

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем машиноведения
Российской академии наук

На правах рукописи

Гаврилов Сергей Николаевич

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА
УПРУГИХ ТЕЛ С ПОДВИЖНЫМИ
ВКЛЮЧЕНИЯМИ И ГРАНИЦАМИ**

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург

2013

Работа выполнена в лаборатории гидроупругости Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
чл.-корр. РАН БУРЕНИН Анатолий Александрович (ФГБУН Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук, директор)

доктор физико-математических наук,
доцент ЕРЕМЕЕВ Виктор Анатольевич (Южный научный центр Российской академии наук, зав. лаб. "Механика активных материалов")

доктор физико-математических наук,
профессор КИСЕЛЁВ Алексей Прохорович (ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, в.н.с.)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук.

Защита состоится «___» _____ 2013 г. в ___ часов на заседании совета Д 002.075.01 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук по адресу: 199178, Санкт-Петербург, В.О., Большой пр., д. 61.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ ФГБУН Институт проблем машиноведения Российской академии наук.

Автореферат разослан «___» _____ 2013 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 002.075.01

доктор технических наук, профессор

В.В. Дубаренко

Общая характеристика диссертации

Актуальность темы. В различных разделах современной механики деформируемого твердого тела возникает необходимость исследования сходных математических задач. Именно: имеется упругий континуум (упругое тело) и подвижной источник (в диссертации — подвижное инерционное включение или подвижная граница), способный изменять свое пространственное положение внутри континуума и взаимодействующий с ним. Разделами механики, где такие задачи совершенно естественны, являются, например, механика упругих систем с подвижными нагрузками, в которой подобные задачи были рассмотрены впервые, а также более новые разделы, такие, как механика фазовых превращений (подвижной источник — фазовая граница), разномодульная теория упругости (источник — подвижной разрывной фронт), механика разрушения (источник — трещина), теория дислокаций и дефектов. Сходство математических постановок подобных задач диктуется сходством физических явлений, которые они описывают. Рассмотрение энергетического баланса для движущегося источника дает возможность определить реакцию континуума на его движение (так называемую конфигурационную силу), что позволяет формулировать нестационарные задачи двух типов (в диссертации — задачи кинематического и силового типов). В задачах кинематического типа задается закон движения источника; требуется определить движение упругого тела и, если это необходимо, конфигурационную силу. В задачах силового типа заданы силовые воздействия, вызывающие движение источника, и разыскиваются движение источника и движение упругого тела. Задачи силового типа особенно сложны: по своей сути они являются нестационарными, кроме того, известно, что они всегда нелинейны. Даже для более простых задач кинематического типа распространенной является ситуация, когда вместо нестационарной задачи рассматривается стационарная, в которой источник движется с постоянной скоростью, и разыскивается автомодельное решение, неизменное в подвижной системе координат, движущейся вместе с источником. Что касается собственно нестационарных задач, то систематически в литературе применяются два аналитических подхода: метод интегральных преобразований и вычисление (или асимптотическая оценка) интеграла свертки фундаментального решения соответствующего оператора в частных производных с функцией нагрузки. Оба этих подхода применимы только для

задач кинематического типа и достаточно эффективны для нестационарных задач, где внезапно возникший источник движется далее с постоянной скоростью. В некоторых частных случаях с их помощью удастся исследовать решения задач, в которых источник движется с переменной скоростью, однако в целом для таких задач данные подходы не являются достаточно эффективными. Возможными подходами также являются численная оценка интеграла свертки или прямое численное моделирование, которое, однако, как правило, неэффективно для выявления качественных закономерностей в решениях соответствующих задач. Таким образом, определение качественных и количественных закономерностей поведения упругих тел с подвижными включениями и границами, не поддающихся анализу в рамках стационарных постановок задач, является весьма актуальной проблемой. В связи с этим возникает необходимость в разработке нового, альтернативного, аналитического подхода к решению нестационарных задач механики упругих тел с включениями и границами, движущимися с переменной скоростью, допускающего систематическое применение в различных разделах современной механики деформируемого твердого тела.

Целями диссертационной работы являются:

- определение качественных и количественных закономерностей поведения упругих тел с подвижными включениями и границами, не поддающихся анализу в рамках стационарных постановок задач;
- разработка нового аналитического подхода, допускающего систематическое применение для решения задач динамики упругих тел с включениями и границами, движущимися с переменной скоростью;
- демонстрация эффективности данного подхода посредством решения ряда задач, исследование которых представляет самостоятельный интерес.

Методы исследований. В диссертации получены аналитические решения ряда нестационарных задач механики упругих тел с подвижными включениями и границами при помощи асимптотических методов.

Теоретическая и практическая значимость диссертации. Диссертация носит теоретический характер. Разработанный в ней аналитический подход к исследованию нестационарных процессов в упругих телах с подвижными включениями и границами может быть применён к широкому классу задач из различных разделов механики сплошных сред. Результаты главы 4 дают представление об области применимости квазистатического подхода, широко используемого в теории фазовых превращений в упругих телах. Результаты главы 3 были получены при финансовой поддержке Shell E.&P. и могут быть использованы в геофизических приложениях. Результаты глав 2 и 5 могут быть использованы в инженерных приложениях, связанных с развитием железнодорожного транспорта.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгой математической постановкой задач, применением математически обоснованных методов решения, полученными предельными переходами к известным случаям, использованием компьютерных систем аналитических вычислений для проверки аналитических результатов, совпадением с результатами численных расчетов.

Научная новизна. В диссертации разработан новый аналитический подход к решению нестационарных задач динамики упругих тел с включениями и границами, движущимися с переменной скоростью, связанный с представлением решений рассматриваемых задач в виде многомасштабных асимптотических разложений по малому параметру (являющемуся свойством рассматриваемых механических систем). Продемонстрирована эффективность предложенного подхода посредством решения ряда не исследованных ранее нестационарных задач механики деформируемого твёрдого тела, представляющих самостоятельный интерес. Проведена верификация квазистатического подхода, широко используемого в литературе для задач механики фазовых превращений в упругих телах.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, представлялись на ежегодных летних школах-конференциях “Advanced Problems in Mechanics” (С.-Петербург, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2009, 2010, 2011, 2013); на международных конференциях “Days on Diffraction” (С.-

Петербург, 2002, 2013); на Всероссийских съездах по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2001; Нижний Новгород, 2006); на международных конгрессах ИСТАМ (Чикаго, США, 2000; Варшава, Польша, 2004); на съезде немецкого общества прикладной математики и механики GAMM (Падуя, Италия, 2003); на конференции (workshop) “Mechanics of Materials” (Обервольфах, Германия, 2002); на восьмой международной конференции “Современные проблемы механики сплошных сред” (Ростов-на-Дону, 2002); на III Всероссийской конференции по теории упругости (Азов, 2003); на 484 коллоквиуме EuroMech “Wave Mechanics and Stability of Long Flexible Structures Subject to Moving Loads and Flows” (Делфт, Нидерланды, 2006); на 68 международной конференции–выставке EAGE (Вена, Австрия, 2006); на международной конференции–выставке EAGE “Geosciences — To Discover and Develop” (С.-Петербург, 2006); на рабочих встречах исследовательского кластера СПбГУ–РАН и Shell E.&P; на семинаре под руководством Ж. Можена (Париж, Франция, 2002); на семинаре под руководством А. Кастельяноса (Севиля, Испания, 2007); на докладах на Городском семинаре по вычислительной и теоретической акустике (руководитель семинара — д.ф.-м.н. Д.П. Коузов); на семинаре кафедры теоретической механики СПбГПУ (руководитель семинара — д.ф.-м.н. А.М. Кривцов).

В полном объеме диссертация докладывалась на семинаре академика Н.Ф. Морозова (С.-Петербург) в 2012 г.; на семинаре Института механики МГУ (руководитель семинара — академик РАН И.Г. Горячева) в 2012 г.; на семинаре ИПМех РАН (руководитель семинара — чл.-корр. РАН Р.В. Гольдштейн) в 2012 г.; на Санкт-Петербургском городском семинаре по механике (руководитель семинара — чл.-корр. РАН Д.А. Индейцев) в 2013 г.

На различных этапах данная работа поддерживалась грантами РФФИ (99-01-00693, 05-01-00785, 08-01-00691, 11-01-00385); грантом Президента РФ для молодых кандидатов наук (МК-5355.2007.1); грантом Фонда содействия отечественной науке; Shell E.&P. (CRDF грант RG0-1318(8)-ST-02); грантом Правительства С.-Петербурга (PD04-1.10-89); входила в Программы фундаментальных исследований РАН академиков Н.Ф. Морозова и И.Г. Горячевой.

Публикации по теме диссертации. Результаты диссертационной работы опубликованы в 21 работе [1–21], в том числе в 10 работах в изданиях, входящих в международную базу цитирования Web of Science [1, 2, 9, 11, 12, 15,

16, 19–21]. Работа [8] опубликована в издании, входящем в международную базу цитирования SCOPUS. Работы [3, 17] опубликованы в журнале из списка российских изданий, рекомендованных ВАК России.

Полнота изложения материала. Все результаты диссертации опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК России.

Личное участие автора. По теме диссертации опубликовано 11 работ, подготовленных лично автором, и 10 работ в соавторстве. В работах [18, 21] автору принадлежат результаты исследования эволюции локализованной моды колебаний (доказательство наличия смешанного спектра собственных колебаний в системе “струна на упругом основании — подвижное инерционное включение” принадлежит Д.А. Индейцеву). В работах [13–15] автору принадлежит постановка задачи и метод её исследования, решение выполнялось совместно с Е.В. Шишкиной. В работах [10, 11] автору принадлежит решение задачи (постановка задачи принадлежит Х. Херману). Работа [12] была начата диссертантом совместно с Х. Херманом (постановка задачи) и завершена после кончины соавтора (решение задачи). В работах [16, 17] автору принадлежит процедура построения асимптотического разложения, позволяющая получить решение рассмотренных задач.

Структура и объём диссертации. Диссертация изложена на 239 страницах и состоит из введения, пяти глав и списка использованной литературы. Библиография включает 186 наименований.

Краткое содержание диссертации

В диссертации приняты следующие обозначения, общие для всех глав: ϵ — малый параметр; t — время; x — пространственная координата (в рассматриваемых задачах движение источника происходит вдоль оси x); $\ell(t)$ — положение подвижного источника (подвижного включения или подвижной границы) на оси x ; ζ' — производная по пространственной координате x некоторой величины ζ ; $\dot{\zeta}$ — производная по времени t некоторой величины ζ ; ζ_{\pm} — предельные значения слева и справа некоторой величины ζ при $x = \ell(t)$; ζ — скачок некоторой величины ζ при $x = \ell(t)$; $\langle \zeta \rangle$ — полусумма предельных

значений слева и справа некоторой величины ζ при $x = \ell(t)$; H — функция Хевисайда; δ — дельта-функция Дирака.

Первая глава диссертации имеет вводный характер. В ней обсуждаются особенности постановки нестационарных задач о взаимодействии упругих тел с подвижными источниками, а также понятие конфигурационной силы — величины, характеризующей энергетический обмен между упругой средой и подвижным источником. Существует два типа конфигурационных сил: внешние и внутренние (классификация принадлежит М. Гартину). Внешняя конфигурационная сила (сила вибрационного давления, сила волнового сопротивления движению) представляет собой реакцию среды на движение инерционного включения. Это понятие было введено в механику работой лорда Рэлея и в последствии обсуждалось в работах Е.Л. Николаи, Т. Хавелока, А.И. Весницкого, Г.Г. Денисова, А.В. Метрикина и многих других авторов. Внутренняя конфигурационная сила (термодинамическая сила, материальная сила) представляет собой реакцию среды на движение неоднородности упругих свойств материала (в частности, на движение подвижной границы, разделяющей зоны внутри материала, обладающие различными упругими свойствами). Это понятие было введено в механику работами Дж. Эшелби, Г.П. Черепанова и Дж. Райса и в последствие рассматривалось в работах Ж. Можена, Р. Кинцлера, Дж. Херрманна и многих других авторов. С единых позиций внешние и внутренние конфигурационные силы были рассмотрены М. Гartiным (хотя фактически Г.П. Черепанов рассматривал их совместно значительно раньше, не делая при этом акцент на некотором их отличии).

В диссертации кратко рассматриваются три классические задачи (задача Рэлея, раздел 1.1.1; задача Николаи, раздел 1.1.2; задача Эшелби, разделы 1.2.1–1.2.3) с целью демонстрации сходства постановок задач, исследуемых далее в диссертации, а также вывода некоторых известных формул.

В разделе 1.1.2 на примере задачи Николаи (задачи о движении точечного инерционного включения по струне) выводится формула для потока энергии \mathcal{J} от точечного включения:

$$-\mathcal{J} = P_0 \frac{d\mathcal{U}}{dt} + \dot{\ell} \mathcal{F}_{\text{ext}}, \quad \mathcal{F}_{\text{ext}} = -P_0 \langle u' \rangle.$$

Здесь \mathcal{F}_{ext} — внешняя конфигурационная сила, u — перемещения струны,

$\mathcal{U} = u(\ell(t), t)$ — перемещение включения, P_0 — сила, действующая на струну со стороны включения. В разделе 1.1.3 продемонстрировано, что внешняя конфигурационная сила может быть представлена как сумма воздействия извне и самовоздействия.

В разделе 1.2.2 выводится формула для потока энергии \mathcal{J} от подвижной границы (разрыва поля деформаций), разделяющей зоны внутри материала, обладающие различными упругими свойствами, распространяющейся в прямом упругом стержне при его продольных колебаниях:

$$-\mathcal{J} = \dot{\ell} \mathcal{F}_{\text{int}}, \quad \mathcal{F}_{\text{int}} = -([W] - \langle T \rangle [u']).$$

Здесь \mathcal{F}_{int} — внутренняя конфигурационная сила, W — внутренняя энергия стержня на единицу длины, T — внутренняя сила в стержне, u — перемещение стержня.

Предлагается классификация нестационарных задач о взаимодействии упругих тел с подвижными источниками (задачи кинематического и силового типа), см. разделы 1.1.4 и 1.2.4.

Задачи о *подвижных включениях*, где закон движения включения — заданная функция, являются задачами кинематического типа. В задачах силового типа закон движения включения считается неизвестной функцией, подлежащей определению при помощи уравнения продольного движения включения, которое, к примеру, в задаче Николаи имеет вид

$$m_0 \ddot{\ell} = -\mathcal{F}_{\text{ext}} + f_0(t)$$

(где $f_0(t)$ — заданная сила тяги, m_0 — масса включения), и начальных условий к нему. Задачи кинематического типа для подвижных включений рассматриваются в главе 2 диссертации (раздел 2.1) и главе 5, задачи силового типа — в главе 2 (раздел 2.2).

В зависимости от вида определяющего соотношения рассматриваемого материала положения разрывных фронтов (*подвижных границ*), которые могут в нем распространяться, либо могут быть определены решением уравнений движения с учетом начальных и граничных условий к ним, либо должны рассматриваться как дополнительные степени свободы. Первая ситуация характерна, например, для разномодульной теории упругости (рассматривается

в главе 3 диссертации) и соответствует задаче кинематического типа, а вторая рассматривается в теории фазовых превращений в упругих телах и соответствует задаче силового типа (глава 4 диссертации). Требование того, чтобы свободно распространяющаяся подвижная граница не являлась источником энергии для окружающей её упругой среды, приводит к так называемому термодинамическому неравенству

$$-\dot{\mathcal{F}}_{\text{int}} \geq 0.$$

В задачах кинематического типа выполнение данного неравенства на всех подвижных разрывах является критерием выбора энергетически допустимых решений и необходимым условием единственности решения. В задачах силового типа требуется сформулировать дополнительное условие на подвижных границах. В качестве дополнительного условия обычно используется так называемое термодинамическое условие, смысл которого состоит в задании некоторой связи между скоростью движения границы и конфигурационной силой, гарантирующей выполнение термодинамического неравенства.

В заключение (раздел 1.4) формулируются основные идеи аналитического подхода к исследованию задач динамики упругих тел с включениями и границами, движущимися с переменной скоростью. Данный подход используется далее для исследования задач, рассмотренных в главах 2–4 диссертации.

Для задач кинематического типа предлагается следующий метод исследования.

- 1) В системе обнаруживается (или искусственно вводится туда) малый параметр ϵ , позволяющий рассматривать её как систему с медленно изменяющимися (во времени или в пространстве) параметрами.
- 2) Решение задачи представляется в виде многомасштабного асимптотического разложения по малому параметру.
- 3) Для определения главного члена асимптотического представления решения в окрестности источника используется асимптотический подход типа метода многих масштабов (МММ). При этом целью применяемой асимптотической процедуры является переход от исходной задачи для уравнения в частных производных, описывающего упругий континуум вокруг источника, к некоторой редуцированной задаче, формулируемой

для “обобщённой координаты” $\ell(t)$ (положения источника) в терминах величин¹, измеренных под подвижным источником (или их предельных значений в окрестности источника).

- 4) Разрешая редуцированную задачу при помощи асимптотических методов типа МММ, получаем описание движения системы в окрестности источника, справедливое на временах $t = O(\epsilon^{-1})$.
- 5) На последнем этапе, при необходимости, при помощи уравнения в частных производных определяется решение на удалении от источника.

Для задач силового типа предлагается следующий метод исследования.

- 1) Считая закон движения источника $\ell(t)$ произвольной достаточно гладкой функцией и решая задачу кинематического типа, находим функциональную зависимость $u'_{\pm}\{\ell(t)\}(\ell(t), t)$ деформации (а точнее, её предельных значений u'_{\pm}) под подвижным источником от закона движения источника $\ell(t)$.
- 2) Подставляя найденную функциональную зависимость $u'_{\pm}\{\ell(t)\}(\ell(t), t)$ деформации от закона движения источника в выражение для конфигурационной силы, входящее в правую часть уравнения движения источника, находим неизвестное положение источника $\ell(t)$.

Таким образом, решение задачи силового типа сводится к решению задачи кинематического типа с законом движения $\ell(t)$ достаточно общего вида.

Во второй главе рассматриваются нестационарные задачи динамики бесконечной струны на винклеровском основании, по которой с переменной докритической скоростью движется инерционное включение (инерционная подвижная нагрузка). Во введении представлен аналитический обзор литературы по нестационарным задачам динамики струны под действием подвижной нагрузки. Задачи нестационарной динамики струны под действием подвижной нагрузки рассматривались В.Л. Андриановым, С. Байером, А.И. Весницким, А. Вулфертом, Н.В. Дерендяевым, Б. Диниевичем, Х. Дитерманом, Ю.Д. Каплуновым, С.В. Крысовым, Е.Е. Лисенковой, С.Б. Малановым,

¹Например, деформаций или материальных скоростей.

А.В. Метрикиным, Г.Б. Муравским, Р. Родеманом, Л.И. Слепяном, Ч. Смитом, И.Н. Солдатовым, У. Стронджем, Г.А. Уткиным, Ф.Т. Флаэрти, Л. Фрибой и другими авторами.

В задаче кинематического типа, рассматриваемой в разделе 2.1, закон движения включения считается заданной функцией.

В разделе 2.1.1 представлена постановка задачи. Уравнения движения имеют вид

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -P(t)\delta(x - \ell(t)), \quad m\ddot{U} = -P(t) + p(t).$$

Здесь u и $\mathcal{U} \equiv u(\ell(t), t)$ — перемещения струны и включения соответственно, c — скорость поперечных волн в струне, $P_0 = PT_0$ — неизвестная вертикальная проекция силы, действующей на струну со стороны включения, $p_0 = pT_0$ — заданная внешняя вертикальная сила, действующая на включение (например, вес), $m_0 = mT_0$ — масса включения, $k_0 = kT_0$ — коэффициент упругости основания, T_0 — сила натяжения невозмущенной струны. Начальные условия задаются в виде $u|_{t<0} \equiv 0$. Переходя в уравнении движения струны в движущуюся вместе с включением систему координат $\xi = x - \ell(t)$, $\tau = t$, получим

$$(1 - \beta^2)u''_{\xi\xi} + \frac{2v}{c^2}u''_{\xi\tau} + \frac{a}{c^2}u'_{\xi} - \frac{1}{c^2}u''_{\tau\tau} - ku = (m\mathcal{U}''_{\tau\tau} - p)\delta(\xi),$$

где $v(t) = \dot{\ell}(t)$, $a(t) = \ddot{\ell}(t)$ — скорость и ускорение включения соответственно, $\beta(t) = v/c$. Для численного исследования задачи можно воспользоваться интегральным уравнением для силы между струной и включением (раздел 2.1.2):

$$P(t) = - \int_0^t \left(\frac{dJ_0(\Psi(t, \tau, \ell(t)))}{dt} + \frac{2}{mc} \right) P(\tau) d\tau + \frac{2}{mc} \int_0^t p(\tau) d\tau,$$

$$\Psi(t, \tau, x) = \sqrt{k(c^2(t - \tau)^2 - (x - \ell(\tau))^2)},$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Стартовой точкой для исследования задачи кинематического типа, представленной в диссертации, является работа Ю.Д. Каплунова, где рассмотрена задача о крутильных колебаниях стержня на деформируемом основании под действием внезапно

приложенной инерционной сосредоточенной нагрузки, движущейся с постоянной докритической скоростью v (раздел 2.1.3). Данная задача математически эквивалентна задаче о поперечных колебаниях струны на винклеровском основании. Получив при помощи метода интегральных преобразований асимптотику решения задачи для больших значений времени, Ю.Д. Каплунов обнаружил, что в системе возникают незатухающие колебания, которым соответствуют формы, локализованные в окрестности нагрузки. Причиной возникновения таких незатухающих колебаний является тот факт, что данная система обладает смешанным спектром частот собственных колебаний. Если инерционное включение движется с постоянной докритической скоростью, то локализованные колебания оказываются также возможными (раздел 2.1.3.1). Частоте Ω_0 , квадрат которой равен

$$\Omega_0^2 = \frac{2(\sqrt{1 + m^2 c^2 k(c^2 - v^2)} - 1)}{m^2 c^2},$$

соответствует так называемая ловушечная мода колебаний. Результаты Ю.Д. Каплунова и некоторые их обобщения представлены в разделе 2.1.3.2. Если теперь рассмотреть исходную задачу о включении, движущемся вдоль струны с переменной скоростью $v = v(T)$, где $T = \epsilon\tau$, $\tau = O(\epsilon^{-1})$, то естественным образом возникает задача об описании эволюции локализованной моды колебаний в системе с медленно меняющимися во времени параметрами. Аналитическое решение данной задачи для случая, когда скорость включения — медленно меняющаяся кусочно-монотонная функция времени, получено в разделах 2.1.4–2.1.7.

В предположении

$$\tau \rightarrow \infty, \quad |v(\tau)| = \left| \int_0^\tau a(t) dt \right| < c$$

частные решения задачи для $\xi < 0$ и $\xi > 0$ разыскиваются в виде

$$\begin{aligned} u_\gamma(\xi, \tau) &= W_\gamma(X, T) \exp(\varphi_\gamma(\xi, \tau)), & X &= \epsilon\xi, \\ \varphi'_\xi &= i\omega(X, T), & \varphi'_\tau &= -i\Omega(X, T). \end{aligned}$$

Здесь амплитуда $W(X, T)$, волновое число $\omega(X, T)$ и частота $\Omega(X, T)$ — неизвестные функции, подлежащие определению; $W \equiv W_\gamma$ и $\varphi \equiv \varphi_\gamma$ при

$\gamma \equiv \text{sign } \xi = \pm 1$. Будем полагать, что характерное время, за которое скорость v претерпевает существенные изменения, значительно больше характерного времени, за которое происходит установление волновых процессов в случае $a = 0$. Тогда решение задачи о движении включения с постоянной скоростью показывает, что естественно принять некоторые априорные предположения о структуре решения в случае малого ускорения a . Именно, пусть при больших временах решение задачи под включением имеет вид

$$\mathcal{U}(\tau) = \sum_{\Omega \in \sigma_T} \mathcal{U}^{(\Omega)}(\tau) \equiv \sum_{\Omega \in \sigma_T} \bar{\mathcal{U}}^{(\Omega)}(T) \exp(\varphi_0^{(\Omega)}(\tau)), \quad \frac{d\varphi_0^{(\Omega)}}{d\tau} = -i\Omega(T),$$

где суммирование ведется по набору частот $\sigma_T = \{0, \pm\Omega_0(T)\}$. Асимптотическая процедура, основанная на методе многих масштабов, предложенная в диссертации, позволяет получить следующий результат:

$$\mathcal{U} = C_0 \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{\Omega_0 (m^2 c^2 \Omega_0^2 + 2)}} \cos \left(\int_0^t \Omega_0(T) dT - D_0 \right) + \frac{p}{2\sqrt{k(1 - \beta^2)}} + O(\epsilon).$$

Для определения неизвестных постоянных C_0 и D_0 необходимо воспользоваться начальными условиями. Потребуем, чтобы правая часть последнего выражения при $t = 0$ совпадала с членами порядка $O(1)$ асимптотики решения задачи о движении включения с постоянной скоростью. Получим

$$C_0 = -\frac{mc^2 \sqrt{\Omega_0(0)}}{\sqrt{(c^2 - v_0^2)(m^2 c^2 \Omega_0^2(0) + 2)}} |\psi|, \quad D_0 = \arg \psi,$$

$$\psi = -i\Omega_0(0) \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \exp(i\Omega_0(0)t) dt.$$

Тем самым, исследована эволюция ловушечной моды колебаний в системе с медленно изменяющимися параметрами, а именно, найдена зависимость амплитуды колебаний от переменной скорости включения. Для проверки построенного аналитического решения были проведены расчеты (раздел 2.1.8) функции силы между струной и нагрузкой, основанные на численном решении интегрального уравнения, полученного в разделе 2.1.2. Результаты сравнивались с найденным аналитическим выражением. Показано, что построенное асимптотическое решение хорошо согласуется с расчетом. На рис. 1 пред-

ставлены графики численного решения (сплошная линия) и аналитического решения (пунктир). Результаты получены для случая $p = \bar{p}H(\tau)$, $\bar{p} = \text{const}$. Рис. 1 (слева) соответствует быстрому разгону с постоянным ускорением, такому, что на интервале времени от начала разгона до момента преодоления критической скорости укладывается только полтора периода локализованных колебаний включения. На рис. 1 (справа) представлены численное решение (сплошная линия) и аналитическое решение (пунктир) для случая немонотонной скорости включения, задаваемой по формуле $v = v_0 + \hat{v} \sin(2\pi\hat{a}t)$.

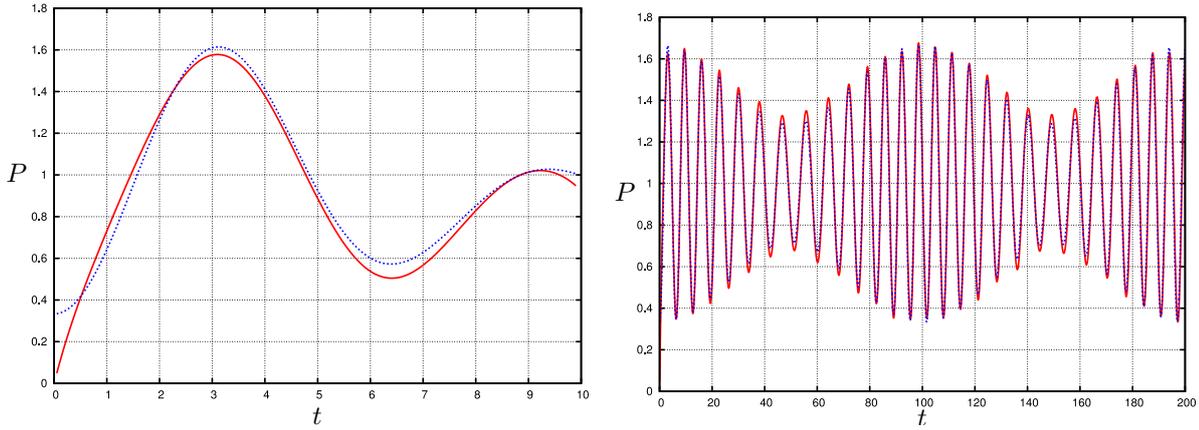


Рис. 1. Зависимость силы между струной и включением от времени: численное решение (сплошная линия) и аналитическое решение (пунктир).

Рассматриваемая в разделе 2.2 задача силового типа представляет собой задачу о движении инерционного включения по струне под действием заданной продольной внешней силы и фактически является модифицированной задачей Николаи. Продольная компонента силы взаимодействия между точкой и струной представляет собой конфигурационную силу самовоздействия (силу волнового сопротивления движению). В разделе 2.2.1 представлена постановка задачи. Именно, задача кинематического типа, сформулированная в 2.1.1, дополняется уравнением продольного движения точечного инерционного включения и начальными условиями к нему:

$$m\ddot{\ell} = f - \Phi; \quad \ell(0) = L_0, \quad \dot{\ell}(0) = V_0,$$

а положение включения на струне $\ell(t)$ считается неизвестной функцией, подлежащей определению. Здесь $\Phi \equiv T_0^{-1}\mathcal{F}_{\text{ext}}$, $f_0 = T_0 f$ — заданная сила тяги.

Для того чтобы исследовать такую задачу, сначала необходимо вычислить силу волнового сопротивления движению для достаточно общего случая ре-

жима движения включения вдоль струны. Применённый в диссертации новый асимптотический подход позволяет получить (раздел 2.2.2) выражение для силы волнового сопротивления в виде простой аналитической формулы

$$\Phi = \alpha \left(\frac{3\dot{\ell}^2}{(c^2 - \dot{\ell}^2)^{5/2}} + \frac{1}{(c^2 - \dot{\ell}^2)^{3/2}} \right) \ddot{\ell} + \frac{\dot{\alpha} c^2 \dot{\ell}}{(c^2 - \dot{\ell}^2)^{3/2}} + o(\epsilon), \quad \alpha = \frac{c p^2}{4\sqrt{k}},$$

а уравнение для закона движения включения в виде формул

$$(M\dot{\ell})' = f, \quad M = m + \frac{\alpha}{(c^2 - \dot{\ell}^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, показано, что инерционное включение движется вдоль струны так, как двигалась бы материальная точка с переменной, зависящей от скорости массой под действием только внешней силы (без учета силы сопротивления). Отдельно рассматривается (раздел 2.2.3) движение инерционного включения по струне без упругого основания. Показано, что сила волнового сопротивления в этом случае ведет себя как сила вязкого трения.

В третьей главе исследуются нестационарные динамические процессы в разномодульном упругом теле. При малых деформациях упругий модуль для такого тела зависит от знака деформации (в простейшем одномерном случае упругий модуль различен при растяжении и сжатии). Наличие негладкой нелинейности в определяющем уравнении для разномодульного материала приводит к тому, что решения нестационарных динамических задач содержат разрывные фронты (разрывы деформаций). Различные подходы к построению теории были предложены С.А. Амбарцумяном и А.А. Хачатряном; Е.В. Ломакиным и Ю.Н. Работновым; В.П. Мясниковым и А.И. Олейниковым; Н.М. Матченко, Л.А. Толоконниковым и А.А. Трещевым. В простейшем одномерном случае в приближении малых деформаций все подходы приводят к одинаковому результату, т.е. для одномерного случая имеется каноническая формулировка теории. Динамические задачи разномодульной теории упругости рассматривались Р. Абейратне, М.М. Анциферовой, Б. Вангом, В.Г. Даниловым, О.В. Дудко, В.И. Ерофеевым, А.Г. Куликовским, А.А. Лаптевой, М. Луччеси, В.П. Масловым, П.П. Мосоловым, В.П. Мясниковым, Дж. Ноулсом, А. Пагни, Л.А. Пекуровской, К.Т. Семеновым, Д. Харенко, А.А. Хачатряном, Х. Янгом и другими авторами.

Рассматривается одномерная задача о распространении волн в одномерном полубесконечном разномодульном теле² под действием внезапно приложенной гармонической силы на конце. Данная задача является задачей кинематического типа (см. раздел 1.2.4), т.к. известно, что положение фронтов может быть определено решением уравнений движения с учетом начальных и граничных условий к ним. Постановка задачи представлена в разделе 3.1. Уравнение движения в безразмерной форме имеет вид

$$\ddot{u} - u'' = -(\epsilon|u'|)', \quad 0 < |\epsilon| \leq 1.$$

Здесь u — продольные перемещения стержня. Предполагается, что параметр ϵ , характеризующий разномодульность, положителен: $\epsilon > 0$, т.е. жесткость на сжатие больше жесткости на растяжение. Начальные условия сформулированы в виде

$$u|_{t<0} \equiv 0.$$

Целью исследования является нахождение нестационарного решения в случае внезапно приложенной гармонической нагрузки F на свободном конце тела:

$$u'|_{x=0} = -\frac{F}{1 + \epsilon \operatorname{sign} F}, \quad F = -F_0 H(t) \sin t.$$

Дополнительно требуем также, чтобы термодинамическое неравенство выполнялось на всех разрывах. Для описания движения разрывных фронтов (подвижных границ) в диссертации применяется асимптотический подход, при этом в качестве малого параметра используется параметр разномодульности ϵ . Разыскивается асимптотика ближнего поля на расстояниях порядка ϵ^{-1} от конца стержня.

В разделе 3.2 приводятся некоторые определения и факты (в том числе классификация типов разрывных фронтов) из основополагающих работ В.П. Маслова и П.П. Мосолова, в которых была исследована структура решений уравнения одномерной разномодульной теории упругости.

Для того чтобы исследовать задачу о внезапно приложенной гармонической нагрузке, предлагается рассмотреть две вспомогательные задачи, а именно задачи о движении полубесконечного разномодульного стержня под

²В стержне или полупространстве в условиях одноосного деформированного состояния. Ниже для определенности обсуждается стержень.

действием цикла нагружения типа “сжатие – растяжение” (раздел 3.3) и под действием цикла “растяжение – сжатие” (раздел 3.4).

Для первой из вспомогательных задач можно получить точное решение, показывающее, что в момент, когда нагружение на конце стержня меняет знак (смена сжатия на растяжение), в характеристической плоскости задачи возникает клиновидная область, в которой деформация остается равной тождественному нулю (“жесткая область”).

Вторая вспомогательная задача существенно сложнее первой. В момент, когда нагружение на конце стержня меняет знак (смена растяжения на сжатие), на свободном конце стержня возникает ударная волна (подвижная граница), распространяющаяся далее по стержню с переменной скоростью. В разделе 3.4.1 в предположении малости параметра разномодульности получена формула

$$\ell = t - \frac{\epsilon}{4} \operatorname{tg} \frac{\epsilon t}{4} - \frac{3\epsilon^2 t}{8} + O(\epsilon^2), \quad \text{где } t = O(\epsilon^{-1}),$$

для положения ударной волны (подвижной границы), а также аналитическое решение, описывающее волновое поле. Полученное решение, вообще говоря, не является асимптотически точным, так как в жесткую область позади ударной волны проникают волны второго порядка малости. Поскольку жесткая область — неустойчивая структура, в ней могут зарождаться новые разрывные фронты высших порядков. Этот процесс требует отдельного детального анализа и не рассматривается в диссертации. Области в характеристической плоскости, для которых первый и второй шаги асимптотического анализа показывают, что деформации в них — второго порядка малости, будем называть квази-жесткими. Важно понимать, что возможное зарождение в них разрывных фронтов высокого порядка, в принципе, может привести к изменению решения в главном члене. В разделе 3.4.2 обсуждается общая структура решения второй вспомогательной задачи. В разделе 3.4.3 показано, что найденное решение удовлетворяет диссипативному неравенству. В разделе 3.4.4 получены формулы для перемещений. Наконец, в разделе 3.4.5 проведено сравнение аналитических и численных результатов для второй вспомогательной задачи и исследовано влияние разрывов высших порядков, возникающих в квази-жесткой области. Сравнение с численными результатами показывает, что предлагаемая процедура, не будучи асимптотически точной, даёт вполне

удовлетворительные результаты.

В разделе 3.5 решение исходной задачи о гармоническом внешнем возбуждении получено суперпозицией последовательности решений первой и второй вспомогательных задач. В разделе 3.5.1 получены формулы для перемещений. В разделе 3.5.2 проведено сравнение аналитических и численных результатов. Для примера на рис. 2 представлены аналитические и численные результаты для перемещения u в зависимости от координаты x . Наконец, в

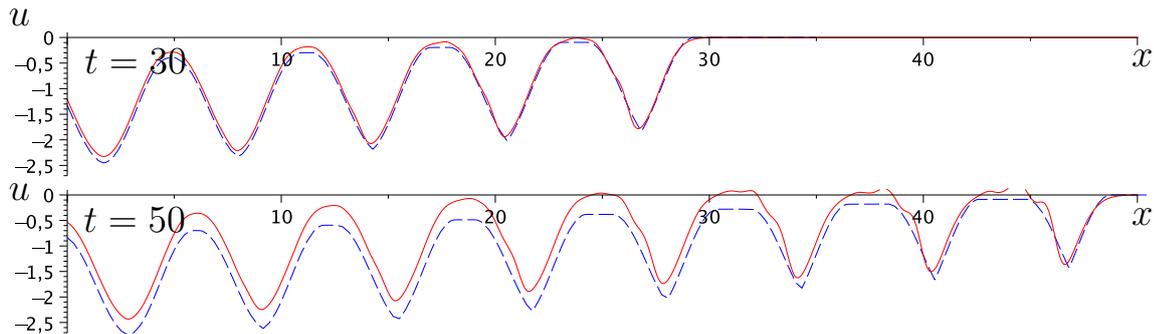


Рис. 2. Перемещения u в зависимости от x : численное (пунктир) и аналитическое (сплошная линия) решения ($\epsilon = 0.05$).

разделе 3.5.3 исследованы спектральные свойства решения, а именно, получены формулы для амплитуд и фаз первой и высших гармоник колебаний точек стержня.

Таким образом, в третьей главе получено приближенное аналитическое решение, описывающее ближнее волновое поле в полубесконечном разномодульном стержне, находящемся под действием внезапно приложенной гармонической нагрузки на его конце.

В четвертой главе исследуются нестационарные динамические процессы в упругом стержне из материала, способного претерпевать фазовые превращения. Используется модель упругого тела с невыпуклой энергией деформации. Известно, что статическая задача теории упругости для материала указанного типа может иметь решения с разрывными полями деформаций. В рамках данной модели поверхности разрывов полей деформаций моделируют границы фаз, а области непрерывности решений считаются зонами, в которых материал находится в соответствующем фазовом состоянии. Поскольку решение как статических, так и динамических задач, как правило, не единственно, требуется сформулировать дополнительное условие на фазовой

границе. В качестве дополнительного условия обычно используется упомянутое ранее термодинамическое условие. Типичным приложением для такой теории являются мартенситные превращения в металлах.

В настоящее время значительная часть аналитических результатов в области исследования фазовых превращений получена в рамках квазистатического (кинетического) приближения (одномерный случай рассмотрен, например, Р. Абейратне и Дж. Ноулсом, А.Б. Фрейдиным и Л.Л. Шариповой). В рамках данного подхода во всех уравнениях пренебрегают силами инерции. Фактически рассматривается однопараметрическое семейство статических задач, связанных посредством времениподобного параметра t , входящего в термодинамическое условие. Квазистатический подход позволяет определить возможные равновесные положения фазовых границ. Как правило, в рамках квазистатического подхода рассматриваются задачи, в которых эти равновесные положения являются изолированными вследствие некоторой “неоднородности” рассматриваемого упругого тела. Под “неоднородностью” здесь понимается энергетическая неравноправность положений фазовых границ в теле, возникающая вследствие неоднородности физических параметров или особенностей геометрии тела. В таком случае квазистатический подход позволяет определить эволюцию положений фазовых границ при медленном изменении параметров нагружения.

Динамика фазовых превращений в упругих телах рассматривалась Р. Абейратне, М. Гартиним, М.А. Гузевым, Р. Джеймсом, Н.Ф. Морозовым, Дж. Ноулсом, В.Г. Осмоловским, Т. Пенсом, Р. Риццони, П. Росакисом, В.В. Стенькиным, Л. Трускиновским, Х. Тсаем и другими авторами.

В диссертации рассмотрены модельные одномерные нестационарные динамические задачи о движении фазовых границ в неоднородных телах, где существуют изолированные равновесные положения фазовых границ. Целью исследования является верификация квазистатического подхода путём сравнения результатов, полученных в рамках данного подхода, с результатами, полученными при помощи динамического подхода.

Рассматриваются продольные движения бесконечного упругого стержня переменного сечения с площадью $S(x)$, изготовленного из материала, способного претерпевать фазовые превращения. В разделе 4.1 сформулированы основные уравнения для одномерных нестационарных динамических задач о движении фазовой границы в бесконечном упругом стержне переменного

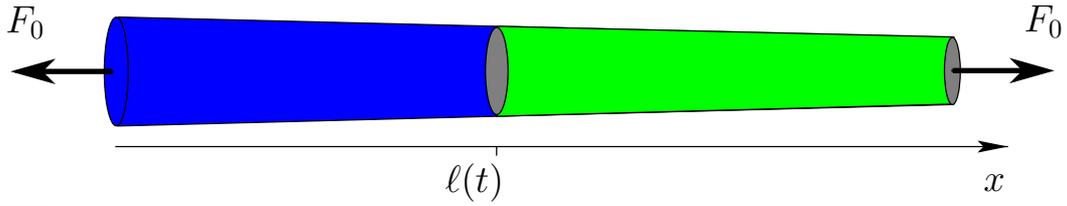


Рис. 3. Стержень с фазовой границей: схема системы.

го сечения, изготовленном из материала, способного претерпевать фазовые превращения. Зависимость напряжения σ от деформации ε является немонотонной кусочно-линейной функцией и содержит “падающий участок” (рис. 4), что влечет за собой невыпуклость энергии деформации материала.

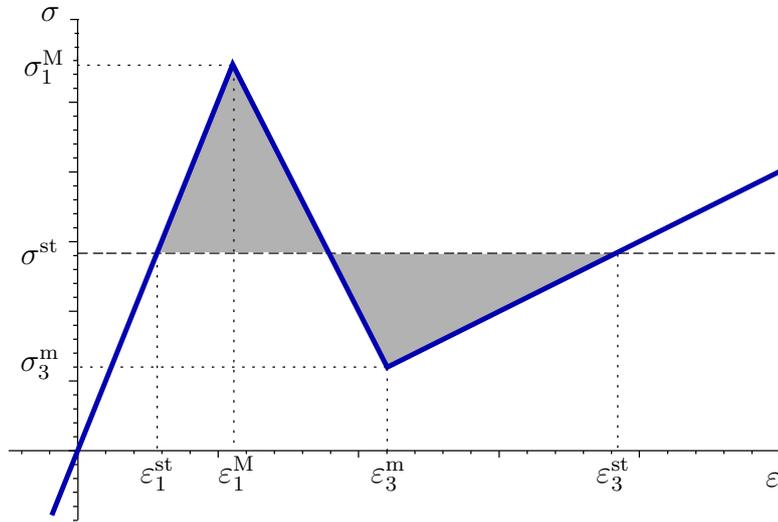


Рис. 4. Зависимость напряжения σ от деформации ε .

Предполагается, что в стержне существует единственная фазовая граница, разделяющая две устойчивые фазы (фаза “1” и фаза “3”) с деформациями, лежащими в диапазонах $\varepsilon < \varepsilon_1^M$ и $\varepsilon > \varepsilon_3^m$ соответственно. Уравнения движения и условия Гюгонио на фазовой границе имеют вид

$$\begin{aligned}
 (S\sigma)' - \rho S\ddot{u} &= -q(x, t), & (S\sigma)' &= 0, \\
 [\dot{u}] + \dot{\ell}[u'] &= 0, & [\dot{u}] &= 0, \\
 [\sigma] + \rho\dot{\ell}[\dot{u}] &= 0, & [\sigma] &= 0
 \end{aligned}$$

соответственно для динамического (столбец слева) и квазистатического (столбец справа) подходов. Здесь u — перемещения стержня, ρ — плотность материала. Термодинамическое условие на фазовой границе в рамках обоих

рассматриваемых подходов имеет вид

$$\dot{\ell} = -\gamma^{-1}\mathcal{F}.$$

Здесь $\gamma > 0$ — материальная константа, характеризующая диссипацию на фазовой границе. В рамках квазистатического подхода данное условие также используется для определения равновесного положения фазовой границы $\ell(t)$ и его медленной эволюции под действием медленно изменяющихся внешних нагрузок. Начальное положение фазовой границы задано: $\ell(0) = l_0$. Предполагается, что стержень при всех t нагружен постоянными растягивающими усилиями F_0 , приложенными на бесконечности, а при $t > 0$ — дополнительно нагружен зависящими от времени усилиями $q(x, t)$. Статическая компонента напряжения в стержне имеет вид $\sigma_0 = F_0/S(x)$. Начальные условия для u , соответствующие состоянию покоя при $t < 0$, имеют вид

$$u(x, 0) = \int_{l_0}^x \varepsilon_0(x) dx + u(l_0, 0), \quad \dot{u}(x, 0) = 0,$$

где статическая компонента ε_0 деформации ε вычислена по σ_0 в силу определяющего соотношения. Для завершения постановки задачи необходимо сформулировать граничные условия на бесконечности (условия излучения) в виде тождества $u(x, t) \equiv u(x, 0)$, которое должно быть выполнено при всех $t \geq 0$ для достаточно больших $|x|$.

В разделе 4.2 обсуждается метод решения задачи в случае динамического подхода. Рассматриваемая в рамках динамического подхода задача является типичной задачей силового типа. Для её исследования используется метод, сформулированный в разделе 1.4 диссертации. Предполагается, что площадь поперечного сечения стержня является медленно меняющейся функцией пространственной координаты.

В разделе 4.3 в рамках динамического и квазистатического подходов исследована задача о движении вследствие неравновесного начального условия ($l_0 \neq 0$) для положения фазовой границы, в которой

$$S\sigma \xrightarrow{x \rightarrow \infty} F_0, \quad q = 0.$$

В рамках динамического подхода получено нелинейное обыкновенное диф-

ференциальное уравнение в неявной форме, описывающее движение фазовой границы на расстояниях порядка $O(\epsilon^{-1})$ от равновесного положения, и исследованы его свойства. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными в квазистатическом приближении: показано, что скорость фазовой границы при динамическом рассмотрении оказывается ограниченной значениями критических скоростей $c_{\pm} = \sqrt{E_{\pm}/\rho}$ для фаз материала стержня (что неверно в рамках квазистатического приближения). Полученные решения могут быть линеаризованы в окрестности равновесного положения диаметра порядка $O(1)$. Решения соответствующих линейных уравнений имеют вид $\ell = l_0 \exp(-t/T)$, где $T \equiv T^d$ в рамках динамического подхода, $T \equiv T^{qs}$ в рамках квазистатического подхода,

$$T^d = -\frac{(\gamma + g)S(0)}{F_0[\epsilon_0(0)]S'(0)}, \quad T^{qs} = -\frac{\gamma S(0)}{F_0[\epsilon_0(0)]S'(0)}.$$

Тем самым, обнаружен скрытый параметр g (материальная константа),

$$g = S(0)\langle Ee \rangle [\epsilon_0(0)]^2, \quad e_{\pm} = \frac{c_{\mp}}{2c_{\pm}\langle c \rangle},$$

характеризующий волновой перенос энергии от фазовой границы на бесконечность и определяющий характерное время релаксации положения фазовой границы к равновесному в недиссипативной системе (в которой $\gamma = 0$).

В разделе 4.4 рассмотрена задача о движении под действием внешних динамических нагрузок, приложенных в точках $x = l_{1,3}^w$ по обе стороны от фазовой границы, в которой начальное условие выбрано равновесным и

$$\begin{aligned} q &= atH(t)(\delta(x - l_1^w) - \delta(x - l_3^w)), & q &= 0, \\ S\sigma \xrightarrow{x \rightarrow \infty} F_0, & & S\sigma \xrightarrow{x \rightarrow \infty} F_0 + at \end{aligned}$$

соответственно для динамического (столбец слева) и квазистатического (столбец справа) подходов. Получены аналитические решения, описывающие движение фазовой границы на расстояниях порядка $O(\epsilon^{-1})$ от равновесного положения.

В результате исследования продемонстрировано, что в общем случае решение задачи в квазистатической постановке не является пределом динамического решения для случая бесконечно малой скорости нагружения. Показано,

что для случая медленного нагружения полная динамическая и квазистатическая постановки приводят к одинаковым результатам только для систем с достаточно сильной диссипацией на фазовой границе ($\gamma \gg g$). При слабой диссипации результаты различны: использование квазистатического подхода приводит к неверному описанию процесса релаксации положения фазовой границы к равновесному положению. В разделе 4.5 обсуждаются причины, вызывающие это несоответствие. Отмечается, что переходный процесс релаксации положения фазовой границы к равновесному происходит, очевидно, с характеристической скоростью системы, не зависящей от скорости нагружения. Поэтому лежащее в основе квазистатического подхода утверждение о том, что медленные нагружения вызывают медленные движения, вообще говоря, верно только применительно к вынужденному движению, но неверно по отношению к переходному процессу релаксации.

В пятой главе аналитически исследована трёхмерная задача о вертикальных колебаниях одиночного штампа, движущегося с постоянной дорэлеевской скоростью по поверхности упругого полупространства (рис. 5). Рассматривается круглый в плане плоский жесткий штамп. Трение между

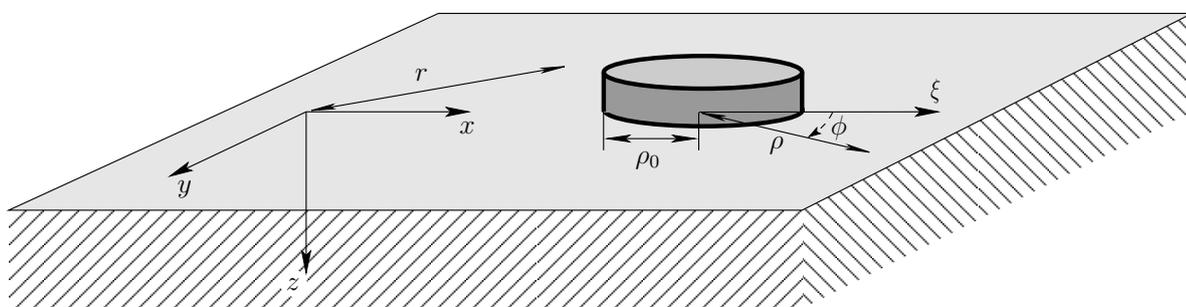


Рис. 5. Штамп на упругом полупространстве.

штампом и полупространством считается пренебрежимо малым.

Трёхмерные задачи о движении полупространства под действием нагрузок, приложенных на поверхности, рассматривались в работах А. Аврамеско, В.М. Александрова, И.И. Аргатова, В.А. Бабешко, А.В. Белокопя, Л. Брока, И.И. Воровича, Д. Гакенхеймера, Х. Георгиадиса, Дж. Гладвелла, Е.В. Глушкова, А.Г. Горшкова, К. Джонсона, В.Б. Зеленцова, Ж.Ф. Зинченко, Л. Каньяра, Л.А. Крауклиса, П.В. Крауклиса, Н.А. Лаврова, Г. Ликотрафитиса, В.Л. Лобысева, Х. Лэмба, Ж. Мандела, Г.И. Марчука, Ю. Микловица,

Л.А. Молоткова, А.В. Наседкина, К.И. Огурцова, Е.Е. Павловской, Х. Пекериса, Г.И. Петрашеня, В.Б. Поручикова, Р. Пэйтона, М. Рахмана, М. Роджерса, В.М. Сеймова, Л.И. Слепяна, В.И. Смирнова, С.Л. Соболева, Д.В. Тарлаковского, А. де Хоопа, В.А. Чурилова, Дж. Эзона, Ю.С. Яковлева и многих других авторов.

Постановка задачи дается в разделе 5.1. Уравнения динамики штампа имеют вид

$$m\ddot{w} = \int_{\rho \leq \rho_0} \tau_{33} dS + f, \quad J_0 \ddot{\psi} = - \int_{\rho \leq \rho_0} \xi \tau_{33} dS.$$

Здесь f — внешняя сила, приложенная к штампу, w и ψ — вертикальное смещение и угол поворота штампа соответственно, τ_{ij} — компоненты тензора напряжений в полупространстве, J_0 — момент инерции штампа. Во внутренних точках полупространства ($z > 0$) должно быть выполнено уравнение Ламе

$$c_2^2 \Delta \mathbf{u} + (c_1^2 - c_2^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}}.$$

Здесь c_1 и c_2 — скорости волн сжатия и искажения соответственно, \mathbf{u} — вектор перемещений. На поверхности упругого полупространства (при $z = 0$) должны быть выполнены следующие граничные условия:

$$u_3 = w - \psi \xi \quad \text{при} \quad \rho \leq \rho_0, \quad \tau_{33} = 0 \quad \text{при} \quad \rho > \rho_0, \quad \tau_{13} = \tau_{23} = 0.$$

Здесь $\xi = x - vt$. Рассматривается задача Коши: предполагается, что полупространство и штамп находятся в покое при $t < 0$, т.е.

$$\mathbf{u}|_{t < 0} = \mathbf{0}, \quad w|_{t < 0} = 0, \quad \psi|_{t < 0} = 0.$$

Исследуются “медленные” вертикальные движения штампа: предполагается, что характерное время изменения внешней нагрузки много больше времени прохождения волны сдвига под штампом. Это означает, что безразмерная величина $\epsilon = \frac{\Omega \rho}{c_2}$ (здесь Ω — частота колебаний штампа) мала для точек поверхности полупространства, находящихся под штампом. Поскольку предполагается, что штамп движется с постоянной скоростью, решение удаётся построить при помощи классического подхода, связанного с оценкой интеграла свёртки фундаментального решения с функцией нагрузки. Используемый

асимптотический подход основан на работах Н.А. Лаврова и Е.Е. Павловской, рассмотревших колебания неподвижного штампа. Для того чтобы получить решение контактной задачи, необходимо сформулировать задачу в виде интегрального уравнения для неизвестного контактного давления (давления под штампом). Это интегральное уравнение должно быть рассмотрено совместно с уравнениями движения. Для того чтобы найти выражение для ядра интегрального уравнения, следует рассмотреть сначала несколько более простых вспомогательных задач о подвижной точечной нагрузке. Исследование всех этих задач основано на использовании функции Грина для упругого полупространства (решения трехмерной динамической задачи Лэмба). Выражение для функции Грина известно. Его вид, для случая, когда коэффициент Пуассона полупространства лежит в пределах $\nu < \nu_* \simeq 0.263$, рассматриваемого далее в диссертации³, представлен в разделе 5.2. В разделе 5.3 рассмотрена задача о внезапно приложенной точечной постоянной подвижной нагрузке. В разделе 5.4 рассмотрена задача о подвижной осциллирующей точечной нагрузке. Получено аналитическое выражение для члена порядка ϵ в разложении перемещений на поверхности упругого полупространства (член нулевого порядка соответствует прогибу от неосциллирующей нагрузки). В разделе 5.5 рассматривается контактная задача. Формулируется интегральное уравнение для преобразования Фурье по времени неизвестного контактного давления под штампом. Ядро данного интегрального уравнения является решением задачи о подвижной осциллирующей точечной нагрузке и выражается в виде асимптотического разложения, полученного в разделе 5.4. Автомодельное решение задачи о движении упругого полупространства под действием движущегося неосциллирующего штампа, полученное ранее В.А. Чуриловым, рассматривается в качестве нулевого приближения для решения сформулированной задачи. В результате показано, что вертикальные колебания штампа могут быть приближенно описаны уравнением динамики системы с одной степенью свободы с вязким трением:

$$m\ddot{w} + 2 \frac{\pi\mu\rho_0^2}{c_2} \mathcal{B}(\nu, \beta) \dot{w} + 2\pi\mu\rho_0 \mathcal{C}(\nu, \beta) w = f.$$

Здесь $\beta = v/c_2$, μ — вторая константа Ламе. Получены формулы для коэф-

³Именно в таком диапазоне, как правило, лежит коэффициент Пуассона для сухих грунтов.

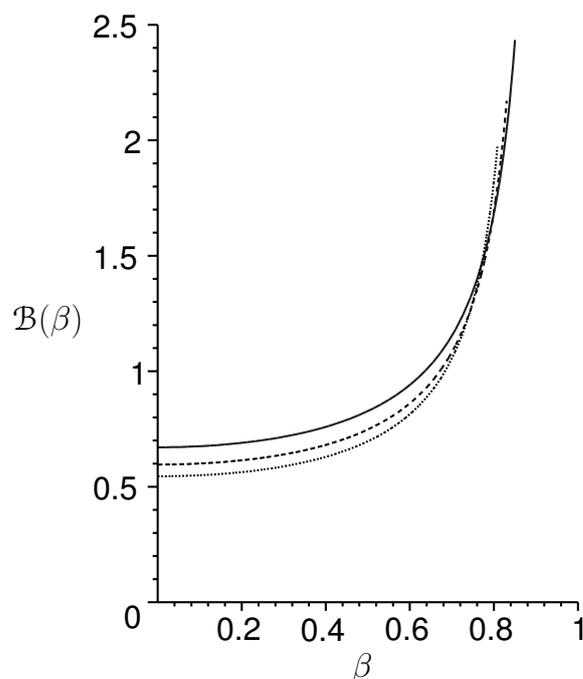


Рис. 6. График коэффициента вязкости $\mathcal{B}(\beta)$ для случаев $\nu = 0.25$ (сплошная линия), $\nu = 0.125$ (штриховая линия) и $\nu = 0$ (пунктирная линия).

фициентов этого уравнения. Наиболее важным результатом является получение формул для безразмерного коэффициента вязкости \mathcal{B} (безразмерный коэффициент жесткости \mathcal{C} фактически может быть вычислен на основе решения В.А. Чурилова). Зависимость коэффициента вязкости \mathcal{B} от параметра β представлена на рис. 6. В разделе 5.6 рассмотрены вынужденные колебания штампа под действием внешней гармонической нагрузки. Получено и исследовано выражение для комплексного коэффициента динамичности. Наконец, в разделе 5.7 проводится анализ полученных результатов и обсуждаются их возможные обобщения.

Основные результаты диссертации

- Исследованы задачи кинематического и силового типов о движении инерционного включения с переменной докритической скоростью по бесконечной струне на винклеровском основании.
 - Исследована эволюция ловушечной моды колебаний в системе с медленно изменяющимися параметрами, а именно, найдена зависимость амплитуды колебаний от переменной скорости включения.

- Показано, что эффект самовоздействия (нелинейного взаимодействия посредством конфигурационной силы материального включения с упругим полем, излученным им самим) приводит к появлению у подвижного включения “присоединённой массы”, зависящей от скорости включения. Значение присоединённой массы обращается в бесконечность при стремлении скорости к критическому значению. Присоединённая масса не зависит от массы включения и возникает, таким образом, даже при нулевой массе включения.
- Получено приближенное аналитическое решение, описывающее ближнее волновое поле в полубесконечном разномодульном стержне, находящемся под действием внезапно приложенной гармонической нагрузки на его конце. Роль подвижных границ в данном случае играют разрывные волновые фронты (ударные волны), возникающие на конце и распространяющиеся вглубь стержня.
- На основе динамического и квазистатического подходов определен закон движения фазовой границы в неоднородном упругом стержне, вызванного неравновесным начальным условием или медленным силовым нагружением стержня.
 - Обнаружен скрытый параметр, характеризующий волновой перенос энергии от фазовой границы на бесконечность и определяющий характерное время релаксации положения фазовой границы к равновесному в недиссипативной системе.
 - Показано, что в общем случае решение рассмотренной задачи о фазовом превращении в упругом стержне в квазистатической постановке не является пределом динамического решения для случая бесконечно малой скорости нагружения. Именно: при слабой диссипации на фазовой границе использование квазистатического подхода приводит к неверному описанию переходного процесса релаксации положения фазовой границы к равновесному положению. Для случая сильной диссипации на фазовой границе результаты, полученные в рамках динамического и квазистатического подходов, совпадают.
- Получены выражения для коэффициентов уравнения динамики системы

с одной степенью свободы с вязким трением, приближенно описывающего вертикальные колебания круглого в плане штампа, движущегося с дорэлеевской скоростью по свободной поверхности упругого полупространства.

- Разработан аналитический подход к решению нестационарных задач динамики упругих тел с включениями и границами, движущимися с переменной скоростью, связанный с представлением решений рассматриваемых задач в виде многомасштабных асимптотических разложений по малому параметру (являющемуся свойством рассматриваемых механических систем).

Публикации автора по материалам диссертации

- [1] Gavrilov S. Passage through the critical velocity by a moving load in an elastic waveguide. The nonlinear statement for the problem // *Z. Angew. Math. Mech.* — 2000. — Vol. 80. — P. S743–S744.
- [2] Gavrilov S. Nonlinear investigation of the possibility to exceed the critical speed by a load on a string // *Acta Mechanica.* — 2002. — Vol. 154. — P. 47–60.
- [3] Gavrilov S.N. Configurational forces in elastic systems with moving loads // *Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Специальный выпуск “Нелинейные проблемы механики сплошной среды”.* — 2003. — С. 7–14.
- [4] Gavrilov S.N. Dynamics of a free phase boundary in an elastic bar with variable cross-section area // *Proc. of XXXII Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics” 2004 / Ed. by D.A. Indeitsev ; IPME RAS.* — St. Petersburg, 2004. — P. 156–161.
- [5] Gavrilov S.N. New Analytical Approach for Investigation of Non-Stationary Dynamics of Media with Moving Inhomogeneities // *Abstracts Book of 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM04) August 15-21, 2004.* — Warsaw, Poland, 2004. — P. 245.

- [6] Gavrilov S.N. On the acoustic excitation of a heteromodular bar // Proc. of XXXIII Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics” 2005 / Ed. by D.A. Indeitsev ; IPME RAS. — St. Petersburg, 2005. — P. 205–215.
- [7] Gavrilov S.N. Wave Propagation in Rocks and Granular Materials Modelled as 1D Heteromodular Elastic Medium // Proceedings of EAGE International Conference and Exhibition “Geosciences — To Discover and Develop”, Saint Petersburg, Russia, 16–19 October 2006. — 2006.
- [8] Gavrilov S.N. Wave Propagation in a Heteromodular Elastic Medium // Proceedings of 68th EAGE Conference and Exhibition, Vienna, Austria, 12–15 June 2006. — 2006.
- [9] Gavrilov S.N. Dynamics of a free phase boundary in an infinite bar with variable cross-sectional area // Z. Angew. Math. Mech. — 2007. — Vol. 87, no. 2. — P. 117–127.
- [10] Gavrilov S.N., Herman G.C. Oscillation of a punch moving on the free surface of an elastic half space // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VIII международной конференции / Под ред. А.В. Белоконя. — Т. 2. — Ростов-на-Дону : Новая книга, 2003. — С. 51–55.
- [11] Gavrilov S.N., Herman G.C. Oscillation of a punch moving on the free surface of an elastic half space // Journal of Elasticity. — 2004. — Vol. 75, no. 3. — P. 247–265.
- [12] Gavrilov S.N., Herman G.C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // Journal of Sound and Vibration. — 2012. — Vol. 331, no. 20. — P. 4464–4480.
- [13] Gavrilov S.N., Shishkina E.V. On the extension of a bar capable of undergoing phase transitions // Proc. of XXXIV Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics” 2006 / Ed. by D.A. Indeitsev, A.M. Krivtsov ; IPME RAS. — St. Petersburg, 2006. — P. 162–180.
- [14] Gavrilov S.N., Shishkina E.V. Dynamics of phase transformations in a spherical elastic body // Proc. of XXXVII Summer School–Conference “Advanced

Problems in Mechanics” 2009 / Ed. by D.A. Indeitsev, A.M. Krivtsov ; IPME RAS. — St. Petersburg, 2009. — P. 250–263.

- [15] Gavrilov S.N., Shishkina E.V. On stretching of a bar capable of undergoing phase transitions // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2010. — Vol. 22. — P. 299–316.
- [16] Shishkina E.V., Blekhman I.I., Cartmell M.P., Gavrilov S.N. Application of the method of direct separation of motions to the parametric stabilization of an elastic wire // Nonlinear Dynamics. — 2008. — Vol. 54, no. 4. — P. 313–331.
- [17] Блехман И.И., Гаврилов С.Н., Шишкина Е.В. О применении метода прямого разделения движений к расчету систем с распределёнными параметрами // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Специальный выпуск “Нелинейные проблемы механики сплошной среды”. — 2003. — С. 113–123.
- [18] Гаврилов С.Н., Индейцев Д.А. Об эволюции ловушечной моды колебаний в дискретно-континуальной системе с медленно меняющимися параметрами // Труды XXIII Летней Школы “Актуальные проблемы механики” 2000 / Под ред. Д.А. Индейцева ; ИПМаш РАН. — Т. 2. — Санкт-Петербург, 2001. — С. 80–92.
- [19] Гаврилов С.Н. Об эффективной массе материальной точки, движущейся по струне на винклеровском основании // ПММ. — 2006. — Т. 70, № 4. — С. 641–649.
- [20] Гаврилов С.Н. Собственная динамика фазовой границы в бесконечном упругом стержне переменного сечения // ДАН. — 2007. — Т. 413, № 3. — С. 332–336.
- [21] Гаврилов С.Н., Индейцев Д.А. Об эволюции локализованной моды колебаний в системе “струна на упругом основании – подвижное инерционное включение” // ПММ. — 2002. — Т. 66, № 5. — С. 864–873.