsilon_0 \operatorname{sh}(\theta\xi) \quad (2.17)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial \xi} = \varepsilon_0 \left(B \operatorname{ch}(\theta \xi) - \frac{B}{\theta} + 1 \right) \quad (2.18)$$

$$P = E_{ef} \varepsilon_0, \quad E_{ef} = \left(1 + \frac{\delta^2 \operatorname{th} \theta}{4m^2 \theta} \right)^{-1}, \quad (2.19)$$

где $B = \frac{\delta^2}{4m^2 ch\theta \left(1 + \frac{\delta^2 \operatorname{th} \theta}{4m^2 \vartheta} \right)}$. Коэффициент A также целесообразно записать

как $A = \frac{\delta(1+m^2)p_1}{2m^2 ch\theta \left(1 + \frac{\delta^2 \operatorname{th} \theta}{4m^2 \theta} \right)}$. Безразмерные параметры p_1 и p_2 связаны с

физическими характеристиками с помощью соотношений $p_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{\beta K}}$ и

$p_2 = \lambda l$. Через θ обозначено их отношение: $\theta = \frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\eta}$. Физический смысл

параметра p_2 очевиден: он определяет количество структурных элементов в

образце. Будем полагать величину p_2 достаточно большой, так что $\lambda l \sim 10^3$

Параметр p_1 зависит от жёсткости связи K между компонентами, которую в

отсутствии внешнего воздействия на материал при малых деформациях мы

будем считать настолько сильной, что решение уравнения (2.15) оказывается

локализованным вблизи границы с нетривиальным краевым условием

(рис.2.1). Расчёты были проведены при следующих параметрах:

$$E_1 = 1 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}, \quad E_2 = 1.1 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}, \quad \rho_1 = \rho_2 = 4 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}, \quad K = 4 \cdot 10^{14} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-3},$$

$$l = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad \lambda = 3 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}. \quad \text{Числовые значения } E_i \text{ и } \rho_i \text{ (} i=1,2 \text{) выбирались в}$$

соответствии с характерными значениями модулей Юнга и плотностей для

металлов. Размер микроструктуры λ определяется размером зерна в металле,

который варьируется в достаточно широком диапазоне от нескольких

микрометров до десятых долей миллиметра. Его значение взято из работы

[80], в которой дан анализ влияния размеров структур на ударное

нагружение. Оценка величины K будет произведена позднее при рассмотрении динамики двухкомпонентной среды. Отметим, что используемые значения не описывают какой-либо эксперимент, а носят иллюстративный характер.

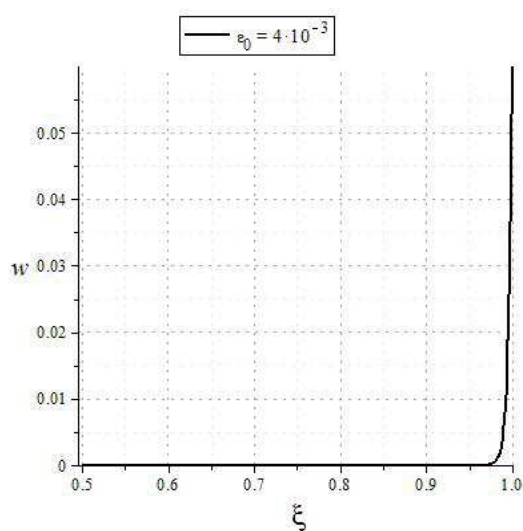


Рис.2.2. Решение линейной задачи

Из формулы (2.18) видно, что наличие внутренней степени свободы в линейной постановке задачи не оказывает заметного влияния на распределение деформаций в образце. Оно остаётся однородным, как и при растяжении обычного однокомпонентного материала. Эффективное значение модуля Юнга E_{ef} , определяемого выражением (2.19) незначительно отклоняется от единицы в силу ограниченности функции $f(\theta) = \frac{\text{th}(\theta)}{\theta}$, график которой приведён на рис.2.3.

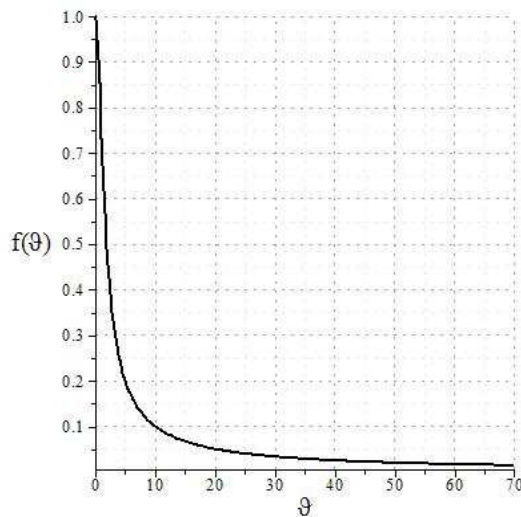


Рис.2.3. График функции $f(\vartheta)$

Зависимость напряжения от деформации при выбранных значения физических величин остаётся линейной, т.е при сделанных предположениях

относительно безразмерных параметров $\theta = \frac{P_2}{P_1} \gg 1$ и $\delta = \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2^2} \ll 1$

внутренняя степень свободы себя не проявляет и не сказывается на реологической кривой. В дальнейшем будет показано, что при динамической нагрузке материал ведёт себя совершенно иначе. Пока же, оставаясь в рамках поставленной задачи, попытаемся выяснить, каким образом нужно преобразовать данные соотношения, чтобы относительное смещение компонент привело к изменению в макропараметре системы.

§2.3. Немонотонная определяющая диаграмма

При ослаблении связи между компонентами становится необходимо учитывать ограниченность силы взаимодействия, и естественно возникает вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи (2.15, 2.16). Воспользуемся следующей теоремой, которая утверждает, что уравнение вида

$$y_{xx} = f(x, y, y_x, y_{xx}) \quad (2.20)$$

на промежутке $x \in [a, b]$ с граничными условиями третьего рода

$$y(a) = Ay_x(a) + c, \quad y(b) = -By_x(b) + d, \quad (2.21)$$

где $A, B, c, d \in \mathbb{R}$, $A, B \geq 0$, имеет единственное решение, если функция $f(x, y, y_x, y_{xx})$ непрерывна по всем переменным и удовлетворяет условию $|f(x, y_1, y_{x1}, y_{xx1}) - f(x, y_2, y_{x2}, y_{xx2})| \leq \vartheta_0 |y_1 - y_2| + \vartheta_1 |y_{x1} - y_{x2}| + \vartheta_2 |y_{xx1} - y_{xx2}|$ с постоянными Липшица настолько малыми, что

$$c_0 \vartheta_0 + c_1 \vartheta_1 + \vartheta_2 < 1. \quad (2.22)$$

Постоянные c_0 и c_1 являются функциями от параметров A, B, a, b . Данные зависимости приведены в работе [81] и в общем случае выражаются достаточно громоздкими формулами. В рассматриваемой задаче условие (2.22) принимает вид

$$f(\delta)\eta < 1, \quad (2.23)$$

где $f(\delta) = \frac{(\delta^2 + 8(1 - \delta))^2}{8(\delta^2 + 4(1 - \delta))^2}$, и позволяет указать область параметров, обеспечивающих однозначное определение напряжения P по заданной деформации ε_0 . Данная область расположена под кривой, изображённой на рис.2.3.

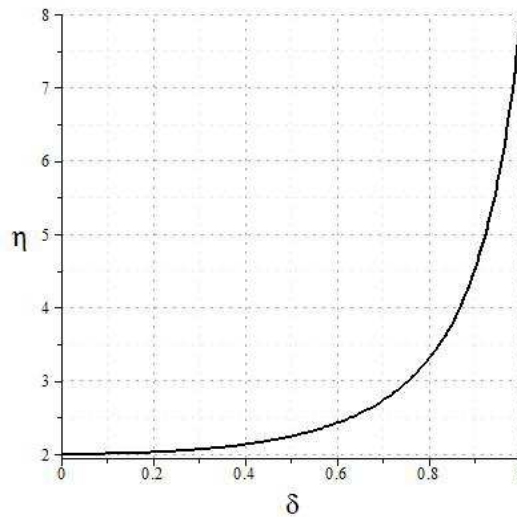


Рис.2.3. Область параметров, обеспечивающих
единственное решение

Из всей области параметров нам требуется выделить те значения, при которых определяющая диаграмма будет содержать ниспадающую ветвь [82]. Для исследования данной проблемы применим метод Галёркина. Разумеется, целесообразность использования этого приёма для нелинейного оператора с невыпуклой энергией является спорным вопросом, так как здесь не гарантируется единственность решения и в общем случае отсутствует доказательство сходимости. Тем не менее мы увидим, что подобный аналитический подход оказывается полезным для определения параметров, обеспечивающих требуемое состояние системы. Если считать, что форма решения нелинейного оператора достаточно близка к линейной, то тогда для описания процесса её перестройки было бы разумно искать решение в виде $z = q_1(\varepsilon_0)\xi + q_2(\varepsilon_0)sh(\vartheta\xi)$ и сводить задачу к алгебраической системе из двух уравнений относительно неизвестных $q_1(\varepsilon_0)$ и $q_2(\varepsilon_0)$, однако такой путь ведёт к очень сложным выражениям. Вместо этого будем предполагать, что процесс структурного преобразования завершён, и возьмём для простоты только одну форму $f(\xi) = \xi$, разыскивая решение в виде $w = \Theta\xi$.

После умножения уравнения (2.15) на $f(\xi)$ и интегрирования в промежутке от нуля до единицы с учётом граничных условий (2.16) получаем уравнения, устанавливающие связь между коэффициентом Θ в разложении, смещением на торце ε_0 и напряжением P

$$\frac{\theta^2}{\Theta} \left(\cos \Theta - \frac{\sin \Theta}{\Theta} \right) - \Theta + \frac{p_2 P (1 + m^2) \delta}{2m^2} = 0$$

$$\Theta = \frac{2p_2 (1 + m^2) (\varepsilon_0 - P)}{\delta} \quad (2.24)$$

Исключая P из системы (2.19), можно получить уравнение вида $F_1(\Theta, \varepsilon_0) = 0$ для определения Θ при фиксированном ε_0 . Чтобы определяющая диаграмма материала представляла собой немонотонную зависимость $P(\varepsilon_0)$, нужно, показать, что у неё есть такие точки, в которых производная $\frac{dP}{d\varepsilon_0}$ обращается в ноль. Между этими точками она должна принимать отрицательные значения, соответствующие неустойчивому участку на определяющей диаграмме. Тогда из уравнений (2.24), полученных с помощью процедуры Галёркина, вытекает неравенство

$$\frac{d\varepsilon_0}{dP} = - \frac{\frac{\partial F_2}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial P} + \frac{\partial F_2}{\partial P}}{\frac{\partial F_2}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_0}} < 0, \quad (2.25)$$

где $F_2(\Theta, P) = \frac{\theta^2}{\Theta} \left(\cos \Theta - \frac{\sin \Theta}{\Theta} \right) - \Theta + \frac{p_2 P (1 + m^2) \delta}{2m^2}$. Знаменатель выражения (2.25) в экстремальных точках равен нулю. В развёрнутом виде данное уравнение запишется так

$$\frac{\theta^2}{\Theta} \left(\frac{2}{\Theta^2} - 1 \right) \sin \Theta - \frac{2\theta^2}{\Theta^2} \cos \Theta - 1 = 0. \quad (2.26)$$

При $\Theta > 1$ (в противном случае мы возвращаемся к линейной задаче) у него имеются корни, когда $\Theta < \theta^2$. С другой стороны, достаточное условие для существования решения у неравенства (2.25) имеет вид $\Theta > \frac{\theta^2}{1 + \frac{\delta^2}{4m^2}}$. Тогда

отсюда следует, что участок с отрицательным значением производной обязательно существует, если для параметра Θ выполняется условие

$$\frac{\theta^2}{1 + \frac{\delta^2}{4m^2}} < \Theta < \theta^2. \quad (2.27)$$

В общем случае уравнение (2.26) может иметь множество корней. Потребуем, чтобы оно обладало только двумя решениями, такими, что промежуток между ними удовлетворяет неравенству (2.27). Этого можно добиться, потребовав существенного уменьшения параметра K , что с физической точки зрения соответствует ослаблению связей между решётками. Из выражения (2.27) следует, что в этом случае нельзя полагать $\delta \ll 1$, т.е. разность скоростей звука в компонентах уже не является малой величиной. На рис.2.4 показаны корни уравнения (2.26), которые лежат в точках пересечения графиков функций $f_1(\Theta) = \left(\frac{2}{\Theta^2} - 1\right) \sin \Theta - \frac{2}{\Theta} \cos \Theta$ и $f_2(\Theta) = \frac{\Theta}{\vartheta^2}$ при $K = 4 \cdot 10^{10} \text{ H} \cdot \text{м}^{-3}$ и $E_2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ H} \cdot \text{м}^{-2}$. Значения других параметров оставлены без изменений. Разумеется, что новый набор физических величин обязан удовлетворять неравенству (2.23).

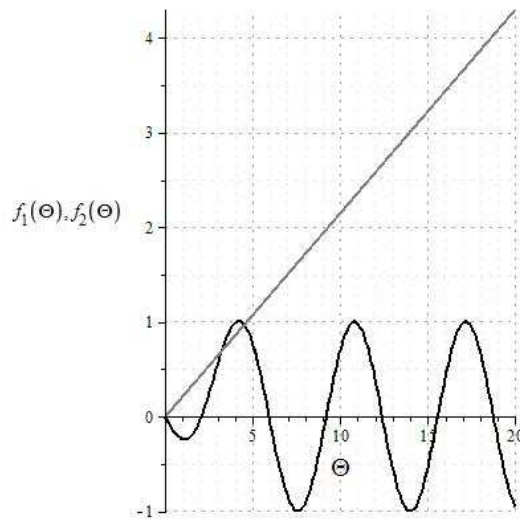


Рис.2.4. Корни уравнения, $K = 4 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-3}$

Функция $F_1(\Theta, \varepsilon_0) = 0$, полученная после процедуры Галёркина, изображена на рис.2.5 при трёх различных значениях деформации, а на рис.2.6 произведено сопоставление с результатом численного интегрирования уравнения (1.22) с помощью метода конечных разностей, основанного на замене производных их разностными аналогами. В итоге задача сводится к системе алгебраических уравнений с матрицей ленточного типа, которая решается методом прогонки [83].

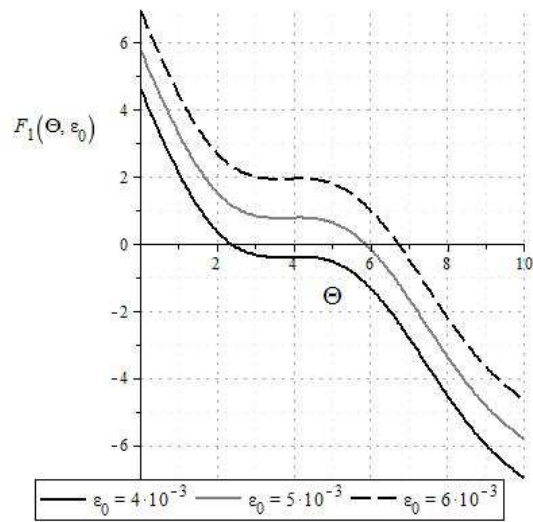


Рис.2.5. График функции $F_1(\Theta, \varepsilon_0)$

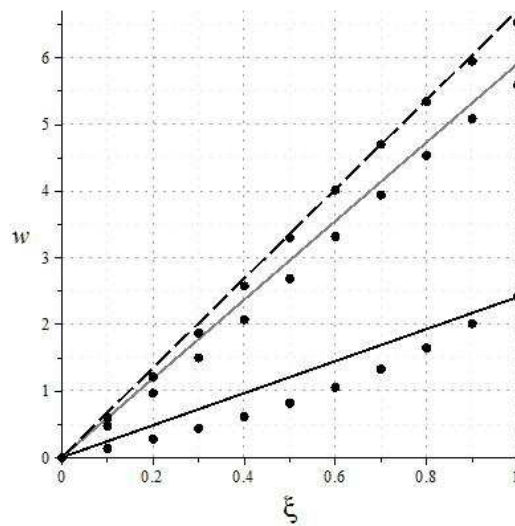


Рис.2.6. Относительное перемещение

Как видно из рис.2.5, при данных параметрах неизвестный коэффициент при форме Θ , определяющий распределение $w(x)$, находится однозначно. Обращает на себя внимание то, что при $\varepsilon_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ аппроксимация по методу Галёркина гораздо хуже соответствует численному по сравнению с другими значениями (рис.2.6). Это обусловлено тем, что при данной деформации ещё не произошла структурная перестройка, и, следовательно, вышеуказанное

отличие является следствием неудачного выбора формы разложения. Пример определяющей диаграммы с немонотонной зависимостью $P(\varepsilon_0)$, полученный с помощью анализа неявной функции в пакете Maple и соответствующий рис.2.5, приведен на рис.2.7. Точками обозначено численное решение задачи.

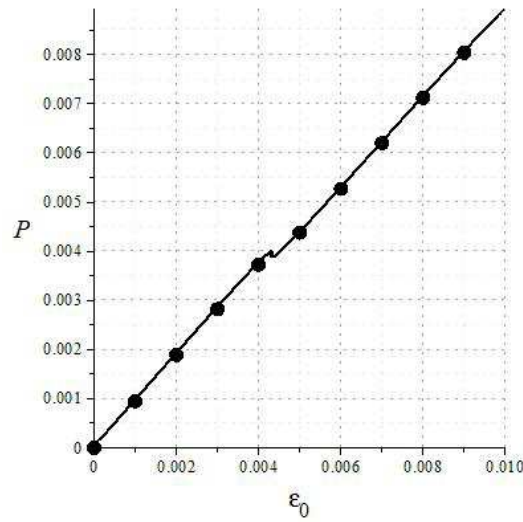


Рис.2.7. Немонотонная определяющая диаграмма

Таким образом, процедура Галёркина дала возможность указать те параметры модели, при которых определяющая диаграмма становится немонотонной функцией. Однако слабая сторона данного подхода заключается в том, что при его использовании не удаётся проанализировать влияние внутренней степени свободы на деформацию центра масс, так как из первого уравнения системы (2.8) видно, что она в любом случае будет оставаться однородной.

§2.4 Влияние относительного смещения на макропараметры

Полученные результаты приводят к вопросу о нахождении критического значения деформации ε_{0cr} , при котором происходит структурное преобразование. Кривая на рис. 2.10 была получена на основе анализа довольно сложной неявной функции, и поэтому было бы целесообразно попытаться найти чисто аналитический подход для оценки данной величины. При этом предполагается, что параметры материала выбраны таким образом, чтобы обеспечить существование неустойчивого участка на кривой $P(\varepsilon_0)$. Данная задача аналогична проблеме нахождения критической силы в линейной эластике Эйлера, при которой становится возможным существование смежных форм равновесия балки [84].

Для исследования данной проблемы будем искать решение нелинейного уравнения (2.15) в виде суммы

$$w(\xi) = w_{lin}(\xi) + w_1(\xi), \quad (2.28)$$

где w_{lin} определяется выражением (2.17), а второе слагаемое представляет собой малое ($w_1 \ll 1$) возмущение решения линейного оператора. После подстановки (2.28) в (2.15) приходим к уравнению второго порядка с переменными коэффициентами относительно функции $\tilde{w}(\xi)$ и однородными граничными условиями (2.16)

$$w_{1\xi\xi} - \vartheta^2 w_1 \cos(w_{lin}) = \vartheta^2 \sin(w_{lin}) - w_{lin\xi\xi}. \quad (2.29)$$

В эластике Эйлера критическая сила находится из условия существования нетривиального решения однородного уравнения, описывающего изгиб балки. Здесь условие перестройки формы решения математически выражается в наличии точек возврата [85,86], в которых переменный коэффициент обращается в ноль, что приводит к резкому изменению характера решения. Для уравнения (2.29) данное условие означает, что

$$\cos(w_{lin}) = 0. \quad (2.30)$$

До критической точки на определяющей диаграмме (рис.2.7), соответствующей началу неустойчивого участка, все возвратные точки лежат справа от 1. На рис. 2.8 показано, как с ростом деформации точка возврата постепенно оказывается внутри промежутка $0 \leq \xi \leq 1$, на котором рассматривается нелинейная краевая задача. Уравнение (2.30) приводит к достаточно простому соотношению для определения критической деформации

$$\varepsilon_{0cr} = \frac{\pi(1-\delta)\vartheta}{2\delta\lambda th\vartheta}, \quad (2.31)$$

связывающему параметры микроструктуры с измеряемым макропараметром. Отметим, что найденное по формуле (2.31) значение $\varepsilon_{0cr} = 4 \cdot 10^{-3}$ довольно хорошо согласуется с точкой экстремума на определяющей диаграмме (рис.2.7).

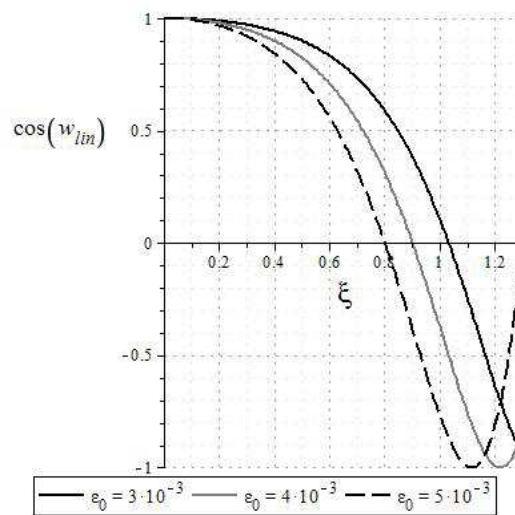


Рис.2.8. Точки возврата

Чтобы определить влияние относительного смещения на деформацию центра масс, используем другое начальное приближение для нелинейной краевой задачи, предполагая, что структурное преобразование, связанное с изменением формы уже произошло (рис.2.6), и будем строить решение краевой задачи (2.15, 2.16) в виде

$$w(\xi) = A(\varepsilon_0)\xi + w_2 . \quad (2.32)$$

После подстановки (2.32) в (2.15) получается однозначное выражение для функции $A(\varepsilon_0)$

$$A(\varepsilon_0) = \frac{2p_2\delta\varepsilon_0}{1+m^2} , \quad (2.33)$$

а поправка \tilde{w}_2 должна удовлетворять уравнению

$$w_2'' - \vartheta^2 \sin(A\xi + w_2) = 0 \quad (2.34)$$

с однородными краевыми условиями (2.16). Далее его можно было бы свести к задаче, аналогичной уравнению (2.29), в котором в качестве аргумента косинуса используется выражение (2.33). Однако этот подход приводит к тяжёлому уравнению с двумя возвратными точками. Вместо этого предлагается найти асимптотическое решение при достаточно больших значениях $A(\varepsilon_0)$, так как в предыдущем параграфе при поиске параметров, обеспечивающих немонотонную зависимость напряжения от деформации, было отмечено, что δ уже не является малой величиной. Тогда уравнение (2.34) можно записать в виде

$$w_2'' - \vartheta^2 \sin(A\xi + o(A^{-2})) = 0 \quad (2.35)$$

Оно элементарно интегрируется и в таком случае

$$w_2 = -\frac{\vartheta^2}{A^2} \sin A\xi + \frac{\vartheta^2}{A} \frac{4m^2 \cos(A)}{(\delta^2 + 4m^2)} \xi \quad (2.36)$$

На рис. 2.9 показано сравнение выражения (2.36) с численным решением.

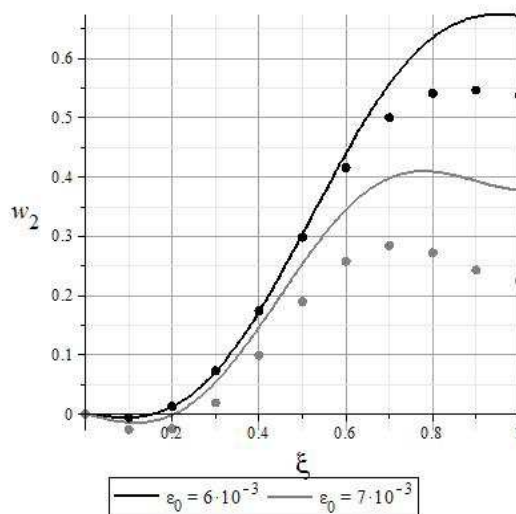


Рис.2.9. Распределение $w_2(\xi)$

Из него видно, что асимптотика за исключением области приложения нагрузки по крайней мере качественно верно отражает поведение функции $w_2(\xi)$. Чтобы оценить её влияние на деформацию центра масс, вернёмся к первому из уравнений системы (2.8), которое в ранее введённых безразмерных переменных $\xi = \frac{x}{l}$, $w = z\lambda$, $u = \frac{U}{l}$, $\varepsilon_0(t) = \frac{U_0(t)}{l}$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{(1-m^2)}{2p_2(1+m^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \quad (2.37)$$

Интегрируя данное уравнение и подставляя в него (2.31), получим

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \varepsilon_0 - \frac{\cos(A\xi)}{4p_1^2 \varepsilon_0}, \quad (2.38)$$

откуда следует, что отклонение от однородного деформированного состояния имеет периодический характер с частотой, зависящей от отношения размера образца к размеру микроструктуры, и амплитудой

обратно пропорциональной произведению заданной деформации на параметр $p_1^2 = \frac{\lambda}{\beta K}$. Из (2.38) нетрудно найти точку ξ_{\max} , в которой это отклонение максимально. Дифференцируя (2.38) по ξ и приравнявая производную нулю, находим, что

$$\xi_{\max} = \frac{\pi k(1+m^2)}{2p_2 \delta \epsilon_0}, k \in Z, \quad (2.39)$$

т.е с увеличением деформации максимум смещается вглубь материала. Этот же результат виден из сопоставления с численным решением (рис.2.10) при тех же значениях деформации, что и на рис.2.9.

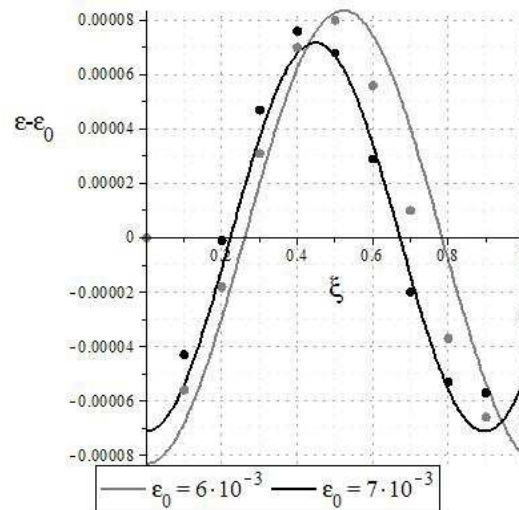


Рис.2.10. Отклонение от средней деформации

Подведём краткие итоги. В данной главе в рамках двухкомпонентной модели изучалось влияние микроструктуры на свойства материала при квазистатическом растяжении стержня. Предложенный подход не позволил показать сам процесс перестройки формы относительного смещения решёток, выступающего в роли внутренней степени свободы, но несмотря на это были найдены те параметры, при которых оно приводит к наличию

петлеобразной определяющей диаграммы. Также был предложен способ оценки критического значения деформации, с которого начинается ниспадающая ветвь, и было проанализировано влияние микроструктуры на макро-деформацию, выражающееся в том, что её распределение в образце после перестройки приобретает гармонический характер со средней составляющей, равной значению приложенной нагрузки. Чтобы определяющая кривая приобрела неустойчивый участок, нам пришлось сделать жёсткости компонент существенно отличными друг от друга и значительно ослабить связь между ними, положив $K = 4 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-3}$. В макро-образце с близкими физическими характеристиками компонент подобная зависимость не реализуется и, следовательно, переход материала в новое состояние при квазистатическом нагружении невозможен. Его удаётся осуществить только при динамическом воздействии на систему с частотным спектром, согласующимся со спектральной характеристикой системы. Для исследования данной задачи вернемся к динамическим уравнениям (2.1) и рассмотрим нестационарную задачу о распространении короткого по сравнению с временем пробега волны импульса в двухкомпонентной среде.

Глава 3. Особенности использования метода переменного интервала

§3.1. Метод переменного интервала. Основная идея

При решении краевых задач математической физики часто используются интегральные преобразования, позволяющие свести линейное уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению путём умножения всех его членов на ядро и последующим интегрированием [87,88,89]. В итоге задача состоит в восстановлении оригинала по известному образу. Среди интегральных преобразований особенно широкое применение находят преобразования Фурье и Лапласа, для которых составлены подробные таблицы [90]. Несмотря на это, нахождение обратного преобразования иногда представляется весьма нетривиальной проблемой, возникающей при интегрировании выражений, содержащих особые точки на вещественной оси или точки ветвления [91]. Даже если удаётся преодолеть трудности математического характера, то получающиеся выражения обычно содержат специальные функции и являются весьма неудобными для дальнейшего исследования.

В начале предыдущей главе была сформулирована задача (2.1-2.4) о распространении волны, образованной кратковременным воздействием на двухкомпонентную среду, в которой относительное перемещение решёток выполняет роль внутренней степени свободы, определяющей структурное преобразование в материале. Очевидно, что построение точного аналитического решения данной системы вряд ли возможно из-за нелинейного слагаемого, выражающего силу взаимодействия между решётками. В этом случае кажется разумно с самого начала размышлять об использовании того или иного численного подхода, однако в большинстве случаев они не дают возможности выделить множество параметров, обеспечивающих переход системы в искомое состояние, и произвести оценку времени данного перехода. Следовательно, становится сложно заранее

указать размеры области численного интегрирования. Также в нелинейных задачах существенную сложность представляет нахождение условий сходимости и устойчивости метода, связанных с выбором величины сеточного шага. В связи с вышеперечисленными вопросами появляется настоятельная потребность в приближённых подходах, позволяющих получить аналитические формулы, с помощью которых можно хотя бы качественно предсказать динамику модели и отделить физику процесса от эффектов, вносимых численной аппроксимацией.

Для многих задач в качестве такого подхода может использоваться метод разложения на переменном интервале (МПИ) [92]. Он оказывается плодотворным при построении приближённого аналитического решения нестационарной задачи и может применяться для тестирования численного расчёта. Суть этого метода состоит в том, что, аналогично процедуре Галёркина, решение дифференциального уравнения ищется в виде разложения по формам, однако длина промежутка, в отличие от классического подхода, не является постоянной величиной, а представляет собой неизвестную функцию времени. В случае гиперболических уравнений в качестве интервала обычно берётся область материала, охваченная возмущением, длина которой определяется простым выражением

$$l(t) = c_0 t, \quad (3.1)$$

где c_0 - фазовая скорость волны в среде. Если уравнение не является гиперболическим, то ответ на данный вопрос уже не выглядит настолько очевидным. В монографии [93] для нахождения функции $l(t)$ предлагается использовать критерий минимума среднего квадратичного отклонения приближённого решения $\tilde{u}(x, t)$ от точного решения задачи $u(x, t)$

$$\frac{\partial}{\partial l} \int_0^l (\tilde{u} - u)^2 dx = 0, \quad (3.2)$$

который успешно применяется в вышеназванной книге для оператора, описывающего поведение балки Бернулли-Эйлера под действием единичной силы. Учёт граничных условий при использовании МПИ производится следующим образом. На границе возмущенной области ввиду непрерывности искомой функции предполагается, что $\tilde{y} = 0$, и форма разложения выбирается так, чтобы удовлетворить этому условию. Граничное условие на противоположном конце, вызывающее возмущение среды, учитывается с помощью метода Гринберга [94].

§3.2. Простые примеры

Покажем использование МПИ на двух простых примерах, имеющих точные аналитические выражения, в которых полубесконечная область подвергается действию кратковременного сосредоточенного на границе прямоугольного импульса, длительность которого много меньше времени прохождения волны до фиксированного сечения. Здесь достаточно ограничиться определением реакции системы $R(x, t)$ на действие единичного скачка, так как решение искомой задачи будет иметь вид $R(x, t) - R(x, t - t_0)H(t - t_0)$, где через $H(t)$ обозначена функция Хевисайда. Сначала рассмотрим оператор Д'Аламбера. Пусть на положительной полуоси $0 < x < \infty$ задано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.3)$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = F(t) = F_0 H(t), \quad (3.4)$$

$$u \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0$$

где F_0 произвольная константа. Начальные условия предполагаются нулевыми. Аналитическое решение задачи (3.3, 3.4) представляет собой волну, распространяющуюся влево от границы $x = 0$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = F_0 H(t - x). \quad (3.5)$$

Зависимость (2.3) от времени при $t_0 = 0.1$ в сечении $x = 1$ показана на рис. 3.1.

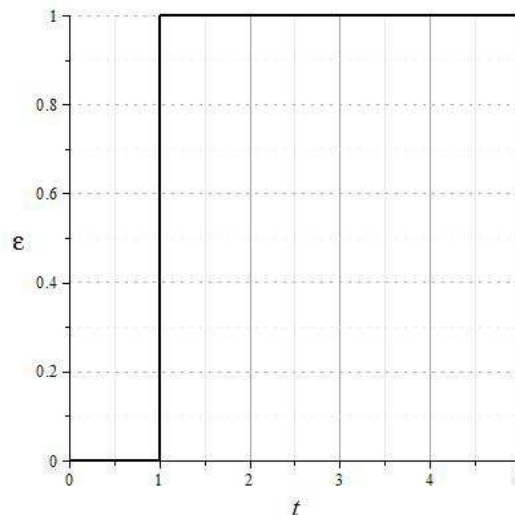


Рис.3.1. Зависимость $\varepsilon(t)$, $F_0 = 1$

Теперь найдём решение этой же задачи, используя МПИ. Так как скорость распространения волны в уравнении (3.3) равна 1, то зависимость, выражающая длину переменного интервала в соответствии с (3.1), имеет вид $l(t) = t$. В качестве полной системы функций, по которой будет разложено искомое решение, используем тригонометрические функции

$$f_n(x) = \cos \frac{\pi(2n+1)x}{2l} H(l-x), \quad \text{учитывая, что на границе } x=l \text{ зоны,}$$

охваченной волной, $u=0$. Функция Хевисайда $H(x)$ введена с целью исключить периодическое продолжение на область $x > l$. Итак, будем искать неизвестную функцию $u(x,t)$ в виде ряда $u(x,t) = \sum_{n=0}^N q_n(t) f_n(x)$, ограничиваясь конечным числом его членов. Далее, используя процедуру Галёркина, умножим уравнение (3.3) на форму и проинтегрируем в промежутке от 0 до l . Принимая во внимание граничные условия (3.4), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $q_n(t)$

$$\ddot{q}_n + \Omega_n^2 q_n = -\frac{2F(t)}{l}, \quad (3.6)$$

где $\Omega_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}$. После введения новой независимой переменной $\tau = \Omega_n t$ уравнение (3.6) принимает вид

$$\ddot{q}_n + q_n = -\frac{2F(\tau/\Omega_n)}{l\Omega_n^2}, \quad (3.7)$$

Данное уравнение описывает вынужденные колебания маятника с единичной собственной частотой под действием силы $-\frac{2F(t)}{l\Omega_n^2}$. При нулевых начальных условиях его решение записывается следующим образом:

$$q_n(t) = -\frac{2F_0}{l} \frac{(1 - \cos \Omega_n t) H(t)}{\Omega_n^2}. \quad (3.8)$$

Тогда производную искомой функции по координате можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{(1 - \cos \Omega t)}{(2n+1)} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2l} H(l-x). \quad (3.9)$$

Её график в сечении $x=1$ при различных значениях N изображён на рис.3.2. Как видно, он довольно хорошо согласуется с аналитическим решением задачи.

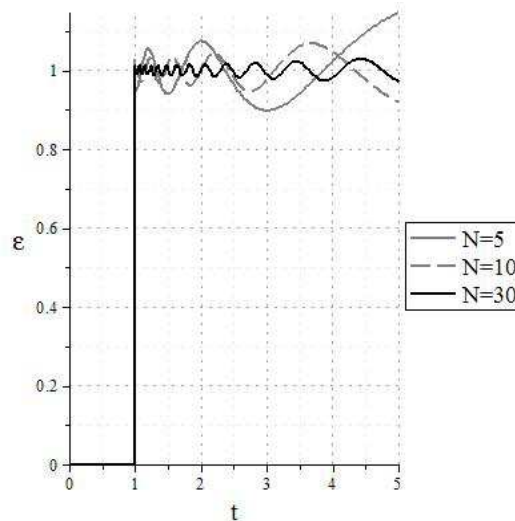


Рис.3.2. Зависимость $\varepsilon(t)$, МПИ

Для $N \rightarrow \infty$ ряд (3.9) сходится, так как $\cos(\Omega_n t) = 0$ для любого n , а ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2l}$ сходится равномерно при $x \in [0, l]$ по признаку

Дирихле [95]. Применительно к рассматриваемой задаче нетрудно показать, что ряд (3.9) сходится к её точному решению. Для этого достаточно записать разложение функции единичного скачка на промежутке от $[0, l]$ в ряд Фурье

$$H(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2l} \quad (3.10)$$

и сопоставить его с выражением (3.9).

В качестве следующего примера, иллюстрирующего использование МПИ, будет рассмотрено линейное уравнение Клейна-Гордона, моделирующее динамику стержня на упругом основании

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u = 0. \quad (3.11)$$

Его точное аналитическое решение, полученное с помощью преобразования Лапласа $f^L = \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau} d\tau$, с граничными условиями (3.4) приводится к виду

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\int_x^t \frac{J_1(\sqrt{\tau^2 - x^2})x}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau - 1 \right) H(t - x), \quad (3.12)$$

где через $J_1(x)$ обозначена функция Бесселя первого рода. В отличие от решения уравнения Д'Аламбера, формула (3.12) не выглядит настолько простой и её анализ достаточно трудоёмок. Чтобы построить приближённое решение на основе МПИ, проделаем ту же самую процедуру, что и в предыдущем случае, не меняя форму разложения. В итоге для определения неизвестных коэффициентов получаем дифференциальное уравнение

$$\ddot{q}_n + (1 + \Omega_n^2)q_n = -\frac{2F_0 H(t)}{l} \quad (3.13),$$

которое с точностью до формальной замены $\Omega^2 \rightarrow 1 + \Omega^2$ совпадает с уравнением (3.7). Поэтому решение задачи без труда находится из (3.8) с помощью данной подстановки. Сравнение приближённого аналитического решения, в котором удерживается $N = 30$ членов ряда, с численным в точке $x = 1$ показано на рис.3.3.

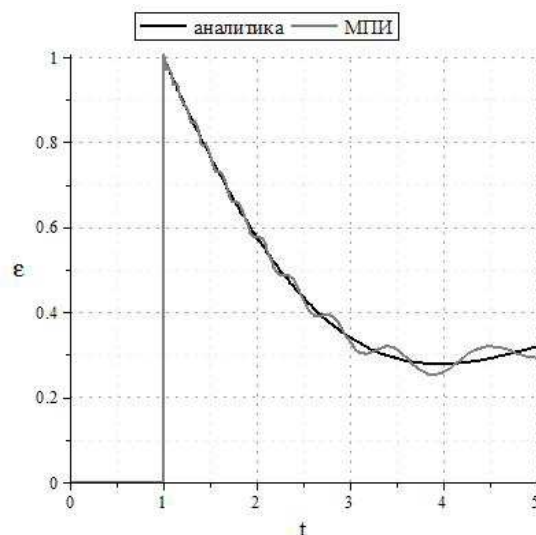


Рис.3.3. Зависимость $\mathcal{E}(t)$, $N=30$

Приведённые выше примеры имеют точные аналитические решения и были выбраны исключительно с целью продемонстрировать основную идею метода МПИ. Наиболее важное значение он приобретает в тех задачах, где точное аналитическое решение получить невозможно, или же оно представимо в такой неудобной форме, что при её использовании становится трудно произвести оценку искомых физических величин. Наглядным примером здесь является проблема динамической термоупругости,

§3.3. Динамическая термоупругость

В настоящее время она включает в себя обширный класс задач, охватывающий как и традиционные уравнения, так и модели с несколькими температурами [96,61,97], постановка которых может относиться к совершенно различным временным и пространственным масштабам. Впервые же данная задача была описана в статье [98]. Следуя данной работе, рассмотрим упругое полупространство, которое в момент времени $t=0$ в плоскости $x=0$, подвергается действию теплового импульса, порождающего в нём плоскую волну. Ограничимся случаем малых термических

возмущений, когда $\frac{T - T_0}{T_0} \ll 1$, где T -это текущая температура, а T_0 - исходная температура полупространства до приложения импульса. Если исходить из классического закона Фурье, согласно которому поток тепла пропорционален градиенту температуры, и ввести следующие обозначения: $u(x,t)$ - поле перемещений, χ -коэффициент температуропроводности, α - коэффициент теплового расширения, λ, μ - постоянные Ламе, c_0 - скорость звука, то динамические уравнения термоупругости [75] имеют вид

$$\chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (3.15)$$

рассматривается несвязанная задача, т.е не учитывается влияние деформаций на температуру. Действие теплового источника будем считать сосредоточенным на границе области

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = J_0 (H(t) - H(t - t_0)). \quad (3.16)$$

Через κ здесь обозначен коэффициент теплопроводности, а параметр t_0 характеризует длительность теплового импульса. Предполагается, что напряжение на данной границе равно нулю

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha T \quad (3.17)$$

В безразмерных переменных $\tau = \frac{c_0^2 t}{\chi}$, $\xi = \frac{c_0 x}{\chi}$, $\vartheta = \frac{T - T_0}{T_0}$ решение задачи

(3.14)- (3.16) записывается следующим образом:

$$\vartheta(\xi, \tau) = \frac{J_0 \chi}{\kappa c_0 T_0} (\vartheta_1(\xi, \tau) H(\tau) - \vartheta_1(\xi, \tau - \tau_0) H(\tau - \tau_0)), \quad (3.18)$$

$$v(\xi, \tau) = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\tilde{\alpha} J_0 \chi}{\kappa c_0} (v_1(\xi, \tau) H(\tau) - v_1(\xi, \tau - \tau_0) H(\tau - \tau_0))$$

где $\tilde{\alpha} = \alpha \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}$, а функции $\vartheta_1(\xi, \tau)$ и $v_1(\xi, \tau)$ задаются выражениями

$$\vartheta_1 = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) - \xi \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \quad (3.19)$$

$$v_1 = \int_0^\tau \operatorname{erfc} \frac{\xi}{2\sqrt{\tau-s}} \exp(s) ds - \exp(\tau - \xi) \operatorname{erf} \sqrt{\tau - \xi} H(\tau - \xi)$$

Решение $v_1(\xi, \tau)$, состоящее из двух слагаемых, представляет собой биполярный импульс растяжения-сжатия, показанный на рис.3.4, на котором

представлена нормированная скорость $v_N = \frac{v \kappa c_0}{\tilde{\alpha} J_0 \chi}$ в сечениях $\xi = 1$ и $\xi = 5$

при $\tau_0 = 0.1$.

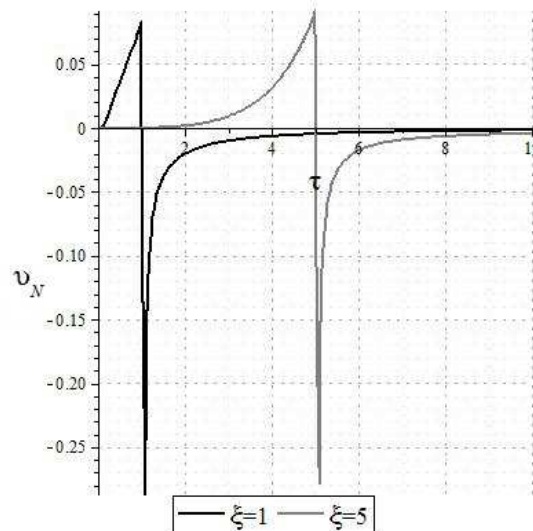


Рис.3.4. Биполярный импульс

Первое интегральное слагаемое в (3.19) имеет диффузионный характер, поэтому в произвольной точке пространства $\xi = \xi_0$ сразу же возникает отличная от нуля скорость, обусловленная тепловым расширением среды. Затем в данную точку в момент времени $\tau = \xi_0$ приходит упругая волна от границы, в результате чего функция $v(\xi, \tau)$ скачком меняет свой знак.

Обратимся теперь к данным эксперимента, и посмотрим, каким реальным физическим параметрам соответствует построенное решение. В этих экспериментах [99] действию лазерного облучения длительностью 10нс подвергались пластины из плохо проводящих материалов толщиной от 2 до 5 мм, при этом их диаметр составлял от 20 до 40 мм, так чтобы было выполнено условие одномерности. Регистрируемой величиной служила скорость частиц на противоположной стороне пластины, измеряемая с помощью пьезодатчика. Формы импульса в стекле (1) и эбоните (2) продемонстрированы на рис.3.5.

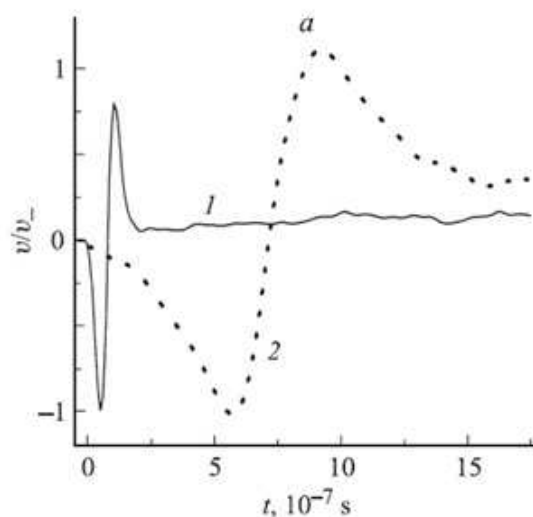


Рис.3.5. Экспериментальная форма импульса

Как и в аналитическом решении (3.18), они представляют собой биполярный импульс, таким образом, качественно динамическая модель термоупругости согласуется с экспериментальными результатами. Посмотрим, насколько удобно её использовать для оценки физических величин. К примеру, для стекла: $\chi = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $c_0 = 5500 \text{ м}/\text{с}$. После подстановки этих значений в коэффициенты для пересчёта реального времени на безразмерное, имеем $\tau \approx 5 \cdot 10^{13} t$, в эксперименте же время меняется в диапазоне от 0 до 1.5 мкс. Нетрудно видеть, что параметр τ в этом случае достигает значений порядка $1 \cdot 10^8$. Возникающие при этом вычислительные трудности являются следствием рассмотрения двух разномасштабных процессов, протекающих с разной скоростью: распространения тепла и движения звуковой волны. Изображённое на рис.3.4 решение отвечает малому расстоянию от источника тепла, не превышающему несколько нанометров.

Для построения приближённого решения на достаточно больших расстояниях по сравнению с областью, на которое распространяется тепловая волна, попробуем использовать МПИ. Так как рассматривается два различных физических процесса, то требуется ввести и два интервала, отвечающие тепловой и акустической волне. Обозначим их через $l(t)$ и $L(t)$ соответственно. Сперва рассмотрим диффузионное уравнение (3.14). Для простоты возьмём только одну форму разложения и будем искать его решение в виде

$$\tilde{T}(x, t) = q(t) \left(1 + \cos \frac{\pi x}{l} \right) H(l - x). \quad (3.20)$$

После процедуры Галёркина приходим к уравнению

$$\dot{q} + \frac{4}{3} \frac{\chi \pi^2}{l^2} q = \frac{4J(t)}{3al}, \quad (3.21)$$

где через a обозначено произведение удельной теплоёмкости на плотность материала. Функция $l(t)$ пока остаётся неизвестной. Так как уравнение (3.14) не является гиперболическим, то для её нахождения предлагается использовать условие (3.2), откуда следует, что

$$l^2(t) = \frac{4}{3} \pi^2 \chi t \quad (3.22)$$

Обратим внимание, на то, что путь, проходимый тепловой волной, определяется параметром χt , который входит в фундаментальное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой [100]. Если в качестве теплового источника взять дельта- функцию Дирака $J(t) = J_0 \delta_0(t)$, то решение уравнения (3.21) имеет вид

$$q_0(t) = \frac{4J_0}{3al} \exp\left(-\frac{\chi \pi^2}{3l^2}\right) H(t). \quad (3.23)$$

Чтобы найти отклик системы на прямоугольный импульс конечной длительности, надо написать свёртку (3.23) с функцией $J_0(H(t) - H(t - t_0))$

$$q(t) = \frac{4J_0 \exp(-1/4)}{\sqrt{3a\pi}\sqrt{\chi}} \left(\sqrt{t} - \sqrt{t - t_0} H(t - t_0) \right). \quad (3.24)$$

На рис.3.6, на котором изображён график нормированной температуры $T_N = \frac{\tilde{T}a\sqrt{\chi}}{J_0}$, показано сравнение точного решения уравнения теплопроводности с приближённым в произвольно выбранной точке $x = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$. Видно, что даже при удержании только одного члена ряда они довольно хорошо согласуются между собой.

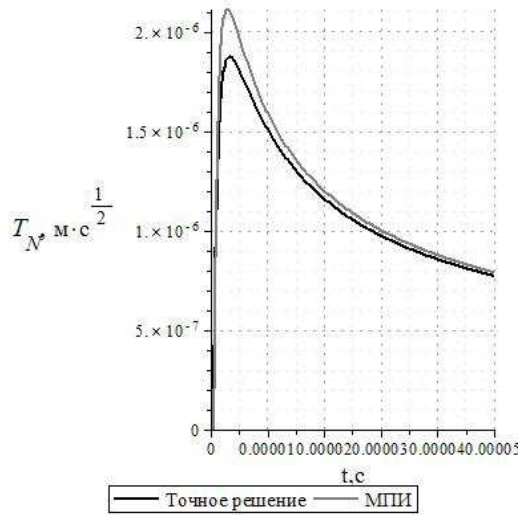


Рис.3.6. Решение уравнения теплопроводности

После того как найдено выражение для температуры, рассмотрим уравнение движения (3.15) с граничным условием (3.17). В силу линейности рассматриваемого уравнения его решение представимо в виде суммы $\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}_0(x,t) + \tilde{u}_1(x,t)$, где u_0 является решением однородного уравнения с граничным условием (3.15), а u_1 является решением неоднородного уравнения с нулевым граничным условием. Решение однородного уравнения получается сдвигом аргумента в выражении (3.24) на величину $\frac{x}{c_0}$

$$\tilde{\epsilon}_0 = \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x} = \frac{4J_0 \tilde{\alpha} \exp(-1/4)}{\sqrt{3a\pi}\sqrt{\chi}} \left(\sqrt{t - \frac{x}{c_0}} - \sqrt{t - \frac{x}{c_0} - t_0} H\left(t - \frac{x}{c_0} - t_0\right) \right) \quad (3.25)$$

Для определения функции $\tilde{u}_1(x,t)$ проделаем с уравнением (3.15) те же самые преобразования, что и с уравнением теплопроводности, разыскивая его решение в виде $\tilde{u}_1(x,t) = \sum_{n=0}^N Q_n(t) \cos \frac{\pi(2n+1)x}{2l} H(L-x)$, где $L = c_0 t$. После процедуры Галёркина снова возвращаемся к уравнению движения маятника

$$\ddot{Q}_n + \Omega_n^2 Q_n = \tilde{\alpha} c_0^2 \left(1 + \cos \frac{\pi(2n+1)l}{2L} \right) \frac{8Lq}{(2L+l(2n+1))(2L-l(2n+1))} \quad (3.26)$$

с частотой, зависящей от длины интервала $\Omega_n = \frac{\pi c_0(2n+1)}{2L}$. Обобщённая сила в правой части выражения (3.26) имеет достаточно сложный вид, и для его упрощения мы воспользуемся тем, что при выбранных параметрах и при тех временах, при которых производится регистрация скорости тыльной стороны пластины, путь, проходимый акустической волной, на несколько порядков превышает расстояние, на которое успевает распространиться тепловой импульс (рис.3.7).

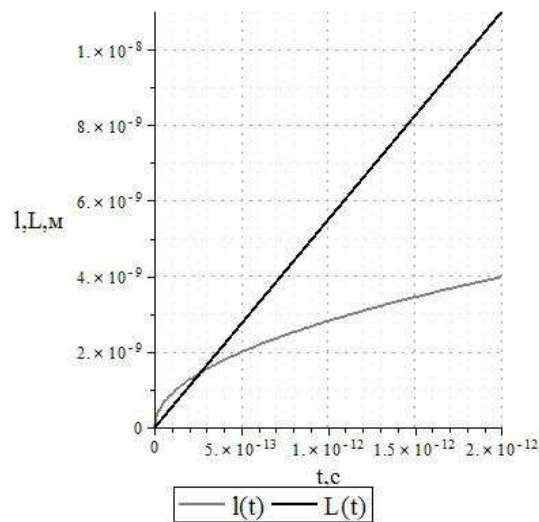


Рис.3.7. Интервал тепловой и звуковой волны

В таком случае будем полагать, что для всех n из (3.26)

$$\frac{l(t)(2n+1)}{L(t)} \ll 1. \quad (3.27)$$

Естественно, что неравенство (3.27) накладывает определённые ограничения на число членов ряда, однако, как нетрудно убедиться, их оказывается вполне достаточно для построения решения. К примеру, если производить запись сигнала в точке $x = 2\text{мм}$ и взять $\frac{l(t)(2n+1)}{L(t)} = 0.1$, то подставляя

$\chi = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $c_0 = 5500 \text{ м}/\text{с}$ в (3.27) получим, что максимальное значение для n составляет $n_{\max} = 62$.

При выполнении условия (3.27) уравнение (3.25) приобретает вид

$$\ddot{Q}_n + \Omega_n^2 Q_n = 4\tilde{\alpha}c_0^2 Lq, \quad (3.28)$$

а его решение с помощью интеграла Дюамеля записывается следующим образом

$$Q_n(t) = \frac{16J_0 \exp\left(-\frac{1}{4}\right) c_0^2 \tilde{\alpha}}{\sqrt{3\pi a} \sqrt{\chi L \Omega_n}} \int_0^t \left(\sqrt{s} - \sqrt{s-t_0} H(s-t_0)\right) \sin \Omega_n(t-s) ds \quad (3.29)$$

или с учётом того, что $\cos(\Omega_n t) = 0$

$$Q_n(t) = \frac{16J_0 \exp\left(-\frac{1}{4}\right) c_0^2 \tilde{\alpha}}{\sqrt{3\pi a} \sqrt{\chi L \Omega_n}} \int_0^t (-1)^n \left(\sqrt{s} - \sqrt{s-t_0} H(s-t_0)\right) \cos \Omega_n s ds. \quad (3.30)$$

Остаётся привести интегралы, входящие в (3.30), к табличному виду.

Рассмотрим функцию $I_1(t) = \int_0^t \sqrt{s} \cos \Omega s ds$. Сделаем замену переменных $m = \Omega s$ и, интегрируя по частям, получим

$$I_1(t) = \Omega^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left((-1)^n \sqrt{2n+1} - S(\sqrt{2n+1}) \right), \quad (3.31)$$

Точно так же поступим и со вторым интегралом

$I_2(t) = \int_0^t \sqrt{s-t_0} \cos \Omega s H(s-t_0) ds$ в выражении (3.30). Если длительность

теплового импульса много меньше времени пробега акустической волны

$\frac{t_0}{t} \ll 1$, то

$$I_2(t) = I_1(t) \cos \Omega_n t_0 - \Omega^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} C(\sqrt{2n+1}) \sin \Omega_n t_0, \quad (3.32)$$

а выражение для функции $Q_n(t)$ приводится к виду

$$Q_n(t) = \frac{16J_0 \exp\left(-\frac{1}{4}\right) c_0^2 \tilde{\alpha} (-1)^n}{\sqrt{3\pi L a \sqrt{\chi} \Omega_n}} (I_1(t) - I_2(t)), \quad (3.33)$$

где через $S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$ и $C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$ обозначены интегралы Френеля [101].

Используя полученное решение, отклик термоупругой среды на тепловой импульс будет удобнее выразить не через скорость, а через деформацию $\tilde{\varepsilon}_1 = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}$, чтобы не дифференцировать (3.33) по времени

$$\tilde{\varepsilon}_1(x, t) = \frac{\pi}{2L} \sum_{n=0}^N Q_n(t) (2n+1) \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2L} H(L-x). \quad (3.34)$$

Зависимость суммарной нормированной деформации

$$\varepsilon_N = \frac{\varepsilon a \sqrt{\chi}}{J_0 \tilde{\alpha}} = \frac{a \sqrt{\chi}}{J_0 \tilde{\alpha}} (\tilde{\varepsilon}_0 + \tilde{\varepsilon}_1) \text{ от времени в точке } x = 2 \text{ мм при } N = 30$$

приведена на рис.3.8.

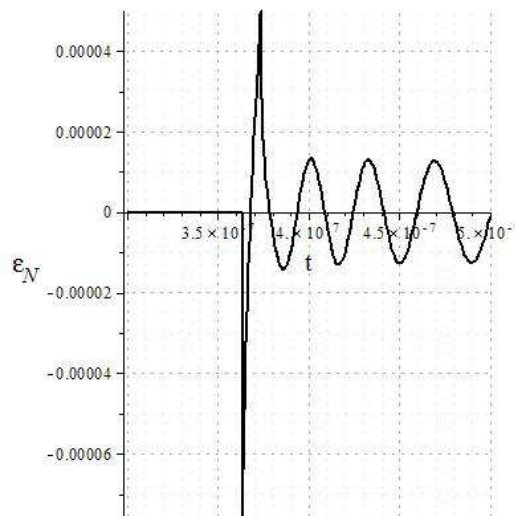


Рис.3.8. Зависимость деформации от времени

Она представляет собой биполярный импульс с соразмерными фазами растяжения и сжатия порядка длительности действия теплового источника, таким образом, приближённое решение достаточно хорошо соответствует экспериментальной кривой, хотя в отличие от неё импульс не является симметричным. Также рассмотренная модель не способна объяснить расширение импульса, наблюдаемое в эксперименте для эбонита. Здесь, по-видимому, требуется иная математическая модель.

Этот вопрос в работе не обсуждается. Основная задача настоящей главы заключалась в том, чтобы показать использование метода переменного интервала для поиска приближённого решения нестационарных задач, в которых точное аналитическое представление является слишком громоздким или неудобным с точки зрения проведения расчётов. МПИ может применяться для достаточно широкого класса задач, не ограниченного гиперболическими уравнениями. В этом случае требуется вводить критерий определения длины области, охваченной возмущением. Главная особенность МПИ заключается в том, что он позволяет свести задачу в частных производных, описывающих динамику сплошной среды, к уравнению маятника, с частотой и обобщённой силой, зависящими от длины интервала. Таким образом, на первый план выходит проблема представления решения этого уравнения в аналитическом виде. Если её удастся решить, то часто оказывается, что полученный после использования МПИ ряд гораздо удобнее анализировать по сравнению с точным решением задачи. Разумеется, при этом нужно следить за его равномерной сходимостью. В последней главе будет предпринята попытка использования МПИ для динамической системы (2.1), однако перед этим в соответствии с вышесказанным требуется рассмотреть модель с двумя степенями свободы с нелинейной силой взаимодействия, представляющую собой дискретный аналог двухкомпонентной среды с изменяющейся внутренней структурой.

Глава 4. Дискретная модель

§4.1. Одномерные цепочки

В зависимости от способа описания физической системы модели механики твердого деформируемого тела делятся на дискретные и сплошные. Динамика первых из них описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, размерность которой определяется числом степеней свободы. Во втором случае используются уравнения в частных производных, дополненные соответствующими граничными и начальными условиями. При рассмотрении тел со сложной реологией нередко применяются модели смешанного типа [102]. До второй половины XX века, когда появились быстродействующие ЭВМ, континуальный подход казался более эффективным, однако сейчас быстрый прогресс вычислительной техники позволяет описывать динамические явления в твёрдом теле вплоть до атомарного уровня. Одним из мощных средств моделирования является метод молекулярной динамики (ММД), который, в последние десятилетия получил довольно широкое распространение. В рамках этого метода твердое деформируемое тело рассматривается как дискретная совокупность большого числа (до нескольких миллионов) частиц, взаимодействие между которыми определяется с помощью потенциала типа Ленарда-Джонса. В начальный момент времени задаются распределения их смещений и скоростей. Далее задача сводится к численному интегрированию системы уравнений, полученных на основе второго закона Ньютона. ММД позволяет смоделировать такие сложные физические явления как пластичность, разрушение и в том числе фазовое преобразование [103].

Для аналитических исследований важное значение сохраняют одномерные модели, в которых твердое тело изображается цепочкой из взаимодействующих масс. К ним относятся такие хорошо известные модели как цепочка из двух чередующихся атомов с различными массами, цепочка

Тоды, модель Ферми-Пасты-Улама и т.д. [69,104,105] Простейшей моделью данного вида является цепочка из одинаковых масс, расположенных на расстоянии d друг от друга и связанных линейной пружиной (рис.4.1), когда учитывается взаимодействие только между двумя ближайшими массами.

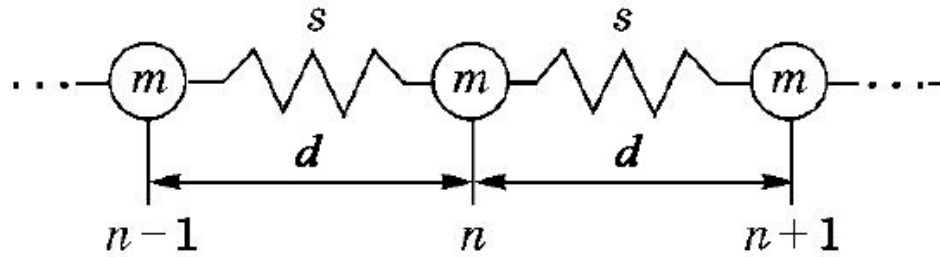


Рис.4.1. Одномерная цепочка

Если обозначить через u_n перемещение n -ого шарика массой m , то её динамические уравнения приобретают вид

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = s(u_{n+1} - u_n) - s(u_n - u_{n-1}), \quad (4.1)$$

Здесь через s обозначена жёсткость пружины. Будем искать решение (3.1) в виде плоской гармонической волны с частотой ω и амплитудой A

$$u_n = A \exp(i(\omega t - kx_n)), \quad (4.2)$$

где $x_n = nd$, полагая, что волновое число меняется в пределах $-\frac{\pi}{d} \leq k \leq \frac{\pi}{d}$

Подстановка (4.2) в (4.1) приводит к дисперсионной зависимости

$$\omega = 2\sqrt{\frac{s}{m}} \sin \frac{kd}{2}, \quad (4.3)$$

которая указывает на существование в системе бегущей волны для любого значения частоты (рис.4.2), ограниченного сверху значением $\omega_{\max} = 2\sqrt{\frac{s}{m}}$, при котором все массы изолированно друг от друга совершают гармонические колебания с данной частотой и переноса энергии в цепочке не происходит.

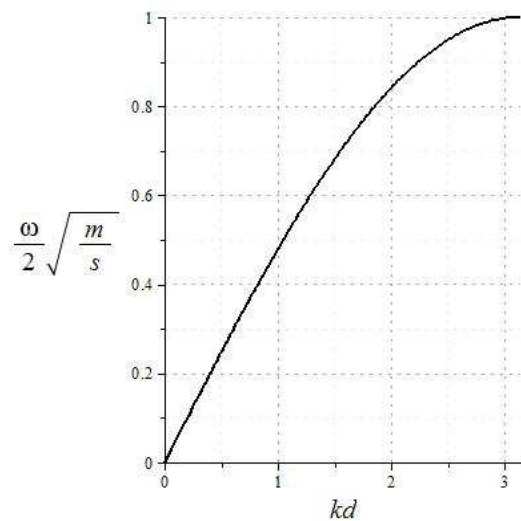


Рис.4.2. Дисперсионная зависимость для цепочки масс

Этот вывод перестаёт быть справедливым, если в системе появляется собственный временной или пространственный масштаб. Классическим примером служит модель связанных осцилляторов с собственной частотой колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ (рис.4.3).

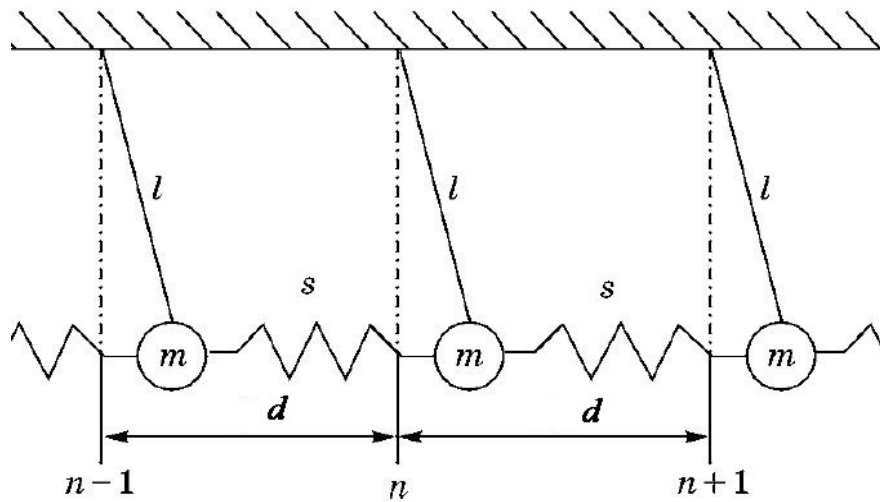


Рис.4.3. Связанные осцилляторы

Их динамические уравнения имеют вид

$$\ddot{\varphi}_n + \omega_0^2 \varphi = \frac{s}{m} (\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1}), \quad (4.5)$$

где φ - это угол отклонения маятника от равновесного положения. При переходе к новым независимым переменным $\tau = \omega_0 t$ и $\xi = \frac{\omega_0 x}{c}$, где через c обозначена фазовая скорость распространения волны, для дисперсионной кривой получается выражение

$$\omega^2 = 1 + \frac{4s}{\omega_0^2 m} \sin^2 \frac{k \omega_0 d}{2c}, \quad (4.6)$$

которое определяет область прозрачности $\omega > 1$, где волна распространяется без затухания [106]. Она показана на рис.4.4 для случая $\omega_0 = \sqrt{\frac{s}{m}}$.

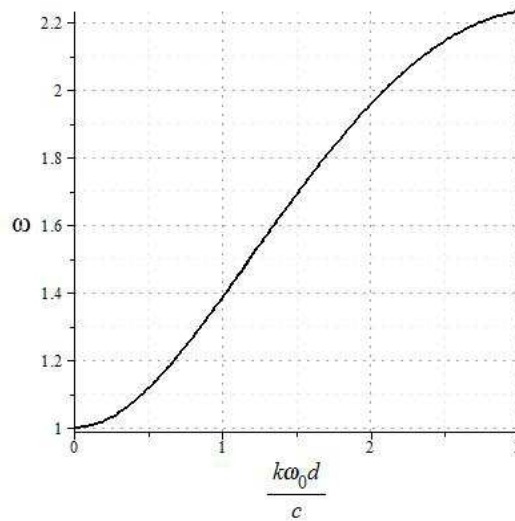


Рис.4.4. Дисперсионная кривая для связанных осцилляторов

Дискретная модель двухкомпонентной среды, сила взаимодействия между которыми выражается нелинейно-упругой связью и диссипацией представлена на рис.4.5,

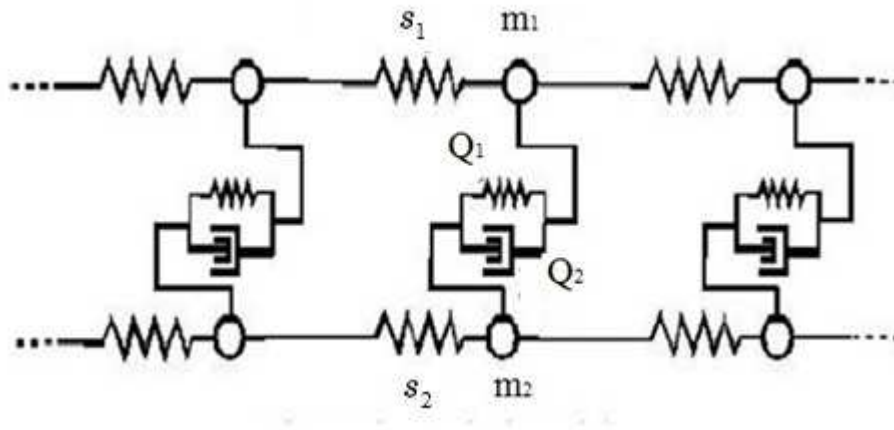


Рис.4.5. Дискретная модель двухкомпонентной среды

а её колебания по аналогии с уравнением для связанных осцилляторов записываются следующим образом

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{u}_{1n} + Q \sin \lambda (u_{1n} - u_{2n}) + \mu (\dot{u}_{1n} - \dot{u}_{2n}) &= s_1 (u_{1n-1} - 2u_{1n} + u_{1n+1}) \\
m_2 \ddot{u}_{2n} + Q \sin \lambda (u_{2n} - u_{1n}) + \mu (\dot{u}_{2n} - \dot{u}_{1n}) &= s_2 (u_{2n-1} - 2u_{2n} + u_{2n+1})
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Если, как и в континуальной модели, считать, что массы в цепочках равны $m_1 = m_2$, а жёсткости слабо отличаются друг от друга $\delta = \frac{s_2 - s_1}{s_2} = 1 - m^2 \ll 1$, то при малых смещениях u_1, u_2 без учёта вязкого трения система (4.7) в безразмерном времени $\tau = \omega_0 t$ приобретает вид

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_{1n} + u_{1n} - u_{2n} &= \frac{s_1}{m_1 \omega_0^2} (u_{1n-1} - 2u_{1n} + u_{1n+1}) \\
\ddot{u}_{2n} + u_{2n} - u_{1n} &= \frac{s_1}{m_1 \omega_0^2 m^2} (u_{2n-1} - 2u_{2n} + u_{2n+1})
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Связь частоты ω_0 с параметрами модели устанавливается с помощью соотношения $\omega_0 = c_1 \sqrt{\frac{Q\lambda}{m_1}}$, где через c_1 обозначена скорость звука в первой из компонент. Дисперсионное уравнение связанных цепочек имеет вид

$$\left(1 - \omega^2 + \frac{4s_1}{m_1 \omega_0^2} \sin^2 \frac{k\omega_0 d}{2c_1} \right) \left(1 - \omega^2 + \frac{4s_1}{m_1 \omega_0^2 m^2} \sin^2 \frac{k\omega_0 d}{2c_1} \right) - 1 = 0 \tag{4.9}$$

и содержит две ветви, одна из которых начинается из нуля, а другая - при

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{s_1}{m_1}} \text{ из } \omega_* = \sqrt{2} \text{ (рис.4.9).}$$

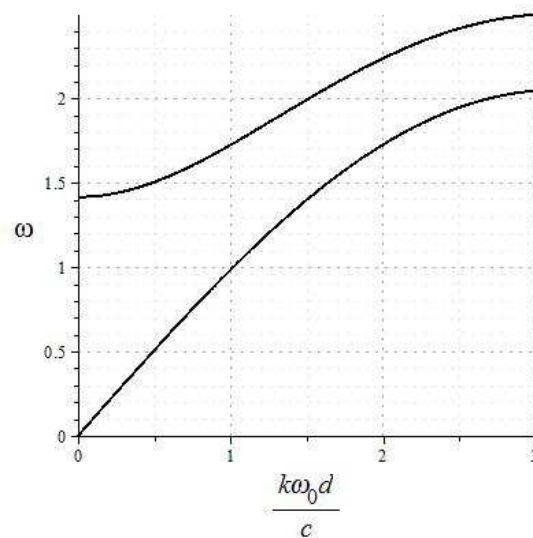


Рис.4.6. Дисперсионные ветви двухкомпонентной среды, $m^2 = 0.9$

Данный результат показывает, что в отличие от связанных осцилляторов, волна распространяется по цепочке при любой частоте внешнего воздействия, однако при этом при одном и тому же волновому числу соответствуют две моды, верхняя из которых может реализована только при частотах, лежащих выше частоты ω_* .

§4.2. Динамика дискретного элемента

В предыдущей главе на нескольких примерах было показано использование метода переменного интервала (МПИ), который позволяет свести задачу в частных производных к системе из N обыкновенных дифференциальных уравнений, но в отличие от уравнений (4.1), (4.5) и (4.8) они не являются связанными: каждое из них соответствует динамике дискретной ячейки из структурно-реологической модели с различной собственной частотой, соответствующей своей форме. Для стержня такой ячейкой служит обычный пружинный маятник. В случае двухкомпонентной среды данный элемент представляет собой систему двух осцилляторов с близкими собственными частотами (рис. 4.7).

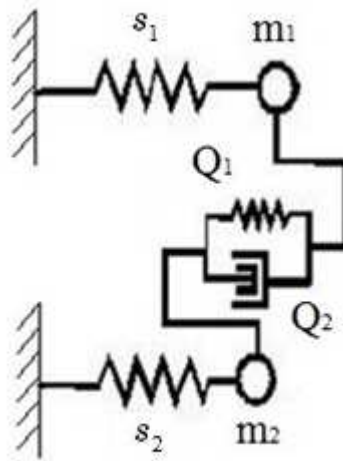


Рис.4.7. Дискретный элемент цепочки

Если через x_1 и x_2 обозначить перемещения масс m_1 и m_2 , то уравнения движения ячейки имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + s_1 x_1 + Q \sin \lambda(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + s_2 x_2 + Q \sin \lambda(x_2 - x_1) + \mu(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Аналогично тому, как это было сделано в континуальной модели, перейдём к другим зависимым координатам $x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$, $y = x_1 - x_2$ и введём

безразмерные переменные $\tau = \omega t$, $X = x \lambda$, $\varphi = \lambda y$, где $\omega_1 = \sqrt{\frac{s_1}{m_1}}$ -

парциальная частота связанных маятников, а через $\lambda = \frac{2\pi}{d}$ обозначена

величина, обратная периоду структуры. Относительно новых переменных система уравнений (3.6) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{\tau\tau} + \left(1 + \frac{\delta(1 + \chi_2 - \chi_1)}{2}\right) X &= \frac{\chi_1 \delta}{2} (\chi_2 - \chi_1 + 1) \varphi \\ \varphi_{\tau\tau} + 2n\varphi_{\tau} + (\chi_2 + (1 + \delta)\chi_1)\varphi + \kappa \sin \varphi &= X \delta \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь $\chi_i = \frac{m_i}{m_1 + m_2}$, ($i = 1, 2$) - это отношение массы одного из осцилляторов к массе всего дискретного элемента, $\delta = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2}$ представляет собой относительную разницу парциальных частот. Коэффициент $n = \frac{\mu}{2\omega_1 m_1} \left(1 + \frac{\chi_1}{\chi_2} \right)$ характеризует диссипативные свойства системы, а параметр $\kappa = \frac{Q\lambda}{s_1} \left(1 + \frac{\chi_1}{\chi_2} \right)$ при нелинейном слагаемом пропорционален отношению жёсткости связи между пружинными маятниками к жёсткости каждого из них. По-прежнему будем полагать, что $\delta \ll 1$ и $\chi_1 = \chi_2 = 1/2$. Тогда, пренебрегая членами порядка δ , получим:

$$\begin{aligned} X_{\tau\tau} + X &= \frac{\delta\varphi}{4} \\ \varphi_{\tau\tau} + 2n\varphi_{\tau} + \varphi + \kappa \sin \varphi &= X\delta \end{aligned} \quad (4.12)$$

Характерная особенность МПИ заключается в том, что для его реализации требуется представление решения нестационарной задачи о колебаниях дискретного элемента в явном виде. Для линейного уравнения это условие никаких трудностей не вызывает. Однако в рассматриваемой двухкомпонентной среде сила взаимодействия между континуумами, определяемая выражением (1.10) обладает целой серией нетривиальных положений равновесия, и следовательно, имеет ярко выраженный нелинейный характер. При этом малый параметр δ в уравнениях (4.12) стоит не у нелинейного слагаемого, таким образом, они не являются квазилинейными, и к ним не применимы разнообразные методы осреднения, такие как метод Ван-дер-Поля. Кроме того, размерность системы уравнений, соответствующих динамике дискретного элемента, в два раза больше по сравнению с обычным маятником.

Рассмотрим динамику двухстепенной системы (3.8) при различных значениях параметров, задавая начальную скорость $\dot{X}(0) = V_0$ для вывода её из положения равновесия. Подробный анализ её поведения понадобится нам при исследовании задачи в частных производных (2.1), так как приближённое решение континуальной модели будет строиться на основе дискретного аналога. К тому же он является наглядной иллюстрацией процесса передачи энергии на внутренние степени свободы. Начнём с самой простой ситуации, когда в уравнениях (4.12) отсутствует нелинейное слагаемое. Характеристическое уравнение для определения собственных частот имеет вид

$$\lambda^4 + 2n\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2n\lambda + 1 - \frac{\delta^2}{4} = 0 \quad (4.13)$$

Если параметр $n=0$, то уравнения (4.12) описывают консервативную систему из слабо связанных осцилляторов ($\delta \ll 1$) с близкими собственными

частотами $\lambda_{c1} = \sqrt{1 + \frac{\delta}{2}}$ и $\lambda_{c2} = \sqrt{1 - \frac{\delta}{2}}$. Тогда система совершает особый вид

колебаний, называемый биениями, которые представляют собой амплитудно-модулированные колебания с несущей частотой, равной полусумме

собственных частот $\lambda_n = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \approx 1$, и частотой огибающей, равной их

полуразности $\lambda_o = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \approx \frac{\delta}{4}$

$$\begin{aligned} X(\tau) &= \frac{V_0}{2} \left(\sin \sqrt{1 - \frac{\delta}{2}} \tau + \sin \sqrt{1 + \frac{\delta}{2}} \tau + O(\delta) \right) \approx V_0 \left(\cos \frac{\delta \tau}{4} \sin \tau + O(\delta) \right) \\ \varphi(\tau) &= V_0 \left(\sin \sqrt{1 - \frac{\delta}{2}} \tau - \sin \sqrt{1 + \frac{\delta}{2}} \tau + O(\delta) \right) \approx -2V_0 \left(\sin \frac{\delta \tau}{4} \cos \tau + O(\delta) \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Развитие биений во времени изображено на рис. 4.8.

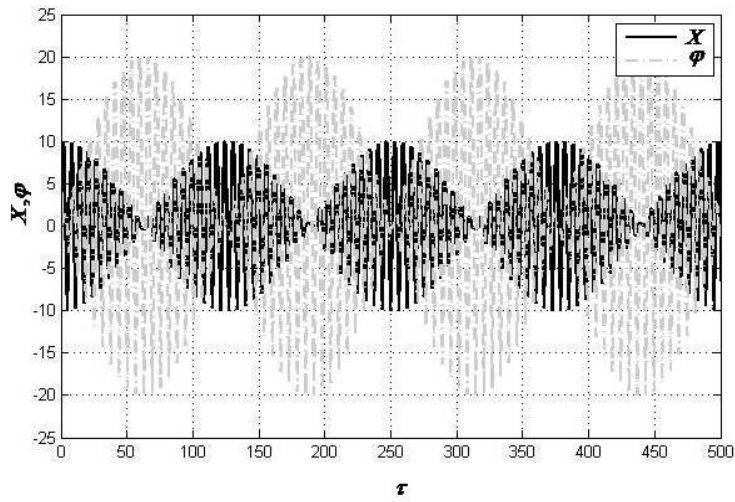


Рис.4.8. Биения, $\delta=0.1, n=0$

При наличии вязкого трения амплитуда биений с течением времени экспоненциально затухает (рис.4.9).

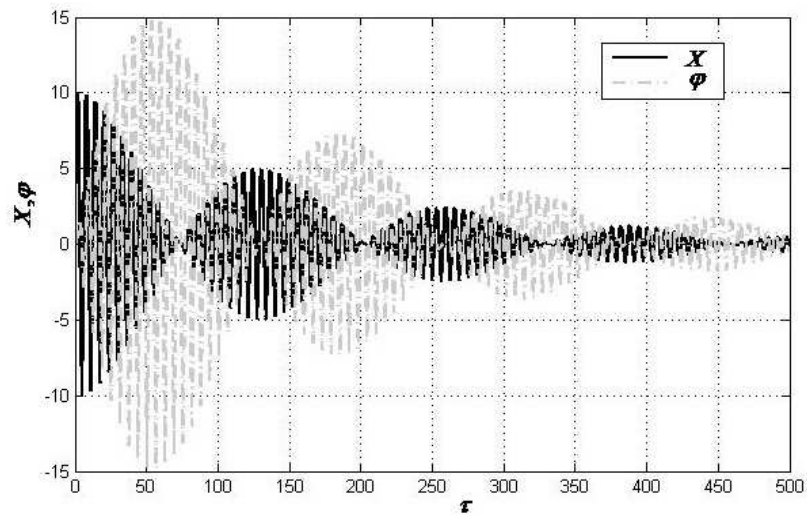


Рис.4.9. Биения, $\delta=0.1, n=0.011$

При этом время передачи энергии от одной степени свободы к другой $\tau_n = \frac{2\pi}{\delta}$ не должно превосходить время релаксации парциальной системы $\tau_r = \frac{1}{n}$, так как иначе колебания относительного перемещения затухнут раньше, чем успеет раскачаться центр масс. Отсюда следует, что $n \leq \frac{\delta}{2\pi} \approx 0.016$, и тогда для оценки влияния этого параметра на амплитуду будем искать поправку к корням характеристического уравнения (4.13) в виде $\lambda = \lambda_0 + n\lambda_1$, где через λ_0 обозначена собственная частота системы в отсутствии затухания. После подстановки этой поправки в выражение (4.13) оно раскладывается по степеням параметра n , и при удержании в нем только линейных членов получается, что $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$. В таком случае аналитическое выражение, описывающее затухающие биения, приобретает вид

$$\begin{aligned} X(\tau) &= V_0 e^{-\frac{n\tau}{2}} \left(\cos \frac{\delta\tau}{4} \sin \tau + O(\delta) \right) \\ \varphi(\tau) &= -2V_0 e^{-\frac{n\tau}{2}} \left(\sin \frac{\delta\tau}{4} \cos \tau + O(\delta) \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Учёт нелинейного слагаемого приводит к качественным изменениям в динамике связанных осцилляторов. С помощью интеграла Дюамеля систему уравнений (4.12) можно представить в виде одного интегро-дифференциального уравнения

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \varphi + \kappa \sin \varphi = \delta V_0 \sin t + \frac{\delta^2}{4} \int_0^t \varphi(s) \sin(t-s) ds. \quad (4.16)$$

Если начальная скорость V_0 невелика и внутренняя переменная остаётся настолько малой величиной, что допустимо полагать $\sin \varphi \approx \varphi$, то разность между собственными частотами становится достаточно существенной. В этом случае обмена энергией между маятниками не происходит, и обе

степени свободы движутся независимо друг от друга (рис.4.10.). При этом центр масс совершает гармонические колебания с единичной частотой.

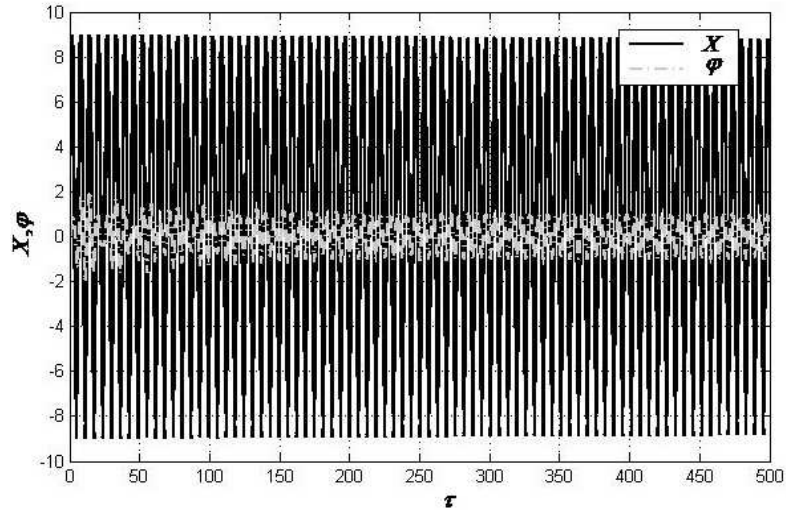


Рис.4.10. Колебания X и φ , $V_0 = 9$, $n = 0.011$

Характер взаимодействия между осцилляторами меняется, когда амплитуда гармонического воздействия в правой части (3.10) сравнивается с параметром κ , от величины которого зависит вид потенциальной энергии относительного смещения

$$П(\varphi) = \frac{\varphi^2}{2} + \kappa(1 - \cos\varphi) \quad (4.17)$$

Если она является выпуклой функцией, то, скорее всего, от двухкомпонентной среды, для которой связанные осцилляторы являются простейшим составным элементом, вряд ли можно ждать возможности структурных преобразований. В соответствии с данным предположением, будем считать, что параметр κ равен минимальному из тех значений, при которых нарушается равенство $П''(\varphi) > 0$. Нетрудно убедиться, что это

значение равно единице. График функции (4.17) при $\kappa=1$ и при $\kappa=0$ изображён на рис. 4.11.

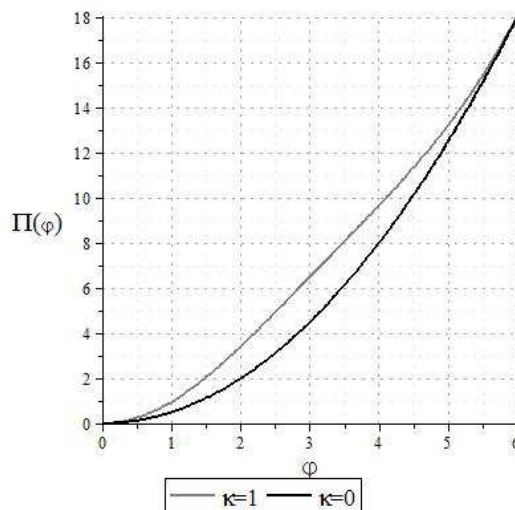


Рис.4.11. Потенциальная энергия $P(\varphi)$, $\kappa=0$, $\kappa=1$

В обоих случаях система обладает единственным нулевым положением равновесия.

При выполнении условия $\delta V_0 \approx 1$ динамический процесс разделяется на два этапа (рис.4.12, 4.13). На первом из них сообщённый центру масс импульс позволяет системе преодолеть потенциальный барьер, созданный нелинейной силой взаимодействия, не оказывающей здесь существенного влияния. Постепенно из-за работы сил трения энергия маятников уменьшается и наступает момент времени τ_* , когда её оказывается для этого недостаточно. В результате колебания по φ быстро затухают, и тогда поведение связанных маятников перестаёт быть согласованным и оказывается сходной с динамикой линейной системы, в которой по какой-то причине произошла расстройка частот. Отметим, что на втором этапе амплитуда перемещения центра масс уменьшилась по сравнению с

начальной величиной за счёт динамики внутренней переменной. На рис. 4.12, 4.13 приведено численное решение уравнений (4.8), полученное методом Рунге-Кутты четвёртого порядка при различных значениях параметра n , определяющего работу сил вязкого трения.

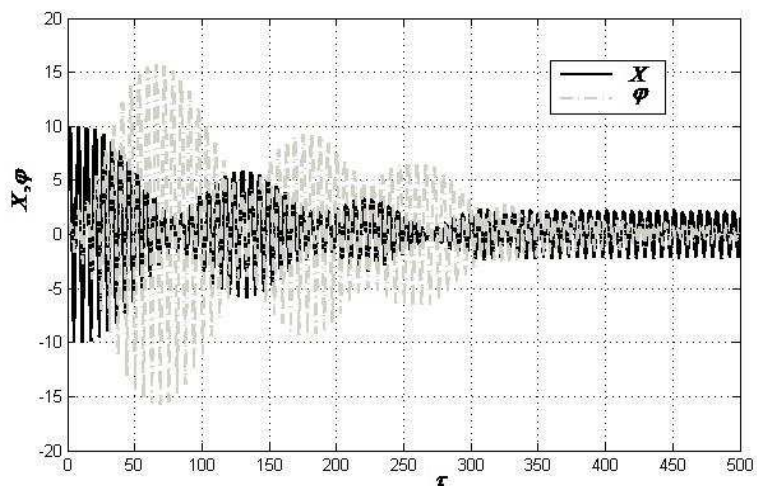


Рис.4.12. Колебания X и φ , $V_0 = 10$, $n = 0.007$

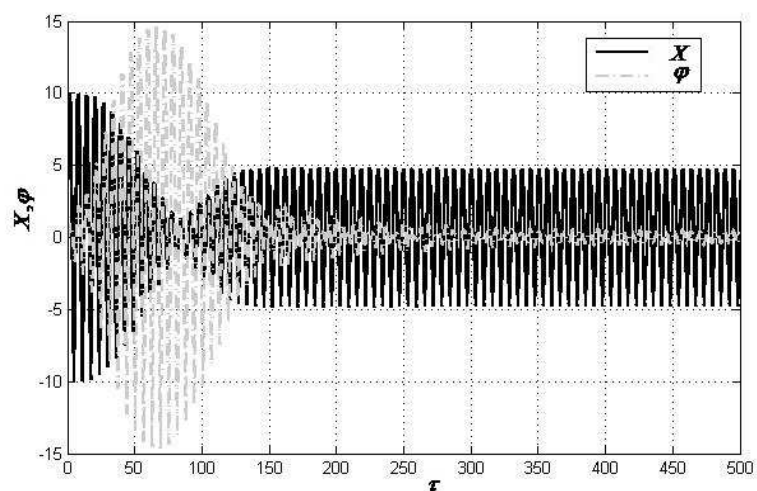


Рис.4.13. Колебания X и φ , $V_0 = 10$, $n = 0.011$

Видно, что он играет важную роль, так как от его величины зависит как время выхода на установившийся режим, так и амплитуда выходного сигнала по центру масс. Но получить аналитическое выражение, учитывающую данную зависимость, представляется довольно сложной задачей. Вместо этого мы попытаемся смоделировать физический процесс, изображённый на рис. (4.13), на котором чётко можно выделить два режима колебаний, связанные относительно коротким переходным процессом.

§4.3. Модельная задача

Для этого прежде всего обратим внимание на то, что нелинейное слагаемое в системе (3.8) выполняет функцию переключателя, фильтрующего одну из частот, и его влияние сказывается только в узком временном диапазоне около точки τ_* , когда происходит смена режима колебаний. В таком случае будем считать, что работа силы взаимодействия совершается не за конечный промежуток времени, а непосредственно в момент времени τ_* [107]. Это предположение с одной стороны сохраняет основные закономерности исходной задачи, а с другой- даёт возможность получить аналитическую формулу для перемещения центра масс, которая будет использована для построения приближённого решения континуальной задачи (2.1-2.4). Таким образом, речь идёт о замене исходной системы уравнений (4.12) модельной задачей, математическая формулировка которой записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{\tau\tau} + X &= \frac{\delta\varphi}{4}, \\ \varphi_{\tau\tau} + \varphi + \kappa_0 \sin \varphi \delta_0(\tau - \tau_*) &= X \delta \end{aligned} \quad (4.18)$$

где $\delta_0(\tau)$ обозначает дельта- функцию Дирака. При этом вязкое трение не учитывается, а параметр κ_0 подбирается таким образом, чтобы обеспечить

переход движения центра масс от режима биений к колебаниям с одной частотой. Приведённую задачу можно трактовать как поиск управления, позволяющего при своевременном воздействии изменить отклик системы на импульсное воздействие.

Для определения неизвестных параметров τ_* и κ_0 воспользуемся преобразованием Лапласа $f^L = \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau$. Решение системы (4.18) в пространстве изображений имеет вид

$$X^L(p) = \frac{(p^2 + 1)V_0 - \frac{\delta}{4}\kappa_0 \sin \varphi_* e^{-p\tau_*}}{(p^2 + 1)^2 - \frac{\delta^2}{4}} \quad (4.19)$$

$$\varphi^L(p) = \frac{V_0\delta - (p^2 + 1)\kappa_0 \sin \varphi_* e^{-p\tau_*}}{(p^2 + 1)^2 - \frac{\delta^2}{4}}, \quad (4.20)$$

где введено обозначение $\varphi_* = \varphi(\tau_*)$. Чтобы произошло переключение центра масс с режима биений на гармонический процесс, необходимо оставить в модели только одну собственную частоту. Потребуем для этого, чтобы один из полюсов в выражении для $X^L(p)$ являлся корнем числителя. Подставляя в

(4.19) $p = i\sqrt{1 - \frac{\delta}{2}}$ и приравнивая к нулю действительную и мнимую части,

получим:

$$\begin{aligned} \kappa_0 \sin \varphi_* \cos\left(1 - \frac{\delta}{4}\right)\tau_* &= 2V_0 \\ \kappa_0 \sin \varphi_* \sin\left(1 - \frac{\delta}{4}\right)\tau_* &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Так как число $\kappa_0 \sin \varphi_*$ в ноль не обращается, то из второго условия (4.21) вытекает, что

$$\tau_* = \frac{\pi k}{1 - \frac{\delta}{4}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.22)$$

и выражение для определения параметра κ_0 приобретает вид

$$\kappa_0 = \frac{2V_0(-1)^k}{\sin \varphi_*}. \quad (4.23)$$

Если использовать вместо $\lambda = \sqrt{1 - \frac{\delta}{2}}$ другую собственную частоту, то амплитуда колебаний центра будет не уменьшаться, а увеличиваться, что с физической точки зрения невозможно.

Нахождение обратного преобразования Лапласа с учётом соотношения (4.23) приводит к следующему результату для перемещения центра масс и относительного перемещения:

$$X(\tau) = V_0 \left(\cos \frac{\delta \tau}{4} \sin \tau + (-1)^k \sin \frac{\delta(\tau - \tau_*)}{4} \cos(\tau - \tau_*) H(\tau - \tau_*) + O(\delta) \right) \quad (4.24)$$

$$\varphi(\tau) = -2V_0 \left(\sin \frac{\delta \tau}{4} \cos \tau + (-1)^k \cos \frac{\delta(\tau - \tau_*)}{4} \sin(\tau - \tau_*) H(\tau - \tau_*) + O(\delta) \right), \quad (4.25)$$

из которого следует, что до момента времени τ_* система совершает биения. Подставляя в него выражение (4.22) и пренебрегая членами $O(\delta)$ находим, что после перехода через эту точку она переходит в режим гармонических колебаний

$$X_+(\tau) = \frac{V_0}{2} \left(\left(1 + \cos \frac{\pi k \varepsilon}{2} \right) \sin \left(1 + \frac{\delta}{4} \right) \tau - \sin \frac{\pi k \varepsilon}{2} \cos \left(1 + \frac{\delta}{4} \right) \tau \right) \quad (4.26)$$

$$\varphi_+(\tau) = V_0 \left(\left(1 + \cos \frac{\pi k \varepsilon}{2} \right) \sin \left(1 + \frac{\delta}{4} \right) \tau - \sin \frac{\pi k \varepsilon}{2} \cos \left(1 + \frac{\delta}{4} \right) \tau \right) \quad (4.27)$$

с частотой, близкой к единице, и амплитудными значениями $V_0 \cos \frac{\pi k \delta}{4}$ и $2V_0 \cos \frac{\pi k \delta}{4}$. К такому же ответу можно прийти, посчитав сумму вычетов

от функций $X^L(p)$ и $\varphi^L(p)$ в точках $p = i\sqrt{1 + \frac{\delta}{2}}$, $p = -i\sqrt{1 + \frac{\delta}{2}}$.

Теперь задача свелась к определению неизвестного параметра k , принадлежащего множеству целых положительных чисел. Уравнения (4.18) были написаны на основе баланса импульса. Для определения k воспользуемся другим фундаментальным законом - балансом энергии. Интеграл энергии исходной системы (4.1) при $n=0$ и $\kappa=0$ имеет вид

$$2(\dot{X}^2 + X^2) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + \varphi^2) - \delta X \varphi = E. \quad (4.28)$$

Константа интегрирования легко определяется из начальных условий: $E = 2V_0^2$. Для модельной задачи равенство (4.28) остаётся справедливым как до, так и после момента времени τ_* , когда осциллятору мгновенно сообщается импульс в результате действия нелинейной силы. Обозначим через E_- энергию системы до переключения, а через E_+ - энергию после смены режима колебательного процесса

$$2(\dot{X}_+^2 + X_+^2) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi}_+^2 + \varphi_+^2) - \delta X_+ \varphi_+ = E_+ \quad (4.29)$$

$$2(\dot{X}_-^2 + X_-^2) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi}_-^2 + \varphi_-^2) - \delta X_- \varphi_- = E_- \quad (4.30)$$

и определим скачок этой величины в точке τ_*

$$[E]_{\tau=\tau_*} = E_+ - E_- = 2([\dot{X}^2] + [X^2]) + \frac{1}{2}([\dot{\varphi}^2] + [\varphi^2]) - \delta[X\varphi]. \quad (4.31)$$

Полагая функции $X(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ непрерывными и интегрируя первое из уравнений (4.18), находим что $[\dot{X}] = 0$. Из второго уравнения аналогично следует, что $[\dot{\varphi}] = \kappa_0 \sin \varphi_*$ или с учётом (4.23) $[\dot{\varphi}] = -2V_0(-1)^k$. Сумма скоростей относительных смещений до и после точки легко определяется из выражений (4.25) и (4.27): $\dot{\varphi}_+ + \dot{\varphi}_- = -2V_0(-1)^k \cos \frac{\pi k \delta}{2}$. Подставляя полученные соотношения в (4.31), получаем:

$$[E]_{\tau=\tau_*} = 4V_0^2 \cos \frac{\pi k \delta}{2}. \quad (4.32)$$

Для того чтобы модельная задача отражала свойства исходной системы уравнений (4.12), потребуем равенства скачка энергии (4.32) работе сил трения до момента времени τ_* . Отсюда вытекает уравнение для определения параметра k , принадлежащего множеству целых положительных чисел:

$$2V_0^2 \cos \frac{\pi k \delta}{2} = -n \int_0^{\tau_*} \dot{\varphi}^2(\tau) d\tau, \quad (4.33)$$

где выражение для $\dot{\varphi}$ определяется из (4.15). На рис. 4.14 представлено графическое решение уравнения (4.33), на котором его корни определяются точками пересечения кривых $f_1(x) = -2 \cos \frac{x\delta}{2}$ и $f_2(x) = \frac{n}{V_0^2} \int_0^x \dot{\varphi}^2(\tau) d\tau$, где $x = \pi k \approx \tau_*$.

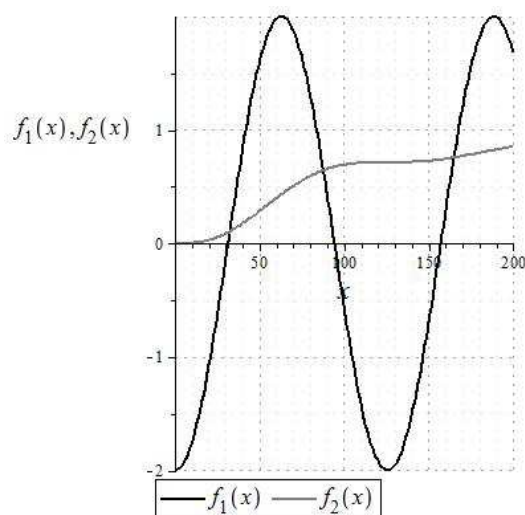


Рис.4.14. Корни уравнения $f_1(x) = f_2(x)$

В качестве искомого выбирается наименьший из них с учётом того, что время τ_* не может оказаться меньше времени передачи энергии от центра масс на относительное движение, откуда следует, что $k=27$ и в соответствии с (4.22) $\tau_* \approx 87$. После подстановки этого значения в формулу (4.24) получаем аналитическое выражение приближённого решения задачи Коши со сменой режима колебаний. Зависимость $x(\tau)$, достаточно хорошо согласующаяся с численным решением (рис.4.13), изображена на рис.(4.15).

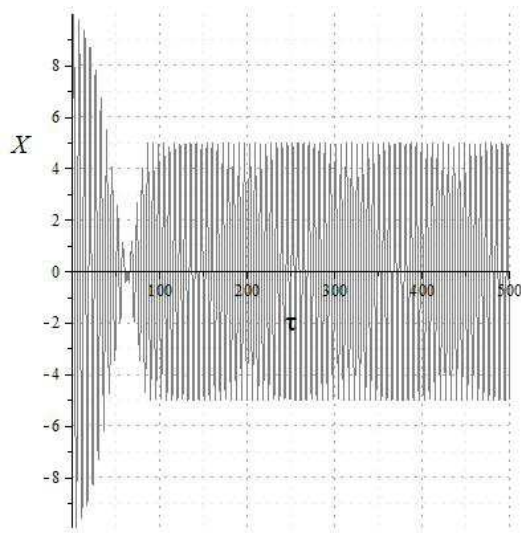


Рис.4.15. Зависимость $X(\tau)$

Итак, основная цель достигнута: получено аналитическое выражение (3.17), которое приближённо описывает динамику центра масс системы, состоящей из двух осцилляторов с нелинейной связью. По сути, данное выражение представляет собой реакцию на дельта- функцию. При исследовании континуальной модели (2.1) нам в дальнейшем понадобится решение задачи, в которой вывод из положения равновесия осуществляется не заданием начальной скорости, а прямоугольным импульсом $F_{imp}(t) = F_0(H(\tau) - H(\tau - \tau_0))$ конечной длительности τ_0

$$X_{\tau\tau} + X = \frac{\delta\varphi}{4} + F_{imp}(t) \quad (4.34)$$

$$\varphi_{\tau\tau} + \varphi + \kappa_0 \sin \varphi \delta_0(\tau - \tau_*) = X \delta$$

Для этого нужно написать свёртку (4.24) с функцией $F_0(H(\tau) - H(\tau - \tau_0))$. Мы будем предполагать, что продолжительность действия постоянной силы F_0 мала по сравнению с собственными частотами системы (4.12) и не станем учитывать работу данной силы в энергетическом балансе, что привело бы к достаточно сложному уравнению относительно параметра k . Таким образом, считается что он не зависит от величины τ_0 . В таком случае задача состоит в

нахождении интеграла $I(\tau) = F_0 \int_0^{\tau} X(\tau - s)H(\tau)ds$, а решение задачи будет иметь вид $I(\tau) - I(\tau - \tau_0)H(\tau - \tau_0)$. Напомним, что если задана кусочная функция вида

$$X(\tau) = \begin{cases} f_1(\tau), & \tau \leq \tau_* \\ f_2(\tau), & \tau > \tau_* \end{cases}, \quad (4.35)$$

где $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ интегрируемые функции, то при $\tau < \tau_*$

$$I(\tau) = \int_0^{\tau} f_1(s)ds, \quad (4.36)$$

а при $\tau > \tau_*$ его можно представить в виде суммы

$$I(\tau) = \int_0^{\tau_*} f_1(s)ds + \int_{\tau_*}^{\tau} f_2(s)ds. \quad (4.37)$$

Здесь предполагается, что $\tau_0 \ll \tau_*$. Применительно к данной задаче

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= \frac{1}{2} \left(\sin \sqrt{1 + \frac{\delta}{2}t} + \sin \sqrt{1 - \frac{\delta}{2}t} \right) \\ f_2(\tau) &= \frac{1}{2} \left(\left(1 + \cos \frac{\pi k \varepsilon}{2} \right) \sin \left(1 + \frac{\delta}{4} \right) \tau - \sin \frac{\pi k \varepsilon}{2} \cos \left(1 + \frac{\delta}{4} \right) \tau \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

После вычисления интегралов, входящих в формулы (4.36) и (4.37) получается зависимость $X(\tau)$, изображённая на рис. 4.16.

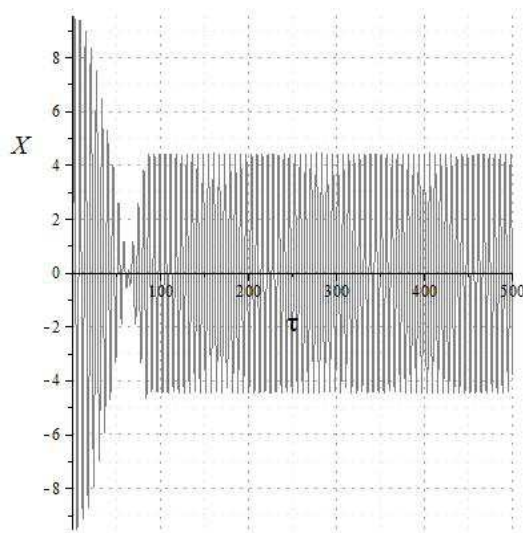


Рис.4.16. Зависимость $X(\tau)$, $\tau_0 = 1$, $F_0 = 10$

Сравнение динамики центра масс на рис. 4.15 и 4.16 показывает, что возбуждение системы кратковременным импульсом не приводит к существенному отличию от рассмотренной выше задачи, когда вместо силового воздействия была задана начальная скорость. Впрочем, такого результата и следовало ожидать, так как известно, что в этом случае движение в основном определяется импульсом силы, а не историей её развития [108].

Ещё раз сформулируем основные результаты. В данной главе была рассмотрена модель из двух связанных осцилляторов с мало отличающимися собственными частотами, представляющая собой дискретный аналог континуальной среды с нелинейной силой взаимодействия, описываемой системой уравнений (2.1). На основе этой модели была показана возможность передачи энергии на внутреннюю степень свободы, роль которой выполняет относительное перемещение маятников. В отличие от линейной модели, данный процесс локализован во времени, т.е нелинейность сказывается на поведении системы только в очень узком временном диапазоне. Используя эту особенность, мы смогли смоделировать динамику исходной нелинейной задачи, заменив её

линейными уравнениями с неизвестным внешним воздействием, определяемым с помощью энергетического баланса. Здесь возникает естественный вопрос о возможности использования подобного подхода при рассмотрении других нелинейных проблем. По-видимому, он не претендует на универсальность и определяется спецификой рассматриваемой модели, так как требует одновременного выполнения нескольких условий. Наверное, наиболее существенным из них является ограниченность нелинейного слагаемого, так как при достижении начальной скоростью порогового значения оно обеспечивает линейное поведение системы до момента переключения на другой режим колебаний. Как мы уже убедились, очень важную роль играет и вязкое трение, физическая причина которого в данной работе не обсуждается. В заключение отметим, что указанная замена позволила получить аналитическое выражение для перемещения центра масс, которое будет использовано для того, чтобы с помощью метода переменного интервала распространить результаты исследования дискретного аналога двухкомпонентной среды на континуальную модель, рассматриваемую в следующей главе.

Глава 5. Континуальная модель

§5.1. Дисперсионные кривые

В линейных задачах о распространении волн в одномерных объектах между дискретной и континуальной моделями прослеживается прямая аналогия, так как они приводят к схожим результатам [109]. Классическим примером является упругий стержень, который часто рассматривается как цепочка масс, соединённых упругими элементами. При достаточном количестве дискретных элементов оба этих подхода не обнаруживают значительной разницы между собой, и в этом случае можно осуществить предельный переход от одного вида модели к другому. Данный переход от осуществляется в предположении о существовании пространственных производных у функции, выражающей смещение взаимодействующих масс в дискретных цепочках. К примеру, рассмотрим уравнения (4.1) из предыдущей главы. После разложения функции $u(x,t)$ в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка малости по d , получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{sd^2}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.1)$$

С учётом того, что плотность материала ρ можно записать в виде отношения массы m к произведению пространственного масштаба d на площадь сечения A , а модуль упругости представим в виде $E = \frac{sd}{A}$, из (5.1) вытекает уравнение продольных колебаний стержня

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5.2)$$

где через $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ обозначена продольная скорость звука. Поиск решения

(5.2) в виде гармонической волны $u = A \exp(i(\omega t - kx))$ приводит к следующей

зависимости частоты от волнового числа $\omega = ck$. Групповая скорость волны $\omega'(k)$ не зависит от частоты и совпадает с фазовой. В этом случае говорят об отсутствии дисперсии в среде, в которой волна распространяется, не меняя свою первоначальную форму. К этому же результату можно прийти, исходя из дискретного представления (4.3), полагая, что длина волны много больше характерного расстояния между частицами, и, следовательно, $\sin \frac{kd}{2} \sim \frac{kd}{2}$.

Линейному уравнению Клейна-Гордона (3.11) соответствует дисперсионная кривая $\omega^2 = \sqrt{k^2 + 1}$, которую таким же способом можно получить из дискретного уравнения (4.6). Подобную процедуру нетрудно провести и в случае двухкомпонентной среды, описываемой уравнениями (4.7). Раскладывая в ряд Тейлора функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, получаем при переходе к сплошной среде уравнения (1.8), причём связь между параметрами дискретной и континуальной моделями устанавливается с помощью следующих соотношений:

$$Q = KAd, \quad \mu = \nu Ad, \quad s_1 = \frac{E_1 A}{d}, \quad (5.3)$$

где через A обозначена площадь поперечного сечения. Здесь будет уместно напомнить, что через K обозначено максимальное значение силы взаимодействия между компонентами, определяемой выражением (1.9), параметр d связан с размером микроструктуры, а величина ν характеризует диссипативные свойства.

При постановке задачи уравнения (1.8) оказалось удобнее записать относительно центра масс двух компонент и их относительного смещения, в результате чего были получены уравнения (2.1). Они рассматриваются в полубесконечной области $0 \leq x < \infty$, на границе которой напряжение задаётся в виде прямоугольного импульса $\sigma_{imp}(t) = \sigma_0 (H(t) - H(t - t_0))$ с высотой σ_0 и длительностью t_0 . Коэффициенты $c_u^2, c_z^2, \alpha, \beta, \gamma$ можно записать

следующим

образом:

$$c_u^2 = \frac{c_1^2(1-\chi(1-m^2))}{m^2}, \quad c_z^2 = \frac{c_1^2}{1-\chi(1-m^2)}, \quad \alpha = \frac{(1-\chi)\chi(1-m^2)}{1-\chi(1-m^2)}, \quad \beta = \frac{1+m^2}{E_1}, \quad \gamma = \frac{1-m^2}{c_1^2}.$$

Здесь, как и во второй главе, $m = \frac{c_1}{c_2}$ - это отношение скоростей звука в

решётках, а через $\chi = \frac{\rho_{01}}{\rho_{01} + \rho_{02}}$ обозначена массовая доля первой

компоненты. Тогда после введения безразмерных переменных

$$\tilde{x} = \frac{\omega^* x}{c_1}, \quad \tilde{t} = \omega^* t, \quad \tilde{U} = U \lambda, \quad \tilde{z} = z \lambda, \quad \tilde{\sigma} = \frac{c_1 \lambda \sigma}{\omega^* (E_1 + E_2)}, \quad \tilde{v} = \frac{v \omega^*}{K \lambda}, \quad \text{где}$$

$$\omega^* = c_1 \sqrt{\frac{(1-\chi(1-m^2))K\lambda}{(1-\chi)E_1}}, \quad \text{начально-краевая задача формулируется в виде}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{1}{c_u^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{t}^2} &= \frac{(1-\chi)\chi(1-m^2)}{1-\chi(1-m^2)} \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{1}{c_z^2} \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial \tilde{t}^2} &= \sin \tilde{z} + \tilde{v} \dot{\tilde{z}} + (1-m^2) \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{t}^2}, \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=0} &= \tilde{\sigma}_{imp}(\tilde{t}) \frac{(m^2 + \chi(1-\chi)(1-m^2)^2)}{m^2} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=0} &= \frac{\tilde{\sigma}_{imp}(\tilde{t})(1-m^2)}{m^2}, \\ \tilde{U} \Big|_{\tilde{x} \rightarrow \infty} &= 0, \quad \tilde{U}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \dot{\tilde{U}}(\tilde{x}, 0) = 0, \\ \tilde{z} \Big|_{\tilde{x} \rightarrow \infty} &= 0, \quad z(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \dot{\tilde{z}}(\tilde{x}, 0) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\sigma_{imp}(\tilde{t})$ - это напряжение на границе, задающееся в виде прямоугольного

импульса $\sigma_{imp}(\tilde{t}) = \sigma_0 (H(\tilde{t}) - H(\tilde{t} - \tilde{t}_0))$ высотой σ_0 и длительностью \tilde{t}_0 ,

Данная модель была введена с целью описания результатов экспериментов

по высокоскоростному деформированию металлов, о которых было сказано

во введении, и основная задача состоит в том, чтобы показать возможность

передачи энергии от перемещения центра масс U на внутреннюю степень

свободы z , переход которой в новое устойчивое состояние равновесия

соответствует структурному преобразованию в материале. Данный процесс, результатом которого явилось уменьшение амплитуды входного сигнала, уже был продемонстрирован на примере дискретного аналога континуальной модели, представляющего собой двухстепенной осциллятор с нелинейной силой взаимодействия. Вполне логично ожидать подобного явления и в континууме, однако при переходе к нему сразу же возникает ряд дополнительных вопросов. Совершенно ясно, что раскачка внутренней степени свободы не происходит мгновенно, и за это время волна успевает пройти какое-то расстояние по материалу. Оценка данного расстояния является важной задачей как для проведения эксперимента [110], так и для выполнения численного моделирования. Дело в том, что при использовании последнего для решения волновых задач часто трудно заранее предсказать, в течение какого времени нужно вести расчёт, чтобы получить требуемый результат. Другой вопрос касается характера внешнего воздействия на систему. К примеру, какова должна быть продолжительность и величина импульса для пробуждения внутренней степени свободы?

Чтобы ответить на эти и другие вопросы, требуется провести анализ системы уравнений (5.4), который мы начнём с построения дисперсионных кривых [111], являющихся для континуальной среды такой же важной характеристикой, как и собственные частоты для дискретной модели. Для удобства договоримся опускать символ \sim в уравнениях (4.1), имея в виду, что в дальнейшем будут исследоваться безразмерные уравнения. Если считать относительные перемещения малой величиной, так что $\sin z \sim z$, и пренебречь трением, то зависимость частоты ω от волнового числа k имеет вид

$$m^2\omega^4 - \omega^2 \left(k^2(1+m^2) + \frac{m^2}{1-\chi(1-m^2)} \right) + k^4 + k^2 = 0 \quad (5.5)$$

график которой при различных значениях параметра m приведен на рис.4.1-4.3. Значению $k=0$ отвечают два значения частоты $\omega_1=0$ и $\omega_2 = \frac{1}{1-\chi(1-m^2)}$. За последней в литературе закрепился термин частоты отсечки [112]. При $\omega \rightarrow \infty$ асимптоты дисперсионных кривых имеют вид $\omega = k$ и $\omega = \frac{k}{m}$. Когда $m=1$, то компоненты материала неотличимы, и их относительное смещение равно нулю, чему соответствует совпадение дисперсионных кривых выше частоты ω_2 (рис.4.1).

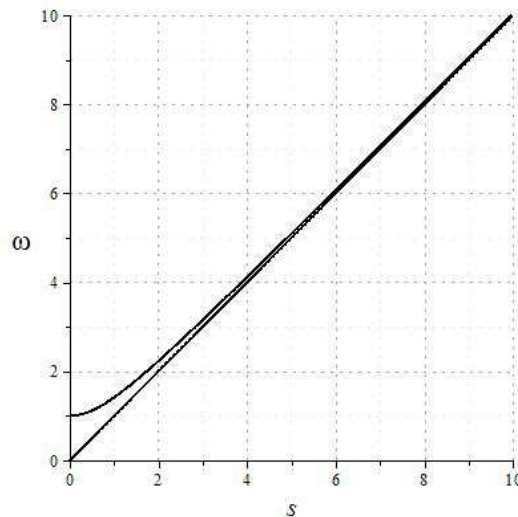


Рис.5.1. Дисперсионные кривые, $m^2 = 1$

Близкое к нулю значение m означает, что скорости звука в решётках становятся существенно различными. Тогда дисперсионные ветви быстро расходятся (рис.4.2), и понятие движения центра масс утрачивает смысл.

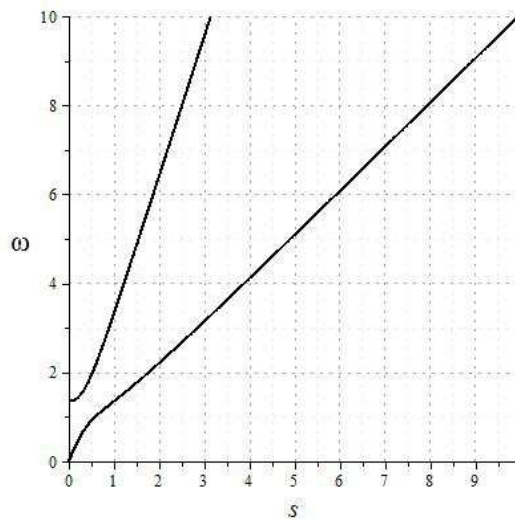


Рис.5.2. Дисперсионные кривые, $m^2 = 0.1$

Нас будет интересовать ситуация, когда параметр m близок к единице. На рис.4.3 видно, что в этом случае дисперсионные ветви находятся близко друг от друга в достаточно широком диапазоне частот.

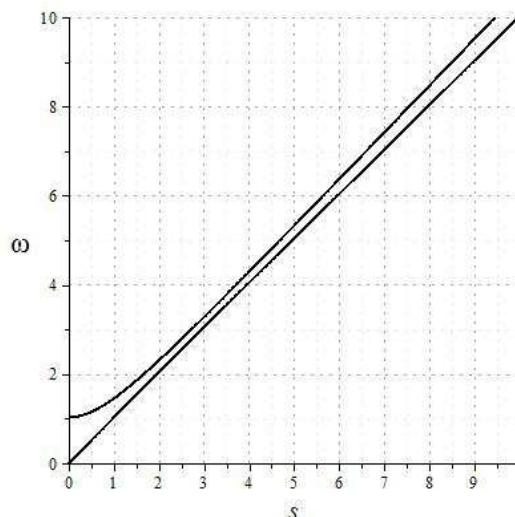


Рис.5.3. Дисперсионные кривые, $m^2 = 0.9$

Отсюда следует, что переход энергии с нижней на верхнюю дисперсионную ветвь, называемую оптической [113], за счёт работы нелинейных сил

взаимодействия происходит именно при тех параметрах, которые обеспечивают данное расположение дисперсионных кривых. Тогда, полагая, что $\chi = 1/2$ и пренебрегая членами $O(\delta)$ в коэффициентах уравнений (4.1), представим их и соответствующие им граничные условия в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{\delta}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \sin z + v\dot{z} + \delta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} &= \sigma_{imp}(t), \\ \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=0} &= \sigma_{imp}(t)\delta \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $\delta = 1 - m^2 \ll 1$. Ранее уже отмечалось, что использование исключительно численных методов для исследования нелинейных динамических задач может быть лишено смысла, так как во многих случаях трудно заранее указать область значений параметров, при которых следует проводить расчёт. Поэтому для предварительного исследования уравнений (5.6) предлагается использовать метод переменного интервала, описанный в третьей главе.

§5.2. Дискретно-континуальная аналогия

В соответствии с изложенной там процедурой возьмём в качестве интервала разложения функцию $l = t$ и будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^N Q_n(t) \cos \frac{\pi(2n+1)x}{2l} H(l-x), \\ z &= \sum_{n=1}^N q_n(t) \cos \frac{\pi(2n+1)x}{2l} H(l-x) \end{aligned} \quad (5.7)$$

После умножения на форму и интегрирования уравнений в промежутке от 0 до l с учётом граничных условий (4.3) получим:

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_n + \Omega_n^2 Q_n &= \frac{\Omega_n^2 \delta q_n}{4} - \frac{2\sigma_{imp}(t)}{l} \\ \ddot{q}_n + \nu \dot{q}_n + \Omega_n^2 q_n + 2J_1(q_n) &= -\delta \ddot{Q}_n - \frac{2\sigma_{imp} \delta}{l} \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $\Omega_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}$ - частота, отвечающая своей форме. При выводе данных уравнений была использована формула, справедливая при любых x и φ $\sin(x \cos \varphi) = 2J_1(x) \cos \varphi - 2J_2(x) \cos 3\varphi + 2J_5(x) \cos 5\varphi - \dots$ [114]. Через $J_1(q_n)$ здесь обозначена функция Бесселя I рода. Исключая из второго уравнения слагаемое \ddot{Q} и пренебрегая членами $O(\delta^2)$, запишем систему (5.8) следующим образом

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_n + \Omega_n^2 Q_n &= \frac{\Omega_n^2 \delta q_n}{4} - \frac{2\sigma_{imp}(t)}{l} \\ \ddot{q}_n + \nu \dot{q}_n + \Omega_n^2 q_n + 2J_1(q_n) &= \Omega_n^2 \delta Q_n \end{aligned} \quad (5.9)$$

По своей форме она напоминает уравнения (4.12) из предыдущей главы. Чтобы аналогия была полной, введём новую переменную $\tau = \Omega_n t$, как это было сделано в главе 3 (см. выражения 3.6, 3.7)

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_n + Q_n &= \frac{\delta q_n}{4} - \frac{2\sigma_{imp}(\tau/\Omega_n)}{\Omega_n^2 l} \\ \ddot{q}_n + \frac{\nu}{\Omega_n} \dot{q}_n + q_n + \frac{2}{\Omega_n^2} J_1(q_n) &= \delta Q_n \end{aligned} \quad (5.10)$$

Теперь эти уравнения практически не отличаются от уравнений дискретной модели, и, следовательно, к ним применимы все те же рассуждения, с помощью которых была найдена аналитическая формула, показывающая уменьшение амплитуды колебаний центра масс за счёт динамики внутренней переменной.

Начнём с того, что из аналогии со связанными осцилляторами, сразу напрашивается вывод, что при слабом импульсе, величина которого ниже критического значения, передача энергии от центра масс на другую степень свободы не происходит, и волна движется по материалу, не замечая внутренней структуры. К этому результату можно прийти, применяя преобразование Лапласа к системе уравнений (5.9), которая без учёта сил вязкого трения при малых относительных перемещениях в пространстве изображений имеет вид

$$\begin{aligned} (p^2 + \Omega_n^2)Q_n^L - \frac{\Omega_n^2 \delta q_n^L}{4} &= -\frac{2\sigma^L(t)}{l} . \\ -\Omega^2 \delta Q_n^L + (p^2 + \Omega_n^2 + 1)q_n^L &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Если пренебречь членами $O(\delta^2)$ по сравнению с единицей, то её решение записывается следующим образом

$$\begin{aligned} Q_n^L &= -\frac{2\sigma^L(t)}{l(p^2 + \Omega_n^2)} \\ q_z^L &= \frac{2\sigma^L(t)\delta\Omega_n^2}{l(p^2 + \Omega_n^2)(p^2 + \Omega_n^2 + 1)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

К тому же результату, что и первое из выражений (5.12) приводит применение преобразования Лапласа к уравнению (3.6), полученному после использования метода переменного интервала для оператора Д'Аламбера, описывающего распространение волны без дисперсии. Следовательно, по аналогии с дискретной системой, относительное смещение в этом случае не оказывает заметного влияния на движение центра масс.

Сходство уравнений, полученных из двухкомпонентной среды методом переменного интервала, с уравнениями дискретной системы позволяет предположить, что при надлежащем выборе параметров в континуальной модели также проявится влияние относительного смещения, приводящее к уменьшению амплитуды входного импульса. Но прежде чем пытаться

обнаружить данный эффект с помощью численного расчёта, желательно иметь пусть даже приблизительную оценку времени и расстояния, которое должна пройти волна, чтобы заранее составить представление о размере области интегрирования. В дискретной модели момент переключения τ_* с режима биений на колебания с одной частотой определялся после замены исходной задачи на линейную, в которой сила взаимодействия действует на систему не в течение малого промежутка времени, а непосредственно в точке τ_* . При этом мы пренебрегали силой вязкого трения и вместо импульсного воздействия на центр масс задавали начальную скорость.

Прделаем эти же преобразования с уравнениями (5.10). Если вместо $\sigma_{imp}(t)$ в правой части первого из них стоит дельта-функция $\delta_0(t)$, то в соответствии с формулой замены переменной $\delta_0(ax) = \frac{\delta_0(x)}{a}$ [115], они приводятся к виду

$$\begin{aligned}\ddot{Q}_n + Q_n &= \frac{\delta q_n}{4} - \frac{2\sigma_0 \delta_0(\tau)}{\Omega_n l} \\ \ddot{q}_n + q_n + \frac{2}{\Omega_n^2} J_1(q_n) \delta_0(\tau - \tau_*) &= \delta Q_n\end{aligned}\quad (5.13)$$

Совпадение их внешнего вида с уравнениями связанных маятников (4.18) при условии, что роль начальной скорости выполняет слагаемое $-\frac{2\sigma_0}{\Omega_n l}$, позволяет сразу же написать зависимости $Q_n(\tau)$ и $q_n(\tau)$, используя выражения (4.24), (4.25)

$$Q_n(\tau) = -\frac{2\sigma_0}{\Omega_n l} \left(\cos \frac{\delta\tau}{4} \sin \tau + (-1)^k \sin \frac{\delta(\tau - \tau_*)}{4} \cos(\tau - \tau_*) H(\tau - \tau_*) + O(\delta) \right) \quad (5.14)$$

$$q_n(\tau) = \frac{4\sigma_0}{\Omega_n l} \left(\sin \frac{\delta\tau}{4} \cos \tau + (-1)^k \cos \frac{\delta(\tau - \tau_*)}{4} \sin(\tau - \tau_*) H(\tau - \tau_*) + O(\delta) \right). \quad (5.15)$$

Время τ_* в дискретной модели определялось из условия гашения одной из собственных частот, которое имеет вид (4.22). Данное условие здесь сохраняется, тогда как аналог соотношения (4.23) записывается следующим образом:

$$-\frac{2\sigma_0}{l} = \frac{(-1)^k J_1(q_n^*)}{\Omega_n}, \quad k=1,2,\dots, \quad (5.16)$$

где $q_n^* = q_n(\tau_*)$. В нём роль параметра κ_0 , определяющего величину импульса, требуемого для перевода динамики двухстепенного осциллятора из одного режима в другой, выполняет расстояние l_* , на котором движение центра масс меняется за счёт влияния относительного смещения. Для оценки этого расстояния умножим последнее равенство на $\frac{1}{t_*}$, предполагая существование времени, аналогичного τ_* в дискретной модели. С учётом введения новой переменной $\tau = \Omega_n t$ и интервала $l = t$ из (5.16) следует

$$t_*^2 = -\frac{2\sigma_0\tau_*(-1)^k}{J_1\left(\frac{4\sigma_0}{\tau_*}\sin\frac{\delta\tau_*}{4}\cos\tau_*\right)}. \quad (5.17)$$

Если $4\sigma_0 < \tau_*$, то приближённо можно считать, что

$$t_* = \tau_* \sqrt{-\frac{(-1)^k}{\sin\frac{\delta\tau_*}{4}\cos\tau_*}}. \quad (5.18)$$

Определение целого числа k снова производится на основе энергетического баланса с помощью уравнения (4.33), в котором роль коэффициента трения выполняет слагаемое $\frac{\nu}{\Omega_n}$. Далее будет показано, что $\nu = 2n$, где параметр n характеризует диссипативные свойства нелинейного осциллятора. Используя (5.18) и подставляя в (4.33) $\delta = 0.1$, находим, что $k=27$ и $t_* \approx 127$.

Посмотрим, как будет выглядеть деформация центра масс ε в соответствии до и после момента времени t_* . Для этого нужно выполнить в выражении (5.14) замену $\tau \rightarrow \Omega_n t$, произвести интегрирование, пользуясь формулой (4.37), подставить результат в (5.6) и выполнить дифференцирование по координате. Сходимость рядов данного типа обсуждалась в главе 3. Результат вычислений при $N = 30$ с импульсом, длительность которого на три порядка меньше времени пробега волны, представлен на рис. 4.6, где показана зависимость деформации от времени в различных сечениях полубесконечной области.

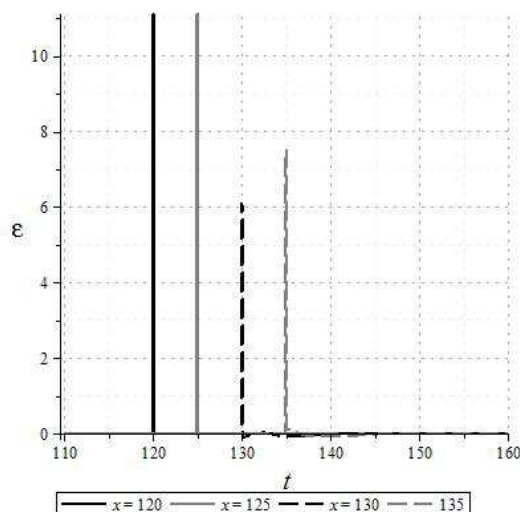


Рис.5.4. Зависимость деформации от времени, $\sigma_0 = 11$, $t_0 = 0.1$

Таким образом, с помощью приближённого аналитического решения, построенного на основе метода переменного интервала, удаётся определить параметр t_* и показать эффект уменьшения импульса по аналогии с дискретной моделью вблизи данной точки. Из рис. 5.4 видно, что при удалении от неё данный подход уже неприменим, и в таком случае имеет смысл обратиться к численному расчёту.

§5.3. Численное интегрирование

Численное интегрирование начально-краевой задачи (5.4) производится методом конечных разностей с использованием схемы Кранка-Николсона [116], преимущество которой по сравнению с чисто неявной схемой состоит в том, что она обеспечивает более высокий порядок аппроксимации по времени. Предварительно требуется определить величину критического напряжения, коэффициент вязкого трения ν и длительность прямоугольного импульса t_0 . Напряжение, при котором начинается процесс структурного преобразования, можно взять непосредственно из дискретной модели, используя её сходство с континуальными уравнениями после применения метода переменного интервала. Для нахождения параметра $\tilde{\nu} = \frac{\nu \omega^*}{K \lambda}$ (для безразмерных величин в континуальной модели мы возвращаем значок \sim , чтобы избежать путаницы в обозначениях), нужно установить его связь с коэффициентом $n = \frac{\mu}{\omega_1 m_1}$ (см. выражение (4.11)) и связать частоту отсечки ω^* с физическими характеристиками материала. Снова воспользуемся предположением, сделанным в предыдущей главе, о параметре κ , характеризующем потенциальную энергию (4.17) нелинейной силы взаимодействия

$$\kappa = \frac{2Q\lambda}{s_1} = 1, \quad (5.19)$$

где $\lambda = \frac{2\pi}{d}$. Подставляя в (5.19) соотношения (5.3), получим

$$K = \frac{\lambda E}{8\pi^2}. \quad (5.20)$$

При близких характеристиках двухкомпонентной модели

$$\omega^* = c_1 \sqrt{\frac{(1 - \chi(1 - m^2))K\lambda}{(1 - \chi)E_1}} \approx c_1 \sqrt{\frac{2K\lambda}{E_1}} \text{ и, тогда, принимая во внимание (5.20),}$$

находим

$$\omega^* \approx \frac{c_1}{d} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}. \quad (5.21)$$

После этого, используя (5.3) и (5.21), из соотношения $n = \frac{\mu}{\omega_1 m_1}$ нетрудно вывести, что $\tilde{\nu} = 2n$. Напомним, что ранее эта связь уже была использована для определения параметра k в формуле (5.18).

Остаётся определить длительность прямоугольного импульса \tilde{t}_0 , оценить величину которого можно, исходя из дисперсионной кривой (рис.5.3). Безразмерная частота отсечки, характеризующая спектральные свойства системы, примерно равна 1, и для пробуждения внутренней степени свободы спектральный состав сигнала должен содержать частоты, лежащие выше заданной частоты. В противном случае относительное смещение не будет проявляться при динамическом воздействии на среду. Спектральная характеристика $F(\omega)$ прямоугольного импульса [117], отнесённая к его площади показана на рис.5.5.

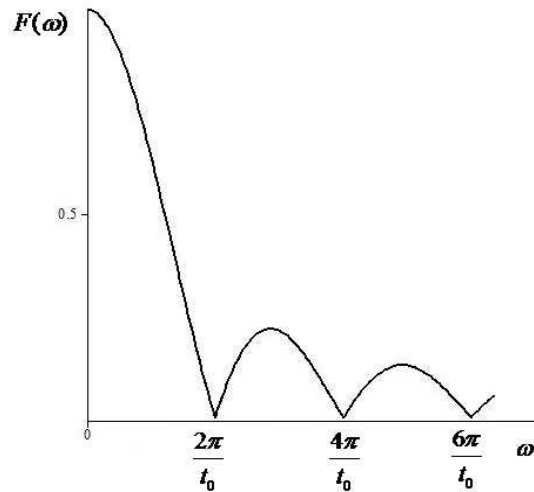


Рис.5.5. Спектральная характеристика

Так как основная доля энергии импульса сосредоточена в первом лепестке, то для перехода энергии на внутреннюю степень свободы нужно, чтобы первый нуль спектральной плотности превышал частоту отсечки, откуда следует, что $\tilde{t}_0 < 2\pi$.

Сначала используем разностную схему для того, чтобы убедиться в справедливости вывода, который был сделан на основании дискретного аналога, о том, что при напряжении ниже критического передача энергии от центра масс на относительное смещение не происходит. Численное решение уравнений (5.4) с соответствующими граничными условиями при $\delta = 0.1$, $\tilde{\nu} = 0.022$, $\sigma_0 = 9$, $\tilde{t}_0 = 3$ представлено на рис. (5.6, 5.7).

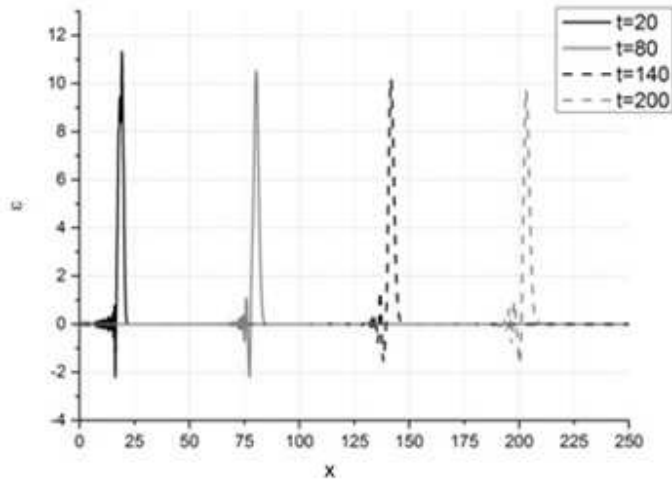


Рис.5.6. Распределение деформаций, $\sigma_0 = 9$, $\tilde{t}_0 = 3$

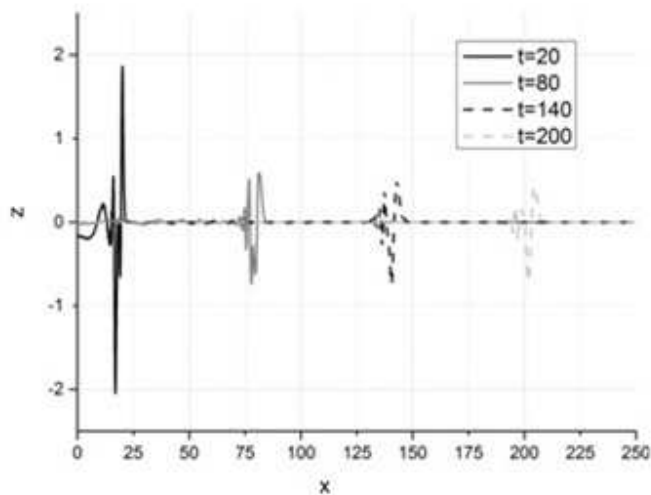


Рис.5.7. Относительные перемещения, $\sigma_0 = 9$, $\tilde{t}_0 = 3$

На первом из них показана деформация центра масс $\varepsilon = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}}$ в различные моменты времени. Она совпадает с деформацией, которая была бы получена в результате решения линейного волнового уравнения, описывающего распространение импульса в полубесконечном упругом стержне. Ниже приводится график распределения относительного перемещения \tilde{z} , роль

которого в формировании отклика системы на внешнее воздействие в данном случае несущественна.

При незначительном увеличении высоты прямоугольного импульса внутренняя переменная в ограниченной области материала занимает новое устойчивое равновесное положение, отражающее изменение внутренней структуры (рис.5.8,5.9). При этом становится заметным её влияние на движение центра масс, проявляющееся в снижении высоты импульса, правда при данных параметрах оно не превышает 15% (рис.5.10).

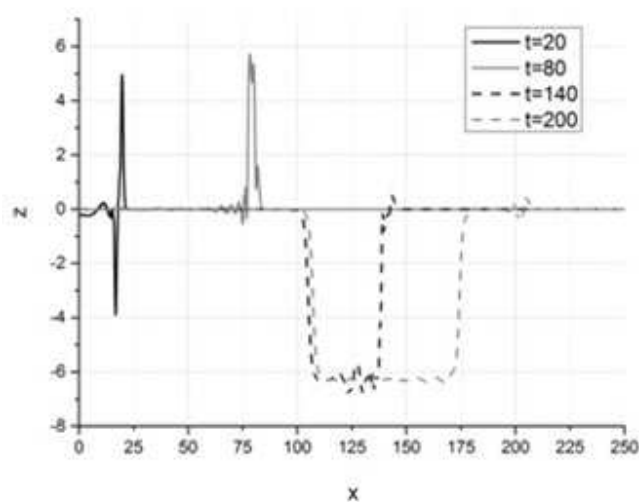


Рис.5.8. Относительные перемещения, $\sigma_0 = 11$, $\tilde{t}_0 = 3$

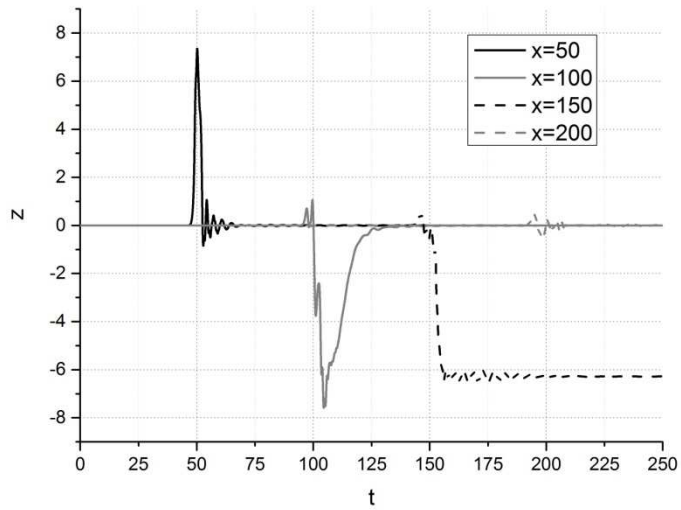


Рис.5.9. Развитие относительного перемещения

во времени, $\sigma_0 = 11$, $\tilde{t}_0 = 3$

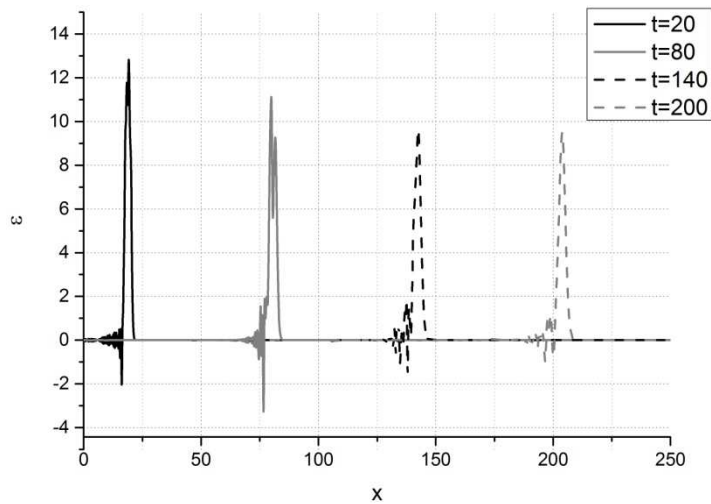


Рис.5.10. Распределение деформаций, $\sigma_0 = 11$, $\tilde{t}_0 = 3$

Обратим внимание, что время завершения перехода в устойчивое равновесное состояние и выхода амплитуды деформации центра масс на новую величину достаточно хорошо соответствуют тому значению, которое было предсказано на основе применения метода переменного интервала (см. выражение (5.18)).

Чтобы усилить эффект гашения импульса, достаточно немного увеличить высоту входного сигнала на границе. Результат показан на рис.5.11, 5.12.

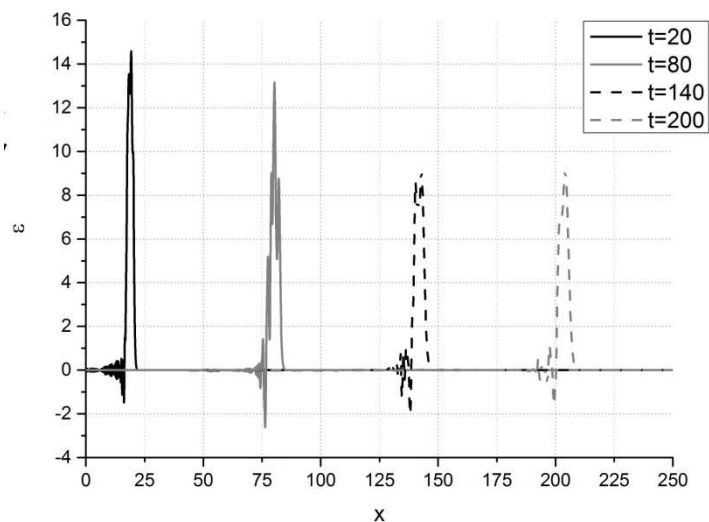


Рис.5.11. Распределение деформаций, $\sigma_0 = 13$, $\tilde{t}_0 = 3$

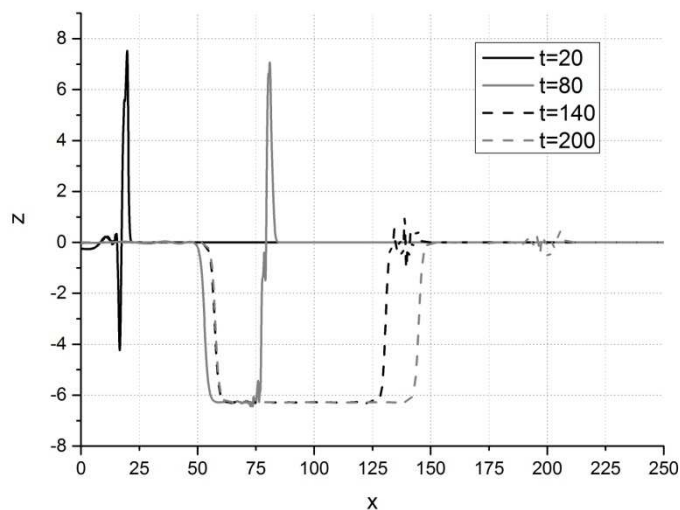


Рис.5.12. Относительные перемещения, $\sigma_0 = 13$, $\tilde{t}_0 = 3$

При сопоставлении распределения относительного смещения на рис. 5.8 и 5.12 видно, что во втором случае структурное преобразование начинается

гораздо раньше, и область материала с измененной структурой увеличилась примерно в полтора раза.

В качестве иллюстрации влияния длительности входного импульса проведём численное интегрирование задачи при тех же параметрах, что были использованы для получения решения, изображённого на рис. 5.8-5.10 за исключением параметра \tilde{t}_0 , который мы теперь положим равным 10. Распределение деформации и относительного смещения при $\sigma_0 = 11$ и $\tilde{t}_0 = 10$ показаны на рис.5.13 и 5.14.

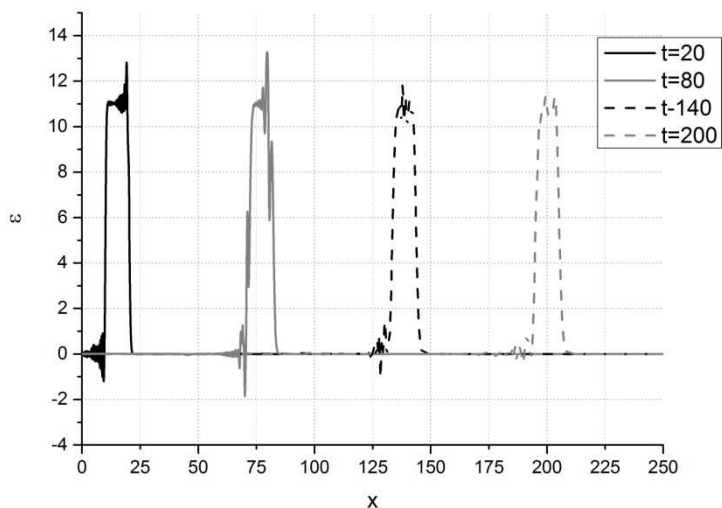


Рис.5.13. Распределение деформаций, $\sigma_0 = 11$, $\tilde{t}_0 = 10$

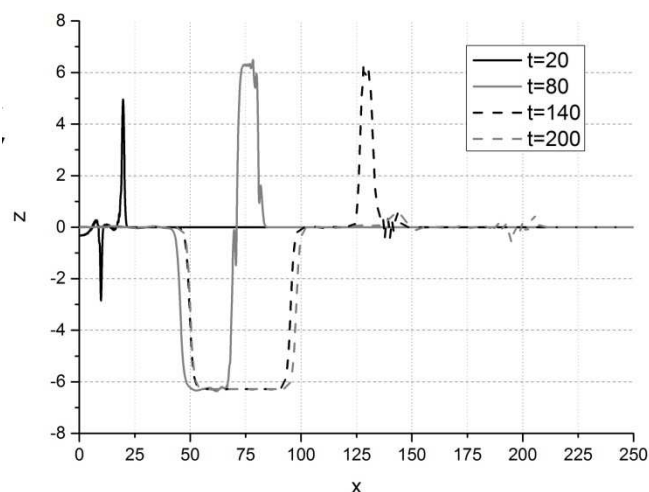


Рис.5.14. Относительные перемещения, $\sigma_0 = 11$, $\tilde{t}_0 = 10$

Несмотря на то, что величина приложенного напряжения достигла критического значения, передача энергии на внутренние степени свободы не происходит и амплитуда деформации не уменьшается из-за того, что не выполнено условие $t_0 < 2\pi$. При этом зона, охваченная структурным превращением, практически не изменяется с течением времени.

Приведенные примеры численного решения уравнений подтверждают те предположения, которые были сделаны на основе анализа их дисперсионных кривых и динамики нелинейного осциллятора, являющегося простейшим структурным элементом реологической модели двухкомпонентной среды. Ещё раз подчеркнем, что без предварительного аналитического исследования применение численной процедуры вряд ли бы позволило показать трансформацию отклика системы на макро-уровне, обусловленное динамикой внутренней степени свободы, так как из-за наличия нелинейности она оказывается чрезвычайно чувствительной к малым изменениям параметров.

§5.4. Оценка параметров и качественное сравнение с экспериментом

Теперь попытаемся сопоставить численные значения математической модели с данными эксперимента. Приближённую оценку частоты отсечки и максимального значения силы внутреннего взаимодействия можно произвести с помощью соотношений (5.20) и (5.21). Подставляя в них характерные значения, использованные при расчёте статической задачи

$$E_1 = 1 \cdot 10^{11} \frac{H}{M^2}, \quad d = 2 \cdot 10^{-5} M, \quad \text{находим:} \quad \omega_* \approx 3 \cdot 10^8 c^{-1}, \quad K \approx 4 \cdot 10^{14} \frac{H}{M^3}.$$

Зная частоту отсечки, можно сравнить время завершения процесса структурных преобразований t_* с характерным значением на профиле скорости тыльной

стороны мишени (рис.1.3). Подставляя в выражение $t_* = \frac{\tilde{t}_*}{\omega_*}$, связывающее

время с безразмерной переменной, $\tilde{t}_* = 137$ и $\omega_* \approx 3 \cdot 10^8 c^{-1}$, получим $t_* \approx 5 \cdot 10^{-7} c$, что, учитывая приближённый характер вычислений, находится

в достаточно хорошем согласии с опытом. Толщина мишени в опытах по высокоскоростному деформированию варьируется от 5 до 10 мм [118].

Убедимся, что расстояние проходимое волной за время $t_* \approx 5 \cdot 10^{-7} c$ по крайней мере не превышает эту длину. Координата x связана с

безразмерной величиной с помощью соотношения $x = \frac{c_1}{\omega_*} \tilde{x} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} \tilde{x}$, из

которого, используя найденные оценки нетрудно вычислить, что $x \approx 2 \text{ мм}$.

Характерная частота осцилляций на пластическом фронте (рис.1.4), сопровождающих динамический переход материала в новое состояние, примерно равна 0.5 Гц. На рис. (5.15) представлено распределение деформации при длительности начального импульса $\tilde{t}_0 = 3$ в сечении $\tilde{x} = 100$.

Расстоянию между двумя четко выраженными максимумами на вершине импульса отвечает частота 0.15 Гц.

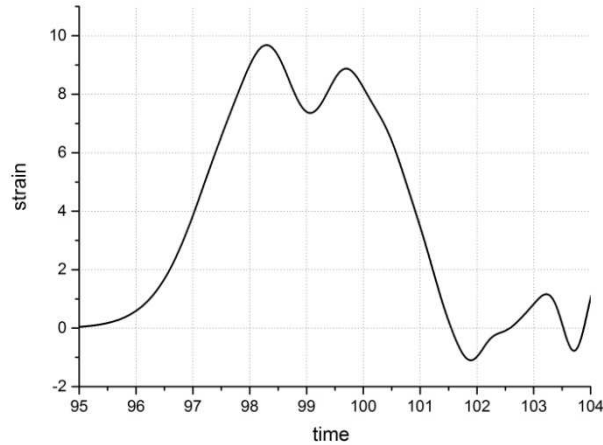


Рис.5.15. Развитие деформации во времени, $\sigma_0 = 11$, $\tilde{t}_0 = 3$

Какие напряжения будет испытывать материал в соответствии с численным решением задачи? Вспоминая, что

$$\tilde{\sigma} = \frac{c_1 \lambda \sigma}{\omega^* (E_1 + E_2)} \quad (5.22)$$

и приравнявая $\tilde{\sigma}$ высоте прямоугольного импульса $\sigma_0 \approx 10$, при котором \tilde{z} занимает новое устойчивое положение равновесия, определим, что истинное напряжение $\sigma \approx 3 \cdot 10^{11} \text{ Па}$. Оно примерно на два порядка превышает то напряжение, при котором в твердых телах, согласно [119], происходят фазовые и полиморфные превращения. В таком случае скорость частиц, определяемая с помощью выражения

$$\sigma = \rho c_1 v, \quad (5.23)$$

будет на такую же величину превышать экспериментально наблюдаемое значение. Данное расхождение объясняется тем, что в данной работе не учитываются пластические свойства материала.

Наконец, остаётся найти длительность механического импульса, которая определяется временем взаимодействия между ударником и

мишенью. Это время можно приближённо оценить, составив простейшее уравнение движение ударника [120]. Будем считать, что в момент соударения на него действует усилие, определяемое из (5.23) умножением на площадь мишени A_m . Обозначив через $m_{y\partial}$ массу ударника, имеем

$$\dot{v} + \frac{A_m \rho c_1}{m_{y\partial}} v = 0 \quad (5.24)$$

Если ударник и мишень изготовлены из одного материала, то массу ударника можно записать как $m_{y\partial} = \rho A_{y\partial} h_{y\partial}$, где через $h_{y\partial}$ обозначена его толщина, и тогда уравнение для его скорости приобретает вид

$$\dot{v} + \frac{A_m c_1}{A_{y\partial} h_{y\partial}} v = 0. \quad (5.25)$$

Диаметр ударника в эксперименте примерно в 3 раза меньше диаметра мишени, а толщина ударника составляет примерно 2мм. Полагая, что время их взаимодействия t_{imp} совпадает с временем релаксации уравнения (5.25),

находим, $t_{imp} = \frac{h_{y\partial}}{9c_1} \approx 4 \cdot 10^{-8} c$. С другой стороны, подставляя значение $\tilde{t}_0 = 3$,

использованное при численном расчёте (рис.5.8-5.12), в выражение $t = \frac{\tilde{t}}{\omega_*$,

находим $t_0 \approx 1 \cdot 10^{-8} c$, что достаточно хорошо согласуется, с величиной, определённой на основании эксперимента, которая, как отмечено в работе [20], зависит от толщины ударника.

Заключение

В заключение подведём итоги выполненной работы, основной целью которой являлась разработка механической модели, демонстрирующей влияние внутренней степени свободы, отвечающей за перестройку кристаллической структуры материала, на динамику измеряемого макропараметра. Данная механическая модель основана на механике двухкомпонентной среды с нелинейной силой взаимодействия, в которой роль внутренней переменной выполняет относительное смещение компонент, тогда как регистрируемой при проведении опыта величиной считается движение их центра масс.

В рамках данной модели сначала рассматривалась квазистатическая задача о кинематическом растяжении двухкомпонентного стержня и были найдены параметры, обеспечивающие немонотонную зависимость напряжения от деформации, которая часто используется при описании материалов с фазовым переходом. Был предложен критерий для оценки критической деформации, соответствующей точке экстремума на определяющей диаграмме. Также проводилось исследование влияние относительного смещения на деформированное состояние образца, в результате чего был сделан вывод, что оно приобретает периодический характер с частотой и амплитудой, зависящими от характерного размера микроструктуры и средней составляющей, равной значению деформации на торце.

Чтобы определяющая кривая приобрела неустойчивый участок, нам пришлось ослабить связь между решётками, и предположить, что их физические характеристики существенно отличаются друг от друга. Материал с близкими характеристиками в условиях квазистатического нагружения подобной зависимостью не обладает. В этом случае для проявления влияния относительного смещения требуется изменить характер внешнего воздействия, сделав его динамическим. Поэтому далее была

сформулирована нестационарная задача о распространении прямоугольного импульса по материалу с изменяющейся структурой. Для её анализа была использована аналогия между уравнениями, которые были получены после применения метода переменного интервала к исходной задаче в частных производных и уравнениями, описывающими динамику нелинейного осциллятора с невыпуклой потенциальной энергией, представляющего собой простейший структурный элемент реологической модели сплошной среды. Сходство уравнений позволило предсказать эффект снижения амплитуды внешнего воздействия и, главное, оценить время, в течение которого система выходит на новый установившийся режим. Оценка времени имеет очень важное значение как для эксперимента, так и для проведения численного расчёта, выполненного разностным методом. Численное решение дало возможность продемонстрировать динамический процесс структурных преобразований в материале, которому в рассматриваемой модели отвечает переход относительного смещения решёток в новое устойчивое состояние равновесия.

Следует признать, что предложенное описание изменений кристаллической структуры является крайне упрощённым. К примеру, в модели предполагается, что каждая из компонент подчиняется закону Гука и не принимаются во внимание пластические свойства материала. Несмотря на это, её использование позволяет достичь по крайней мере качественного согласия с экспериментальными данными по динамическому деформированию металлов. Существует множество других задач в рамках предложенной модели, которые требуют проведения дальнейших исследований. В работе только показана возможность описания динамики перехода энергии на внутренние степени свободы, но не рассматривается вопрос о зависимости этого процесса от параметров системы. С этой точки зрения было бы интересно выяснить, существует ли оптимальное соотношение параметров, обеспечивающих наибольшее гашение импульса.

Сюда же относится и проблема идентификации параметров силы внутреннего взаимодействия. Правдоподобную оценку удалось произвести только для коэффициента нелинейно-упругой связи. Тот же самый вопрос о параметре, отвечающем за поглощение энергии материалом, остаётся открытым и в данной работе не затрагивается.

Литература

1. Hopkinson B. A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosives or by the impact of bullets //Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. – 1914. – Т. 213. – С. 437-456.
2. Давиденков Н. Н. Динамическое испытание металлов. – ОНТИ НКТП СССР; Гл. ред. лит. по черной металлургии, 1936.
3. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах //М.: Изд-во иностр. лит. – 1955. – Т. 192. – С. 153.
4. Мейерс М. А. Ударные волны и явления высокоскоростной деформации металлов. – 1984.
5. Campbell J. D. Dynamic plasticity of metals. – Vienna and New York : Springer, 1972.
6. Chopra A. K. et al. Dynamics of structures. – New Jersey : Prentice Hall, 1995. – Т. 3. – С. 339.
7. Кумпяк О. Г. Прочность и деформативность железобетонных сооружений при кратковременном динамическом нагружении. – STT Publishing, 2002.
8. Cristescu N. Dynamic plasticity. – River Edge, NJ, USA : World Scientific, 2007. – Т. 10.
9. Vepa R. Dynamics of smart structures. – John Wiley & Sons, 2010.
10. Кривцов А. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. – Litres, 2016.
11. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – 1961.

12. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. – 1987.
13. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – 1980.
14. Паршин Л. К., Шерстнев В. А. Сопротивление материалов. – Издательство "Лань"(Санкт-Петербург) ББК: 30.121 УДК: 539.3/. 6 (075.8), 2007.
15. Вовненко Н. В., Зимин Б. А., Судьенков Ю. В. Неравновесность процесса движения облучаемой поверхности металлов при воздействии лазерных импульсов субмикросекундной длительности //Журнал технической физики. – 2010. – Т. 80. – №. 7.
16. Рахматуллин Х. и др. Прочность и разрушение при кратковременных нагрузках. – Litres, 2016.
17. Mathur K. K., Needleman A., Tvergaard V. 3D analysis of failure modes in the Charpy impact test //Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. – 1994. – Т. 2. – №. 3А. – С. 617
18. Тимошенко С. История науки о сопротивлении материалов. – Рипол Классик, 1957.
19. Канель Г. И. и др. Экспериментальные профили ударных волн в конденсированных веществах //М.: Физматлит. – 2008. – Т. 248.
20. Канель Г. И., Фортов В. Е., Разоренов С. В. Ударные волны в физике конденсированного состояния //Успехи физических наук. – 2007. – Т. 177. – №. 8. – С. 809-830.
21. Мещеряков Ю. И. и др. Пороговые режимы и микромеханизмы динамического деформирования //Materials Physics and Mechanics. – 2011. – Т. 11. – С. 23-59.

22. Grady D. E. The spall strength of condensed matter //Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1988. – Т. 36. – №. 3. – С. 353-384.
23. Petrov Y. V., Sitnikova Y. V. Temperature dependence of spall strength and the effect of anomalous melting temperatures in shock-wave loading //Technical physics. – 2005. – Т. 50. – №. 8. – С. 1034-1037.
24. Канель Г. И., Разоренов С. В. Аномалии температурных зависимостей объемной и сдвиговой прочности монокристаллов алюминия в субмикросекундном диапазоне //Физика твердого тела. – 2001. – Т. 43. – №. 5. – С. 841-845.
25. McQueen R. G. et al. The equation of state of solids from shock wave studies //High velocity impact phenomena. – 1970. – Т. 293.
26. Груздков А. А., Морозов Н. Ф., Петров Ю. В. Инкубационное время в задачах динамической прочности //Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2010. – Т. 15. – №. 3-1.
27. Indeitsev D. A. et al. Multi-scale model of steady-wave shock in medium with relaxation //Acta Mechanica. – 2015. – Т. 226. – №. 3. – С. 917-930.
28. Индейцев Д.А., Мещеряков Ю.И., Кучмин А.Ю., Вавилов Д.С. Многомасштабная модель распространения стационарных упругопластических волн// Доклады Академии наук. -2015. -Т.456.- №.5. С.537.
29. Duvall G. E., Graham R. A. Phase transitions under shock-wave loading //Reviews of Modern Physics. – 1977. – Т. 49. – №. 3. – С. 523.
30. Hixson R. S. et al. Acoustic velocities and phase transitions in molybdenum under strong shock compression //Physical review letters. – 1989. – Т. 62. – №. 6. – С. 637.

31. Meshcheryakov Y. I. et al. Dynamic structures in shock-loaded copper //Physical Review B. – 2008. – Т. 78. – №. 6.
32. Барахтин Б. К., Мещеряков Ю. И., Савенков Г. Г. Динамические и фрактальные свойства стали СП-28 в условиях высокоскоростного нагружения //Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68. – №. 10.
33. Мещеряков Ю. И., Савенков Г. Г. Осцилляции фронта пластической волны в условиях высокоскоростного нагружения. – 2001.
34. Соболев С. Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса //Успехи физических наук. – 1997. – Т. 167. – №. 10. – С. 1095-1106.
35. Truskinovsky L., Zanzotto G. Ericksen's bar revisited: Energy wiggles //Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1996. – Т. 44. – №. 8. – С. 1371-1408.
36. Rosakis P., Knowles J. K. Unstable kinetic relations and the dynamics of solid-solid phase transitions //Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1997. – Т. 45. – №. 11. – С. 2055-2081.
37. Ngan S. C., Truskinovsky L. Thermo-elastic aspects of dynamic nucleation //Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2002. – Т. 50. – №. 6. – С. 1193-1229.
38. Truskinovsky L., Vainchtein A. Kinetics of martensitic phase transitions: lattice model //SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2005. – Т. 66. – №. 2. – С. 533-553.
39. Balk A. M., Cherkaev A. V., Slepyan L. I. Dynamics of chains with non-monotone stress–strain relations. I. Model and numerical experiments //Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2001. – Т. 49. – №. 1. – С. 131-148.
40. Еремеев В. А. О потере устойчивости упругих систем при наличии мартенситных превращений на примере фермы Мизеса //Вестник Южного научного центра РАН. – 2005. – Т. 1. – №. 2. – С. 91-93.

41. Хейес У. Д. Введение в теорию распространения волн //Нелинейные волны/Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса.– М.: Мир. – 1977. – С. 13-53.
42. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений //Успехи математических наук. – 1957. – Т. 12. – №. 3 – С. 3-73.
43. MacCamy R. C., Mizel V. J. Existence and nonexistence in the large of solutions of quasilinear wave equations //Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1967. – Т. 25. – №. 4. – С. 299-320.
44. Hurd A. E., Sattinger D. H. Questions of existence and uniqueness for hyperbolic equations with discontinuous coefficients //Transactions of the American Mathematical Society. – 1968. – Т. 132. – №. 1. – С. 159-174.
45. Lifshitz L. M. Kinetics of Ordering during 2nd-order Phase Transitions //Soviet Physics JETP-USSR. – 1962. – Т. 15. – №. 5. – С. 939-942.
46. Gurtin M. E. Continuum theory of thermally induced phase transitions based on an order parameter //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1993. – Т. 68. – №. 3. – С. 326-343.
47. Sikora J., Cusumano J. P., Jester W. A. Spatially periodic solutions in a 1D model of phase transitions with order parameter //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1998. – Т. 121. – №. 3. – С. 275-294.
48. Фрейдин А. Б. Механика разрушения. Задача Эшелби //СПб.: Изд-во СПбПУ. – 2010.
49. Purohit P. K., Bhattacharya K. Dynamics of strings made of phase-transforming materials //Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2003. – Т. 51. – №. 3. – С. 393-424.
50. Făciu C., Molinari A. On the longitudinal impact of two phase transforming bars. Elastic versus a rate-type approach. Part I: The elastic case //International journal of solids and structures. – 2006. – Т. 43. – №. 3. – С. 497-522.

51. Gavrilov S. N., Shishkina E. V. On stretching of a bar capable of undergoing phase transitions //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2010. – Т. 22. – №. 4. – С. 299-316.
52. Knowles J. K. Stress-induced phase transitions in elastic solids //Computational mechanics. – 1999. – Т. 22. – №. 6. – С. 429-436.
53. Slepyan L. I. Feeding and dissipative waves in fracture and phase transition: II. Phase-transition waves //Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2001. – Т. 49. – №. 3. – С. 513-550.
54. Indeitsev D. A., Skubov D. Y., Vavilov D. S. Problems of Describing Phase Transitions in Solids //Mechanics and Model-Based Control of Advanced Engineering Systems. – Springer Vienna, 2014. – С. 181-188.
55. Abeyaratne R., Knowles J. K. Evolution of phase transitions: a continuum theory. – Cambridge University Press, 2006.
56. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. – М. : Наука. Физматлит, 1987.
57. Куропатенко В. Ф. Обмен импульсом и энергией в неравновесных многокомпонентных средах //Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т. 46. – №. 1. – С. 7-15.
58. Zhilin P. A. Advanced problems in mechanics //St. Petersburg. – 2006. – Т. 2. – С. 271.
59. Vilchevskaya E. N., Ivanova E. A., Altenbach H. Description of liquid–gas phase transition in the frame of continuum mechanics //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2014. – Т. 26. – №. 2. – С. 221-245.
60. Jiang L., Tsai H. L. Improved two-temperature model and its application in ultrashort laser heating of metal films //Journal of heat transfer. – 2005. – Т. 127. – №. 10. – С. 1167-1173.

61. Chen J. K. et al. Modeling of femtosecond laser-induced non-equilibrium deformation in metal films //International Journal of Solids and Structures. – 2002. – Т. 39. – №. 12. – С. 3199-3216.
62. Jacot A., Rappaz M. A pseudo-front tracking technique for the modelling of solidification microstructures in multi-component alloys //Acta Materialia. – 2002. – Т. 50. – №. 8. – С. 1909-1926.
63. Панин В. Е., Панин А. В. Эффект поверхностного слоя в деформируемом твердом теле //Физическая мезомеханика. – 2005. – Т. 8. – №. 5.
64. Трусов П. В., Ашихмин В. Н., Швейкин А. И. Двухуровневая модель упругопластического деформирования поликристаллических материалов //Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т. 15. – №. 3. – С. 327-344.
65. Индейцев Д. А., Наумов В. Н., Семенов Б. Н. Динамические эффекты в материалах со сложной структурой //Вестник Самарского государственного университета. – 2007. – №. 4.
66. Епифанов Г. И. Физика твердого тела: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М //Высшая школа. – 1977.
67. Вавилов Д. С., Наумов В. Н. Динамика взаимодействия включения с упругим телом //Вестник Нижегородского университета им. НИ Лобачевского. – 2011. – №. 4-4.
68. Skubov D. Y., Vavilov D. S. Dynamics of the conductivity solid bodies in a high-frequency alternating magnetic field //Acta Mechanica. – 2014. – Т. 225. – №. 7. – С. 1901.
69. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. – М. : Наука. Физматлит, 1997.

70. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н. Нелинейная теория локализованных волн в сложных кристаллических решетках как дискретно-континуальных системах //Вычисл. мех. сплош. сред. – 2008. – Т. 1. – №. 1. – С. 14-30.
71. Aero E. L., Bulygin A. N., Pavlov Y. V. The nonlinear theory of reorganization of structure of superthin crystal layers at intensive loadings //Mater Phys Mech. – 2012. – Т. 15. – С. 126-134.
72. Кившарь Ю., Браун О. Модель Френкеля-Конторовой. Концепции, методы, приложения. – Litres, 2016.
73. Будылина Е. А. и др. Решения уравнения Клейна–Гордона типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности //Фундаментальные исследования. – 2014. – №. 5-5.
74. Скотт Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур //М.: Физматлит. – 2007. – Т. 560.
75. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – 1970.
76. Старовойтов Э. Сопротивление материалов. – Litres, 2016.
77. Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G. Extended irreversible thermodynamics //Extended Irreversible Thermodynamics. – Springer Berlin Heidelberg, 1996. – С. 41-74.
78. Babenkov M. B., Ivanova E. A. Analysis of the wave propagation processes in heat transfer problems of the hyperbolic type //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2014. – Т. 26. – №. 4. – С. 483-502.
79. Krivtsov A. M. Heat transfer in infinite harmonic one-dimensional crystals //Doklady Physics. – Pleiades Publishing, 2015. – Т. 60. – №. 9. – С. 407-411.
80. Мещеряков Ю. И. и др. Влияние размера зерна на макроскопический отклик алюминия на ударное нагружение //Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48. – №. 6. – С. 135-146.

81. Жерновий Ю. Про розв'язність задачі Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, частково розв'язаних стосовно старшої похідної// Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип.56. – С.80-90.
82. Indeitsev D. A. et al. Two-Component Medium with Unstable Constitutive Law //RECENT ADVANCES in MECHANICAL ENGINEERING and MECHANICS. – 2014. – С. 73.
83. Вержбицкий В. М. Основы численных методов //учебник для вузов.-М.: Высшая. – 2009.
84. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. – 2013.
85. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы математической физики //М., Изд-во иностр. лит. – 1958.
86. Найфэ А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – Т. 456.
87. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. – 1948.
88. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Изд-во" Наука", Ленинградское отд-ние, 1967.
89. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – Рипол Классик, 1960.
90. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – 1969.
91. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – Наука, 1989.

92. Слепян Л. И. Исследование нестационарных деформаций с помощью рядов, определенных на переменном интервале," //Изв. АН СССР, Механика. – 1965. – №. 4.
93. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. – 1972
94. Куликов К.Г., Фирсов А.Н. Уравнения и методы математической физики. Классические модели: учеб. пособие / СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 220 с.
95. Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды. – 1986.
96. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости //Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9. – №. 4-2.
97. Wang H., Dai W., Melnik R. A finite difference method for studying thermal deformation in a double-layered thin film exposed to ultrashort pulsed lasers //International journal of thermal sciences. – 2006. – Т. 45. – №. 12. – С. 1179-1196.
98. Даниловская В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы //Прикладная математика и механика. – 1950. – Т. 14. – №. 3. – С. 316-318.
99. Вовненко Н. В., Зимин Б. А., Судьенков Ю. В. Экспериментальные исследования термоупругих напряжений в тепло-и нетеплопроводящих твердых телах при субмикросекундных длительностях лазерного нагрева //Журнал технической физики. – 2011. – Т. 81. – №. 6.
100. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – 1977.

101. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами //М. Абрамовица и И. Стиган.–М.: Наука. – 1979.
102. Пальмов В. А. Колебания упруго-пластических тел. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976.
103. Подольская Е. А., Кривцов А. М., Панченко А. Ю. Исследование устойчивости и структурного перехода в гцк-решётке при больших деформациях.
104. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. – Наука,, 1972.
105. Дубнищев Ю. Н. Колебания и волны //Новосибирск: Сибирское университетское издательство. – 2004.
106. Паршаков А.Н. Физика линейных и нелинейных волновых процессов в избранных задачах. Электромагнитные и акустические волны// Долгопрудный: Издательский Дом Интеллект. - 2014.
107. Индейцев Д.А., Скубов Д.Ю., Вавилов Д.С. Динамическая модель структурных преобразований// Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел.-М.: Изд-во Московского университета.-2016.
108. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971.
109. Пановко Я. Г. Механика деформируемого твердого тела: современные концепции, ошибки и парадоксы. – " Наука," Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1985.
110. Мещеряков Ю. И. и др. Переход металлов в структурно-неустойчивое состояние при ударно-волновом нагружении // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51. – №. 5. – С. 132-146.

111. Архипова Н. И., Ерофеев В. И., Семерикова Н. П. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с помощью уточнённых стержневых моделей // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №. 4-1.
112. Индейцев Д. А., Куклин Т. С., Мочалова Ю. А. Особенности локализации в балке Бернулли-Эйлера на неоднородном упругом основании // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2015. – Т. 2. – №. 1.
113. Смирнов А. А. Молекулярно-кинетическая теория металлов. – Наука; Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1966.
114. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов // М.: Наука. – 1973.
115. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. – Наука, 1976.
116. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. – М. : Физматлит, 2004
117. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. – Сов. радио,, 1962
118. Мещеряков Ю. И., Диваков А. К. О влиянии процессов на фронте импульса сжатия на откольную прочность материала и сопротивление высокоскоростному внедрению // Прикладная механика и техническая физика. – 2003. – Т. 44. – №. 6. – С. 25-34.
119. Селиванов В. В. Прикладная механика сплошных сред: В 3 т.: Учебник для вузов. – Изд-во МГТУ им. НЭ Баумана, 2000
120. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости: Пер. с англ./Под ред. ГС Шапиро. 2-е изд. – 1979.