

УДК 530.1 + 007

ББК 32.81 Ф82

А.Л.Фрадков. КИБЕРНЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА: ПРИНЦИПЫ И ПРИМЕРЫ. СПб.: Наука, 2003. – 208 с., 47 ил.
ISBN 5-02-025028-7

Рассмотрены основные положения кибернетической физики – новой научной области, направленной на исследование физических систем кибернетическими методами. Изложены предмет и методология кибернетической физики. Представлены результаты, устанавливающие фундаментальные закономерности преобразования траекторий консервативных и диссипативных систем при помощи обратных связей. Дается обзор применений обратной связи для управления синхронизацией, хаосом, колебаниями в распределенных системах. Описан подход к построению моделей динамики физических систем на основе методов теории управления (принципа скоростного градиента). Описанные понятия и результаты иллюстрируются примерами новых подходов к классическим задачам о маятнике Капицы, о выбросе из потенциальной ямы, о синхронизации осцилляторов, к задачам об управлении химической реакцией с фазовым переходом и о диссоциации двухатомных молекул.

Книга предназначена для студентов, аспирантов, преподавателей, инженеров и научных работников, интересующихся вопросами на стыке физики, теории управления и теории систем.

Р е ц е н з е н т: д.ф.-м.н., проф. И.И.Блехман

ISBN 5-02-025028-7

© А.Л. Фрадков, 2003 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1	ФИЗИКА И КИБЕРНЕТИКА	10
1.1	Немного о прошлом	10
1.2	Управление хаосом	11
1.3	Управление молекулярными и квантовыми системами .	14
1.4	Виды управления	15
1.5	Кибернетическая физика и теория открытых систем . .	17
2	ПРЕДМЕТ И МЕТОДОЛОГИЯ КИБЕРНЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	20
2.1	Модели объектов управления	20
2.2	Цели управления	24
2.3	Алгоритмы управления	31
2.4	Методы построения алгоритмов управления	32
2.4.1	Градиентный метод	33
2.4.2	Метод скоростного градиента	35
2.5	Результаты: законы кибернетической физики	38
3	УПРАВЛЕНИЕ КОНСЕРВАТИВНЫМИ СИСТЕМАМИ	41
3.1	Управление энергией гамильтоновых систем	41
3.1.1	Постановка задачи	41
3.1.2	Алгоритм управления	44
3.1.3	Условия достижения цели управления	45
3.2	Свойство раскачиваемости	50
3.3	Управление первыми интегралами	51
4	УПРАВЛЕНИЕ ДИССИПАТИВНЫМИ СИСТЕМАМИ	55
4.1	Анализ возбудимости систем с диссипацией	55
4.1.1	Пассивность и диссипативность	56
4.1.2	Индекс возбудимости	58

4.2	Резонанс с обратной связью	65
4.3	Индекс возбудимости маятниковых систем	68
5	УПРАВЛЕНИЕ СИНХРОНИЗАЦИЕЙ	76
5.1	Определения синхронизации	76
5.1.1	Кинематическое определение	78
5.1.2	Виды синхронизации	80
5.1.3	Динамическое определение	86
5.2	Синтез управления синхронизацией	92
5.3	Адаптивная синхронизация	101
5.3.1	Постановка задачи	101
5.3.2	Адаптивная синхронизация двух подсистем . . .	102
5.3.3	Условия достижения цели синхронизации . . .	105
5.3.4	Синхронизация и адаптивные наблюдатели . . .	108
5.4	Управление синхронизацией двух осцилляторов	110
6	УПРАВЛЕНИЕ ХАОСОМ	115
6.1	Что такое «детерминированный хаос»?	116
6.2	Управление без обратной связи	120
6.3	Метод линеаризации отображения Пуанкаре (ОГУ-метод)	123
6.4	Метод обратной связи с запаздыванием (метод Пирагаса)	127
6.5	Методы линейного и нелинейного управления	129
7	УПРАВЛЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ	135
7.1	Задачи и методы управления в распределенных системах	135
7.2	Управление энергией в моделях синус–Гордона и Френкеля–Конторовой	140
7.3	Управление волновым движением в цепочке маятников	144

8	ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ И ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ	152
8.1	Вариационные принципы. Принцип скоростного градиента	152
8.2	Примеры скоростно-градиентных законов динамики . .	154
8.3	Соотношения Онсагера	157
8.4	Динамика и цель	159
9	ПРИМЕРЫ	161
9.1	Управляемый маятник Капицы	161
9.2	Задача о выбросе из потенциальной ямы	167
9.3	Управление химической реакцией с фазовым переходом	168
9.3.1	Постановка задачи	171
9.3.2	Алгоритм адаптивного управления	174
9.3.3	Результаты моделирования	177
9.4	Управление диссоциацией двухатомных молекул	180
9.4.1	Лазерное управление молекулярной динамикой	180
9.4.2	Синтез алгоритмов управления диссоциацией .	184
9.4.3	Результаты моделирования при классическом описании молекул	186
9.4.4	Сравнение классического и квантово-механического подходов	187
9.5	Обратная связь в спектроскопии	188
10	ЗАКЛЮЧЕНИЕ. НЕМНОГО О БУДУЩЕМ	191
	ЛИТЕРАТУРА	193

*Простите за дерзость, что я этой теме касаюсь,
Простите за трусость, что я ее раньше не трогал.*

А. Вознесенский

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге излагаются некоторые идеи и результаты, относящиеся к области кибернетической физики — науки об исследовании физических систем кибернетическими методами. Хотя отдельные публикации в физических журналах, использующие идеи теории управления, появлялись достаточно давно, самостоятельный раздел науки на стыке физики и теории управления начал формироваться лишь в 1990-х годах в связи с бурным ростом таких направлений как управление хаосом и управление квантовыми системами, число публикаций в которых достигло нескольких тысяч.

Впервые делается попытка представить предмет и методологию кибернетической физики, а также решения некоторых ее задач с единых позиций. Основные результаты изложены для двух важнейших классов физических систем: консервативных и диссипативных, для описания моделей которых используется гамильтонов формализм, а для решения может быть применен предложенный ранее автором метод скоростного градиента. Дается обзор применений обратной связи для управления синхронизацией, управления хаосом, управления колебаниями в распределенных системах. Для перечисленных задач демонстрируются возможности применения общих результатов и устанавливаются границы преобразования свойств систем при помощи обратной связи. Представлен подход к применению принципа скоростного градиента для построения моделей физических систем.

Описанные понятия и результаты иллюстрируются примерами, содержащими новые подходы к хорошо известным задачам о маятнике Капицы, о выбросе из потенциальной ямы, о синхронизации осцилляторов, об управлении химической реакцией с фазовым переходом, о диссоциации двухатомных молекул.

Книга рассчитана на междисциплинарную аудиторию; для ее чтения достаточно знания основных понятий линейной алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений. Трудность напи-

сания подобных книг состоит в том, что ориентация на широкий круг читателей неизбежно идет во вред глубине изложения. Одни места в книге, возможно, не понравятся физикам, другие – кибернетикам. Автор, сам по образованию математик, не смог удержаться от включения в книгу строгих формулировок и доказательств нескольких основных результатов в наиболее простых вариантах. Для ряда более сложных и громоздких результатов даны ссылки на литературу. Однако область, которой посвящена книга, еще достаточно молода и строгие решения многих задач отсутствуют. Поэтому в тексте много результатов компьютерных исследований и указаний на нерешенные задачи.

С другой стороны, для удобства читателей–физиков, по ходу изложения поясняются некоторые понятия теории управления. Разумеется, это не заменяет учебника по теории управления для физиков, который, увы, еще не написан. Поэтому на протяжении всей книги при необходимости даются ссылки на существующие учебники и монографии.

По мнению автора, кибернетическая физика как самостоятельный раздел науки с единым предметом и методологией уже сложилась. Настало время привлечь к новой области внимание научной общественности, прежде всего молодежи, что дало бы новый толчок киберфизическим исследованиям. Основания к уверенности в этом дают интерес и поддержка, выраженные при выступлениях с лекциями и докладами по материалам будущей книги как перед кибернетическими, так и перед физическими аудиториями в 1998-2003 гг. в 28 университетах и научных центрах, в том числе в университетах Бохума, Вены, Дуйсбурга, Калифорнии (Сан-Диего), Киото, Кумамото, Линчепинга, Мельбурна, Москвы, Потсдама, Принстона, Санкт-Петербурга, Токио, Эйнховена, Южной Калифорнии; в институтах проблем механики РАН (Москва), проблем управления РАН (Москва), Санта Фе (США), CESAME (Мексика), INRIA (Франция), SUPELEC (Франция), RIKEN (Япония); в Центре теоретической физики CNRS (Марсель). Автор благодарен коллегам за приглашения и за поддержку.

Замысел книги родился и развивался в ходе работы автора в лаборатории управления сложными системами Института проблем машиноведения РАН. Ряд исследований выполнен при поддержке

РФФИ (проекты 99-01-00672, 02-01-00765), программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 19 «Управление механическими системами» (проект 1.4. Управление колебаниями и хаосом в физико-технических системах), а также Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ (грант НШ-2257.2003.1). В книгу вошли некоторые тексты, подготовленные для публикации в Соросовском образовательном журнале по материалам Соросовских лекций в 1999—2000 гг.

Автор пользуется приятной возможностью выразить благодарность коллегам по совместным работам, идеи и результаты которых нашли отражение в книге, в том числе М.С. Ананьевскому, Б.Р. Андриевскому, И.И. Блехману, П.Ю. Гузенко, А.А. Ефимову, А.М. Кривцову, С.А. Кукушкину, Х. Наймейеру, А.В. Осипову, А.Ю. Погромскому, В.В. Шиегину, А.С. Ширяеву, а также признательность всем, поддержавшим эту работу, и прежде всего — Б.Р. Андриевскому, многолетняя дружба и сотрудничество с которым были всегда радостными и сделали возможным появление многих публикаций, И.И. Блехману, невероятное сочетание мудрости и увлеченности которого делали общение с ним таким притягательным, и своему дорогому учителю В.А. Якубовичу, открывшему ученикам необъятное кибернетическое пространство.

Автор будет признателен за любые конструктивные замечания и приглашает читателей к дискуссии в Интернете. Адрес легко найти поиском по фамилии автора или названию книги.

*Санкт-Петербург,
декабрь 2003 г.*

Александр Фрадков

1 ФИЗИКА И КИБЕРНЕТИКА

1.1 Немного о прошлом

Энциклопедия определяет физику как науку о природе, изучающую простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства материального мира. Возраст физики как науки исчисляется тысячелетиями, а ее история уходит корнями в античность: термин «физика», означающий в переводе с греческого природу, был введен в обиход Аристотелем. Кибернетика несравненно моложе и имеет признанную дату рождения: публикацию в 1948 г. первого издания книги американского математика Норберта Винера «Кибернетика» [21]. Н. Винер определял кибернетику как науку об управлении и связи в живом организме, машине и обществе. Мы будем понимать кибернетику как теорию управления в широком смысле, поскольку вопросы связи (передачи информации) в настоящее время принято относить к смежной области — информатике, получившей стремительное развитие в конце XX в.

Как физика, так и кибернетика бурно развивались в XX веке и, безусловно, внесли революционные изменения в естествознание. Тем не менее до недавних пор кибернетические термины редко появлялись на страницах ведущих физических журналов, а ее влияние на физические исследования было практически не ощутимо. И не удивительно, поскольку науки весьма непохожи: физика (в частности, механика) является классической описательной (descriptive) наукой, а кибернетика (теория управления) представляет собой, как отмечал Р. Брокетт, «в некотором смысле парадигму предписательных (prescriptive) наук» [110]. Это значит, что задача физики — исследовать и описывать системы, тогда как задача кибернетики — преобразовывать их при помощи управляющих воздействий для формирования предписанного поведения.

Справедливости ради следует сказать, что автоматические и автоматизированные системы измерений и управления давно и широко применяются в экспериментальных физических исследованиях, современный физический эксперимент немыслим без автоматики. Однако в экспериментальных исследованиях система управления обычно играет вспомогательную роль, обеспечивая поддержание заранее

заданного режима эксперимента. При этом не возникает качественно нового взаимодействия физики и теории управления, когда при применении кибернетических методов обнаруживаются новые теоретические результаты и качественно новые физические эффекты.

Удивительно то, что ситуация коренным образом изменилась в 1990-х годах с началом бурного развития двух новых областей: «управление хаосом» и «управление квантовыми системами».

1.2 Управление хаосом

Показательна история управления хаосом. До 1990 года в научных журналах работ в этой области почти не было. Однако в 1990 г. появилась статья группы ученых из Мэрилендского университета, США, Э. Отта, Ч. Гребоджи и Дж. Йорке «Управление хаосом» [192]. Статья вызвала настоящий взрыв публикаций: по данным журнала Сайенс Сайтэйшн Индекс (Science Citation Index), к концу 1990-х годов по этой тематике публиковалось более чем 300 статей в год в рецензируемых журналах, а общее число публикаций перевалило за 3000 (рис.1.1, *a*). В статье Отта–Гребоджи–Йорке [192] был сделан вывод, что даже малое управление в виде обратной связи, приложенное к нелинейной (хаотически колеблющейся) системе, может коренным образом изменить ее динамику и свойства: – например, превратить хаотическое движение в периодическое. Работа [192] породила лавину публикаций, в которых иногда экспериментальным путем, а чаще путем компьютерного моделирования, демонстрировалось, как управление (с обратной связью или без нее) может влиять на поведение разнообразных реальных и модельных физических систем.¹ Предложенный в [192] метод стали называть «методом OGY» по начальным буквам фамилий авторов, а число ссылок на работу [192] к 2002 г. превысило 1300. Большинство публикаций по этой

¹ Интересно, что за пять лет до работы [192] появились статьи [2, 3], в которых задача подавления хаоса в нелинейной системе подачей периодического управляющего воздействия была поставлена, а возможность ее решения продемонстрирована путем компьютерного моделирования на примере экологической системы. Еще раньше было обнаружено превращение хаотического процесса в системе Лоренца в периодический под действием гармонического возбуждения [33]. Однако, хотя статьи [2, 33] и были переведены и опубликованы на английском языке, лавины публикаций они, увы, не породили.

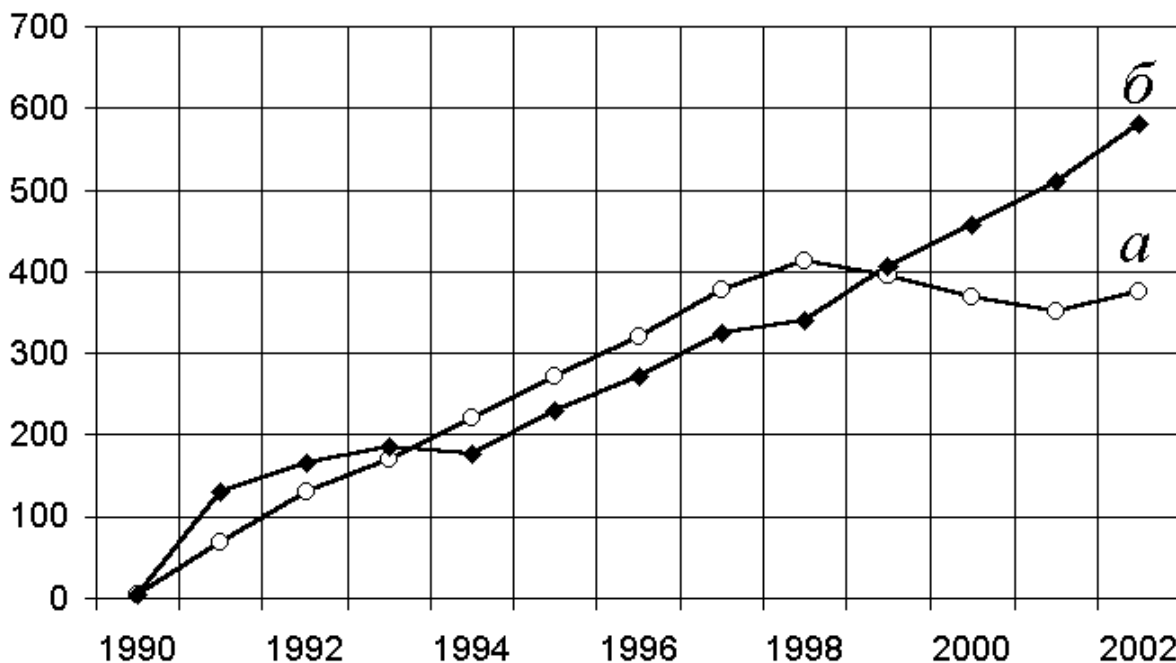


Рис. 1.1. Динамика публикаций в рецензируемых журналах по темам (а) «Управление хаосом»; (б) «Квантовое управление» (данные «Science Citation Index»)

теме печатается в физических журналах, а авторы большинства работ представляют физические факультеты и кафедры. Таким образом, новое направление с достаточным основанием можно отнести к сфере физики.

Как ни странно, хотя во многих работах подчеркивалась ключевая роль нелинейности системы в подобных явлениях, аппарат современной теории нелинейного управления, как правило, использовался слабо. Объяснить это можно тем, что возникающие задачи зачастую отличаются от традиционных задач автоматического управления: вместо классических целей управления — приведения траектории системы в заданную точку (задача регулирования) и приближения траектории к заданному движению (задача программного управления, задача слежения) — ставятся ослабленные цели: создание режимов с частично заданными свойствами, качественное изменение фазовых портретов систем, синхронизация хаотических колебаний и т. п. С другой стороны, предъявляется более жесткое требование «малости» управляющего воздействия, соответствующее физически ясному условию минимального вмешательства исследователя в естественный ход исследуемого процесса. Впоследствии стало ясно, что

подобные постановки важны и интересны не только для хаотических систем, но и для более широкого класса задач управления колебательными процессами. Это привело к выработке единого взгляда на задачи управления колебаниями и хаосом [6, 140]. Естественным следующим шагом оказалась постановка общей проблемы изучения тех свойств физической системы, которые можно создать или изменить путем воздействия на нее (слабых) обратных связей [82, 127].

Интерес к применению методов кибернетики — теории управления для поиска новых физических эффектов имеется в различных областях физики и механики: активное управление вибрациями и шумами, оптимальное управление термодинамическими системами, управление пучками частиц в ускорителях, стабилизация плазмы в задачах термоядерного синтеза. Растет число публикаций в физических журналах, посвященных вопросам управления (рис. 1.2). Особенно бурный рост претерпела за последнее десятилетие область управления молекулярными и квантовыми системами (рис. 1.1, б).

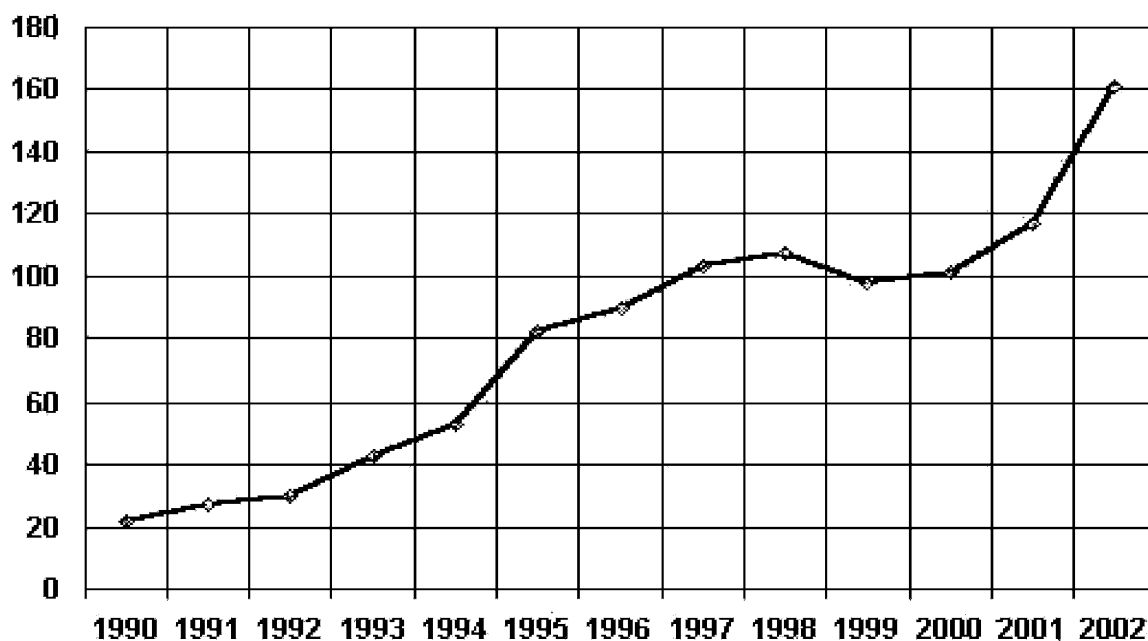


Рис. 1.2. Динамика публикаций в журналах Американского физического общества (Physical Review A,B,C,D,E; Physical Review Letters), имеющих слово «control» в названии статьи.

1.3 Управление молекулярными и квантовыми системами

Пожалуй, именно в эту область идеи управления проникли раньше всего. История уходит в средневековье, когда алхимики искали способы вмешательства в ход химических реакций в стремлении превратить свинец и ртуть в золото. Следующую веку установил знаменитый английский физик Джеймс Клерк Максвелл, придумавший в 1871 г. гипотетическое существо, способное измерять скорости отдельных молекул газа в сосуде и направлять быстрые молекулы в одну часть сосуда, а более медленные молекулы — в другую. При этом между частями сосуда создается разность температур, что на первый взгляд, нарушает второй закон термодинамики. Другой знаменитый физик лорд Кельвин назвал это существо «Демоном Максвелла» и под этим именем демон вошел в учебники по термодинамике. Кажущееся нарушение демоном законов термодинамики позволяет лучше понять и объяснить их.

В XX веке к демону Максвелла обращались М. Смолуховский, Л. Сциллард, Л. Бриллюэн и другие физики, изучая связь между энергией и информацией [174]. За более чем столетний срок существования демон не одряхлел. Напротив, его активность в последние годы возросла. Он помог человечеству осознать, что любые измерения и вычисления требуют определенных затрат энергии, что привело к идее создания квантовых компьютеров [20, 40, 120]. В недавних публикациях всерьез обсуждаются вопросы экспериментальной реализации демона Максвелла, в том числе на квантово-механическом уровне [91, 179].

В конце 1980-х — начале 1990-х годов успехи лазерной техники привели к появлению сверхбыстродействующих, так называемых *фемтосекундных* лазеров. Лазеры новых поколений позволяют генерировать импульсы когерентного излучения продолжительностью порядка единиц фемтосекунд (фс) ($1 \text{ фс} = 10^{-15} \text{ с}$). Продолжительность фемтосекундного импульса сравнима с периодом собственных колебаний молекул, что в принципе делает фемтосекундный лазер средством управления поведением отдельных атомов и молекул. Становится возможным говорить о таких применениях, как изменение естественного хода химических реакций, реализация квантовых компьютеров и др. Использование методов теории управления открывает

новые горизонты в изучении и изменении движения атомов и молекул, определяя как способы, так и возможные границы вмешательства в интимные природные процессы микромира.

1.4 Виды управления

Конечно, кибернетические по духу исследования велись в физике и до 1990-х годов. Например, в исследованиях по нелинейной динамике, когда математическая модель системы зависит от ряда параметров, возникает задача о *бифуркациях*: анализ качественных изменений в поведении системы при изменении ее параметров. При этом параметры, по существу, перестают быть постоянными величинами и превращаются в новые входные переменные. Это отражается и в терминологии: изменяемый (бифуркационный) параметр часто называют *управляющим параметром* (control parameter). Задача о бифуркациях - это низшая форма задачи об управлении, а ее решение дает представление о возможностях управления, т. е. о типах поведения, достигаемых при изменении управляющих параметров.

К задачам анализа бифуркаций примыкают задачи *оптимизации*, где требуется найти значение управляющего параметра, обеспечивающее максимальную или минимальную величину заданного показателя функционирования системы. При этом, как и в задачах о бифуркациях, управляющие параметры являются постоянными во времени: $u(t) = \text{const}$.

Другой класс физических задач связан с изучением свойств системы под действием возмущений, являющихся определенного типа функциями времени: $u = u(t)$. Это прежде всего — спектроскопические исследования, анализ вибраций в механике и акустике, некоторые разделы теории колебаний и волн, где воздействия являются гармоническими: вибрационная механика [15], изучающая поведение и свойства механических систем и материалов при быстроосциллирующим воздействиям.

Подобные задачи встречаются и в теории управления. Например, привычные для инженеров *частотные характеристики* систем управления, выражающие реакцию линейной системы на гармонические сигналы различных частот, содержат в себе информацию о важнейших динамических свойствах системы и позволяют ана-

лизовать достаточно сложные системы [6, 69]. Чтобы получить частотную характеристику экспериментально, надо последовательно подавать на систему гармонические воздействия с различными частотами и измерять амплитуды и сдвиг по фазе выходной переменной относительно входной. Другой пример — сравнительно новый раздел теории управления — *вибрационное управление* [95, 181], исследующий способы управления системами путем подачи на вход быстроосциллирующего периодического сигнала (функции времени). Наконец, традиционные законы *управления по возмущению* (разомкнутое или программное управление) также порождают примеры систем, где воздействие зависит только от времени.

Однако выбор управления в виде $u = \text{const}$ или $u = u(t)$ — не только не исчерпывает возможностей управления, но и определяет лишь наиболее простые, «низшие» формы управления. Наиболее широкими возможностями обладает управление в виде *обратной связи* $u = U(x)$ или $u = U(x, t)$, использующее (полностью или частично) результаты измерения переменных состояния системы $x = x(t)$. Не будет преувеличением сказать, что выдающиеся успехи теории управления за последние полвека связаны именно с разработкой эффективных методов анализа и синтеза систем с обратной связью.

Внутренние обратные связи обнаруживаются во многих физических системах и играют существенную роль в построении модели системы. Но лишь недавно начали изучать *внешние обратные связи* как эффективное средство исследования систем. Пожалуй, впервые в физике возможности обратной связи стали систематически исследоваться, как было уже сказано, в связи с задачами управления хаосом. В отличие от традиционных «управленческих» работ, мотивированных инженерными приложениями, в физических применениях упор делается не на поиск наиболее эффективного способа достижения цели, а на исследование принципиальной возможности ее достижения, на определение класса возможных движений управляемой физической системы.

Управление в виде обратной связи обладает значительно большими возможностями и позволяет существенно изменять свойства системы. Иногда это приводит к неприятию подобных методов исследования на том основании, что, подавая воздействие, зависящее от измерений, исследователь якобы изменяет уравнения системы и,

значит, исследует другую систему. На самом деле, в физических задачах воздействия подчиняются серьезным ограничениям, — например, должно выполняться требование малости управления. Кроме того, очевидно, что любой эксперимент, связанный с воздействием на систему, что-то в ней изменяет независимо от того, присутствует обратная связь или нет. Более того, даже простое наблюдение за системой может нарушить естественный ход ее эволюции, что хорошо известно в квантовой механике, но до сих пор не привело к запрету эксперимента как средства изучения природы! Дело физиков, использующих обратную связь как инструмент, учитывать ее влияние на исследуемую систему и не принять мнимые, «наведенные» эффекты за действительные.

1.5 Кибернетическая физика и теория открытых систем

Алгоритмы управления, в частности, обратные связи, могут применяться с целью изучения свойств и возможностей их изменения для разнообразных природных и искусственных систем. Важно, что, хотя и различные на первый взгляд, эти исследования обладают некоторой внутренней общностью. По-видимому, всю совокупность подобных исследований можно выделить в самостоятельный раздел на стыке физики и теории управления (кибернетики). Этот раздел изучает физические системы кибернетическими методами и может быть назван **кибернетической физикой** (сокращенно — *киберфизикой*).

Киберфизические исследования основаны на возможности измерять некоторые характеристики состояния системы и использовать их для обратного воздействия на систему (управления). Это значит, что изучаемая система должна иметь возможность обмениваться с внешней средой энергией (веществом) и информацией, т. е. должна быть *открытой системой*. При этом информация играет в процессе управления критическую роль. Системы, в которых происходит обмен информацией с внешней средой, называются *информационно-открытыми* [36]. Математические модели подобных систем включают входные и выходные переменные. Именно с такими системами имеет дело кибернетическая физика.

На первый взгляд кажется, что использование информации о системе в алгоритме управления делает систему снова замкнутой, а не

открытой. На самом же деле, у алгоритма управления есть параметры, которые можно менять извне, влияя на систему косвенно, через алгоритм. Таким образом, замкнутая алгоритмом управления система остается открытой, но на другом уровне. Как известно, информационные и термодинамические процессы взаимосвязаны: изменение информации о системе приводит к соответствующему, но противоположному по знаку изменению энтропии. Но нас интересует не это, а то, как можно использовать получаемую информацию и что это может дать для динамики системы. Взаимоотношения термодинамики и информации уже достаточно изучены [16, 36, 71]. Пора сделать следующий шаг и перейти от изучения процессов передачи информации в физических системах к изучению процессов использования информации. Среди наиболее интересных и важных проблем — изучение закономерностей замыкания системы при помощи алгоритмов управления (обратных связей), что, собственно, и является предметом данной книги.

Следует отметить, что в современной физике находят применение не только методы управления, связанные с активным воздействием на физическую систему. Все чаще применяются и другие кибернетические методы, помогающие эффективно обработать информацию, получаемую в ходе физического исследования и выявить новые свойства систем. Это, прежде всего, методы оценивания координат и параметров системы. В кибернетике накоплен значительный арсенал методов построения фильтров, наблюдающих устройств, алгоритмов идентификации (оценивания) параметров и структуры системы по измерениям. Получены критерии эффективной работы различных алгоритмов в условиях неточности модели системы и помех измерений, предложены методы синтеза и правила выбора параметров алгоритмов. Значительное развитие получили методы обучения и распознавания образов, решающие задачи классификации системы или ее состояния, т. е. оценивания координат или параметров с точностью до их принадлежности одному из заданных множеств. Для решения вышеперечисленных задач в кибернетике развиты и применяются как классические подходы на основе теории оптимального и адаптивного управления, так и более поздние, использующие аппарат нечетких множеств и нейронных сетей.

Хотя методам распознавания, оценивания, управления посвяще-

на обширная литература, в том числе многочисленные учебники, в физической научной литературе встречаются публикации, где переоткрываются известные результаты или устанавливаются результаты, легко следующие из известных. Нередки случаи, когда вводятся новые термины для обозначения хорошо известных понятий или придается новый смысл хорошо известному термину. Например, в отечественной физической литературе иногда вместо термина «управление» используется термин «контроль», являющийся калькой с английского слова «control». В русском языке слово «контроль» означает «проверку, наблюдение с целью обнаружения ошибок», в то время как аналогом английского «control» является термин «управление», давно принятый среди специалистов (например, control theory — теория управления, control system — система управления и т.д.).

Представляется, что на нынешнем этапе развития кибернетической физики важно активнее общаться и обмениваться информацией специалистам с различным научным багажом.

О применимости кибернетических методов в физике говорилось давно (см. напр. книгу В.Ф. Турчина «Феномен науки», написанную в 1970-е годы: «В кибернетических понятиях с равным успехом описываются явления физико-химические, биологические, социальные» [74]). О важности применения кибернетических методов в физике говорит, например, наличие в рубрикаторе ГАСНТИ специального раздела: 29.01.77 «Математические и кибернетические методы в физике». Однако анализа различных применений кибернетических методов в физике и описания этого направления как единой дисциплины, по-видимому, ранее не проводилось.

Цель настоящей публикации — привлечь внимание к быстро развивающейся области исследований физических систем кибернетическими методами, сформулировав и проиллюстрировав примерами некоторые общие принципы, лежащие в ее основе. Автор в полной мере сознает недостатки и неполноту изложения; в решении ряда приведенных задач и примеров сделаны лишь первые шаги, многие интересные направления и исследования лишь упомянуты. Систематическое изложение огромного множества задач кибернетической физики требует значительного места и времени и является делом будущего.

2 ПРЕДМЕТ И МЕТОДОЛОГИЯ КИБЕРНЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Как уже было сказано, под кибернетической физикой (коротко — киберфизикой) мы понимаем область науки, изучающую физические системы кибернетическими методами. Это значит, что методология киберфизики опирается на методы теории управления, а ее предмет включает задачи управления физическими системами. Таким образом, чтобы охарактеризовать предмет киберфизики, следует описать классы рассматриваемых моделей объектов управления, целей управления и допустимых алгоритмов управления, а чтобы охарактеризовать ее методологию, необходимо описать основные методы построения алгоритмов управления и типы получаемых результатов. Этому и посвящена данная глава.

2.1 Модели объектов управления

Формальная постановка любой задачи управления начинается с выбора модели управляемой системы (объекта управления) и модели цели управления. Даже если модель не дана или неизвестна, она должна быть определена в том или ином виде. Отличие кибернетических моделей от традиционных для физики и механики моделей динамики состоит в том, что в них явно указываются входы и выходы системы, поскольку это существенно при построении обратных связей. В литературе по управлению физическими системами рассматривается несколько классов моделей. Мы в основном ограничимся рассмотрением часто встречающихся моделей с сосредоточенными параметрами, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями в пространстве состояний:

$$\dot{x} = F(x, u), \quad (2.1)$$

где $x = x(t)$ — n -мерный вектор переменных состояния¹; $\dot{x} = d/dt$ — производная по времени от $x(t)$; $u = u(t)$ — m -мерный вектор входов

¹ Здесь и далее используются следующие обозначения: $x \in \mathbb{R}^n$ — вещественный n -мерный вектор (столбец); $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор-столбец с компонентами x_1, x_2, \dots, x_n ; $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$;

(управляющих переменных). Компоненты вектора состояния будем обозначать через x_1, \dots, x_n , а компоненты вектора управляющих воздействий — через u_1, \dots, u_m . Таким образом, уравнение состояния (2.1) — не что иное, как компактная запись системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

Интервал времени, на котором рассматривается модель, обычно заранее не определен, поэтому основным требованием к модели является существование (а часто и единственность) решения системы (2.1) с начальным условием $x(0) = \bar{x}$. Таким образом, вектор-функция $F(x, u)$ должна удовлетворять условиям, гарантирующим существование и единственность решений системы (2.1) хотя бы на небольшом интервале вблизи начального момента времени $t = 0$, например, она является непрерывно дифференцируемой.

Важно отметить, что модели типа (2.1) пригодны для описания двух физически различных классов управляемых объектов.

А. Объекты с координатным управлением. Входные переменные представляют некоторые физические величины (силы, моменты, напряженность электрических или магнитных полей и т. д.). Например, модель управляемого осциллятора (маятника) может быть приведена к форме

$$J\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = u, \quad (2.3)$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — угол отклонения маятника от вертикали (выходная величина); $u = u(t)$ — управляющий момент (входная величина); J, m, l, g, ρ — физические параметры маятника (момент инерции, масса, длина, ускорение свободного падения, коэффициент трения). Описание (2.3) можно преобразовать в форму (2.1), где вектор состояния имеет вид $x = (\varphi, \dot{\varphi})^T$.

если X — вектор или матрица, то X^T — результат транспонирования (в частности, если X — вектор-столбец, то X^T — вектор-строка); через I_n обозначается единичная $n \times n$ матрица;

□ — символ конца определения, примера или замечания;

■ — символ конца доказательства.

В. Объекты с параметрическим управлением. Входные переменные представляют изменения физических параметров системы, — например, $u(t) = p - p_0$, где p_0 — номинальное значение физического параметра p . Пусть, например, маятник управляется путем изменения его длины. Тогда модель вместо (2.3) будет иметь вид

$$J\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + mg(l_0 + u(t)) \sin \varphi = 0, \quad (2.4)$$

где l_0 — начальная длина маятника.

В ряде публикаций предпочитают говорить о вариантах А и В как о существенно различных. Однако с кибернетической точки зрения разница эта непринципиальна, если речь идет о процессах, описываемых нелинейными моделями типа (2.1). Рассматривать отдельно случаи координатного и параметрического управления имеет смысл, только, если модель управляемого объекта линейна. В этом случае разница заключается в том, что линейная система с линейной обратной связью по координатам остается линейной, а такая же система с линейной обратной связью по параметрам перестает быть линейной (она становится билинейной) и требует применения более сложных методов для анализа и синтеза.

При наличии внешних воздействий необходимо использовать более сложные, нестационарные (time-varying) модели:

$$\dot{x} = F(x, u, t). \quad (2.5)$$

С другой стороны, многие нелинейные системы могут быть описаны моделями более простыми, чем (2.1), например аффинными по управлению моделями:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \quad (2.6)$$

Кроме описания динамики модель объекта управления обязательно должна включать описание измерений (наблюдаемых величин). Пусть наблюдению доступны l переменных y_1, \dots, y_n , называемых выходами объекта или *наблюдаемыми*. Обычно выходы являются функциями переменных состояния системы, а описание измерений задается при помощи l -мерной вектор-функции

$$y = h(x). \quad (2.7)$$

В частности, наблюдению могут быть доступны все переменные состояния, тогда $y = x$. Запись $y = h(x, u)$ означает, что измерению доступны также входные переменные или некоторые функции от них.

Важным примером наблюдаемой величины является энергия. Например, для маятника (2.3) энергия задается функцией $H = 0.5J(\dot{\varphi})^2 + mgl(1 - \cos \varphi)$. Таким образом, нельзя ограничиться рассмотрением только линейных функций $h(x)$, как часто делается в теории управления. Если явное описание наблюдаемых выходов отсутствует, то будем считать, что все переменные состояния наблюдаемы, т. е. $y = x$.

Здесь уместно еще раз подчеркнуть, что в самой форме описания наблюдений (2.7) неявно содержится предположение о том, что процесс измерения не влияет на динамику объекта или этим влиянием можно пренебречь. Данное предположение, вообще говоря, не выполнено для процессов микромира, в частности для квантовомеханических процессов, поскольку макроскопический измерительный прибор может существенно влиять на микроскопическую систему, вплоть до ее разрушения. Каждую такую задачу следует рассматривать отдельно.

Отметим также, что понятие уравнения состояния в теории управления отличается от уравнения состояния в термодинамике. Здесь и далее под состоянием понимается набор переменных, относительно которых динамика исследуемой физической системы может быть описана системой дифференциальных уравнений первого порядка (уравнений в форме Коши). Такая трактовка ближе к понятию состояния в квантовой механике, где, например, волновая функция подчиняется уравнению первого порядка в бесконечномерном гильбертовом пространстве. В некоторых случаях требуется рассматривать математические модели в виде дифференциальных уравнений на многообразиях, но такие модели в книге рассматриваться не будут.

В ряде задач управления в физике и других науках удобно описывать динамику объектов дискретными моделями

$$x_{k+1} = F_k(x_k, u_k), \quad y_k = h(x_k), \quad (2.8)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, $y_k \in \mathbb{R}^l$, — векторы состояния, входов и выходов на k -м шаге процесса, $k = 0, 1, 2, \dots$. Дискретная модель задается

набором отображений F_k . Перейти к дискретной модели удобно, если даже процесс протекает непрерывно, но измерения выполняются лишь в дискретные моменты времени t_k . Тогда $x_k = x(t_k)$, $u_k = u(t_k)$, $y_k = y(t_k)$. Способы перехода приведены, например, в [6, 7].

Значительное число работ посвящено управлению системами с распределенными параметрами, описываемыми уравнениями с запаздывающим аргументом, уравнениями в частных производных и т. д. Мы будем рассматривать модели распределенных систем по мере необходимости.

2.2 Цели управления

Классификацию задач управления удобно проводить по типу целей управления.

Регулирование (стабилизация). Типичная и самая простая цель управления — регулирование, часто называемое также стабилизацией или позиционированием. Регулирование понимается как приведение вектора переменных состояния объекта $x(t)$ или вектора выходных переменных $y(t)$ к некоторому равновесному состоянию x_* (соответственно, y_*). От времени достижения цели при постановке задачи абстрагируются и задают идеализированную формальную цель управления в виде предельного соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_* \quad (2.9)$$

или

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_*. \quad (2.10)$$

При наличии ограниченных возмущений достижение целей (2.9) и (2.10), как правило, невозможно и их следует заменить на приближенные соотношения для верхнего предела ошибки

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_*| \leq \Delta \quad (2.11)$$

или

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_*| \leq \Delta, \quad (2.12)$$

где Δ — величина (параметр) допустимой погрешности. При действии на объект случайных возмущений или помех разумно рассмотреть цели вида

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \mathbf{M}|x(t) - x_*| \leq \Delta \quad (2.13)$$

или

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \mathbf{M}|y(t) - y_*| \leq \Delta, \quad (2.14)$$

где \mathbf{M} — символ взятия математического ожидания (усреднения).

Сложность достижения целей (2.9)–(2.14) возрастает, если желаемое состояние равновесия x_* неустойчиво при отсутствии управления. Такой случай типичен для задач управления хаотическими системами. Возможно также, что без управления состояние x_* не является равновесием. Однако это не вносит дополнительных сложностей — просто в таком случае управляющее воздействие не должно исчезать при приближении траектории к точке x_* .

Слежение. В задачах слежения требуется приблизить вектор переменных состояния объекта управления $x(t)$ к *желаемой функции времени* $x_*(t)$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x_*(t)] = 0, \quad (2.15)$$

или вектор выхода $y(t)$ к *желаемой функции времени* $y_*(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_*(t)] = 0. \quad (2.16)$$

Желаемый выход $y_*(t)$ может интерпретироваться как *задание* или *командный сигнал*. Желаемая функция $x_*(t)$ (или $y_*(t)$) может быть задана как явная функция времени или измеряться по ходу развития процесса. Она может быть также определена через движение другой, вспомогательной, системы, называемой *эталонной моделью* или *моделью цели*. В последнем случае, задача нахождения регулятора, обеспечивающего достижение цели (2.15) или (2.16), называется *задачей управления с эталонной моделью*. Типичная задача управления хаосом — стабилизация неустойчивого периодического решения (орбиты) — также относится к задачам слежения, где $x_*(t)$ — T -периодическое решение свободной ($u(t) = 0$) системы (2.1) с начальным условием $x_*(0) = x_{*0}$, т. е. $x_*(t + T) = x_*(t)$ для всех $t \geq 0$.

Возбуждение (раскачка, раскрутка, разгон) колебаний. В задачах возбуждения колебаний предполагается, что первоначально система находится в состоянии покоя и необходимо привести ее в колебательное движение с заданными характеристиками, причем траектория, по которой должен двигаться фазовый вектор системы, заранее не задана, не известна или не имеет значения для достижения цели. Подобные задачи хорошо известны в электротехнике, радиотехнике, акустике, лазерной технике, вибрационной технике, где требуется запустить процесс генерации периодических колебаний. К этому классу относятся также задачи диссоциации и ионизации молекулярных систем, выброса из потенциальной ямы, хаотизации и другие задачи, связанные с ростом энергии, возможно приводящим к фазовому переходу в системе. Формально подобные задачи можно свести к задачам слежения, но при этом желаемые движения являются непериодическими, нерегулярными, а целевая траектория $x_*(t)$ может быть задана лишь частично.

Задачи возбуждения колебаний удобно формализовать при помощи некоторой скалярной *целевой функции* $G(x)$, задав цель управления как достижение предельного равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x(t)) = G_* \quad (2.17)$$

или неравенства для нижнего предела целевой функции

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} G(x(t)) \geq G_*. \quad (2.18)$$

Во многих случаях в качестве целевой функции естественным образом выступает полная энергия свободной системы $H(x)$.

Синхронизация. Под синхронизацией будем понимать совпадение или сближение переменных состояния двух или нескольких систем, либо согласованное изменение некоторых количественных характеристик систем. Задача синхронизации отличается от задачи управления с эталонной моделью, поскольку в ней допускается совпадение различных переменных, взятых в различные моменты времени. Временные сдвиги могут либо быть постоянными, либо стремиться к постоянным (асимптотические фазы). Кроме того, во многих задачах синхронизации связи между системами являются двусторонними (двунаправленными). Это значит, что предельный режим в системе (синхронное решение) заранее не известен.

Явление синхронизации в системах без управления (самосинхронизация) было описано еще в XVII-м веке Х. Гюйгенсом, изучавшим работу маятниковых часов. В середине XX-го века И.И.Блехман открыл и детально исследовал явление самосинхронизации вращающихся роторов [14, 15]. Последняя хорошо изучена и находит применение в вибрационной механике, связи и энергетике [14, 15, 50, 53]. Задачи управляемой синхронизации стали систематически изучаться лишь недавно [136, 140, 187, 196], хотя отдельные работы появлялись и ранее [10, 59]. Общее понимание задач самосинхронизации и управляемой синхронизации было выработано в работах [75, 102, 103] и будет представлено далее, см. гл. 5.

Общей особенностью задач управления возбуждением и синхронизацией колебаний является то, что желаемое поведение однозначно не фиксировано, а его характеристики задаются лишь частично. Например, в задаче возбуждения колебаний могут быть заданы требования лишь на амплитуду колебаний, а частота и форма могут меняться в определенных границах. В задачах синхронизации часто основным требованием является совпадение или согласованность колебаний всех подсистем, в то время как характеристики движения каждой подсистемы могут варьироваться в широких пределах.

Удобным математическим выражением цели управления в подобных задачах является задание желаемых значений одного или нескольких числовых показателей. В задаче возбуждения колебаний в качестве такого показателя может выступать, например, энергия системы. Формальным выражением синхронного движения двух подсистем с векторами состояния $x_1 \in \mathbb{R}^n$ и $x_2 \in \mathbb{R}^n$ может быть полное или частичное совпадение векторов состояния, например равенство

$$x_1(t) = x_2(t), t \geq 0. \quad (2.19)$$

Равенство (2.19) выделяет в объединенном пространстве состояний взаимодействующих подсистем некоторое подпространство (диагональ). Таким образом, можно сделать вывод, что в задачах управления в физических системах целевыми множествами часто являются не точки и не одномерные кривые, а многообразия более высокой размерности.

Если требуемое соотношение устанавливается только асимптотически, при $t \rightarrow \infty$, то можно говорить об асимптотической синхронизации.

зации. Если же синхронизация в системе без управления (при $u = 0$) отсутствует, или же синхронный режим является либо неустойчивым, либо обладающим слишком узкой областью притяжения, то можно поставить задачу управления синхронизацией как нахождение управляющего воздействия, обеспечивающего синхронный режим. При этом синхронизация будет выступать в качестве цели управления. Например, цель, соответствующую обеспечению асимптотической синхронизации векторов состояний (фазовых координат) двух систем можно записать в виде:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_1(t) - x_2(t)] = 0. \quad (2.20)$$

Соотношение (2.20) выражает сходимость решений $x(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}$ в объединенном пространстве состояний двух систем к диагональному множеству. Часто оказывается удобным переписать целевое условие (2.15), (2.16), (2.17), (2.19) или (2.20) в терминах подходящей целевой функции $Q(x, t)$ как предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0. \quad (2.21)$$

Например, чтобы привести цель (2.20) к форме (2.21), можно использовать квадратичную целевую функцию $Q(x) = |x_1 - x_2|^2$. Вместо евклидовой нормы для задания той же цели можно выбрать другую норму, например квадратичную целевую функцию $Q(x, t) = [x - x_*(t)]^T \Gamma [x - x_*(t)]$, где Γ — симметричная положительно определенная матрица. Свобода выбора целевой функции может оказаться полезной при последующем выборе управления.

Модификация предельных множеств (аттракторов) систем.

Этот класс целей включает такие частные виды целей, как:

- изменение типа равновесия (например, преобразование неустойчивого положения равновесия в устойчивое или наоборот);
- изменение вида предельного множества (например, преобразование предельного цикла в хаотический аттрактор или наоборот; изменение фрактальной размерности предельного множества, и т. д.);
- изменение положения и типа точки бифуркации в пространстве параметров системы;

— создание (генерация) колебаний с заданными свойствами (например, возбуждение колебаний с заданной частотой, амплитудой, энергией и т. д.).

Задачи подобного типа стали рассматриваться в конце 1980-х годов в работах по управлению бифуркациями [86, 231], а также в работах по управлению хаотическими режимами, о которых мы уже говорили. Э. Отт, Ч. Гребоджи и Дж. Йорке в своей основополагающей работе [192] и их последователи выявили новый класс целей управления, вообще не предполагающий задания количественных характеристик желаемого движения. Вместо этого задается желаемый качественный тип предельного множества (аттрактора). Например, требуется преобразовать хаотические, нерегулярные колебания в периодические или квазипериодические. С другой стороны, накладывается уже упоминавшееся дополнительное требование малости управления. Развитие методов решения подобных задач стимулировалось новыми применениями в лазерных и химических технологиях, в технике телекоммуникаций, в биологии и медицине [116, 140].

Например, работоспособность лазера, перешедшего в хаотический (многомодовый) режим, можно восстановить введением слабой обратной связи по оптическому каналу. В результате можно повысить мощность излучения при сохранении его когерентности. Напротив, в процессах химической технологии свойство хаотичности процесса перемешивания в реакторе является полезным, так как способствует ускорению реакции и повышению качества продукта. Следовательно, разумной целью управления является в этом случае повышение степени хаотичности. Наконец, в медицине для лечения некоторых видов сердечной аритмии было предложено использовать электростимуляторы с обратной связью, изменяющие степень нерегулярности сердечного ритма [109, 143] путем подачи стимулирующих импульсов в соответствующие моменты времени. Поскольку аритмия может выражаться как в повышении, так и в понижении степени хаотичности сердечного ритма по сравнению с индивидуальной нормой пациента, целью управления в этом случае является поддержание заданной степени нерегулярности. Целевые функции, выражающие количественно степень хаотичности, нерегулярности, можно формировать через известные характеристики хаотичности: показатели Ляпунова, фрактальные размерности, энтропии и т. п.

Кроме основной цели управления могут быть заданы дополнительные цели или ограничения; например, — требование обеспечить достижение цели при малой мощности управления или малых затратах на управление. Требование «малости управления» важно для физических задач, поскольку оно означает, что внешние воздействия не разрушают присущих физической системе внутренних свойств, не осуществляют «насилия» над системой. Это особенно важно в экспериментальных исследованиях, поскольку его нарушение может привести к наблюдению артефактов — эффектов, отсутствующих при отсутствии направленного воздействия на систему и не наблюдающихся в естественных условиях.

Математическое выражение требования «малости управления» заключается в задании ограничения $\|u(\cdot)\| \leq \Delta$, где $\|u(\cdot)\|$ — некоторая норма управляющей функции $u(\cdot)$, а $\Delta \geq 0$ — заданная величина (порог).

Достижение или недостижение цели может зависеть от того, как были заданы начальные условия на систему. Если цель достигается при любых начальных условиях, то говорят о глобальной достижимости цели. В противном случае должно быть задано или определено множество начальных условий Ω такое, что цель достигается для любого решения $x(t)$ системы (2.1) с управлением при начальных условиях из множества Ω , т. е. при $x(0) = x_0 \in \Omega$.

Интересно отметить, что такие цели, как регулирование и слежение традиционны для теории управления и способы их достижения хорошо изучены. Однако остальные классы целей имеют особенности. Нетрадиционность их заключается в том, что цель определяет поведение систем не полностью, а лишь частично, задавая достаточно широкий класс «желаемых» или «приемлемых» траекторий. Такие задачи принадлежат к области так называемого «частичного» управления, которые хорошо исследованы лишь в специальном случае целей, соответствующих устойчивости замкнутых систем по части переменных [22]. Систематическое же изучение более общих задач началось сравнительно недавно [61].

2.3 Алгоритмы управления

В физических работах часто говорят об управлении системой, если в системе (или ее модели) выделен некоторый параметр, называемый входным, бифуркационным или управляющим параметром, изменение которого приводит к изменению некоторой характеристики поведения системы, называемой выходным параметром. При этом говорят об управляемости системы, если область изменения выходного параметра при допустимых изменениях входного параметра охватывает значения, соответствующие желательным режимам функционирования системы.

Строго говоря, управление в описанном смысле еще является таковым. Это — лишь возможность постановки задачи управления, точнее — возможность достижения заданного значения выхода при постоянном значении входа. В действительности подача на объект рассчитанного по величине, но постоянного во времени воздействия может и не привести к достижению желаемой цели. Рассмотрим, например, снова задачу о стабилизации неустойчивого равновесия $\varphi = \pi$ маятника (2.3), но управляющее воздействие будем считать постоянным. Из условия равновесия точки $\varphi = \pi$ следует, что $u(t) = 0$. Однако из-за неустойчивости равновесия $\varphi = \pi$ сколь угодно малые отклонения начальных условий или сколь угодно малые возмущения приводят к нарушению цели управления.

Значительно большими возможностями обладает управление, являющееся функцией времени. Если управляющее воздействие (величина или параметр) зависит только от времени: $u = u(t)$, то такое воздействие называется *программным* или *задающим*, а способ управления называется управлением *по возмущению* или *по разомкнутому контуру* (program control, open loop control, feedforward control). На самом деле, программное управление может зависеть еще от параметров, а также от начальных условий объекта управления:

$$u(t) = U(t, x_0). \quad (2.22)$$

Как уже говорилось, в задачах вибрационной механики подача управления в виде высокочастотной функции времени на нелинейную систему может качественно изменить ее динамику, например превратить неустойчивое положение равновесия в устойчивое и на-

оборот.

Еще более широкими возможностями обладает управляющее воздействие, использующее при вычислении $u(t)$ результаты измерений состояния объекта или его выходов (наблюдаемых величин). Такое управление записывается в форме обратной связи по состоянию (*state feedback*):

$$u(t) = U(x(t)) \quad (2.23)$$

или по выходу (*output feedback*):

$$u(t) = U(y(t)). \quad (2.24)$$

В физических задачах встречаются все три типа управления: постоянное, программное и обратная связь. Поскольку реализация управления в виде обратной связи требует возможности измерения необходимых для построения управления величин, которая часто отсутствует, исследование свойств управляемой системы обычно начинают с изучения возможностей низшей формы — постоянного управления, затем переходят к исследованию возможностей управления разомкнутого типа (программного), и лишь после этого ставятся и исследуются задачи управления с обратной связью.

Типичная формулировка задачи управления с учетом особенностей физического исследования имеет следующий вид:

— *найти все возможные виды поведения системы, которые могут быть обеспечены при помощи управляющих функций с нормой, не превышающей заданной (достаточно малой) величины u , возможно, при выполнении заданных ограничений;*

При ее решении может быть полезным решение вспомогательной задачи, более характерной для теории управления:

— *найти управляющую функцию (или закон обратной связи) минимальной нормы, обеспечивающую достижение заданного поведения системы (заданной цели управления).*

2.4 Методы построения алгоритмов управления

Методология кибернетической физики основана на достижениях теории управления. Применяются методы линейного, нелинейного и

адаптивного управления, идентификации (реконструкции) параметров, оценивания состояний и параметров и оптимизации систем. Обычно некоторые параметры физической системы неизвестны, а некоторые переменные недоступны для измерения. По терминологии теории управления это означает, что синтез управления должен выполняться в условиях значительной *неопределенности*. Поэтому особая роль принадлежит методам робастного и адаптивного управления.

Все перечисленные разделы достаточно хорошо разработаны и составляют основу курсов теории автоматического управления по специальностям, связанным с управлением и автоматизацией. Для ознакомления с ними можно порекомендовать книги [6, 69]. Ниже мы кратко опишем два достаточно общих подхода к построению алгоритмов управления в нелинейных и адаптивных системах, систематически применяемые в последующих главах книги: градиентный метод и метод скоростного градиента [61, 79, 80].

2.4.1 Градиентный метод

Как уже было сказано, математическими моделями многих динамических систем в физике, биологии, экономике являются системы разностных уравнений. В случае, если в такой системе может присутствовать управляющее воздействие, ее модель можно записать в виде $x_{k+1} = F(x_k, u_k)$ (см. (2.8)), где $k = 0, 1, 2, \dots$ — номер стадии функционирования дискретной системы или номер очередного момента измерения и подачи управления t_k ; $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор переменных состояния (фазовых переменных), $u_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор входов (управлений), соответствующих моменту t_k . Градиентный метод предназначен для построения управления моделью (2.8) в случае, когда цель управления задана при помощи некоторой гладкой неотрицательной целевой функции $Q = Q(x)$ в виде

$$Q(x_{k+1}) \leq \Delta, \quad \text{при } k > k_*, \quad (2.25)$$

где $\Delta > 0$ — заданное значение порога точности задачи.

Выразим очередное состояние объекта из (2.8) и подставим в (2.25). Тогда получим приведенную целевую функцию (точнее, се-

мейство функций $Q_k(u)$, зависящих от номера шага), непосредственно зависящую от управления:

$$Q_k(u) = Q(F_k(x_k, u)). \quad (2.26)$$

Градиентный метод основан на изменении вектора u_k в направлении, противоположном направлению градиента (вектора из частных производных) от функции Q_k по управляющим переменным:

$$u_{k+1} = u_k - \gamma_k \nabla_u Q_k(u_k), \quad (2.27)$$

где $\nabla_u = \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_m} \right\}^T$ — вектор градиента, $\gamma_k \geq 0$ — коэффициент шага по управлению. Идея метода хорошо известна в теории оптимизации: при малом γ_k поправка $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$ приводит к уменьшению значения функции $Q_k(u)$. В более изощренном выборе нет необходимости, поскольку на следующем шаге управления целевая функция изменится в силу динамики системы. Однако простая форма алгоритма не означает простоты условий его применимости, Условия, гарантирующие достижение цели управления (2.25) в системе (2.8) с алгоритмом (2.27) можно найти в [78, 80]. В их число входят выпуклость функции $Q_k(u)$ по u , существование общего решения $u = u_*$ системы целевых неравенств $Q_k(u) < \Delta$ и выбор коэффициента шага γ_k с зоной нечувствительности: при выполнении текущего целевого неравенства $Q_k(u_k) \leq \Delta$ выбирается $\gamma_k = 0$. Подобные условия систематически изучались в рамках метода целевых неравенств, предложенного В.А. Якубовичем в 1966 г., см. [78, 80]. Алгоритмы, подобные (2.27), применяются при управлении дискретными хаотическими системами, а также при управлении хаосом в непрерывных системах на основе линеаризации отображения Пуанкаре.

Отметим, что правая часть алгоритма (2.27) может оказаться зависящей от всего вектора состояния x_k , недоступного измерению. Стандартные рецепты для этого случая состоят либо в восстановлении недоступных для измерения координат при помощи специального динамического звена — наблюдателя (фильтра), либо в переходе от модели динамики системы в виде уравнения состояния (2.8) к модели в форме «вход-выход»:

$$y_{k+1} = \Phi(y_k, \dots, y_{k-n}, u_k, \dots, u_{k-n+1}). \quad (2.28)$$

2.4.2 Метод скоростного градиента

Метод предназначен для решения задач управления непрерывными по времени системами, в которых цель управления задана при помощи целевой функции. Опишем построение алгоритмов скоростного градиента для непрерывной нестационарной системы (2.5) при цели управления, заданной соотношением (2.21), где $Q(x, t)$ — гладкая целевая функция.

Для построения алгоритма вычисляется скалярная функция $\dot{Q} = \omega(x, u, t)$ — скорость изменения величины $Q_t = Q(x(t), t)$ в силу уравнения объекта (2.5):

$$\omega(x, u, t) = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + [\nabla_x Q(x, t)]^T F(x, u, t).$$

Затем находится градиент функции $\omega(x, u, t)$ по входным переменным

$$\nabla_u \omega(x, u, t) = \left[\frac{\partial \omega}{\partial u} \right]^T = \left[\frac{\partial F}{\partial u} \right]^T \nabla_x Q(x, t).$$

Наконец, задается алгоритм изменения $u(t)$ дифференциальным уравнением

$$\frac{du}{dt} = -\Gamma \nabla_u \omega(x, u, t), \quad (2.29)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ — симметрическая положительно определенная матрица, например $\Gamma = \text{diag} \{ \gamma_1, \dots, \gamma_m \}$, $\gamma_i > 0$. Алгоритм (2.29) естественно назвать *алгоритмом скоростного градиента* (АСГ), поскольку в нем изменение $u(t)$ происходит пропорционально градиенту скорости изменения Q_t .

Происхождение алгоритма (2.29) можно объяснить следующим образом. Для достижения ЦУ (2.21) желательно изменять $u(t)$ в направлении уменьшения $Q(x(t), t)$. Однако $Q(x(t), t)$ не зависит от $u(t)$, найти такое направление затруднительно (в частности, это связано с нахождением функций чувствительности). Вместо этого можно пытаться уменьшить \dot{Q} , стремясь к выполнению неравенства $\dot{Q} < 0$, означающего, в свою очередь уменьшение $Q(x(t), t)$. Функция $\dot{Q} = \omega(x, u, t)$ уже явно зависит от u , что и позволяет написать алгоритм (2.29). Можно также рассматривать АСГ как непрерывный

аналог или «идеализированный» вариант дискретного градиентного алгоритма, поскольку при малом шаге дискретизации градиент целевой функции, совпадающий с градиентом ее приращения, приближается по направлению к градиенту скорости изменения целевой функции в силу объекта.

В качестве примера выпишем АСГ для задачи регулирования линейной по входам системы

$$\dot{x} = A(x, t) + B(x, t)u, \quad (2.30)$$

где $A(x, t)$ — n -вектор, $B(x, t)$ — $n \times m$ -матрица. Уравнение (2.30) можно переписать также в виде

$$\dot{x} = A(x, t) + \sum_{i=1}^m B_i(x, t)u_i, \quad (2.31)$$

где u_i — компоненты вектора $u \in \mathbb{R}^m$; $B_i(x, t) \in \mathbb{R}^n$ — столбцы матрицы $B(x, t)$.

Пусть целевая функция имеет вид:

$$Q(x, t) = \frac{1}{2}[y - y_*(t)]^T P[y - y_*(t)], \quad (2.32)$$

где $y = G(x, t) \in \mathbb{R}^l$; $y_*(t) \in \mathbb{R}^l$ — задающее воздействие (желаемая траектория выхода); $G(x, t)$ — гладкая вектор-функция, P — симметричная положительно-определенная $l \times l$ -матрица. Скорость изменения $Q(x(t), t)$ будет равна

$$\omega(x, u, t) = [y - y_*(t)]^T P[CA(x, t) + CB(x, t)u - \dot{y}_*(t)], \quad (2.33)$$

где $C = C(x, t) = \partial G(x, t)/\partial x$, а скоростной градиент и алгоритм скоростного градиента примут вид, соответственно

$$\nabla_u \omega(x, u, t) = B(x, t)^T C^T P[y - y_*(t)], \quad (2.34)$$

$$\frac{du}{dt} = -\Gamma B(x, t)^T C^T P[y - y_*(t)]. \quad (2.35)$$

В качестве матрицы усиления Γ часто берется диагональная ($\Gamma = \text{diag} \{ \gamma_i \}$) или скалярная ($\Gamma = \gamma I$) матрица (γ_i, γ — положительные числа). Алгоритм (2.35) при $B(x, t) = \text{const}$ и $C(x, t) = \text{const}$

представляет собой хорошо известный интегральный закон регулирования.

Аналогичным образом строится и обобщение другого классического закона регулирования — пропорционального. Это так называемый *алгоритм скоростного градиента в конечной форме*:

$$u(t) = u_0 - \Gamma \nabla_u \omega(x(t), u(t), t), \quad (2.36)$$

где u_0 — некоторое начальное (опорное) значение управления (обычно берется $u_0 = 0$).

Используются алгоритмы и еще более общей структуры:

$$u(t) = u_0 - \gamma \psi(x(t), u(t), t), \quad (2.37)$$

где $\gamma > 0$ — скалярный множитель шага (коэффициент усиления), а вектор-функция $\psi(x, u, t)$ удовлетворяет *условию псевдоградиентности*

$$\psi(x, u, t)^T \nabla_u \omega(x, u, t) \geq 0. \quad (2.38)$$

Алгоритмы вида (2.37) называют *алгоритмами скоростного псевдоградиента*. Их частным случаем является так называемый *знаковый* или *релейный* алгоритм

$$u(t) = u_0 - \gamma \operatorname{sign} \nabla_u \omega(x(t), u(t), t), \quad (2.39)$$

где знак (sign) для вектора понимается покомпонентно: для вектора $x = \operatorname{col}(x_1, \dots, x_m)$ имеем $\operatorname{sign} x = \operatorname{col}(\operatorname{sign} x_1, \dots, \operatorname{sign} x_m)$.

Для правильного и обоснованного выбора параметров алгоритмов скоростного градиента требуется проверка условий их применимости. Такие условия для различных случаев можно найти в [61, 78, 80]. Основные из них: выпуклость функции $\omega(x, u, t)$ по u и существование «идеального управления» — вектора u_* такого, что $\omega(x, u_*, t) \leq 0$ для всех x (условие достижимости). Далее в книге метод скоростного градиента будет использоваться для управления инвариантами гамильтоновых систем. Соответствующие условия применимости будут приведены ниже, в гл. 3.

Метод скоростного градиента и градиентный метод тесно связаны с понятием функции Ляпунова $V(x)$ — функции состояния системы, убывающей вдоль ее траекторий. Функция Ляпунова является

абстрактным аналогом таких физических характеристик как энергия и энтропия. Важно, что функция Ляпунова может использоваться не только для анализа, но и для синтеза систем, т.е. для решения обратных задач. В частности, конечная форма СГ-алгоритмов получается, если в качестве функции Ляпунова взять саму целевую функцию: $V(x) = Q(x)$. Дифференциальная форма СГ-алгоритмов соответствует выбору $V(x, u) = Q(x) + 0.5(u - u_*)^T \Gamma^{-1}(u - u_*)$, где u_* – желаемое («идеальное») значение управляющих переменных. При обосновании градиентного метода в качестве функции Ляпунова используется квадрат расстояния до идеального управления: $V(u) = |u - u_*|^2$.

2.5 Результаты: законы кибернетической физики

Значительная часть результатов в традиционных разделах физики представлена или может быть представлена в виде *законов сохранения*, утверждающих, что некоторые величины не изменяются в процессе эволюции системы. Такая форма представления не вполне соответствует задачам кибернетической физики, результаты в которых должны устанавливать, до какой степени эволюция системы может быть изменена при помощи управления. Поэтому результаты в киберфизике формулируются не как законы сохранения, а как **законы преобразования**, определяющие класс возможных видов поведения, достижимых при помощи управлений из заданного класса, т. е. определяющие пределы управления. Приведем несколько примеров.

Первый пример относится к управлению инвариантом (константой движения) консервативной системы, а закон преобразования отвечает на вопрос: что можно сделать с консервативной физической системой введением обратной связи? Результаты работ [220, 221] (см. далее п. 3.1) можно интерпретировать так:

Значение любого управляемого инварианта свободной системы можно изменить на произвольную величину при помощи сколь угодно малой обратной связи.

Следующий закон преобразования относится к диссипативным системам (см. далее п. 3.2). Он показывает, что эффективность малой обратной связи тем выше, чем ближе система к консервативной

и дает количественную оценку явления резонанса с обратной связью в нелинейных осцилляторах.

Для управляемой лагранжевой или гамильтоновой системы с малой диссипацией степени ρ уровень энергии, достижимой при помощи управления уровня γ имеет порядок $(\gamma/\rho)^2$.

Ряд законов преобразования установлен в работах по управлению хаосом [27, 140, 166, 192, 199, 219]. В частности, принцип, предложенный в основополагающей работе [192] (закон *Отта–Гребоджи–Йорке*), можно кратко сформулировать следующим образом:

Каждая управляемая хаотическая траектория может быть преобразована в периодическую при помощи сколь угодно малого управления.

Отметим, что требование хаотичности траектории можно существенно ослабить, заменив рекуррентностью, а иногда еще более слабым требованием типа консервативности (выборочная консервативность), если рассматривать систему только в моменты прохождения траектории через секущую поверхность.

Перечисленные и другие результаты подобного типа дают возможность изучать различные свойства физических систем при воздействии обратных связей. Примеры можно найти в последующих главах книги и в упомянутых там ссылках на литературу. Присутствующий в приведенных выше формулировках термин «управляемая» означает принципиальную разрешимость задачи. Достаточные условия для управляемости составляют предмет математических исследований законов преобразования. Ряд формулировок можно найти в теоремах последующих глав книги.

Подводя итог, еще раз повторим, что предметом кибернетической физики является исследование свойств физических систем при наличии обратных связей с окружающей средой. В первую очередь представляет интерес случай *слабых* обратных связей, не вносящих существенных нарушений в естественное функционирование системы.

Методология кибернетической физики основана на методах построения математических моделей управляемых систем, методах оценивания переменных и параметров систем и методах синтеза обратных связей, развитых в кибернетике. Отличие моделей управляемых систем (кибернетических моделей) от традиционных для физики и механики моделей динамики состоит в том, что в них явно указываются входы и выходы системы, поскольку это существенно при построении обратных связей. В отличие от законов сохранения традиционных областей результаты кибернетической физики формулируются как *законы преобразования*, устанавливающие возможности и границы изменения свойств системы при помощи управления.

Таким образом, в фундаменте методологии лежит *математическое моделирование*: построение, исследование и использование математических моделей [7]. При исследовании моделей широко применяется *вычислительный эксперимент*: то, что не удастся доказать математическими средствами, часто оказывается возможным проверить путем компьютерного моделирования. Особенностью очерченного выше направления является еще и то, что в нем осуществляется синтез описательной и предписательной наук. Подобное расширение сферы и методологии физических исследований способствует достижению их основной цели: лучшему пониманию природы. Развитие нового направления является плодотворным и для кибернетики, обогащающейся новыми задачами и приложениями.

3 УПРАВЛЕНИЕ КОНСЕРВАТИВНЫМИ СИСТЕМАМИ

В настоящей главе рассматриваются задачи управления, в которых в качестве целевых функций выступают функции от основных характеристик физических систем, таких как полная энергия и другие инварианты свободного движения. Для описания динамики управляемых систем используется гамильтонов и лагранжев формализм. Устанавливаются условия достижимости и предлагаются алгоритмы достижения заданных значений инвариантов путем управления с обратной связью на основе скоростного градиента. Показывается, что достижение целей управления возможно при сколь угодно малой интенсивности (мощности) управления.

3.1 Управление энергией гамильтоновых систем

3.1.1 Постановка задачи

Одной из важнейших физических величин является энергия. Энергия представляет собой не только основной инвариант физической системы и ключ к ее описанию на основе гамильтонова формализма, но и меру взаимодействия различных систем. По своему физическому смыслу внутренняя энергия системы является мерой ее возможности совершения работы. Задача изменения энергии за счет внешних воздействий (управлений) может иметь как теоретическое, так и практическое значение. Например, для энергосберегающих технологий важной задачей является преобразование энергии системы без неоправданных потерь энергии внешних воздействий.

Исключительное значение энергии как функции состояния физической системы состоит в том, что функционал полной энергии — гамильтониан — может являться основой для построения математического описания динамики системы. Уравнения динамики в гамильтоновой форме используются для описания самых разнообразных физических систем и явлений: от движения космических тел до движения молекулярных ансамблей. Это еще более усиливает интерес к задачам управления энергией систем. Поэтому изучение функ-

даментальных законов преобразования свойств систем при помощи управления естественно начать с законов преобразования энергии.

В этой главе будем предполагать, что система консервативна, т.е. что потерями и диссипацией можно пренебречь. Тогда в свободном движении (т.е. при отсутствии внешних сил) энергия является инвариантом системы. Поэтому оправданной является постановка задачи о переводе системы с одного уровня энергии на другой при помощи малого (в идеале — сколь угодно малого) по величине управления.

Итак, рассмотрим задачу управления, в которой целью управления является достижение и поддержание заданного уровня энергии системы. Пусть математическая модель системы задана в *гамильтоновой форме*:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, u)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, u)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

где n — число степеней свободы; $q = \text{col}(q_1, \dots, q_n)$, $p = \text{col}(p_1, \dots, p_n)$ — векторы обобщенных координат и обобщенных импульсов, образующие вектор состояния системы $x = \text{col}(q, p)$; $H = H(q, p, u)$ — гамильтониан управляемой системы; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — вход (вектор внешних обобщенных сил). Предполагается, что гамильтониан $H(q, p, u) = H(x, u)$ — непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Модель (3.1) может быть переписана в следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{q} = \nabla_p H(q, p, u), \\ \dot{p} = -\nabla_q H(q, p, u). \end{cases} \quad (3.2)$$

Рассмотрим задачу приближения к заданному уровню H_* энергии свободной (неуправляемой) системы, т.е. зададим цель управления в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_0(q(t), p(t)) = H_*, \quad (3.3)$$

где $H_0(q, p) = H(q, p, 0)$ — гамильтониан свободной системы, описываемой уравнениями

$$\begin{cases} \dot{q} = \nabla_p H_0(q, p), \\ \dot{p} = -\nabla_q H_0(q, p). \end{cases} \quad (3.4)$$

Введем целевую функцию

$$Q(x) = \frac{1}{2} (H_0(q, p) - H_*)^2, \quad (3.5)$$

где $x = \text{col}(q, p)$. Тогда цель управления (3.3) примет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t)) = 0. \quad (3.6)$$

В дальнейшем будем предполагать, что гамильтониан линеен по управлению:

$$H(q, p, u) = H_0(q, p) + H_1(q, p)^T u,$$

где $H_0(q, p)$ — гамильтониан свободной системы; $H_1(q, p)$ — m -мерный вектор так называемых *гамильтонианов взаимодействия*.

Пример 3.1. Для модели простого маятника гамильтониан свободной системы имеет вид

$$H_0(q, p) = \frac{p^2}{2J} + mgl(1 - \cos q), \quad (3.7)$$

где $q(t) \in \mathbb{R}^1$ — угловая координата; p — импульс системы; J — момент инерции относительно оси вращения, m — масса, l — расстояние между осью вращения и центром тяжести маятника; g — ускорение свободного падения. Если в качестве управляющего воздействия выбран вращающий момент, приложенный к оси подвеса, то уравнения движения в гамильтоновой форме записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{q} = J^{-1}p, \\ \dot{p} = -\sin q + u(t), \end{cases} \quad (3.8)$$

где $u(t)$ — управляющий момент. Из (3.8) следует, что $p = J\dot{q}$, а гамильтониан взаимодействия имеет вид $H_1(q, p) = q$. Цель (3.3) будет соответствовать стабилизации маятника в нижнем положении при $H_* = 0$, раскачке маятника до амплитуды

$$q_* = \arccos \left(1 - \frac{H_*}{mgl} \right)$$

при $0 < H_* < 2mgl$ или приведению маятника во вращение при $H_* > 2mgl$. Значение $H_* = 2mgl$ — исключительное. Оно соответствует движению по сепаратрисе — множеству, состоящему из счетного числа гладких кривых, разделяющих на фазовой плоскости области колебательного и вращательного движения. \square

3.1.2 Алгоритм управления

Применим для решения задачи метод скоростного градиента (см. п. 2.4.2).

Прежде всего напомним, что *скобкой Пуассона* гладких функций $f(q, p)$ и $g(q, p)$ называется функция

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Если f, g — вектор-функции размерностей l, m , соответственно, то скобка Пуассона определяется покомпонентно и является матрицей размера $l \times m$:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \right)^T - \frac{\partial f}{\partial p_i} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)^T \right).$$

В частности, если f — скаляр, а g — m -мерный вектор-столбец, то $\{f, g\}$ — m -мерный вектор-строка (ковектор).

Для применения метода скоростного градиента вычислим скорость изменения целевой функции в силу управляемой системы

$$\dot{Q} = (H_0 - H_*) \left(\frac{\partial H_0}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H_0}{\partial p} \dot{p} \right) = (H_0 - H_*) \{H_0, H_1\} u, \quad (3.9)$$

а затем скоростной градиент по u : $\nabla_u \dot{Q} = (H_0 - H_*) \{H_0, H_1\}^T$.

Теперь легко выписать алгоритмы скоростного градиента в конечной форме, например в линейном и релейном вариантах:

$$u = -\gamma (H_0 - H_*) \{H_0, H_1\}^T, \quad (3.10)$$

$$u = -\gamma \operatorname{sign} \left((H_0 - H_*) \{H_0, H_1\}^T \right), \quad (3.11)$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент усиления. Можно применять и другие варианты общего алгоритма, выбирая в соотношении

$$u = -\psi \left((H_0 - H_*) \{H_0, H_1\}^T \right) \quad (3.12)$$

в качестве ψ некоторую вектор-функцию со значениями в \mathbb{R}^m , удовлетворяющую условию $\psi(z)^\top z > 0$ при $z \in \mathbb{R}^m$, $z \neq 0$ (условие строгой псевдоградиентности).

Замечание 3.1. Если функция $\psi(z)$ разрывна (в частности, для релейного алгоритма (3.11), то правые части уравнений замкнутой системы управления также разрывны и анализ поведения решений такой системы требует осторожности, в силу возможной неединственности решений, скользящих режимов и т.п. Даже само понятие решения системы с разрывными правыми частями требует специального определения. В то же время для рассматриваемых в этой книге систем при использовании для их исследования метод функций Ляпунова сложностей не возникает, а для формального определения решения можно брать любое из известных (см. [6]). Тем не менее, строгие формулировки далее будут даваться только для систем с непрерывными правыми частями. \square

Пример 3.1 (продолжение). Алгоритмы скоростного градиента (3.10), (3.11) в случае маятника (3.8) принимают простой вид:

$$\dot{u} = -\gamma(H_0 - H_*)\dot{q}, \quad (3.13)$$

$$u = -\gamma \operatorname{sign}((H_0 - H_*)\dot{q}). \quad (3.14)$$

3.1.3 Условия достижения цели управления

Возможности изменения свойств управляемой гамильтоновой системы путем воздействия на нее управления определяются свойствами построенной замкнутой системы. Прежде всего установим математические условия достижения цели (3.3).

Теорема 3.1 [61, 125, 140]. Пусть первые и вторые частные производные функций H_0, H_1 на множестве $\Omega_0 = \{x : Q(x) \leq Q_0\}$ ограничены для некоторого $Q_0 > 0$, а функция $\psi(z)$ в (3.12) непрерывна и удовлетворяет условию строгой псевдоградиентности $\psi(z)^\top z > 0$ при $z \in \mathbb{R}^m$, $z \neq 0$.

Тогда алгоритм (3.12) в системе (3.2) при начальном условии $x(0) \in \Omega_0$ обеспечивает соотношение $u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и, кроме того, альтернативу: на траектории $x(t)$ либо достигается цель (3.3), либо обеспечивается сходимость $\{H_0, H_1\}(x(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Пусть дополнительно выполнены следующие условия.

A1. Для любого $c \neq H_*$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что любое непустое связное подмножество множества

$$D_{\varepsilon,c} = \{x : |\{H_0(x), H_1(x)\}| \leq \varepsilon, |H_0(x) - c| \leq \varepsilon\} \cap \Omega_0$$

ограничено.

A2. Наибольшее инвариантное множество $M \subset D_0$ свободной системы (т. е. множество целых траекторий системы (3.4), содержащееся в D_0), где $D_0 = \{x : \{H_0(x), H_1(x)\} = 0\} \cap \Omega_0$ состоит из не более чем счетного числа изолированных точек без конечных точек сгущения.

Тогда любое решение системы (3.2), (3.12) либо обеспечивает цель (3.3), либо стремится к некоторой точке из D_0 , являющейся равновесием свободной системы (3.4). Кроме того, множество начальных условий, из которых решение системы (3.2), (3.12) стремится к неустойчивому равновесию свободной системы, имеет меру нуль.

Следствие 3.1. Если множество D_0 из условия A2 пусто, т. е. $\{H_0, H_1\}(x) \neq 0$ при $x \in \Omega_0$, то цель управления достигается при любых начальных условиях $x(0) \in \Omega_0$. В этом случае можно показать [61], что построенная система обладает свойством частичной асимптотической устойчивости по отношению к целевой функции $Q(x)$.

Теорема 3.1 может быть выведена из более общих результатов [61, 140]. Однако полезно провести ее непосредственное доказательство.

Доказательство теоремы 3.1. Вычисление производной от функции $Q_t = (H_0(p(t), q(t)) - H_*)^2/2$ вдоль решений системы (3.2), (3.12) дает

$$\dot{Q}_t = -\psi(z(t))^T z(t), \quad (3.15)$$

где $z(t) = [H_0(x(t)), H_1(x(t))]^T (H_0(x(t)) - H_*)$. Следовательно, $\dot{Q}_t \leq 0$ и Q_t не возрастает, т.е. $Q_t \leq Q_0$. Это значит, что решение полной системы никогда не покидает множество Ω_0 . Ограниченность правых частей системы (3.2), (3.12) гарантирует, что ее решение $x(t)$ определено при всех $t \geq 0$. Следовательно, существуют пределы $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_t = Q_\infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} H_0(x(t)) = H_\infty$. Если $H_\infty = H_*$, то теорема доказана. Предположим, что $H_\infty \neq H_*$. Из условия теоремы следует,

что функции $z(t)$, $\psi(z(t))$, \dot{Q}_t , \ddot{Q}_t ограничены при $x(t) \in \Omega_0$. Далее для доказательства требуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1 (лемма об аттрактивности) [140]. Пусть для системы $\dot{x} = f(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ существуют гладкая неотрицательная функция $V(x, t)$ и функция $\omega(x, t)$ такие, что $\dot{V}(x, t) \leq -\omega(x, t) \leq 0$ для любых $t \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, где $\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t)$. Предположим, что ограниченность $V(x, t)$ влечет ограниченность $f(x, t)$, равномерную непрерывность $\omega(x, t)$ по x и ограниченность $\partial\omega/\partial t$.

Тогда функция $V_t = V(x(t), t)$ ограничена на интервале $[t_0, \infty)$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(x(t), t) = 0. \quad (3.16)$$

Если, кроме того, $V(x, t) \geq \omega_1(|x|)$ для некоторой скалярной функции $\omega_1(r)$ такой, что $\omega_1(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, то функция $x(t)$ также ограничена.

Применяя лемму об аттрактивности, получаем, что $\dot{Q}_t \rightarrow 0$. Из условия строгой псевдоградиентности и непрерывности ψ следует, что $u(t) \rightarrow 0$ и $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поскольку, по предположению, $H_\infty \neq H_*$, получаем что $[H_0, H_1](x(t)) \rightarrow 0$. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части выберем $\varepsilon > 0$ из предположения А1 при $c = H_\infty$. В силу А1, для достаточно больших $t > 0$ решение $x(t)$ входит в множество $D_{\varepsilon, H_\infty}$ и остается в одном из его ограниченных связных компонентов. В силу компактности замыкания этого компонента существует хотя бы одна предельная точка траектории $x(t)$ и все предельные точки $x(t)$ удовлетворяют равенству $[H_0, H_1] = 0$, т.е. $x(t)$ сходится к множеству $D_0 = \{x : [H_0, H_1] = 0\} \cap \Omega_0$. Применяя теорему Ла-Салля и учитывая условие А2, устанавливаем, что существует $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_\infty \in D_0$ и x_∞ — точка равновесия системы (3.2), (3.12). Пусть A_∞ — матрица Якоби системы, вычисленная в точке x_∞ , а M_s, M_u, M_0 — устойчивое, неустойчивое и центральное многообразия системы в точке x_∞ . Из теоремы о центральном многообразии [29] следует, что $x(t) \rightarrow x_\infty$ только при $x(0) \in M_s \oplus M_0$, если $|x(0) - x_\infty|$ достаточно мало. Пусть x_∞ — неустойчивое равновесие, т.е. M_u не пусто. Тогда $\dim(M_s \oplus M_0) < 2n$. Выполняя сдвиг назад вдоль траекторий свободной системы, легко показать, что все

начальные условия $x(0)$ такие, что $x(t) \rightarrow x_\infty$ принадлежат некоторому многообразию размерности меньшей, чем $2n$. Так как множество всех возможных неустойчивых предельных точек не более чем счетно, множество соответствующих начальных условий имеет нулевую лебегову меру в \mathbb{R}^{2n} . ■

З а м е ч а н и е 3.2. Пусть гамильтониан управляемой системы имеет вид $H(q, p, u) = H_0(q, p) + H_1(q, p)^\top u$ при

$$H_0(q, p) = \frac{1}{2} p^\top A(q)^{-1} p + \Pi(q), \quad H_1(q, p) = q, \quad (3.17)$$

где q, p – n -мерные обобщенные координаты; $A(q)$ – симметрическая положительно определенная матрица кинетической энергии; $\Pi(q) \geq 0$ – потенциальная энергия. В этом случае справедливо соотношение $p = A(q)\dot{q}$ и уравнения системы могут быть преобразованы к лагранжевой форме:

$$\frac{d}{dt} (A(q)\dot{q}) - \frac{1}{2} \dot{q}^\top \frac{\partial}{\partial q} (A(q)) \dot{q} + \nabla_q \Pi(q) = u. \quad (3.18)$$

В новых координатах энергия примет вид

$$H_0(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^\top A(q) \dot{q} + \Pi(q). \quad (3.19)$$

Равновесия свободной системы имеют вид $(0, \bar{q})$, где \bar{q} – стационарная (критическая) точка потенциала $\Pi(q)$ (т.е. $\nabla \Pi(\bar{q}) = 0$). Предположим, что все стационарные точки функции $\Pi(q)$ изолированы. Тогда из теоремы 3.1 следует, что если начальный энергетический слой

$$\Omega_0 = \{(q, p) : H_0 \leq H_0(q, p) \leq H_*\}$$

(при $H_0 \leq H_*$) или

$$\Omega_0 = \{(q, p) : H_* \leq H_0(q, p) \leq H_0\}$$

(при $H_0 \geq H_*$) не содержит минимумов потенциала $\Pi(q)$, то для почти всех решений достигается цель (3.3). Кроме того, если матрица $A(q)$ равномерно положительно определена, т. е. $p^\top A(q) p \geq \mu |p|^2$ для некоторого $\mu > 0$ и всех $p \in \mathbb{R}^n$, то, как нетрудно показать,

почти все решения замкнутой системы приближаются к множеству $S = \{(q, p) : H_0(q, p) = H_*\}$. \square

Пример 3.1 (окончание). Применительно к маятнику (3.8) замечание 3.2 означает, что если начальный энергетический слой между уровнями H_0 и H_* не содержит равновесий, то уровень H_* будет достигаться при всех начальных условиях, а если начальный слой содержит только неустойчивые равновесия $(\pi(2k + 1), 0)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, то цель (3.3) будет достигаться при почти всех начальных условиях. \square

Приведем формулировки результатов для лагранжевых систем более общего вида.

Теорема 3.2 [61, 140]. *Рассмотрим голономную лагранжеву систему, находящуюся под действием потенциальных, гироскопических и управляющих обобщенных сил:*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^n d_{ij}(q) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.20)$$

где q_i – обобщенные координаты; \dot{q}_i – обобщенные скорости; $d_{ij} = -d_{ji}$; $T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q}$ – кинетическая энергия; $\Pi = \Pi(q)$ – потенциальная энергия. Пусть матрица $A(q)$ равномерно положительно определена, $\det B \neq 0$, где $B = \{b_{ij}\}$, функции $\nabla \Pi(q)$, $D(q) = \{d_{ij}(q)\}$, $A^{-1}(q)$ ограничены на множестве Ω , имеющем при $H_0 < H_*$ вид $\Omega = \{(q, \dot{q}) : H_0 \leq H \leq H_*\}$, а при $H_0 > H_*$ – вид $\Omega = \{(q, \dot{q}) : H_* \leq H \leq H_0\}$, где $H_0 = H(q(0), \dot{q}(0))$. Пусть, наконец, внутренность Ω не содержит положений равновесия свободной системы.

Тогда алгоритм

$$u = -\gamma(q, \dot{q})(H - H_*)B^T \dot{q} \quad (3.21)$$

обеспечивает достижение цели

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(q(t), \dot{q}(t)) = H_* \quad (3.22)$$

в системе (3.20), (3.21) при $0 < \gamma(q, \dot{q}) \leq \gamma$, где $\gamma > 0$ – любое положительное число.

Частным случаем рассмотренной задачи является классическая задача гашения (демпфирования) колебаний, в которой $H_* = \inf \Pi(q)$. Считая для определенности $\Pi(q) \geq 0$, $\Pi(0) = 0$, приходим к следующему хорошо известному результату.

Следствие 3.2 (теорема Красовского–Румянцева). Пусть $\Pi(q)$ — положительно определенная функция, а начальный энергетический слой не содержит положений равновесия, кроме $q = \dot{q} = 0$. Тогда это положение может быть сделано асимптотически устойчивым при помощи обратной связи $u = -\gamma B^T \dot{q}$ при любом $\gamma > 0$.

З а м е ч а н и е 3.3. В работах [220] — [222] приведены обобщения приведенных выше результатов на задачи управления инвариантами негамильтоновых нелинейных систем. Охвачены случаи, когда число управлений меньше числа обобщенных координат ($m < n$), управление входит в модель нелинейно, функция $\psi(z)$ — негладкая. В частности, в [222], что алгоритм $u = \gamma \operatorname{sign}((H - H_*)B^T \dot{q})$ обеспечивает достижение цели (3.22) в системе за конечное время.

3.2 Свойство раскачиваемости

Как уже было сказано, в задачах управления колебаниями существенным является выполнение дополнительного требования малости управляющего воздействия. Возникает проблема: какие цели могут быть достигнуты при помощи малого управления? В частности, до какого уровня энергии можно «разогнать» консервативную систему сколь угодно слабым управлением. Введем следующую терминологию.

Определение 3.1 [125]. Система $\dot{x} = F(x, u, t)$ называется *раскачиваемой по отношению к цели*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_t = g, \quad g \in G \subset \mathbb{R}^1, \quad (3.23)$$

если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $g \in G$ существует закон управления

$$u(t) = U_{g,\varepsilon} \{x(s), 0 \leq s \leq t\}, \quad (3.24)$$

такой, что $|u(t)| < \varepsilon$ и цель (3.23) в замкнутой системе достигается. При этом закон (3.24) называется *раскачивающим по отношению*

к G . \square

Из теоремы 3.1 следует, что любая гамильтонова система, удовлетворяющая условиям A1, A2, раскачивается по отношению к цели (3.3) при почти всех начальных условиях, если стационарные точки потенциала $\Pi(q)$ изолированы и в начальном энергетическом слое нет устойчивых равновесий системы, т. е. $H_* > \sup_{\bar{q}} \Pi(\bar{q})$, где верхняя грань берется по всем локальным минимумам $\Pi(q)$, находящимся в начальном компоненте связности энергетического слоя Ω_0 . Действительно, правые части замкнутой системы ограничены в области Ω_0 и управление может быть сделано сколь угодно малым путем выбора достаточно малого коэффициента γ . Разумеется, уменьшение коэффициента усиления γ приводит к росту времени достижения цели, но принципиальная достижимость цели остается неизменной.

Интерпретируя условия A1, A2 теоремы 3.1 как достаточные условия управляемости системы по отношению к энергии, можно, допуская некоторую вольность, сформулировать результат теоремы 3.1 как закон преобразования системы обратной связью:

Если система управляема по отношению к энергии, то значение энергии свободной системы можно изменить на произвольную величину при помощи сколь угодно малой обратной связи.

3.3 Управление первыми интегралами

Полученные результаты распространяются на задачи достижения более сложных целей, чем стабилизация уровня энергии. Ниже рассматривается задача о стабилизации на заданных уровнях нескольких инвариантов (первых интегралов) свободной системы [61, 135].

Пусть задано k скалярных инвариантов $G_i(q, p)$, $i = 1, \dots, k$, т. е. $\{H_0, G_i\} \equiv 0$, $i = 1, \dots, k$, и пусть цель управления задана в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_i(p(t), q(t)) = G_i^*, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.25)$$

где G_i^* — заданные числа. Введем целевую функцию

$$Q(q, p) = \frac{1}{2} (G(q, p) - G^*)^T R (G(q, p) - G^*), \quad (3.26)$$

где $G(q, p) = \text{col} \{G_1(q, p), \dots, G_k(q, p)\}$; $G^* = \text{col} \{G_1^*, \dots, G_k^*\}$, а матрица $R = R^T > 0$ размера $k \times k$ симметрична и положительно определена. Тогда алгоритм скоростного градиента, построенный по цели (3.25), (3.26), можно представить следующим образом:

$$u = -\gamma \{\bar{H}, Q\} = -\gamma \{\bar{H}, G\} R (G(q, p) - G^*). \quad (3.27)$$

Здесь \bar{H} обозначает вектор-столбец с компонентами, составленными из гамильтонианов взаимодействия H_j , $j = 1, \dots, m$, т. е. скобка $\{\bar{H}, Q\}$ есть вектор-столбец с компонентами $\{H_j, Q\}$, а скобка $\{\bar{H}, G\}$ представляет собой матрицу-функцию размера $m \times k$ с элементами вида $\{H_j, G_i\}$.

При выводе выражения (3.27) используется правило дифференцирования функции $V(q, p)$ вдоль траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(q, p)$: $\dot{V} = \{H, V\}$.

Можно рассмотреть и более широкий класс алгоритмов

$$u = -\psi(\{\bar{H}, Q\}), \quad (3.28)$$

где $\psi(y)$ — вектор-функция со свойством $\psi(z)^T z > 0$ при $z \neq 0$.

Для формулировки условий применимости алгоритмов (3.27) и (3.28) предположим, что функции H_i , G_i бесконечно дифференцируемы, и введем множество

$$S(q, p) = \text{span} \{ \text{ad}_{H_0}^s \{\bar{H}, G\}, s = 0, 1, \dots \},$$

где векторы ad_H^s определены индуктивно:

$$\text{ad}_H^0 G = G, \quad \text{ad}_H^1 G = \{H, G\}, \quad \text{ad}_H^{s+1} G = \{H, \text{ad}_H^s G\}.$$

Вновь рассмотрим гамильтонову систему

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \nabla_p H_0(q, p) + \sum_{j=1}^m \nabla_p H_j u_j, \\ \dot{p} &= -\nabla_q H_0(q, p) - \sum_{j=1}^m \nabla_q H_j u_j. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Теорема 3.3 [135, 221]. Пусть функции H_j, ψ бесконечное число раз дифференцируемы и H_j ограничены вместе со своими первыми и вторыми частными производными на множестве

$$\Omega_0 = \{(q, p) : Q(q, p) \leq Q_0\}$$

для некоторого $Q_0 > 0$. Пусть $G_i, i = 1, \dots, k$, — набор бесконечно дифференцируемых инвариантов свободной системы (3.4). Предположим, что существует $\delta > 0$ такое, что каждый связный компонент множества

$$D_\delta = \Omega_0 \cap \{(q, p) : \det A^T A \leq \delta\},$$

где $A = \{\bar{H}, G\}$ ограничен, и выполнено следующее условие (условие Ширяева):

$$\dim S(q, p) = k \quad (3.30)$$

для всех $(q, p) \in \Omega_0$, таких что $G(q, p) \neq G^*$.

Тогда цель управления (3.25) достигается на любой траектории системы (3.29), (3.28), начинающейся в Ω_0 .

Замечание 3.4. В случае, когда целевое множество

$$\Omega^* = \{(q, p) : G_i(q, p) = G_i^*, i = 1, \dots, k\}$$

вырождается в точку, условие Ширяева (3.30) означает детектируемость состояния Ω^* свободной системы. Если $k = 1$ и $G_1 = H_0$, то рассматриваемая задача превращается в задачу управления энергией и условие Ширяева означает, что $\{H_0, H_1\} \neq 0$ при $(q, p) \in \Omega_0$, $H_0(q, p) \neq H_*$. \square

В общем случае условие Ширяева (3.30) гарантирует детектируемость целевого множества в свободной системе, что в свою очередь влечет за собой управляемость системы относительно множества Ω^* .

Замечание 3.5. Если условие (3.30) нарушается в счетном числе изолированных точек, являющихся неустойчивыми равновесиями свободной системы, то, как следует из теоремы П.1, цель (3.25) будет достигаться для почти всех траекторий замкнутой системы, начинающихся в Ω_0 . \square

Замечание 3.6. Если множество Ω_0 компактно (например, если целевая функция Q радиально неограничена: $Q(q, p) \rightarrow \infty$ при

$|p| + |q| \rightarrow \infty$), проверка свойств множества D_δ становится ненужной. \square

Вновь допуская некоторую вольность, сформулируем результат теоремы 3.3 как закон преобразования системы обратной связью:

Если система управляема по отношению к некоторому набору инвариантов, то их значения можно изменить на произвольные величины при помощи сколь угодно малой обратной связи.

4 УПРАВЛЕНИЕ ДИССИПАТИВНЫМИ СИСТЕМАМИ

Устанавливаются пределы преобразования энергии управляемых гамильтоновых систем при заданных уровнях управления и диссипации. Вводятся понятия индекса возбудимости и резонанса с обратной связью для нелинейных систем. Изучается возможность создания резонансных режимов в нелинейных системах при помощи управления с обратной связью. Приводятся результаты оценки индекса возбудимости одно- и двухмаятниковых систем путем компьютерного моделирования.

4.1 Анализ возбудимости систем с диссипацией

Перейдем к рассмотрению задач управления системами, в которых присутствует диссипация, (точнее, тех задач, где диссипацией нельзя пренебречь). Отправляясь от гамильтонова описания управляемых систем (3.1), будем рассматривать гамильтоновы системы с диссипацией, описываемые уравнениями

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, u)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, u)}{\partial q_i} - R_i(q, p), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

где $q = \text{col}(q_1, \dots, q_n)$, $p = \text{col}(p_1, \dots, p_n)$ — векторы обобщенных координат и обобщенных импульсов, образующие вектор состояния системы $x = \text{col}(q, p)$; $H = H(q, p, u)$ — гамильтониан управляемой системы; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — вход (вектор внешних обобщенных сил); $R(q, p) = \text{col}(R_1(q, p), \dots, R_n(q, p))$ — функция диссипации, удовлетворяющая условию

$$R(q, p)^\top \frac{\partial H_0(q, p)}{\partial p} \geq 0, \quad (4.2)$$

где $H_0(q, p) = H(q, p, 0)$ — энергия свободной системы. Неравенство (4.2) означает рассеяние энергии на свободных движениях системы: $\dot{H}_0 \leq 0$.

Ясно, что диссипация затрудняет управление энергией системы, в частности, накачку энергии внешними воздействиями. Поэтому

такие свойства как раскачиваемость для диссипативных систем не характерны. Интерес представляют оценки возможности преобразования энергии систем при заданных уровнях управления и диссипации. Особо интересен случай малой диссипации (слабодемпфированных систем), для которого характерны колебательность процессов в системе и наличие резонансных явлений. Ниже устанавливаются пределы возможного преобразования энергии управляемых гамильтоновых систем при заданных уровнях управления и диссипации, а также возможность создания резонансных режимов в нелинейных системах при помощи управления с обратной связью.

4.1.1 Пассивность и диссипативность

В целях большей естественности и удобства изложения расширим класс рассматриваемых систем и будем изучать системы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями состояния

$$\dot{x} = F(x, u), \quad y = h(x), \quad (4.3)$$

где x, u, y — векторы состояния, входов и выходов, соответственно. Предполагается, что входная функция (управление) $u(t), 0 \leq t < \infty$ принадлежит заданному классу допустимых управлений \mathcal{U} . Формулировка свойства диссипативности для таких систем в наиболее общей форме была дана в 1972 г. Я. Виллемсом [233], который ввел следующее определение.

Определение 4.1. Пусть задана скалярная функция $\omega(x, u)$ такая, что для любого $t \geq 0$, любого начального состояния $x(0) = x_0$ и любого допустимого управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ выполнено $\int_0^t |\omega(x(s), u(s))| ds < +\infty$, где $x(t)$ — решение системы (4.3). Система (4.3) называется *диссипативной относительно функции $\omega(x, u)$* , если существует непрерывная неотрицательная функция $V(x)$ такая, что для любого $t \geq 0$ и любого решения $x(t)$ системы (4.3) при $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ выполнено неравенство

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) + \int_0^t \omega(x(s), u(s)) ds. \quad (4.4)$$

Функция w называется *функцией расхода системы* (4.3) (*supply rate function*), функция V называется *функцией запаса системы* (*storage function*), а неравенство (4.4) — *неравенством диссипации* (*dissipation inequality*). \square

Особую важность имеют следующие частные случаи. Система (4.3) называется

а) *пассивной*, если число входов равно числу выходов ($\dim U = \dim Y = m$) и система диссипативна относительно функции расхода $w(x, u) = y^T u = h(x)^T u$;

б) *строго пассивной*, если $\dim U = \dim Y = m$ и система диссипативна относительно функции расхода $w(x, u) = y^T u - \beta(x)$, где $\beta(x) > 0$ при $x \neq 0$. (Предполагается, что начало координат — точка равновесия системы).

Функция запаса $V(x)$ является аналогом энергии для систем общего вида, произведение входных и выходных величин выражает измеренную мощность, поступившую в систему, а функция $\beta(x)$ оценивает снизу скорость рассеяния энергии в системе. Таким образом, неравенство диссипации (4.4) является обобщенным выражением баланса энергии. В частном случае, когда система пассивна, а неравенство диссипации записано в виде равенства

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t (y(s)^T u(s) - \rho(x(s))) ds, \quad (4.5)$$

функция $\rho(x) \geq 0$ называется *скоростью диссипации* (*dissipation rate*).

Как и в предыдущей главе, будем более подробно рассматривать гамильтоновы системы, линейные по входам. Для линейных по входам гамильтоновых систем с диссипацией, задаваемых гамильтонианом $H(q, p, u) = H_0(q, p) + H_1(q, p)u$ естественной функцией запаса является энергия свободной системы: $V(x) = H_0(q, p)$. При наличии диссипации скорость изменения энергии имеет следующее выражение:

$$\dot{H}_0 = \{H_0, H_1\}u - R(q, p)^T \frac{\partial H_0}{\partial p}.$$

Вводя обозначение $\rho(x) = R(q, p)^T (\partial H_0 / \partial p) \geq 0$, получим, что соотношение (4.5) выполнено при $y = \{H_0, H_1\}$. Таким образом, есте-

ственным выходом системы, отражающим ее диссипативные свойства, является вектор $y = \{H_0, H_1\}$, представляющий собой вектор скоростей изменения гамильтонианов взаимодействия H_1 вдоль траекторий свободной (при $u = 0$) системы (4.3). В частности, лагранжева система (3.18) пассивна по отношению к вектору выходов, компонентами которого являются обобщенные скорости системы. Этот факт широко используется в современной теории управления физическими системами [189, 190, 191, 217].

Отметим сходство и различие понятий функции запаса и функции Ляпунова. Наличие диссипации в физической системе тесно связано с ее устойчивостью. Действительно, легко видеть, что если $x = 0$ — равновесие системы (4.3) при $u = 0$ (т. е. $F(0, 0) = 0$), а функция запаса $V(x)$ непрерывна и положительно определена ($V(x) > 0$ при $x \neq 0$), то при отсутствии входных воздействий ($u = 0$) пассивная система устойчива по Ляпунову, а строго пассивная система асимптотически устойчива. При этом в качестве функции Ляпунова, устанавливающей устойчивость, выступает сама функция запаса $V(x)$. Однако неравенства диссипации (4.4) и (4.5) относятся и к случаю $u \neq 0$, позволяя исследовать зависимость поведения системы от входных воздействий. Таким образом, понятие функции запаса заменяет понятие функции Ляпунова при переходе от замкнутых систем к открытым (разомкнутым).

4.1.2 Индекс возбудимости

Для анализа возможности изменения характеристик системы за счет управления необходимо ввести количественную меру пределов такого изменения. Подобная мера зависит от выбора входа и выхода системы, а также от допустимой величины управляющего воздействия. Для определенности будем рассматривать в качестве выхода характеристику типа энергии — функцию запаса $V(x)$, а измерять величину входа будем по его уровню — максимальному по времени значению, т. е. в равномерной норме. При наличии диссипации величина $V(x(t))$ в отсутствие управления имеет тенденцию к убыванию. Поэтому важное значение имеет величина, характеризующая возможность увеличения $V(x)$ за счет управления. Такая величина определяет меру возбудимости движений (колебаний) в системе и

может быть названа *индексом возбудимости*.

Для определения индекса возбудимости следует вычислять максимальное значение $V(x)$, достижимое при ограниченном управлении в асимптотике, т.е. при $t \rightarrow \infty$. Однако вычислительные эксперименты показывают, что предел при $t \rightarrow \infty$ может не существовать (см. напр. Рис.4.1, где показан характер изменения энергии маятника с трением при воздействии управления вида $u = \gamma \operatorname{sign} \dot{\varphi}$). Поэтому необходимо рассматривать верхний и нижний пределы. Введем следующее определение.

Определение 4.2. Пусть множество допустимых управлений состоит из функций $u(t)$, ограниченных при $0 \leq t < \infty$ и таких, что соответствующие им траектории $x(t)$ ограничены. *Верхним и нижним индексами возбудимости системы (4.3) по отношению к выходу $V(x)$* называются функции $\chi_V^+(\gamma)$, $\chi_V^-(\gamma)$, определенные при $0 \leq \gamma < \infty$ следующим образом:

$$\chi_V^+(\gamma) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|u(\cdot)| \leq \gamma \\ x(0)=0}} V(x(t)), \quad (4.6)$$

$$\chi_V^-(\gamma) = \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|u(\cdot)| \leq \gamma \\ x(0)=0}} V(x(t)). \quad (4.7)$$

□

Аналогичным образом определяются индексы возбудимости $\chi_y^+(\gamma)$, $\chi_y^-(\gamma)$ по отношению к любому выходу $y = h(x)$. В случае, если вход является вектором, $u = \operatorname{col}\{u_1, \dots, u_m\}$ величина входа также задается вектором $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ и индексы возбудимости являются

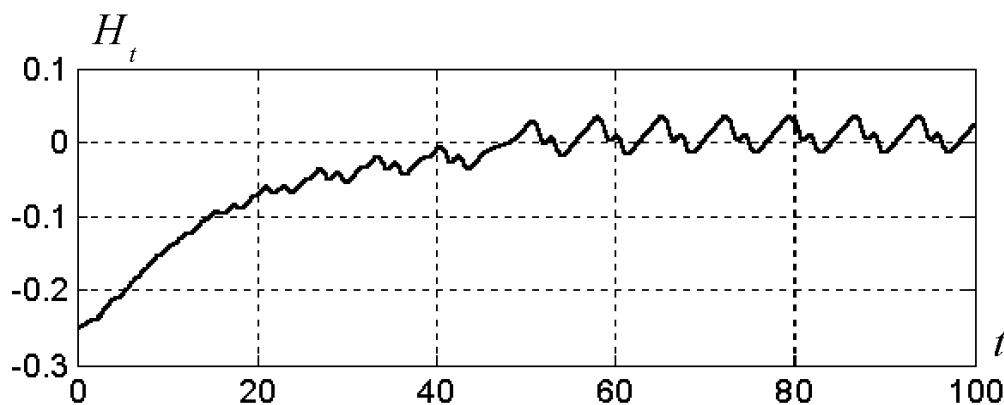


Рис. 4.1. Динамика энергии маятника с трением

$J\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = u$ при возбуждении управлением $u = \gamma \operatorname{sign} \dot{\varphi}$.

мультииндексами. В общем случае системы с m входами и l выходами индексы возбудимости $\chi_y^+(\gamma)$, $\chi_y^-(\gamma)$ являются $l \times m$ -матрицами, зависящими от m аргументов. Однако скалярные индексы возбудимости «от входа i к выходу j » также представляют интерес. Отметим, что предположение об ограниченности $x(t)$ носит технический характер и может быть ослаблено, но здесь для простоты изложения этого не делается.

Индекс возбудимости может быть измерен экспериментально, как и обычная частотная характеристика линейной системы. В отличие от измерения частотной характеристики, когда на вход системы подается гармоническое воздействие (4.28) с постоянной амплитудой и меняющейся частотой, при измерении характеристики возбудимости меняется амплитуда (уровень) входного сигнала, а сам сигнал задается в виде обратной связи.

Основным результатом настоящего пункта является следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть система (4.3) пассивна, причем функция запаса $V(x)$ и скорость диссипации $\varrho(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_0|y|^2 \leq V(x) \leq \alpha_1|y|^2 + d, \quad (4.8)$$

$$\varrho_0|y|^2 \leq \varrho(x) \leq \varrho_1|y|^2 \quad (4.9)$$

для некоторых положительных $\alpha_0, \alpha_1, \varrho_0, \varrho_1, d$. Пусть множество

$$\Omega^- = \left\{ x : h(x) = 0, V(x) < \alpha_0 \left(\frac{\gamma}{\varrho_1} \right)^2 \right\}$$

не содержит целых траекторий свободной системы $\dot{x} = F(x, 0)$.

Тогда индексы возбудимости $\chi_V^+(\gamma)$, $\chi_V^-(\gamma)$ по отношению к $V(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_0 \left(\frac{\gamma}{\varrho_1} \right)^2 \leq \chi_V^-(\gamma) \leq \chi_V^+(\gamma) \leq m\alpha_1 \left(\frac{\gamma}{\varrho_0} \right)^2 + d, \quad (4.10)$$

а индексы возбудимости $\chi_y^+(\gamma)$, $\chi_y^-(\gamma)$ по отношению к y удовлетворяют неравенствам

$$\sqrt{\alpha_0} \frac{\gamma}{\varrho_1} \leq \chi_y^-(\gamma) \leq \chi_y^+(\gamma) \leq (m\alpha_1)^{1/2} \frac{\gamma}{\varrho_0} + \sqrt{d}. \quad (4.11)$$

При этом нижняя оценка реализуется для

$$u(t) = \gamma \operatorname{sign} y(t). \quad (4.12)$$

Доказательство теоремы 4.1. Продифференцировав тождество (4.5) по t и воспользовавшись неравенствами (4.9), получим

$$y^T u - \varrho_1 |y|^2 \leq \dot{V} \leq y^T u - \varrho_0 |y|^2 \quad (4.13)$$

Подставим в (4.13) функцию управления $u(t) = \gamma \operatorname{sign} y(t)$. Используя легко проверяемые оценки $|y| \leq y^T \operatorname{sign} y \leq \sqrt{m}|y|$ и неравенства (4.8), имеем

$$|y| \left(\gamma - \varrho_1 \sqrt{\frac{V}{\alpha_0}} \right) \leq \dot{V} \leq |y| \left(\sqrt{m}\gamma - \varrho_0 \sqrt{\frac{V-d}{\alpha_1}} \right). \quad (4.14)$$

Заметим, что мы рассматриваем только ограниченные решения $x(t)$ и, значит, каждое из них имеет хотя бы одну предельную точку. Интегрируя полученное двойное дифференциальное неравенство относительно $V_t = V(x(t))$, получаем, что предельные точки решений $x(t)$ могут содержаться в объединении множеств

$$\left\{ V(x) < \alpha_0 \left(\frac{\gamma}{\varrho_1} \right)^2 \right\}, \left\{ \frac{V(x) - d}{\alpha_1} > m \left(\frac{\gamma}{\varrho_0} \right)^2 \right\} \quad (4.15)$$

только в случае, если $h(x(t))$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, если x_* — предельная точка для $x(t)$, то $h(x_*) = 0$. Точка x_* не может принадлежать множеству Ω^- в силу условия теоремы, а множество $\Omega^+ = \left\{ x : h(x) = 0, V(x) > m\alpha_1 \left(\frac{\gamma}{\varrho_0} \right)^2 + d \right\}$ пусто, поскольку из (4.8) следует, что $V(x) \leq d$ при $y = 0$. Поэтому все предельные точки решений $x(t)$ должны содержаться в пересечении множеств

$$\left\{ V(x) > \alpha_0 \left(\frac{\gamma}{\varrho_1} \right)^2 \right\}, \left\{ \frac{V(x) - d}{\alpha_1} < m \left(\frac{\gamma}{\varrho_0} \right)^2 \right\}, \quad (4.16)$$

т. е. при достаточно больших $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$\alpha_0 \left(\frac{\gamma}{\varrho_1} \right)^2 \leq V_t \leq m\alpha_1 \left(\frac{\gamma}{\varrho_0} \right)^2 + d. \quad (4.17)$$

Заметим теперь, что правая часть дифференциального неравенства (4.14) является мажорантой для \dot{V} не только при $u = \text{sign } y$, но и при любых других допустимых входах $|u_i(t)|, i = 1, \dots, m, t \geq 0$, удовлетворяющих ограничениям $|u_i(t)| \leq \gamma$ для всех $t \geq 0$. Поэтому при интегрировании как левого, так и правого из неравенств (4.14) при каждом конечном t можно перейти в (4.17) к супремуму по множеству допустимых входов. Беря затем нижний и верхний пределы по t , получаем требуемые оценки (4.10), а затем и (4.11). ■

Замечание 4.1. Если вместо неравенств (4.9) потребовать выполнение неравенств

$$\varrho_0|y| \leq \varrho(x) \leq \varrho_1|y|, \quad (4.18)$$

соответствующих сухому трению, результат будет качественно иной: при $\gamma > \varrho_1$ индексы возбудимости бесконечны, а при $\gamma < \varrho_0$ индексы возбудимости равны нулю (т. е. возбуждение колебаний невозможно). □

Замечание 4.2. Закон управления (4.12), реализующий нижнюю границу индексов возбудимости, обладает высокой степенью робастности, поскольку он не зависит от параметров управляемой системы: функций потенциальной энергии, кинетической энергии и диссипации. Закон (4.12) является также локально оптимальным. Он будет близок к оптимальному, реализующему супремум в (4.6), (4.7) при малых $\gamma > 0$ [84]. □

Полученный результат применим к управляемым механическим системам, описываемым уравнениями в лагранжевой или гамильтоновой форме. Здесь в качестве функции запаса $V(x)$ выступает полная энергия. Для лагранжевых систем она имеет вид $H(x) = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\dot{q} + \Pi(q)$, где q — вектор обобщенных координат, $y = \dot{q}$ — вектор обобщенных скоростей, $x = (q, \dot{q})$, $A(q)$ — матрица кинетической энергии, $\Pi(q)$ — потенциальная энергия. При этом выходом, по отношению к которому система пассивна, является вектор обобщенных скоростей $y = \dot{q}$. Для гамильтоновых систем функция энергии имеет вид $H(x) = \frac{1}{2}p^T A^{-1}(q)p + \Pi(q)$, где q — вектор обобщенных координат, p — вектор обобщенных импульсов, $x = \text{col}(q, p)$, а выходом, по отношению к которому система пассивна, является вектор $y = A(q)p$, т.е. снова вектор скоростей. В обоих случаях нера-

венства (4.8) означают равномерную невырожденность и ограниченность матрицы кинетической энергии $A(q)$ (стандартное предположение для механических систем), а также ограниченность функции потенциальной энергии. Неравенства (4.9) соответствуют вязкому трению, растущему со скоростью не быстрее, чем линейно.

Для определенности рассмотрим лагранжеву систему (3.18). Введем верхний и нижний индексы возбудимости $E^+(\gamma)$, $E^-(\gamma)$ следующим образом:

$$E^\pm(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\chi^\pm(\gamma)}, \quad (4.19)$$

где

$$\chi^+(\gamma) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|u(\cdot)| \leq \gamma \\ x(0)=0}} H(q(t), \dot{q}(t)), \quad (4.20)$$

$$\chi^-(\gamma) = \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|u(\cdot)| \leq \gamma \\ x(0)=0}} H(q(t), \dot{q}(t)). \quad (4.21)$$

Следующий результат непосредственно вытекает из теоремы 4.1.

Теорема 4.2 [130]. Пусть

$$0 < \alpha_0 \leq \lambda_i(A(q)) \leq \alpha_1,$$

$$\varrho_0 |\dot{q}|^2 \leq R(\dot{q})^T q \leq \varrho_1 |\dot{q}|^2,$$

$$0 \leq \Pi(q) \leq d,$$

где $\lambda_i(A(q))$ — собственные числа матрицы $A(q)$.

Тогда

$$\frac{\alpha_0}{2} \left(\frac{\gamma}{\varrho_1} \right)^2 \leq \chi^-(\gamma) \leq \chi^+(\gamma) \leq m \alpha_1 \left(\frac{\gamma}{\varrho_0} \right)^2 + d. \quad (4.22)$$

Если $R(\dot{q}) = \varrho \dot{q}$ и $\varrho \rightarrow 0$, то

$$E^\pm(\gamma) \sim \frac{C_\pm}{\varrho}. \quad (4.23)$$

Замечание 4.3. Соотношения (4.22) и (4.23) можно трактовать как законы преобразования энергии ограниченным управлением для лагранжевых систем с диссипацией:

Для управляемой лагранжевой или гамильтоновой системы с малой диссипацией степени ρ уровень энергии, достижимой при помощи управления уровня γ имеет порядок $(\gamma/\rho)^2$.

В частном случае системы с одной степенью свободы $n = 1$, $\alpha_0 = \alpha_1$, $\rho_0 = \rho_1$ и полученные оценки упрощаются.

Пример 4.1. Рассмотрим вновь маятник из примера 3.1, в модели которого учтем трение с коэффициентом ρ . Из теоремы 4.2 получим оценку:

$$0.5 \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^2 \leq \bar{H} \leq \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^2 + 2\omega_0^2. \quad (4.24)$$

Закон управления, реализующий оценку (4.24), имеет вид

$$u = \gamma \operatorname{sign}(\dot{\varphi}). \quad (4.25)$$

Более точные оценки можно получить при дополнительном предположении о близости установившихся колебаний в замкнутой системе к гармоническим (это предположение верно при малых γ). Например, для маятника метод гармонического баланса по средней энергии дает оценку

$$\bar{H} \approx \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^2,$$

согласующуюся с (4.24), поскольку $0.5 < 8/\pi^2 < 1$. \square

Приведенные оценки дают возможность оценить степень возбудимости и резонансные свойства нелинейных систем и получить дополнительную информацию об их динамических характеристиках.

Отметим, что для систем с диссипацией отбросить предположение (4.8) об ограниченности потенциала в теореме 4.1 не удастся. Таким образом, вопрос о том, когда можно раскачать систему ограниченным управлением до сколь угодно больших уровней энергии, остается открытым для систем с полной диссипацией и неограниченным потенциалом (например, для системы Дуффинга, см. ниже).

4.2 Резонанс с обратной связью

Выше были описаны общие алгоритмы вывода системы на заданный уровень энергии и общие теоремы об их свойствах. Теперь на основе общих результатов мы установим некоторые свойства физических систем, выявляемые при помощи воздействия на них с обратной связью по измерениям. Именно, изучим явление резонанса в системах с обратной связью.

Явление резонанса играет важнейшую роль в физике и технике, имея как полезные, так и вредные последствия. На принципе резонанса основана работа многих механических и электрических приборов, резонанс широко применяется в радиотехнике, акустике и лазерной технике. Термин «резонанс» имеет итальянское происхождение и означает «эхо». По-видимому, впервые явление резонанса было описано и изучено Галилео Галилеем, который в своем труде «Диалоги и математические доказательства, касающиеся двух новых наук», опубликованном в 1638 г., писал [23]:

«... маятник, находящийся в покое, хотя бы и очень тяжелый, мы можем привести в движение, и притом очень заметное простым дуновением, если мы будем приостанавливать дыхание при возвращении маятника, и вновь дуть в соответствующий его качанию момент».

Для колебательных систем резонансный режим означает возбуждение значительных колебаний системы при подаче малого воздействия и, значит, наиболее эффективную передачу энергии от возбуждающей системы к возбуждаемой. Закономерности резонанса хорошо изучены для линейных систем. Однако для нелинейных колебательных систем дело обстоит сложнее. Даже само определение понятия резонанса неоднозначно и допускает различные варианты. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть управляемый нелинейный осциллятор с одной степенью свободы описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + \Pi'(\varphi) = u, \quad (4.26)$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — скалярная фазовая координата; $u = u(t)$ — скалярное управляющее воздействие; $\Pi(\varphi) \geq 0$ — потенциал. Состоянием

системы (4.26) является пара $x = \text{col}\{\varphi, \dot{\varphi}\}$, а ее полная энергия имеет вид $H(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \Pi(\varphi)$. В силу консервативности свободной ($u = 0$) системы все ее траектории лежат на «энергетических поверхностях» — линиях постоянного уровня полной энергии $\{(\varphi, \dot{\varphi}) : H(\varphi, \dot{\varphi}) = H_*\}$. При различных значениях H_* траектории обладают качественно различными свойствами: устойчивые и неустойчивые равновесия, гомоклинические и гетероклинические орбиты, неограниченные траектории (см., напр., [46] для случая маятника — системы с потенциалом вида $\Pi(\varphi) = \omega_0^2(1 - \cos \varphi)$). Поставим вопрос: насколько можно изменить траекторию системы (4.26) при помощи сколь угодно малого внешнего воздействия $u(t)$?

Хорошо известно, что для случая квадратичного потенциала $\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}\omega_0^2\varphi^2$, т. е. для гармонического осциллятора, описываемого линейным уравнением

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = u, \quad (4.27)$$

гармоническое внешнее воздействие

$$u(t) = \gamma \sin \omega t \quad (4.28)$$

при $\omega = \omega_0$ и сколь угодно малой амплитуде γ позволяет наблюдать наличие неограниченных решений, например вида $\varphi(t) = -\frac{\gamma t}{2\omega_0} \cos \omega t$. Это явление и называется обычно *резонансом*.

Динамика нелинейных систем более сложна. Даже для простого маятника вынужденные колебания могут иметь сложный, нерегулярный характер [35, 46, 62, 64]. Известны работы, устанавливающие условия резонанса, например в смысле неограниченного роста нормы решений при приближении частоты воздействия к некоторому бифуркационному значению [43, 105]. Однако существующие результаты относятся лишь к задачам с периодическими решениями и не охватывают случай нерегулярных, в частности хаотических, движений.

Сложность создания и исследования резонансных режимов в нелинейных системах объясняется тем, что частота колебаний в них существенно зависит от амплитуды. Возникает естественная мысль: создавать колебания в нелинейной системе, варьируя частоту внешнего воздействия в зависимости от амплитуды колебаний. Это озна-

чает, что $u(t)$ должно зависеть от $\varphi(t)$, т. е. не что иное как формирование воздействия в виде обратной связи.

Задача синтеза обратной связи, обеспечивающей достижение заданного уровня энергии, была решена выше методом скоростного градиента. Для осциллятора (4.26) типовые («линейный» и «релейный») законы обратной связи, предложенные в [4, 81, 124], имеют вид (3.13), (3.14), т. е. такой же, как и для простого маятника.

Пусть теперь в системе (4.26) имеются потери (диссипация) типа вязкого трения, т. е. вместо (4.26) рассматривается уравнение

$$\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + \Pi'(\varphi) = u, \quad (4.29)$$

где $\rho > 0$ — коэффициент диссипации. Для линейных систем вида (4.29) (при $\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}\omega_0^2\varphi^2$) резонансом принято называть режим наибольшей амплитуды колебаний, который наступает при воздействии (4.28) с частотой $\omega^2 = \omega_0^2 - \rho^2/4$. При этом для малых $\rho > 0$ колебания в системе (4.28), (4.29) имеют амплитуду

$$\bar{A} = \frac{\gamma}{\rho\omega_0}(1 + O(\rho^2))$$

и среднюю энергию за период

$$\bar{H} = \left\langle \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\varphi^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^2 (1 + O(\rho^2)). \quad (4.30)$$

Колебания нелинейного осциллятора (4.29) при воздействии (3.13) или (3.14) также могут достичь больших значений амплитуды. Из теоремы 4.2 следует, что в системе (3.14), (4.29) достигается значение энергии, не меньшее чем

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^2, \quad (4.31)$$

если параметры закона (3.14) выбраны так, что $H_* \geq \bar{H}$. Поскольку (4.31) при малых ρ приближается к (4.30), можно сказать, что обратная связь (3.13) или (3.14) создает в нелинейной системе (4.29) резонансный режим, энергия которого (в частном случае гармонического осциллятора) не меньше, чем энергия колебаний при возбуждении

гармоникой с резонансной частотой. Описанное явление будем называть *резонанс с обратной связью* (*feedback resonance, f-resonance*).

Надо сказать, что понимание резонанса в физике осталось практически неизменным со времен Галилея. В подавляющем большинстве работ рассматривается гармоническое (в крайнем случае — периодическое) входное воздействие. В книге [12], первое издание которой вышло в 1937 г., было введено понятие авторезонанса как «резонанса под действием силы, порождаемой движением самой системы», т. е. указывалось на возможность воздействий в виде обратной связи. Однако в [12] был рассмотрен лишь случай линейной системы второго порядка при наличии реле в обратной связи, для которого были даны оценки размера предельных циклов. Система при этом рассматривалась как замкнутая, т.е. фактически исследовался *внутренний* резонанс в системе, что, по-видимому, и мотивировало введение термина «авторезонанс». В дальнейшем возбуждение продолжали рассматривать как периодическую функцию, допуская лишь возможность «адиабатического» (медленного по сравнению с основным тоном колебаний) изменения частоты [1, 41, 184].

Описанное выше явление *резонанса с обратной связью*, впервые исследованное в работах [82, 126, 127, 128] возникает при подаче *внешнего* воздействия. Воздействия вида (3.13), (3.14), (4.12), меняют свой характер в темпе процесса, что позволяет уменьшить требуемую мощность управления и существенно ускорить достижение заданного режима.

Интересно, что галилеево описание резонанса не противоречит наличию обратной связи. Более того, оно подсказывает, как ее использовать для введения маятника в резонансный режим: надо просто «...дуть в соответствующий его качанию момент».

Явление резонанса с обратной связью может иметь разнообразные применения. Некоторые из них рассмотрены далее.

4.3 Индекс возбудимости маятниковых систем

Введенные выше характеристики (индексы) возбудимости определяют возможную глубину (степень) резонансного режима в системе. Знание индекса возбудимости нелинейной системы позволяет су-

дить также о ее близости к границе устойчивости и об ее стабилизирующих свойствах. В частности, индекс возбудимости занимает место амплитудно-частотной характеристики в критериях абсолютной устойчивости для случая, когда номинальная система нелинейна [128, 129].

Индекс возбудимости может быть измерен в ходе вычислительного или натурального эксперимента, как и обычная частотная характеристика линейной системы. Однако, в отличие от измерения частотной характеристики, когда на вход системы подается гармоническое воздействие (4.28) с постоянной амплитудой и меняющейся частотой, при измерении характеристики возбудимости меняется амплитуда (уровень) входного сигнала, а сам сигнал задается в виде обратной связи. Точному расчету величин $E^\pm(\gamma)$ препятствует необходимость решения сложной задачи оптимального синтеза. Однако нижнюю оценку можно получить, подавая входной сигнал (4.12) скоростно-градиентного типа, являющийся локально-оптимальным. Можно показать, по аналогии с [84], что при малых γ подача входного сигнала (4.12) дает приближенное значение для $E(\gamma)$ с точностью порядка γ .

Приведем примеры построения графиков индекса возбудимости (называемых также характеристиками возбудимости) для маятниковых систем.

Характеристика возбудимости простого маятника, построенная по его модели

$$\ddot{\varphi}(t) + \rho\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2 \sin \varphi(t) = u(t) \quad (4.32)$$

по отношению к энергии при локально-оптимальном (скоростно-градиентном) воздействии

$$u = \gamma \operatorname{sign} \dot{\varphi} \quad (4.33)$$

приведена на рис. 4.2. Значения параметров системы заданы как $\omega_0 = 10.0 \text{ c}^{-2}$, $\rho = 0.1 \text{ c}^{-1}$, а начальные условия берутся $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 10^{-10} \text{ c}^{-1}$. Интересно, что из результатов примера 4.1 следует, что $E(\gamma) \rightarrow \frac{20}{\pi} \sqrt{2} \approx 9.0$ при $\gamma \rightarrow 0$, что неплохо согласуется с рис. 4.2. На рис. 4.3 представлены результаты измерений характеристики возбудимости на экспериментальной маятниковой установке ИПМаш РАН [75]. Видно, что качественный характер результатов моделирования и эксперимента одинаков. Пик графика $E(\gamma)$ соответствует уровню входного сигнала, раскачивающего маятник до верхнего по-

ложения, т. е. по виду кривой $E(\gamma)$ возможно определение критических уровней потенциальной энергии системы. Типичный график изменения выхода $\dot{\varphi}(t)$ представлен на рис. 4.4.

Для сложных систем характеристика возбудимости может иметь весьма причудливый вид и содержащуюся в ней информацию о тонких динамических свойствах системы извлечь не просто. В качестве примера рассмотрим систему из двух связанных маятников:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \rho_1 \dot{\varphi}_1 + \omega_1^2 \sin \varphi_1 + k(\varphi_1 - \varphi_2) &= u(t), \\ \ddot{\varphi}_2 + \rho_2 \dot{\varphi}_2 + \omega_2^2 \sin \varphi_2 + k(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где $k > 0$ — коэффициент связи. Пусть выходом системы является ее энергия:

$$H = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + \omega_1^2 (1 - \cos \varphi_1) + \omega_2^2 (1 - \cos \varphi_2) + \frac{k}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

Подадим входное воздействие, аналогичное (4.33):

$$u = \gamma \operatorname{sign} \dot{\varphi}_1. \quad (4.35)$$

В частном случае $k = 0$ и $\varphi_2(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ график индекса возбудимости $E(\gamma)$ совпадает с тем, что получено для одного маятника (рис. 4.2). С ростом коэффициента связи k динамика нелинейной системы (4.34) усложняется, что отражается на виде функции $E(\gamma)$. Графики возбудимости для $k = 0.25, 0.5, 1.0, 5.0$ изображены на рис. 4.5, 4.7, 4.9, 4.11. На рис. 4.6, 4.8, 4.10, 4.12 показаны типичные графики процессов $\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)$. Начальные условия $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \dot{\varphi}_1(0) = 10^{-10} \text{ c}^{-1}, \dot{\varphi}_2(0) = 0 \text{ c}^{-1}$, а значения параметров выбраны $\rho_1 = \rho_2 = 0.1 \text{ c}^{-1}, \omega_1^2 = \omega_2^2 = 10 \text{ c}^{-2}$. При вычислении $E(\gamma)$ время моделирования взято равным 500 с. Для усреднения энергии использован метод скользящего среднего по 500 шагам с интервалом считывания 0.05 с.

Из рисунков видно, что с ростом коэффициента связи k характеристика возбудимости $E(\gamma)$ становится все более и более изрезанной, число ее экстремумов возрастает. Экстремумы $E(\gamma)$ соответствуют *бифуркациям* (качественным изменениям поведения траекторий системы) — изменению числа качаний маятника до перехода во вращательный режим и изменению числа оборотов проскальзывания

маятников друг относительно друга. В области многоэкстремальности $E(\gamma)$ движение маятников носит нерегулярный, хаотический характер. Характеристики возбудимости относительно других выходов имеют другой вид и позволяют судить о других свойствах системы.

В заключение еще раз отметим, что индекс (характеристика) возбудимости является, подобно амплитудно-частотной характеристике для линейных систем, интегральной количественной оценкой резонансных динамических свойств нелинейной системы. Она находит применение при исследовании сложных колебательных процессов и систем, в частности при исследовании динамики многороторных управляемых вибрационных установок [75].

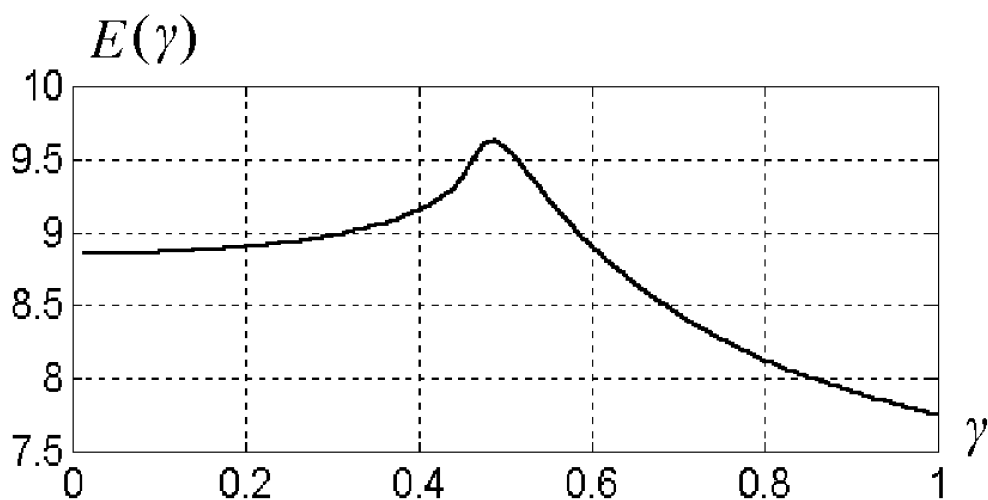


Рис. 4.2. Характеристика возбудимости маятника (4.32) при $\varrho = 0.1 \text{ c}^{-1}$, $\omega_0^2 = 10^{-2}$ (моделирование).

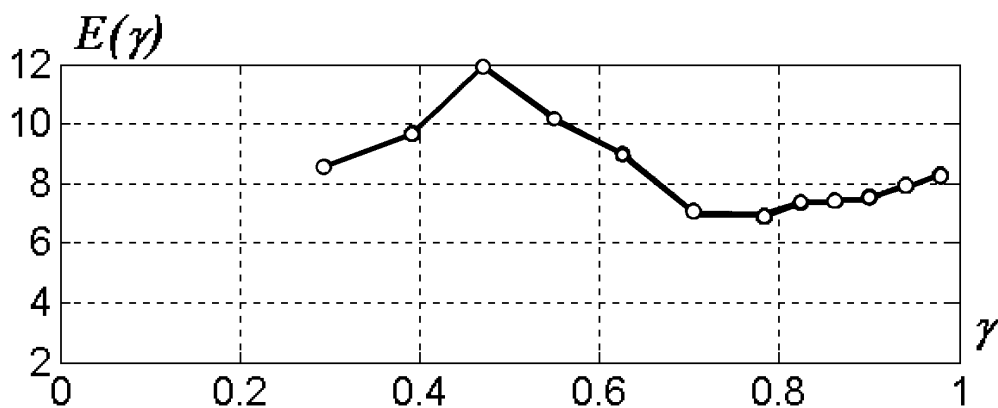


Рис. 4.3. Характеристика возбудимости маятника (эксперимент).

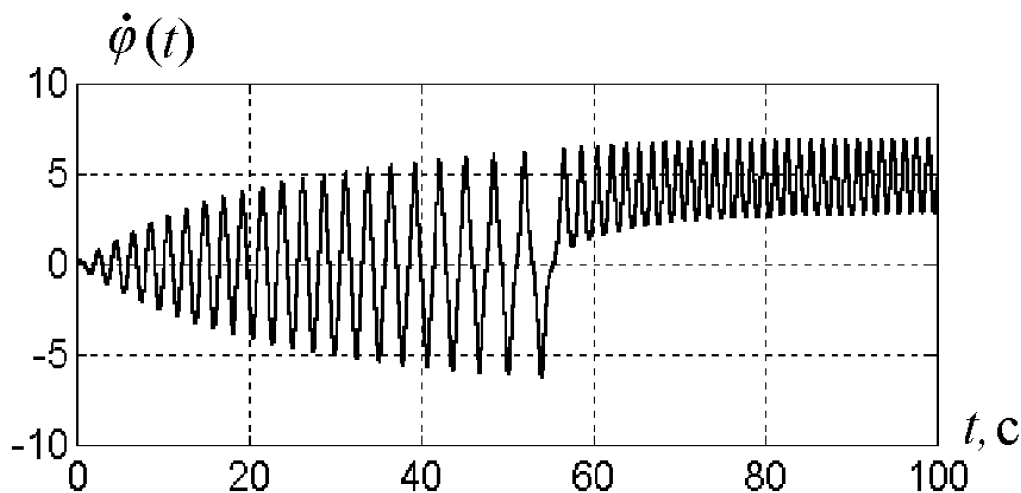


Рис. 4.4. Типичная траектория системы (4.32), (4.33) при $\gamma = 1.25$.

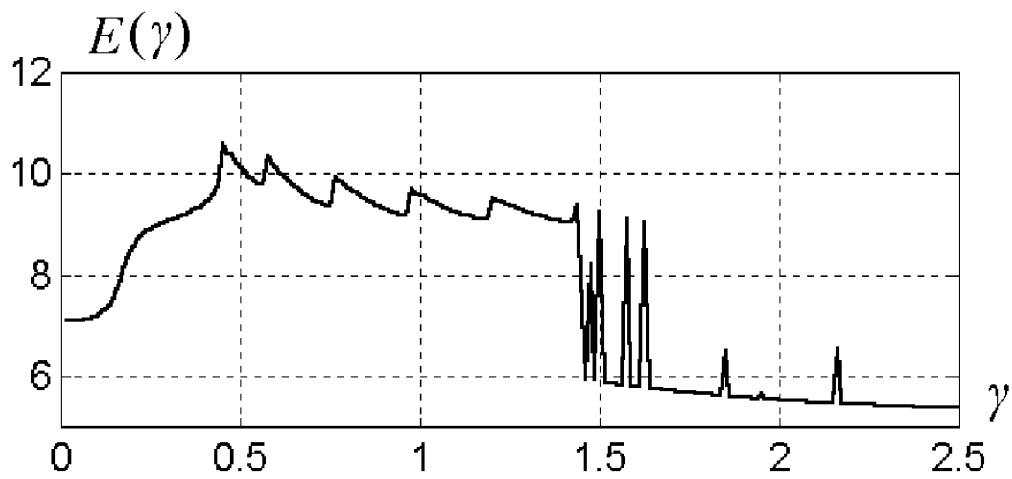


Рис. 4.5. Характеристика возбудимости двухмаятниковой системы (4.34) при $k = 0.25$.

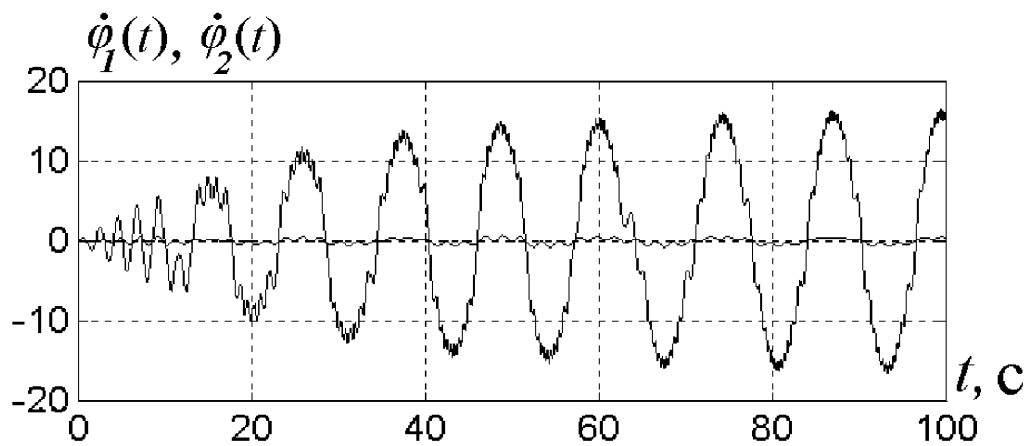


Рис. 4.6. Типичная траектория системы (4.34), (4.35) при $k = 0.25$, $\gamma = 1.25$.

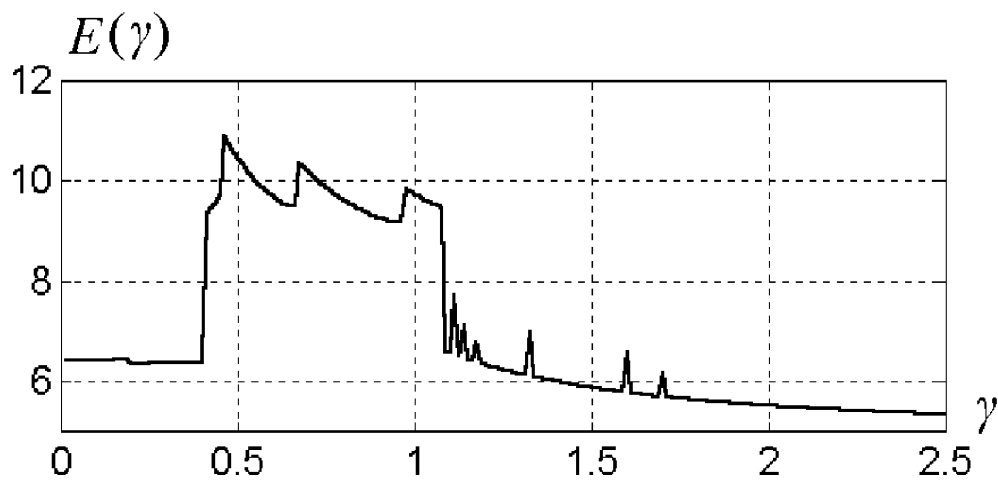


Рис. 4.7. Характеристика возбудимости двухмаятниковой системы (4.34) при $k = 0.5$.

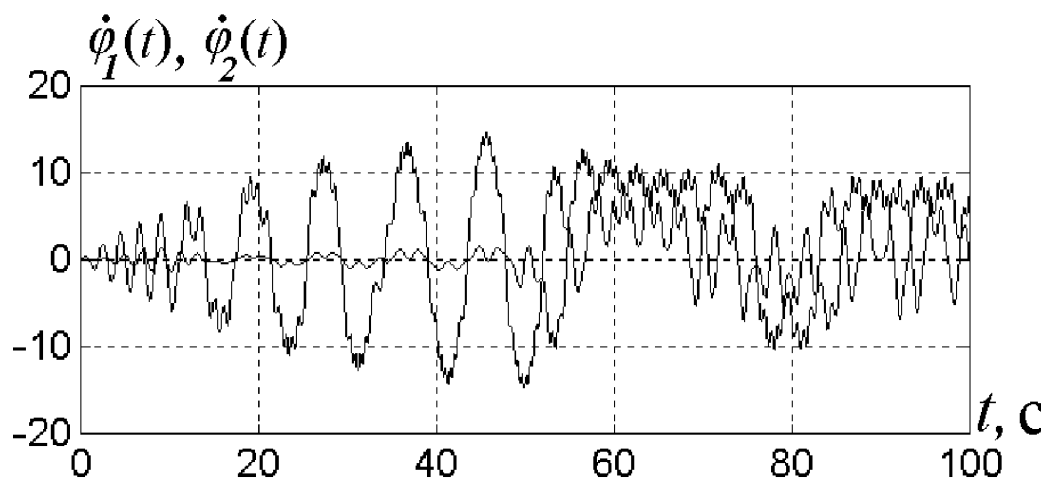


Рис. 4.8. Типичная траектория системы (4.34), (4.35) при $k = 0.5$, $\gamma = 1.25$.

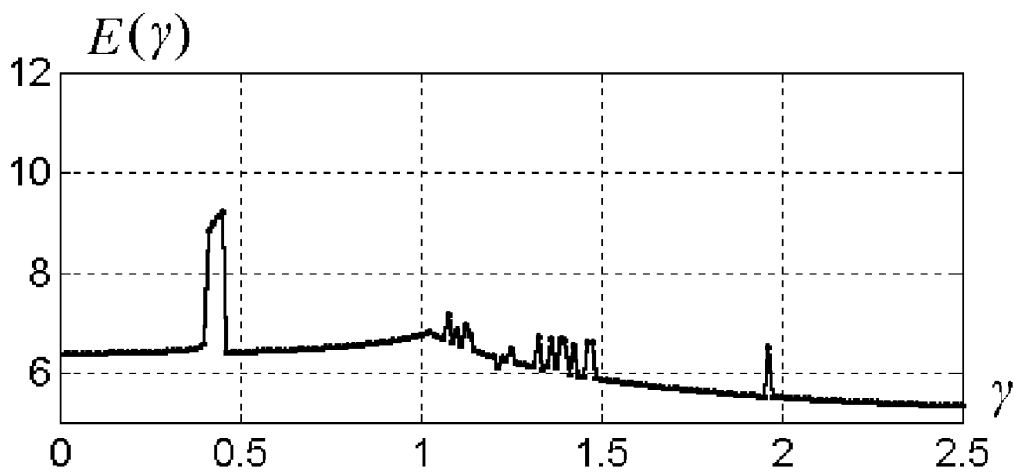


Рис. 4.9. Характеристика возбудимости двухмятниковой системы (4.34) при $k = 1.0$.

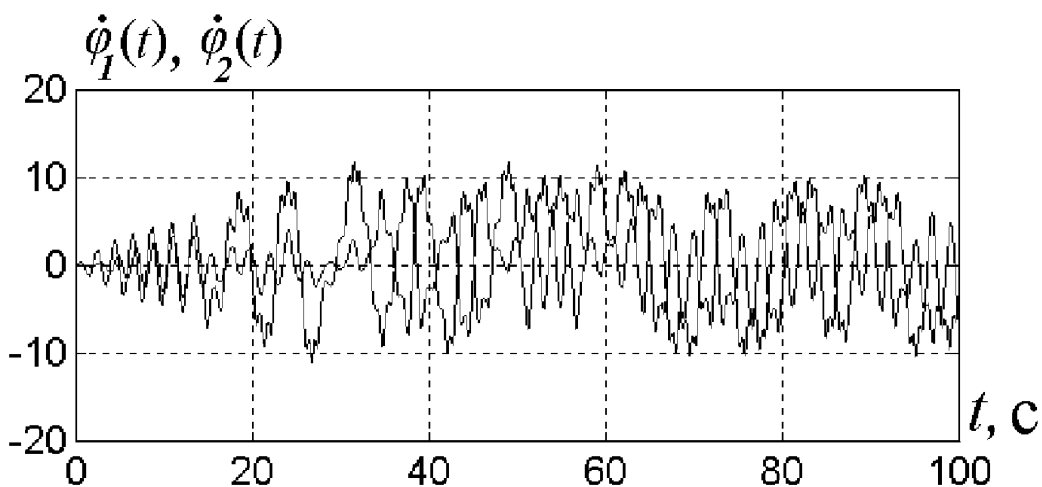


Рис. 4.10. Типичный процесс в двухмятниковой системе (4.34), (4.35) при $k = 1.0$, $\gamma = 1.25$.

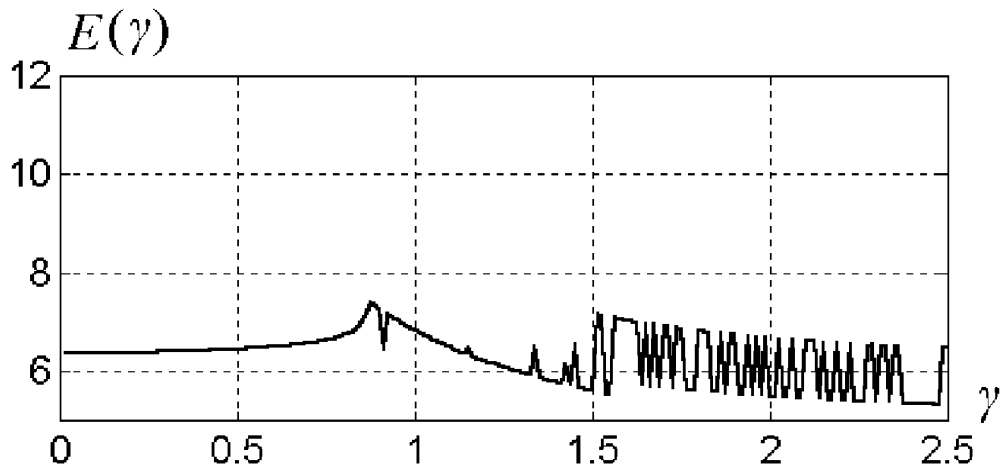


Рис. 4.11. Характеристика возбудимости двухмаятниковой системы (4.34) при $k = 5.0$.

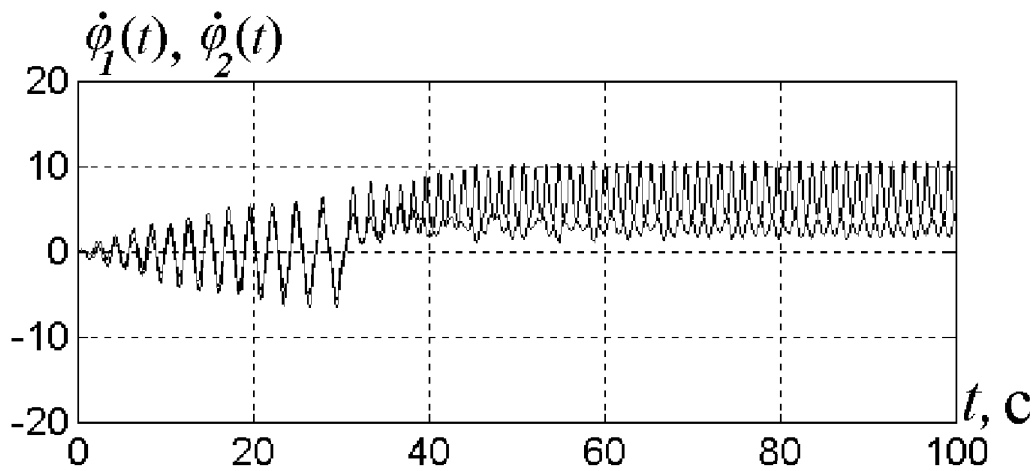


Рис. 4.12. Типичный процесс в двухмаятниковой системе (4.34), (4.35) при $k = 5.0$, $\gamma = 1.25$.

5 УПРАВЛЕНИЕ СИНХРОНИЗАЦИЕЙ

Явление синхронизации имеет многочисленные применения в механике и физике [14, 15, 70], в вибрационных технологиях [14, 15], в радиотехнике и технике связи [50, 53] и в других областях. В последние годы возрастает интерес к задачам управления синхронизацией, состоящим в обеспечении синхронного протекания процессов в системе путем введения дополнительных обратных связей. Подобные задачи рассматривались ранее для линейных систем [59, 150], а также для релейного закона «отключения опережающего ротора» в многороторном вибровозбудителе [10]. Применение современных методов синтеза законов управления позволяет расширить класс систем, обладающих синхронными режимами, повысить их устойчивость и робастность. С начала 1990-х годов значительно вырос интерес к так называемой хаотической синхронизации, когда каждая из синхронизируемых подсистем продолжает совершать сложные, хаотические колебания и после установления синхронного режима [6, 140, 196]. Предложен целый ряд способов использования эффекта хаотической синхронизации для повышения скрытности и надежности передачи информации (см. например обзоры и специальные выпуски журналов [32, 156, 158]). Изучаются закономерности и способы обеспечения синхронизации в массивах взаимодействующих осцилляторов, с применениями к синхронизации биологических объектов, искусственных и естественных нейронов и т.д. [70, 96, 208].

В настоящей главе даются общие определения синхронизации, охватывающие как случай самосинхронизации, так и случай управляемой синхронизации. Рассматриваются различные классы задач управления синхронизацией, демонстрирующие общие подходы к анализу и синтезу процессов синхронизации на основе методов пассивации и скоростного градиента.

5.1 Определения синхронизации

Как уже было сказано в главе 2, под синхронизацией понимается согласованное во времени функционирование двух или нескольких процессов или объектов. В частности, это может быть совпадение или сближение переменных состояния двух или нескольких систем,

или согласованное изменение некоторых количественных характеристик систем.

В определенных случаях синхронизация возникает в силу естественных свойств самой системы взаимодействующих объектов. Примером может служить *частотная синхронизация* колеблющихся или вращающихся тел (см. ниже). В таких случаях говорят о *самосинхронизации*.

В других случаях для согласования поведения объектов необходимо принесение в систему дополнительных связей или воздействий. Тогда говорят о *принудительной* или *управляемой синхронизации*. В этих случаях под синхронизацией понимают приведение процессов к синхронному протеканию.

В связи с бурным ростом интереса к проблемам синхронизации в различных областях науки и техники возникла парадоксальная ситуация, характерная для многих быстро развивающихся наук: отдельные группы ученых, работающие в определенных направлениях теории синхронизации, плохо знают об исследованиях в других направлениях и, как правило, на них не ссылаются [75]. В результате достижения одних групп исследователей остаются незамеченными представителями других групп и поэтому не используются ими. Более того, то, что представляется синхронизацией по мнению одних ученых, вовсе не является синхронизацией в глазах других исследователей.

Для рассмотрения различных вопросов синхронизации с единых позиций представляется полезным сформулировать общее определение синхронизации процессов или объектов. Первые варианты общих определений для периодических процессов были предложены в [14] (совпадение или кратность средних частот колебательных или вращательных движений) и в [30] (существование асимптотически устойчивого инвариантного тора размерности $n - m$, где m – степень синхронизации). В [14] было отмечено также, что под синхронизацией может пониматься равенство значений некоторых функционалов от координат систем. Например, в качестве функционалов могут выступать моменты обращения координат в нуль или достижения ими экстремальных значений. По мере изучения синхронизации хаотических процессов возник целый ряд новых вариантов свойства синхро-

низации: координатная (идентичная) синхронизация [11, 141, 196]; обобщенная синхронизация [212]; фазовая синхронизация [211] и т. д.

Общее определение свойств синхронизации, охватывающее как случай самосинхронизации, так и случай управляемой синхронизации было предложено в [103] и развито в работах [75, 104, 102]. Близкие, отличающиеся лишь в деталях варианты описаны в работах [108, 111]. В работе [164] исследуется определение, основанное на понятии инвариантного многообразия динамической системы и охватывающее координатную и обобщенную синхронизацию. Ниже, следуя [75, 102], приводятся общие определения синхронизации, позволяющие легко получать как частные случаи многие известные в литературе определения.

5.1.1 Кинематическое определение

Пусть имеется некоторое число k процессов (объектов), состояние каждого из которых в момент времени t характеризуется некоторым вектором $x^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, \dots, k$, где t изменяется на промежутке $0 \leq t < \infty$. Предположим сначала, что все вектор-функции $x^{(i)}(t)$ принадлежат одному и тому же функциональному пространству \mathcal{X} .

Пусть задана некоторая числовая характеристика данных процессов, определенная зависящими от времени отображениями $C_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$, где \mathcal{C} есть множество возможных значений C_t . Характеристика C_t называется *показателем синхронизации* или *индексом синхронизации*. Важно, что характеристика C_t предполагается одной и той же для всех объектов или процессов. Значение C_t может быть скаляром, вектором, матрицей, а также функцией, например частотным спектром процесса, на бесконечном или на некотором конечном, фиксированном или скользящем интервале времени. Для того, чтобы иметь возможность сравнивать значения характеристики для различных процессов, вводится набор не зависящих от времени вектор-функций $F_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, k$, называемых *функциями сравнения*.

Определение 5.1. Будем говорить, что имеет место *синхронизация процессов* $x^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, \dots, k$, *относительно характеристики* C_t и функций сравнения F_i , если существуют вещественные числа

(временные или фазовые сдвиги) $\tau_i, i = 1, \dots, k$ такие, что для всех $t \geq 0$ выполняются соотношения

$$F_1 (C_{t+\tau_1} [x_1]) = F_2 (C_{t+\tau_2} [x_2]) = \dots = F_k (C_{t+\tau_k} [x_k]). \quad (5.1)$$

Под *приближенной* синхронизацией (ε -синхронизацией) будем понимать случай, когда соотношения (5.1) выполняются лишь приближенно, с точностью до ε :

$$|F_i (C_{t+\tau_i} [x_i]) - F_j (C_{t+\tau_j} [x_j])| \leq \varepsilon \quad \forall i, j, \quad t \geq 0, \quad (5.2)$$

а под *асимптотической* синхронизацией – случай, когда погрешность выполнения соотношений (5.1) со временем исчезает:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |F_i (C_{t+\tau_i} [x_i]) - F_j (C_{t+\tau_j} [x_j])| = 0, \quad (5.3)$$

где $|\cdot|$ – евклидова норма в пространстве \mathbb{R}^m . \square

Если задан некоторый оператор усреднения $\langle \cdot \rangle_t$ на промежутке $0 \leq s \leq t$, то можно ввести понятие *синхронизации в среднем* как выполнение для всех $t \geq 0$ соотношений

$$\langle Q_s \rangle_t < \varepsilon, \quad (5.4)$$

где Q_s – некоторая скалярная функция (мера десинхронизации), характеризующая отклонение от синхронного режима. Часто оператор усреднения задают как интегральный оператор $\langle Q_s \rangle_t = \frac{1}{t} \int_0^t Q_s ds$, а меру десинхронизации Q_s – как средний квадрат отклонения от синхронного режима:

$$Q_t = \sum_{i,j=1}^k |F_i (C_{t+\tau_i} [x_i]) - F_j (C_{t+\tau_j} [x_j])|^2. \quad (5.5)$$

Введение меры десинхронизации является важным применением формального определения. Это дает возможность строить регулярные процедуры синтеза алгоритмов управления синхронизацией: определения управляющих воздействий, создающих в системе синхронный режим или изменяющих его характеристики. Такие алгоритмы могут быть разработаны, например, на основе метода скоростного градиента, см. [104, 140] и далее в настоящей главе.

Замечание 5.1. Соотношения (5.1) иногда удобнее записывать в виде $k - 1$ равенства

$$F_i (C_{t+\tau_i} [x^{(i)}(t)]) - F_k (C_{t+\tau_k} [x^{(k)}(t)]) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k - 1. \quad (5.6)$$

Замечание 5.2. Более общим понятием является *кратная синхронизация*, соответствующая случаю, когда соотношения (5.1) заменяются на

$$n_1 F_1 (C_{t+\tau_1} [x^{(1)}(t)]) = \dots = n_k F_k (C_{t+\tau_k} [x^{(k)}(t)]), \quad (5.7)$$

а (5.6) переходят в

$$C_t [x^{(i)}(t + \tau_i)] = n_k/n_i C_t [x^{(k)}(t + \tau_k)] \quad (i = 1, 2, \dots, k - 1), \quad (5.8)$$

где n_i – коэффициенты кратности синхронизации.

5.1.2 Виды синхронизации

Приведенное выше определение охватывает основные встречающиеся типы синхронного поведения процессов. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 5.1. Частотная (гюйгенсова) синхронизация. Этот вид синхронизации определен для процессов, для которых определено понятие *частоты* ω_i , в частности для периодических (колебательных или вращательных) процессов. Характеристикой C_t в этом случае является средняя по промежутку $0 \leq s \leq t$ частота $C_t = \omega_t = \langle \dot{x} \rangle_t$, а условием синхронизации – соотношение

$$\omega_t = n_i \omega^*,$$

где n_i – целые числа (кратности синхронизации); ω^* – так называемая *синхронная частота*. Поэтому функции сравнения естественно ввести как $F_i(\omega_t) = \omega_t/n_i$. При $n_i = 1, i = 1, \dots, k$ имеем простую (некратную) синхронизацию.

Данный вариант синхронизации может быть распространен на непериодические процессы, если могут быть корректно определены средние частоты. Также можно рассмотреть «кусочно-периодический» случай, когда множество всех моментов времени разбивается

на интервалы $\Delta_q = [t_q, t_{q+1})$, $q = 1, 2, \dots$, такие что все движения $y_i(\cdot)$ периодичны на каждом интервале Δ_q с частотами $\omega_i(t)$, представляющими собой кусочно-постоянные функции.

Расширенный вариант синхронизации по Гюйгенсу возникает, если заменить требование точного совпадения средних частот требованием согласования спектров в следующем смысле. Введем положительные функции масштабирования спектров $\alpha_i(\omega)$, $\beta_i(\omega)$ для каждой системы Σ_i , $i = 1, \dots, k$. Показатель синхронизации C определим как функцию J_ω :

$$C_\omega(y_i(\cdot)) = \alpha_i(\omega) S_i(\beta_i(\omega)\omega), \quad (5.9)$$

где S_i – спектральная плотность выходного сигнала $y_i(t)$, которая предполагается корректно определенной. Функции сравнения можно ввести, сопоставляя показателю синхронизации C набор значений C_ω для заданного набора частот. \square

Пример 5.2. Экстремальная синхронизация. Под экстремальной синхронизацией понимается одновременное или с определенной задержкой достижение скалярными процессами $x^{(i)}(t)$ своих экстремальных значений [75, 103]. Индексом синхронизации в этом случае является $C_i = t_i^*(t)$ – время достижения i -м процессом экстремума на промежутке $0 \leq s \leq t$. В качестве временных сдвигов τ_i могут выступать промежутки между моментами достижения первого экстремума i -м и первым процессами. Для векторных процессов можно рассматривать синхронизацию экстремумов соответствующих скалярных компонентов векторов $x^{(i)}(t)$ или некоторых скалярных функций от $x^{(i)}(t)$. Подобный вид синхронизации важен для ряда химических и биологических процессов. \square

Пример 5.3. Фазовая синхронизация. Системы фазовой синхронизации хорошо известны в радиотехнике и теории связи [50, 53]. Однако в традиционных технических применениях синхронизации подлежат периодические процессы, у которых частоты постоянны или являются периодическими функциями времени. В 1990-х годах в физике возрос интерес к исследованию процессов синхронизации хаотических процессов, что привело к введению обобщенных определений фазы и фазовой синхронизации, охватывающих случай хаотических процессов [211]. Наиболее естественный путь введения понятия фазы для хаотического процесса состоит в рассмотрении хо-

да процесса между моментами пересечения им некоторой поверхности (сечения Пуанкаре). При этом индексом синхронизации удобно считать значение фазы φ_t процесса $x(t)$, лежащее в промежутке от 0 до 2π и определяемое как $C_t[x] = \varphi_t = 2\pi \frac{t-t_n}{t_{n+1}-t_n} + 2\pi n$, $t_n \leq t < t_{n+1}$ где t_n – время n -го пересечения траектории процесса с сечением Пуанкаре [211].

При $k = 2$, выбирая $F_1(\varphi_t) = F_2(\varphi_t) = \varphi_t$, получаем *синфазную* синхронизацию. Если же задать функции сравнения как $F_1(\varphi_t) = \varphi_t$, $F_2(\varphi_t) = \varphi_t + \pi$, то получим *противофазную (антифазную)* синхронизацию.

Несколько более общее понятие синхронизации получается, если принять в качестве значения индекса синхронизации величину $C_t = t_*(t)$, где $t_*(t)$ – последний момент пересечения поверхности, не превосходящий момента t [103]. Этот способ позволяет охватить и случай, когда физически осмысленной фазы ввести не удастся из-за значительной нерегулярности процесса. В частности, если в качестве сечения Пуанкаре выбрать поверхность, уравнение которой определяет равенство нулю производной по времени некоторой скалярной функции от процесса, то получим экстремальную синхронизацию (см. выше). \square

Пример 5.4. Координатная синхронизация. С середины 1980-х стало использоваться определение синхронизации взаимосвязанных подсистем как совпадения координат векторов их состояний [11, 141]. Особенно популярным это определение стало после публикации статьи Л.Пекоры и Т.Кэрролла об управлении синхронизацией хаотических систем [196]. Очевидно, координатная синхронизация укладывается в предложенное выше общее определение, если ввести индекс синхронизации $C_t(x_i) = x_i(t)$, где через $x_i(t)$ обозначено значение вектора состояния i -й подсистемы в момент времени t , а функции сравнения взять тождественными: $F_i(x) = x$, $i = 1, \dots, k$. \square

Пример 5.5. Обобщенная (частичная) координатная синхронизация. Координатную синхронизацию из предыдущего примера часто называют *полной* или *тождественной*, подчеркивая необходимость совпадения всех фазовых координат подсистем. Для практики представляет интерес также случай, когда совпадает лишь часть фазовых координат подсистем или некоторые функции от фазовых координат $y_i = h(x_i)$ – выходы. Соответствующее понятие было

введено в [212] и названо *обобщенной синхронизацией*. Очевидно, обобщенная синхронизация укладывается в вышеописанную схему при выборе $C_t(x_i) = x_i(t)$, и $F_i(x) = h(x)$, $i = 1, \dots, k$. \square

Пример 5.6. Дискретная синхронизация. Иногда необходимо рассматривать дискретную во времени координатную синхронизацию, когда точное совпадение выходов имеет место только на некотором дискретном множестве моментов времени $\{t_q\}$, $q = 1, 2, \dots$. В этом случае индекс синхронизации $C[y_i(\cdot)]$ зависит от набора значений выходов ¹ процессов $y_i = h(x_i)$ в моменты t_q и может быть определен как бесконечная последовательность

$$C[y_i(\cdot)] = \{y_i(t_1), y_i(t_2), \dots\}.$$

Вариант дискретной координатной синхронизации встречается, если $C_q[y_i] = t_q$, где t_q – момент времени, в который некоторые координаты или выходы $y_i(t)$ приближаются к заданной точке, либо пересекают заданную поверхность. Другой вариант — если значение t_q определено как время достижения q -го локального экстремума сигнала. Этот вариант является частным случаем экстремальной синхронизации (см. пример 5.2) и сводится к предыдущему, если учесть, что условием экстремума является равенство нулю производной по времени.

Разумеется, должны быть наложены дополнительные условия, обеспечивающие корректную определенность всех вводимых величин. Достаточно потребовать, чтобы каждая траектория пересекала сечение бесконечное число раз и среди моментов пересечений встречались сколь угодно большие $t \geq 0$. Интересно, что таким образом строится обобщенное определение фазы для непериодического процесса, что позволяет рассматривать фазовую синхронизацию (пример 5.3) как вариант дискретной синхронизации. \square

Другие примеры. Приведенное определение позволяет за счет выбора индекса синхронизации и функций сравнения формализовать различные свойства процессов, которые интуитивно желательно отнести к синхронизации. Например, для определения координатной синхронизации колебательных процессов, протекающих синхронно, но имеющих разную амплитуду (размах) колебаний, можно ввести

¹ В частном случае может быть $y_i = x_i$.

индекс синхронизации с нормирующим множителем:

$$C_t[x] = \frac{x(t)}{\max_{0 \leq s \leq t} |x(s)|}.$$

Если на один из двух процессов с периодом T наложен нерегулярный шум, то в качестве индекса синхронизации можно использовать скользящее среднее процесса: $C_t[x] = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds$.

Наконец, если из процесса вычесть скользящее среднее или функцию от него, то можно исключить влияние временных трендов. Например, введение индекса $C_t[x] = x(t) - \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds$ позволит описать синхронное поведение с точностью до линейного тренда.

Обобщения. Хотя данные определения достаточно общие, они могут быть обобщены далее. Например, можно модифицировать определение так, чтобы охватить задачи, где процессы x_i принадлежат разным функциональным пространствам \mathcal{X}_i (например, $x_1(t) \in \mathbb{R}^3$ описывается моделью Лоренца, а $x_2(t) \in \mathbb{R}^2$ – уравнением Ван дер Поля). Для этого вводятся «функции предсравнения» $F'_i : \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{X}$, переводящие все процессы в одно пространство. После этого равенства, определяющие синхронный режим приобретают вид

$$F_1(C_{t+\tau_1}[F'_1(x_1)]) = F_2(C_{t+\tau_2}[F'_2(x_2)]) = \dots = F_k(C_{t+\tau_k}[F'_k(x_k)]). \quad (5.10)$$

Заметим, что для случая двух процессов ($k = 2$) функции предсравнения соответствуют «спрямляющему» преобразованию \mathcal{F} , использованному в работе [108]: $\mathcal{F} = (F'_1, F'_2)$. При этом, если индекс синхронизации взять как в примере 5.5: $C_t(x_i) = x_i(t)$, а одну из функций сравнения принять тождественной, то придем к определению работы [108], причем вторая функция сравнения будет играть роль функции синхронизации [108]. Это показывает, что определение [108] описывает понятие более общее, чем обобщенная координатная синхронизация (см. пример 5.5), но менее общее, чем понятие синхронизации, введенное выше, в определении 5.1.

Другое обобщение позволяет охватить ряд практических задач, где сдвиги времени $\tau_i, i = 1, \dots, k$ не являются константами, хотя и

стремятся к постоянным величинам (так называемым «асимптотическим фазам»). В этом случае вместо оператора сдвига для каждой функции выхода $y_i(\cdot)$ можно рассмотреть операторы репараметризации (замены) времени, определенные следующим образом:

$$(\sigma_{\tau_i}) y(t) = y(t'_i(t)),$$

где $t'_i : T \rightarrow T$, $i = 1, \dots, k$ – некоторые непрерывные вместе с обратными отображения (гомеоморфизмы) множества моментов времени в себя, такие что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t'_i(t) - t) = \tau_i. \quad (5.11)$$

Отметим, что в работе [11] вместо (5.11) предложено более мягкое условие $\lim_{t \rightarrow \infty} (t'_i(t)/t) = 1$, разрешающее сколь угодно большие фазовые сдвиги.

Однако в обобщениях нельзя заходить слишком далеко. Например, нельзя допускать в качестве репараметризаций времени произвольные гомеоморфизмы $t'(t)$, как это делается в определении устойчивости «по Жуковскому». Получаемое в таком случае формально свойство не будет отражать интуитивный смысл термина «синхронизация»: согласованное во времени протекание различных процессов.

В заключение заметим, что приведенное общее определение не только предоставляет терминологический и понятийный аппарат для сравнения и обсуждения различных свойств синхронизации, но и позволяет достичь иных целей, в частности разграничить синхронизацию и «не-синхронизацию». Например, в работе [172] синхронизация была определена как уменьшение фрактальной размерности вектора состояния совокупной системы, состоящей из взаимодействующих подсистем по сравнению с суммой размерностей векторов состояний подсистем. В соответствии с введенным выше определением такое свойство не является синхронизацией, поскольку оно определяется через характеристики процессов (размерности), не зависящие от протекания процессов во времени. Правильнее называть это свойство упорядоченностью, синергией.

Аналогично, нецелесообразно относить к синхронизации свойство коррелированности процессов, выражающееся в близости к еди-

нице коэффициента их взаимной корреляции

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{\langle x_1 \cdot x_2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1^2 \rangle \cdot \langle x_2^2 \rangle}}.$$

5.1.3 Динамическое определение

Для многих приложений представляет интерес более специализированное и формализованное определение синхронизации, которое в отличие от приведенного выше можно назвать *динамическим*, поскольку оно опирается на понятие динамической системы, принятое в теории систем [37].¹

Динамическое определение можно сформулировать следующим образом.

Рассмотрим k динамических систем Σ_i ($i = 1, \dots, k$), каждая из которых формально описывается шестеркой:

$$\Sigma_i = \{T, U_i, X_i, Y_i, \phi_i, h_i\}, \quad i = 1, \dots, k,$$

где T – общее множество моментов времени; U_i, X_i, Y_i – множества входов, состояний и выходов соответственно; $\phi_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow X_i$ – отображение переходов; $h_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow Y_i$ – отображение выходов.

Сначала рассмотрим случай, когда все U_i состоят из одной точки, т. е. входы отсутствуют и могут быть исключены из формулировок. Предположим, что дано l функционалов $g_j : \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \dots \times \mathcal{Y}_k \times T \rightarrow \mathbb{R}^1$, $j = 1, \dots, l$. Здесь \mathcal{Y}_i представляют множества всех функций на T со значениями в Y_i , т. е. $\mathcal{Y}_i = \{y : T \rightarrow Y_i\}$.

Будем считать, что множество моментов времени T является либо положительной полуосью $T = \mathbb{R}^1$ (непрерывное время), либо множеством натуральных чисел $T = 1, 2, \dots$ (дискретное время). Для любого $\tau \in T$ определим σ_τ как *оператор сдвига на τ* , т. е. $\sigma_\tau : \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathcal{Y}_i$ определено как $(\sigma_\tau y)(t) = y(t + \tau)$ для любых $y \in \mathcal{Y}_i$ и $t \in T$. Обозначим через $y_i(\cdot)$ функцию выхода системы Σ_i : $y_i(t) = h(x_i(t), t)$,

¹ Общее динамическое определение синхронизации было предложено в работе [103]. Первый вариант кинематического определения был предложен в книге [101] (переиздание книги [15] на английском).

$t \in T, i = 1, \dots, k$. Теперь можно дать формальное определение синхронизации. Пусть $x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ – решения систем $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ с начальными состояниями $x^{(1)}(0), \dots, x^{(k)}(0)$ соответственно – определены для всех $t \in T$.

Определение 5.2. Будем называть процессы $x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ в системах $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ *синхронизированными по отношению к функционалам* g_1, \dots, g_l , если тождества

$$g_j(\sigma_{\tau_1} y_1(\cdot), \dots, \sigma_{\tau_k} y_k(\cdot), t) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, l, \quad (5.12)$$

верны для всех $t \in T$ и некоторых $\tau_1, \dots, \tau_k \in T$.

Будем говорить, что системы $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ *приблизительно синхронизированы по отношению к функционалам* g_1, \dots, g_l , если существуют $\varepsilon > 0$ и $\tau_1, \dots, \tau_k \in T$, такие что неравенства

$$|g_j(\sigma_{\tau_1} y_1(\cdot), \dots, \sigma_{\tau_k} y_k(\cdot), t)| \leq \varepsilon, \quad j = 1, \dots, l, \quad (5.13)$$

выполнены для любого $t \in T$.

Будем также говорить, что системы $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ *асимптотически синхронизированы по отношению к функционалам* g_1, \dots, g_l , если для некоторых $\tau_1, \dots, \tau_k \in T$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_j(\sigma_{\tau_1} y_1(\cdot), \dots, \sigma_{\tau_k} y_k(\cdot), t) = 0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (5.14)$$

Приведенное «динамическое» определение отличается от общего определения 5.1 тем, что оно более специализировано, поскольку содержит указание на математические модели синхронизируемых процессов. С другой стороны, если условие синхронизации задано посредством некоторой характеристики (индекса синхронизации) процесса C_t , то его всегда можно переформулировать в духе определения 5.2, введя функционалы синхронизации как меры различия значений индекса для разных процессов. Покажем это. Поскольку в определении 5.1 выходные (наблюдаемые) переменные процессов не вводятся, можно считать, что пространства \mathcal{Y}_i идентичны и совпадают с множеством значений индекса \mathcal{C} , т. е. $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y} = \mathcal{C}$, а функции сравнения отсутствуют (т. е. тождественны). Тогда можно ввести функционалы $\{g_{ij}\}, i, j = 1, \dots, k$, например, так:

$$g_{ij}(x_i(\cdot), x_j(\cdot), t) = \text{dist}(C_{t+\tau_i}[x_i], C_{t+\tau_j}[x_j]),$$

где dist – метрика (расстояние между точками) в метрическом пространстве \mathcal{C} . Если различие значений индекса измеряется при помощи функций сравнения F_i , а значения индекса \mathcal{C}_t зависят от выходных (наблюдаемых) переменных y_i , то это отражается на выборе функционалов естественным образом:

$$g_{ij}(y_i(\cdot), y_j(\cdot), t) = \text{dist}(F_i(\mathcal{C}_{t+\tau_i}[y_i]), F_j(\mathcal{C}_{t+\tau_j}[y_j])).$$

Важно, чтобы выбор функционалов и характеристик синхронизации отражал существо соответствующих математических, физических или прикладных задач. В противном случае формализация может быть бесполезна или даже вредна. Аналогичное верно и для фазовых сдвигов τ_i , которые в некоторых задачах могут быть фиксированными, а в некоторых – неопределенными. Разумеется, возможность эффективного решения задач синхронизации зависит от выбранных функционалов и характеристик.

З а м е ч а н и е 5.3. Набор функционалов всегда возможно заменить одним функционалом, не меняя существа явления синхронизации. Например, можно выбрать функционал G следующего вида:

$$G(y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot), t) = \sum_{j=1}^l g_j^2(y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot), t). \quad (5.15)$$

З а м е ч а н и е 5.4. При практическом использовании явления синхронизации важно потребовать, чтобы соотношения (5.12) – (5.14) не нарушались (или хотя бы не нарушались значительно), когда некоторые параметры системы изменяются в некоторой области. Другими словами, свойства (5.12)– (5.14) должны обладать некоторой грубостью (робастностью). Однако при изменении параметров фазовые сдвиги могут измениться, не быть постоянными и даже не стремиться к постоянным величинам. С учетом этих обстоятельств (5.11) можно заменить на условие

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |t'_i(t) - t| \leq \tau_i,$$

исключающее, впрочем, неограниченный рост фазовых сдвигов и слишком расширительную трактовку понятия синхронизации (см. обсуждение в конце п.5.1.2). \square

Перейдем к рассмотрению более частных классов синхронных процессов, встречающихся в практических задачах. Во многих задачах множества U_i, X_i, Y_i являются конечномерными векторными пространствами и системы Σ_i могут быть описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями. Сначала рассмотрим простейший случай не связанных между собой систем без входов:

$$\Sigma_i : \quad \frac{dx_i}{dt} = F_i(x_i, t), \quad (5.16)$$

где F_i ($i = 1, \dots, k$) – некоторые векторные поля. Иногда синхронизация может происходить в не связанных между собой системах (5.16) (например, все точные часы синхронизируются в смысле частоты). Этот случай будет называться *естественной синхронизацией*. Однако более важным и интересным представляется случай синхронизации связанных между собой систем. В этом случае модели систем включают входы

$$\Sigma_i : \quad \frac{dx_i}{dt} = F_i(x_i, u_i, t) \quad (5.17)$$

и их следует дополнить моделями взаимосвязей. В некоторых случаях взаимосвязи описываются статическими зависимостями между входами и выходами систем:

$$\mathcal{U}_i : \quad u_i = U_i(y_1, \dots, y_l, t). \quad (5.18)$$

В других случаях система взаимосвязей является динамической. Например, в вибрационных установках вибровозбудители связаны через общее несущее тело [14], при синхронизации генераторов электростанций взаимосвязь может быть вызвана общей электрической нагрузкой и т. д. Модель системы с динамическими взаимосвязями имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = F_i(x_i, t) + \tilde{F}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, t), & i = 1, \dots, k, \\ \frac{dx_0}{dt} = F_0(x_0, x_1, \dots, x_k, t), \end{cases} \quad (5.19)$$

где векторное поле F_0 описывает динамику связующей системы; \tilde{F}_i – векторные поля, описывающие характер связей.

Как уже отмечалось выше, замечательное и широко используемое явление состоит в том, что синхронизация может присутствовать, т. е. тождество (5.12) может выполняться в системе взаимосвязанных процессов (5.19) без какого-либо внешнего воздействия, т. е. без дополнительных входов. В этом случае система (5.19) называется *самосинхронизированной по отношению к функционалам* g_1, \dots, g_l или индексам C_1, \dots, C_k . Аналогичные определения даются для приближенной и асимптотической самосинхронизации.

Во многих прикладных задачах важно, чтобы связи между системами $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ были слабыми, например, когда уравнения (5.19) могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = F_i(x_i, t) + \mu \tilde{F}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, t), & i = 1, \dots, k, \\ \frac{dx_0}{dt} = F_0(x_0, x_1, \dots, x_k, t), \end{cases} \quad (5.20)$$

где μ – малый параметр. Условия самосинхронизации в системах со слабыми взаимодействиями найдены для широкого класса динамических систем (5.20), в частности с периодическими по времени функциями F_i в правых частях [14, 15].

Однако во многих случаях самосинхронизация не наблюдается и встает вопрос: возможно ли приложить дополнительное воздействие, т. е. управление к системе, таким образом, чтобы достигалась цель (5.13) или (5.14)?

Поскольку приведенные до сих пор определения не содержат возможности управления системой, займемся формализацией задач управляемой синхронизации. Предположим для простоты, что все Σ_i ($i = 0, \dots, k$) – гладкие конечномерные системы, описываемые дифференциальными уравнениями с конечномерным входом, т. е.

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = F_i(x_i, t) + \tilde{F}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, u, t), & i = 1, \dots, k, \\ \frac{dx_0}{dt} = F_0(x_0, x_1, \dots, x_k, u, t), \end{cases} \quad (5.21)$$

где $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вход (набор управляющих переменных).

Задача *управляемой синхронизации по отношению к функционалам* $g_j, j = 1, \dots, l$ (соответственно *управляемой асимптотической синхронизации по отношению к функционалам* $g_j, j = 1, \dots, l$)

состоит в нахождении управления $u(t)$ и, возможно, от состояний x_0, x_1, \dots, x_n так, чтобы соотношения при условии, что (5.12) (соответственно (5.13), (5.14)) были выполнены для замкнутой системы. Задача управляемой синхронизации по отношению к характеристикам C_1, \dots, C_k формулируется аналогично. Таким образом, условия синхронизации (5.12), (5.13), (5.14) превращаются в цель синхронизации.

Замечание 5.5. Так как говорить об управляемой синхронизации имеет смысл лишь в случаях, когда отсутствует самосинхронизация, включение управления приводит к цели (5.12) только по окончании некоторого переходного режима. Поэтому мы будем иметь дело только с асимптотической синхронизацией с обратной связью (5.14). \square

Иногда цель может быть обеспечена без измерения каких-либо переменных системы, например периодическим во времени возбуждением. В этом случае функция управления $u = u(t)$ не зависит от состояния системы, а задача нахождения такого управления называется *задачей разомкнутой (open loop, feedforward) управляемой синхронизации*. Для периодических входов подобные задачи рассматриваются в рамках теории вибрационного управления [95]. Еще раньше стали разрабатываться методы анализа вынужденных колебаний нелинейных систем по действию периодического возбуждения, в частности, для изучения явлений захвата частоты и фазовой синхронизации (phase locking). Соответствующий вид синхронизации был назван *принудительной* или *внешней* синхронизацией [14] и изучался многими авторами, см. напр. [46, 50].

Более широкие возможности открываются, если измерению доступен вектор состояния или некоторые функции переменных состояния (выходы) системы. Нахождение функции управления в этом случае называется *задачей синхронизации с обратной связью (feedback synchronization)*.

Простейшей формой обратной связи является *статическая обратная связь*, где уравнение регулятора выглядит следующим образом:

$$u(t) = \mathcal{U}(x_0, x_1, \dots, x_k, t) \quad (5.22)$$

для некоторой функции $\mathcal{U} : \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Более общей формой является *динамическая обратная связь по состоянию*:

$$\frac{d\omega}{dt} = W(x_0, x_1, \dots, x_k, \omega, t), \quad (5.23)$$

$$u(t) = \mathcal{U}(x_0, x_1, \dots, x_k, \omega, t), \quad (5.24)$$

где $\omega \in \mathbb{R}^\nu$; $W : \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\nu$; $\mathcal{U} : \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Во многих практических задачах полная информация о состоянии систем $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ недоступна и только некоторые *переменные выхода* y_i ($i = 1, \dots, r$) доступны для использования в законе управления. В случае, когда Σ_i – гладкие конечномерные системы, задача синхронизации с обратной связью по выходу может быть поставлена как нахождение уравнений регулятора в виде статической обратной связи

$$u(t) = \mathcal{U}(y_1, \dots, y_r, t) \quad (5.25)$$

или в виде динамической обратной связи:

$$\frac{d\omega}{dt} = W(y_1, \dots, y_r, \omega, t), \quad (5.26)$$

$$u(t) = \mathcal{U}(y_1, \dots, y_r, \omega, t), \quad (5.27)$$

где $\omega \in \mathbb{R}^\nu$; $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$; $W : \mathbb{R}^{p_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_r} \times \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\nu$; $\mathcal{U} : \mathbb{R}^{p_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_r} \times \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, такой что цель (5.14) достигается в системе (5.21), (5.25) или (5.21), (5.26), (5.27).

Приведенное определение управляемой синхронизации позволяет формально ставить и решать задачи синтеза синхронизирующего управления. Некоторые из них будут рассмотрены далее.

5.2 Синтез управления синхронизацией

Для анализа и синтеза систем синхронизации можно использовать известные результаты теории динамических систем и теории управления. Остановимся на задачах асимптотической координатной синхронизации, которую мы будем понимать как выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t) - x_2(t)| = 0, \quad (5.28)$$

где x_1, x_2 – векторы состояний синхронизируемых подсистем.

Синхронизация и конвергентность. В теории устойчивости динамических систем аналогом свойства (5.28) является конвергентность. Как известно, система дифференциальных уравнений называется *конвергентной* [31], если она имеет единственное ограниченное решение, которое глобально асимптотически устойчиво, т. е. все решения системы сходятся к некоторому предельному режиму. Рассмотрим две идентичных системы:

$$\dot{x}_1 = F(x_1, t), \quad \dot{x}_2 = F(x_2, t). \quad (5.29)$$

Если $x_1(t), x_2(t)$ – произвольные решения систем, то их можно рассматривать как решения одной и той же системы $\dot{x} = F(x, t)$ с разными начальными условиями. Поэтому конвергентность системы $\dot{x} = F(x, t)$ влечет асимптотическую координатную синхронизацию идентичных систем (5.29). Стандартным достаточным условием конвергентности (а значит, и синхронизации) является [31] равномерная отрицательность всех собственных чисел симметризованной матрицы линеаризованной системы $\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} + \left[\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \right]^T$. Это условие интерпретируется как устойчивость «с запасом» собственных движений подсистем. Колебательные системы, однако, часто находятся на границе устойчивости или являются неустойчивыми (если колебания хаотические). В этих случаях и возникает вопрос об управлении синхронизацией.

Синхронизация и стабилизация. Особенности задач управляемой синхронизации проиллюстрируем для частного случая, когда модели синхронизируемых подсистем линейны по состояниям и управлениям:

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + f(t) + Bu_1, \quad (5.30)$$

$$\dot{x}_2 = Ax_2 + f(t) + Bu_2, \quad (5.31)$$

где u_1, u_2 – управляющие воздействия, $f(t)$ – внешнее воздействие (ограниченная функция времени), матрицы коэффициентов A, B имеют размеры $n \times n, n \times m$, соответственно. В этом случае уравнение для ошибки синхронизации $e = x_1 - x_2$ также линейно:

$$\dot{e} = Ae + B(u_1 - u_2) \quad (5.32)$$

и задача асимптотической синхронизации подсистем (5.30) и (5.31) сводится к стабилизации (обеспечению асимптотической устойчивости) уравнения ошибки (5.32). Очевидно, динамика ошибки синхронизации зависит от разности управлений $u = u_1 - u_2$, т. е. достаточно рассматривать случай одного управления и синхронизировать подсистемы при помощи линейной обратной связи вида $u_1 = Ke, u_2 = 0$. При этом на систему (5.31) управление не влияет и ее движения выступают как задающие, *эталонные* по отношению к движениям системы (5.30). Системы управления с эталонной моделью (systems with reference models) хорошо известны в теории управления (в зарубежной физической литературе такие системы называют системами типа «master-slave» или «drive-response»). Для достижения цели синхронизации следует выбирать матрицу обратной связи K так, чтобы матрица $A + BK$ была устойчива (гурвицева), т. е. чтобы все корни ее характеристического многочлена $\det(\lambda I - A - BK)$ имели отрицательные вещественные части. Как хорошо известно из теории управления, если пара матриц A, B управляема,² то выбором матрицы обратной связи K корни характеристического многочлена матрицы $A + BK$ можно сделать произвольными. При этом легко показать, что если матрица A не имеет «правых» собственных чисел, т. е. для синхронизации нужно только «сдвинуть» влево ее собственные числа, лежащие на мнимой оси, то, в силу непрерывной зависимости коэффициентов многочлена от его корней синхронизирующее управление может быть сколь угодно малым (в ограниченной области начальных условий).

Аналогичные выводы верны и в случае $u_1 = -u_2 = u/2$, когда управление воздействует на обе системы. Подобные задачи не типичны для теории управления, поскольку в этом случае желаемое, целевое движение системы не задано.³ Тем не менее, задача решается точно так же, поскольку уравнения ошибки совпадают.

Гораздо сложнее оказываются случаи, когда вместо векторов со-

² Критерием управляемости пары A, B является условие $\text{rank}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = n$ (критерий Калмана).

³ В теории управления изучалась другая, хотя и близкая задача: так называемое *согласованное (координирующее) управление* [60], когда наличие двух управлений (u_1, u_2) используется для достижения дополнительной цели: стабилизации опорного (усредненного) движения $(x_1 + x_2)/2$.

стояния x_1, x_2 наблюдению доступны лишь некоторые выходные переменные $y_1 = Cx_1, y_2 = Cx_2$, где C — прямоугольная $l \times n$ -матрица. Существующие необходимые и достаточные условия стабилизируемости по выходу слишком громоздки и не являются окончательными даже для линейных систем. Для формулировки простых достаточных условий удобно ввести передаточную матрицу $W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B$. Рассмотрим для простоты случай $l = m = 1$, когда вход и выход скалярны. В этом случае $W(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda)$, где $b(\lambda), a(\lambda)$ — многочлены степеней n_1, n , соответственно, причем $n_1 < n$, $a(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы A . Модель ошибки может быть преобразована к виду дифференциального уравнения n -го порядка $a(p)y = b(p)u$, где $p = d/dt$ — символ дифференцирования. Не умаляя общности, можно считать, что коэффициент a_n при λ_n равен единице: $a_n = 1$.

Простой достаточный критерий стабилизируемости системы обратной связью $u = Ky$ был установлен еще в конце 1940-х годов М.В. Мееровым: стабилизирующее K существует, если многочлен $b(\lambda)$ гурвицев (имеет все корни левее мнимой оси), а величина $d = n - n_1$ (разность порядков знаменателя и числителя передаточной функции), называемая *относительной степенью системы* равна единице или двум, причем при $d = 2$ коэффициент при λ^{n-1} положителен: $a_{n-1} > 0$. В качестве K можно выбрать достаточно большое по абсолютной величине число, знак которого противоположен знаку коэффициентов $b(\lambda)$ — числителя передаточной функции: $b_0 K < 0$. Отметим, что если $d \geq 3$ или $d = 2$, но $a_{n-1} \leq 0$, то стабилизация (а значит, и синхронизация) обратной связью по выходу неустойчивых систем невозможна.

Синхронизация и наблюдатели. Больше возможностей для достижения синхронизации возникает при отсутствии структурных ограничений на управление в виде матрицы B у одной из систем. Пусть, например, одна из систем (ведущая) реализована физически, но недоступна целенаправленному воздействию (управлению), а вторая система реализована в вычислительном устройстве и ее модель может быть задана более или менее произвольно. Вся система может опи-

⁴ Все коэффициенты многочлена $b(\lambda)$ имеют один знак в силу гурвицевости.

сываться, например, уравнениями

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + f(t), \quad y_1 = Cx_1, \quad (5.33)$$

$$\dot{x}_2 = Ax_2 + u(t). \quad (5.34)$$

Задача управления координатной синхронизацией в этом случае состоит в поиске функции $u = \mathcal{U}(y_1, x_2, t)$, обеспечивающей в замкнутой системе соотношение (5.28), интерпретируемое как восстановление состояния x_1 системы (5.33) с помощью оценки x_2 . Такая задача хорошо известна в теории управления и называется задачей *наблюдения*, а ее решение дается так называемым линейным *наблюдателем*

$$\dot{x}_2 = Ax_2 + K(y_1 - Cx_2) + f(t), \quad (5.35)$$

где K – матрица, подлежащая определению. При этом ошибка наблюдения $e(t) = x_1(t) - x_2(t)$ будет подчиняться уравнению $\dot{e} = (A - KC)e$, а собственные числа матрицы $A - KC$ за счет выбора матрицы K могут быть выбраны произвольно при выполнении условия наблюдаемости⁵ пары A, C .

Перечисленные выше системы синхронизации, основанные на стабилизации линейного уравнения ошибки, обладают полезными свойствами грубости и робастности. *Грубость* означает, что поведение системы мало меняется при малых изменениях ее модели, таких как учет неидентичности и нелинейности подсистем, взаимосвязей между ними, различия внешних воздействий и т.д. Более того, можно показать, что если функции, описывающие дополнительные, неучтенные при первоначальном синтезе системы погрешности входят в правые части уравнений системы аддитивно и ограничены по какой-то норме величиной Δ , то предельная (при $t \rightarrow \infty$) норма ошибки ограничена величиной $R\Delta$ при некотором $R > 0$, не зависящем от Δ , т. е. имеет тот же порядок, что и возмущающие факторы. Свойство грубости, сопровождающееся количественной оценкой отклонения поведения возмущенной системы от поведения невозмущенной, называется *робастностью*. Отметим особенность свойств грубости и робастности синхронизированных систем, состоящую в

⁵ Критерием наблюдаемости пары A, C является условие

$$\text{rank}\{C, A^T C, \dots, (A^T)^{n-1} C\} = n.$$

том, что эти свойства имеют место лишь по отношению к ошибке синхронизации, но не по отношению к поведению каждой из подсистем. Отдельные подсистемы при возмущении могут терять устойчивость и некоторые из их переменных могут неограниченно расти (например, маятники могут перейти во вращательный режим), но отклонение от синхронизма (ошибка синхронизации) будет оставаться ограниченным.

Синхронизация нелинейных систем. В физических задачах наибольший интерес представляет синхронизация сложных движений, возникающих в нелинейных системах. Опишем коротко некоторые способы решения задач управления синхронизацией нелинейных систем. Для простоты предположим, что имеются две подсистемы, описываемые аффинными моделями:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)u_1, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2) + g_2(x_2)u_2.\end{aligned}\tag{5.36}$$

Исходные подсистемы не связаны между собой. Поставим задачу координатной синхронизации подсистем: найти алгоритм управления

$$u_i = U_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2,\tag{5.37}$$

такой, чтобы обеспечивалась цель управления (5.28). Решение задачи тривиально, если правые части (5.36) можно изменять произвольно и независимо, т. е. если $m = n$, $g_1(x_1) = g_2(x_2) = I_n$, где I_n – единичная $n \times n$ -матрица. Тогда, взяв, например, $u_1 = 0$, $u_2 = K(x_1 - x_2)$, где $K > 0$ – коэффициент усиления, получим уравнение ошибки в виде

$$\dot{e} = f(x_1(t)) - f(x_1(t) - e) - Ke,\tag{5.38}$$

в котором $x_1(t)$ – заданная функция времени, являющаяся решением первого уравнения (5.36) при $u_1 = 0$. Если матрица Якоби $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$ ограничена в некоторой области Ω , содержащей решение системы (5.36), то при достаточно большом $K > 0$ собственные числа симметричной матрицы $A(x) + A^T(x) - 2KI_n$ лежат левее мнимой оси при $x \in \Omega$. При этом система будет обладать свойством конвергентности в Ω , т. е. все ее траектории, лежащие в Ω , сходятся при $t \rightarrow \infty$ к единственному ограниченному решению. Поскольку $e(t) \equiv 0$ является таким решением, то к нему и сходятся

все траектории. Таким образом, синхронизация двух систем имеет место при усилении взаимосвязи между подсистемами. При этом поведение каждой из систем может быть и оставаться сложным, например, хаотическим. На самом деле для синхронизируемости систем не нужны гладкость правых частей и существование матрицы Якоби: достаточно потребовать выполнения условия Липшица $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ для некоторого $L > 0$.

Аналогичным образом для систем с условием Липшица можно построить и нелинейный наблюдатель, так называемый *наблюдатель с большим коэффициентом усиления* (high-gain observer)

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2) + Kg_2(x_2)(y_1 - Cx_2), \quad (5.39)$$

где $y_1 = Cx_1$. Работать такая система будет лишь при определенных ограничениях на L [176].

Оригинальная схема построения наблюдателей в задаче синхронизации нелинейных систем предложена в 1990 г. Л. Пекорой и Т. Кэрроллом [196]. Схема применима, если при разбиении уравнений динамики системы на группы, соответствующие наблюдаемым переменным y_1 и ненаблюдаемым переменным z_1

$$\dot{y}_1 = F_y(y_1, z_1), \quad (5.40)$$

$$\dot{z}_1 = F_z(y_1, z_1) \quad (5.41)$$

вторая подсистема (5.41) обладает свойством конвергентности относительно z_1 . Тогда можно вектор наблюдаемых переменных y_1 непосредственно ввести в уравнение наблюдателя, имеющего вектор состояния z_2 и описываемого уравнением

$$\dot{z}_2 = F_z(y_1, z_2). \quad (5.42)$$

Из конвергентности следует, что $z_1(t) - z_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и, следовательно, в качестве оценки вектора состояния системы (5.40), (5.41) можно принять вектор (y_1, z_2) . Условием работоспособности схемы может служить достаточное условие конвергентности (см. выше): собственные числа матрицы

$$\frac{\partial F_z(y, z)}{\partial z} + \left[\frac{\partial F_z(y, z)}{\partial z} \right]^T,$$

равномерно отрицательны при всех y, z . Это условие легче поддается проверке, чем условие отрицательности условных ляпуновских показателей, предложенное в [196]. Обоснование для более общего случая можно найти в [140].

Интересно, что схему Пекоры—Кэрролла можно представить как предельный случай наблюдателя с большим коэффициентом усиления, имеющего структуру

$$\dot{y}_2 = F_y(y_2, z_2) + K(y_1 - y_2), \quad (5.43)$$

$$\dot{z}_2 = F_z(y_2, z_2). \quad (5.44)$$

Действительно, переписав уравнение (5.43) в виде

$$\varepsilon \dot{y}_2 = \varepsilon F_y(y_2, z_2) + (y_1 - y_2), \quad (5.45)$$

где $\varepsilon = 1/K$ – малый параметр, замечаем, что система (5.43), (5.44) относится к классу сингулярно-возмущенных. При этом вырожденная (редуцированная) система, получаемая при $\varepsilon = 0$ и описывающая медленные движения имеет вид $y_1 = y_2, \dot{z}_2 = F_z(y_1, z_2)$ т. е. совпадает с (5.42). Поскольку система быстрых движений (5.43) асимптотически устойчива при достаточно большом $K > 0$, ее решение $y_2(t)$ близко к $y_1(t)$ при достаточно больших $K > 0$ и $t > 0$, т. е. динамика наблюдателя (5.43), (5.44) определяется динамикой вырожденной системы (5.42).

Пример 5.7. Схема Пекоры—Кэрролла многократно применялась к передаче сообщений с помощью хаотических сигналов. В пионерской работе К. Куомо, А. Оппенгейма и С. Строгаца [117] используется передатчик сигналов на основе системы Лоренца, уравнения которой после масштабирования приведены к виду

$$\begin{cases} \dot{u} = \sigma(v - u), \\ \dot{v} = ru - v - 20uw, \\ \dot{w} = 5uv - bw \end{cases} \quad (5.46)$$

При выборе параметров $\sigma = 16, r = 45.6, b = 4.0$ система обладает хаотическим поведением.

Уравнения приемника взяты в соответствии со схемой Пекоры–Кэрролла в виде

$$\begin{cases} \dot{u}_s = \sigma(v_s - u_s), \\ \dot{v}_s = ru - v_s - 20u\omega_s, \\ \dot{w}_s = 5uv_s - b\omega_s. \end{cases} \quad (5.47)$$

Уравнения (5.47) похожи на (5.46), за исключением того, что правая часть (5.47) зависит не от «своей» переменной состояния u_s , а от переменной u , которая таким образом может рассматриваться как поступающий на приемник выходной сигнал передатчика. Система (5.46), (5.47) укладывается в схему Пекоры–Кэрролла при $y = u, z = (v, w)$.

При помощи функции Ляпунова вида $V = V(e_2, e_3) = 0.5e_2^2 + 4e_3^2$ в работе [117] дано простое доказательство того, что системы (5.46) и (5.47) синхронизируются, т. е. невязка между их соответствующими переменными состояния асимптотически стремится к нулю. Для доказательства выписываются уравнения ошибки

$$\begin{cases} \dot{e}_2 = -e_2 - 20ue_3, \\ \dot{e}_3 = 5ue_2 - be_3, \end{cases} \quad (5.48)$$

и вычисляется производная функции V в силу системы (5.48). Вычисления показывают, что

$$\dot{V} = e_2(-e_2 - 20ue_3) + 4e_3(5ue_2 - be_3) = -e_2^2 - 4be_3^2. \quad (5.49)$$

Таким образом, $\dot{V} \leq -kV$, где $k = \min\{2, 2b\} > 0$ независимо от величины сигнала $u = u(t)$ и переменные ошибки $e_2(t), e_3(t)$ сходятся к нулю экспоненциально. Поскольку $\dot{e}_1 = \sigma(e_2 - e_1)$, $\sigma > 0$, переменная e_1 также сходится к нулю экспоненциально т. е. (5.47) является асимптотическим наблюдателем для (5.46).

Для передачи двоичного сигнала коэффициент b передатчика (5.46) изменялся, принимая значение $b = 4.4$, соответствующее двоичной «единице», тогда как исходное значение $b = 4.0$ означало двоичный «нуль». При изменении величины b в (5.46) до $b = 4.4$ в системе (5.47) резко возрастает уровень сигнала рассогласования $e = u - u_s$, что позволяет установить факт передачи полезного сигнала. \square

Синхронизация и метод скоростного градиента. Для синтеза систем синхронизации можно применять и метод скоростного градиента, см. п. 2.4.2.

Пусть управляемая система описывается уравнениями (5.36). Введем целевой функционал

$$Q(x) = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|^2 \quad (5.50)$$

и вычислим скорость его изменения в силу уравнения системы:

$$\dot{Q}(x) = (x_1 - x_2)^T (f_1 + g_1 u_1 - f_2 - g_2 u_2).$$

Затем вычислим скоростной градиент:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial u_1} &= (x_1 - x_2)^T g_1, \\ \frac{\partial \dot{Q}}{\partial u_2} &= -(x_1 - x_2)^T g_2, \end{aligned}$$

и выпишем алгоритм скоростного градиента для функционала (5.50):

$$\begin{aligned} u_1 &= -\gamma(x_1 - x_2)^T g_1(x_1), \\ u_2 &= -\gamma(x_2 - x_1)^T g_2(x_2). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Как было замечено в [124], частными случаями алгоритма (5.51) являются описанные выше схемы. Например, алгоритм синхронизации линейной обратной связью (5.38) получается, если положить $g_1(x_1) = I_n$, $g_2(x_2) = 0$, $\gamma = K$, наблюдатель с большим коэффициентом усиления (5.39) получается, если положить $g_1(x_1) = 0$, $g_2(x_2) = g_2 C$, $\gamma = K$, а схема Пекоры–Кэрролла (5.42) для случая, когда выход y_1 входит в (5.42) линейно ($F_z(y_1, z_2) = f(z_2) + y_1 \bar{g}(z_2)$) получается, если положить $g_1(x_1) = 0$, $g_2(x_2) = gC$, $\gamma = 1$.

Условия, при которых алгоритм (5.51) обеспечивает синхронизацию, вытекают из общих теорем о достижении цели в системах на основе алгоритмов скоростного градиента [61, 80, 140].

5.3 Адаптивная синхронизация

5.3.1 Постановка задачи

Во многих случаях динамика синхронизируемых систем зависит от неизвестных параметров, недоступных при синтезе алгоритма син-

хронизации. В таких случаях для управления синхронизацией можно использовать законы адаптивного управления. Следуя [6, 124, 136], изложим общую постановку задач адаптивного управления синхронизацией и схему решения для двух подсистем на основе *метода пассивфикации*. Рассмотрим N взаимосвязанных подсистем, описываемых уравнениями вида

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_N, u, \theta, t) \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.52)$$

где $\theta \in \mathbb{R}^M$ – вектор неизвестных параметров. Пусть задана неотрицательная целевая функция $Q(x_1, \dots, x_N, t)$, малые значения которой соответствуют достижению синхронного режима. Выбор целевой функции определяется желаемым типом синхронизации. Например, целевая функция может быть выбрана в виде (5.5), (5.15) или (5.50). Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм адаптивного управления вида

$$u = U(x_1, \dots, x_N, t, \theta),$$

где $\theta \in \mathbb{R}^M$ – вектор настраиваемых параметров и алгоритм адаптации вида

$$\dot{\theta} = \Theta(x_1, \dots, x_N, t, \theta),$$

так, чтобы цель управления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x_1(t), \dots, x_N(t), t) = 0 \quad (5.53)$$

достигалась для всех $\theta \in \Xi$, где Ξ – множество допустимых значений θ .

Отметим, что поскольку правые части F_i в (5.52) различны, поставленная задача охватывает случай неидентичных подсистем, представляющий наибольший интерес в задачах управления синхронизацией.

5.3.2 Адаптивная синхронизация двух подсистем

Далее рассмотрим более подробно случай двух подсистем: $N = 2$, $x_i \in \mathbb{R}^n$ со скалярным управлением $u \in \mathbb{R}^1$ и зададим естественную цель синхронизации:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t) - x_2(t)| = 0. \quad (5.54)$$

Вычтем уравнение второй системы из уравнения первой и предположим, что в полученном уравнении для вектора ошибки можно выделить линейную и нелинейную части и представить модель ошибки в следующем виде:

$$\dot{e} = Ae + B \sum_{i=1}^N \theta_i \varphi_i(x_1, x_2, t) + Bu, \quad (5.55)$$

где A – постоянная $n \times n$ -матрица; B – постоянный n -мерный вектор; θ_i – постоянные, но неизвестные коэффициенты, а функции φ_i известны и измеряемы. Таким образом, предполагается наличие линейной и согласованной параметризации: как неизвестные параметры так и управление входят в уравнение ошибки линейно и, кроме того, пропорционально постоянному вектору B (например, нелинейности и управление входят только в одно из уравнений системы).

Модель ошибки (5.55) охватывает как традиционный для теории управления случай, когда управление входит только в одну из подсистем (5.52), так и случай, когда управление может воздействовать на обе подсистемы. В последнем случае предельное движение управляемой системы (синхронный режим), вообще говоря, неизвестно, даже если ошибка приблизилась к нулю.

Пусть измерению доступны, кроме функций $\varphi_i(x_1, x_2, t)$, выходные переменные $y_i = Cx_i$, $i = 1, 2$. Алгоритм адаптивного управления может быть выведен, а достижение цели установлено методом скоростного градиента. Зададим основной контур управления в виде

$$u = -\hat{\theta}_0(y_1 - y_2) + \sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i \varphi_i(x_1, x_2, t), \quad (5.56)$$

где $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_i$ – некоторые настраиваемые параметры. Выбор такого закона управления мотивируется надеждой на то, что он в принципе способен решить задачу, поскольку существуют такие значения настраиваемых параметров $\hat{\theta}_i$, $i = 1, \dots, N$, что цель управления достигается. Действительно, если выбрать

$$\hat{\theta}_{i*} = -\theta_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.57)$$

то при подстановке выбранных значений настраиваемых параметров $\hat{\theta}_{i*}$ и управления u в уравнение ошибки (5.55) все нелинейности

исчезнут, уравнение примет вид

$$\dot{e} = [A - \theta_0 BC] e. \quad (5.58)$$

и, если существует θ_{0*} такое, что уравнение (5.58) асимптотически устойчиво, то закон (5.56), (5.57) в принципе обеспечивает синхронизацию. Однако в любом случае воспользоваться таким законом нельзя, так как он зависит от неизвестных параметров.

Для синтеза алгоритма адаптации воспользуемся методом скоростного градиента. Учитывая, что система содержит линейную по e часть, выберем квадратичную целевую функцию $Q(e) = e^T P e$, $e = x_1 - x_2$, где $P = P^T > 0$ – некоторая симметричная положительно-определенная матрица. Вычисляя скорость изменения введенной функции в силу системы (5.55), а затем градиент от скорости по настраиваемым параметрам, получим

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= e^T P \dot{e} = e^T P \left[A e + B \sum_{i=1}^N \theta_i \varphi_i + B u \right] = \\ &= e^T P [A - \hat{\theta}_0 BC] e + e^T P B \sum_{i=1}^N (\theta_i - \hat{\theta}_i) \varphi_i, \\ \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \hat{\theta}_0} &= -e^T P B (y_1 - y_2), \quad \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \hat{\theta}_i} = -e^T P B \varphi_i. \end{aligned}$$

Для применимости алгоритма нужно, чтобы все величины в алгоритме управления были доступны измерению. По предположению, функции $\varphi_i(x_1, x_2, t)$ доступны измерению. Осталось обеспечить измеряемость величины $e^T P B$, являющейся линейной комбинацией переменных ошибки по состоянию системы. Очевидно, эта величина является измеряемой, когда она представляет собой линейную комбинацию переменных ошибки по выходу системы: $e^T P B = (y_1 - y_2)^T g = e^T C^T g$ для некоторого числа g , что эквивалентно соотношению $P B = C^T g$. Если это соотношение выполнено, то алгоритм адаптации, получаемый по методу скоростного градиента в дифференциальной форме принимает вид

$$\dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i (y_1 - y_2) \varphi_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.59)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_0 = -\gamma_0 (y_1 - y_2)^2, \quad (5.60)$$

где γ_i , $i = 1, \dots, N$ - коэффициенты адаптации, величина которых произвольна, а знак совпадает со знаком g .

В более общем случае, если выходы являются l -мерными векторами, то $g \in \mathbb{R}^l$ и алгоритм адаптации имеет вид

$$\dot{\theta}_i = -\gamma_i g^T (y_1 - y_2) \varphi_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.61)$$

$$\dot{\theta}_0 = -\gamma_0 [g^T (y_1 - y_2)] (y_1 - y_2), \quad (5.62)$$

где $\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, N$.

5.3.3 Условия достижения цели синхронизации

Для вывода условий работоспособности предложенной схемы понадобятся некоторые определения и результаты из теории управления.

Определение 5.3 [80]. Линейная система $\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u$, $y = \bar{C}x$ с передаточной матрицей $W(\lambda) = \bar{C}(\lambda I - \bar{A})^{-1}\bar{B}$, где u , $y \in \mathbb{R}^l$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *минимально-фазовой* если многочлен $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - \bar{A}) \det W(\lambda)$ гурвицев. Система называется *гипер-минимально-фазовой* если она *минимально-фазовая* и матрица $\bar{C}\bar{B} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda W(\lambda)$ симметрична и положительно определена. \square

Заметим, что для $l = 1$ система n -го порядка гипер-минимально-фазовая, если числитель ее передаточной функции – гурвицев многочлен степени $n - 1$ с положительными коэффициентами, что эквивалентно случаю $d = 1$ в условиях Меерова.

Лемма 5.1 (Лемма о пассивности) [61, 78, 80]. Пусть заданы матрицы $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, g$ размеров $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$, $m \times l$ и выполнено условие $\text{rank}(\bar{B}) = m$. Тогда для существования положительно определенной $n \times n$ -матрицы $P = P^T > 0$ и $l \times m$ -матрицы θ_* таких, что

$$PA_* + A_*^T P < 0, \quad P\bar{B} = \bar{C}^T g^T, \quad A_* = \bar{A} + \bar{B}\theta_* G \bar{C}$$

необходимо и достаточно, чтобы система $\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u$, $y = G\bar{C}x$ была гипер-минимально-фазовой.

Из леммы следует [61], что для гипер-минимально-фазовой системы всегда существует обратная связь по выходу $u = \theta_0 G y + \bar{u}$, где \bar{u} — новый, вспомогательный вход, такая, что система с обратной связью строго пассивна по отношению к выходу $\bar{y} = G y$, причем

функция запаса может быть выбрана в виде квадратичной формы: $V(x) = x^T P x$. Другими словами, гипер-минимально-фазовость необходима и достаточна для пассивности линейной системы обратной связью по выходу.

Определение 5.4. Вектор-функция $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *постоянно возбуждающей (ПВ)* на $[0, \infty)$, если она измерима и ограничена на $[0, \infty)$ и существуют $\alpha > 0, T > 0$ такие, что

$$\int_t^{t+T} f(s)f(s)^T ds \geq \alpha I_m$$

для всех $t \geq 0$. \square .

Постоянно возбуждающая вектор-функция отличается тем, что при $t \rightarrow \infty$ она не прижимается ни к какой гиперплоскости в m -мерном пространстве.

Лемма 5.2 (Лемма о постоянном возбуждении) [61, 78]. Рассмотрим вектор-функции $f, \tilde{\theta} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Предположим, что $\tilde{\theta}(t)$ непрерывно-дифференцируема, $d\tilde{\theta}(t)/dt \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и f – постоянно возбуждающая. Тогда, если $\tilde{\theta}(t)^T f(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то $\tilde{\theta}(t) \rightarrow 0$.

Условия адаптивной синхронизации сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1 [136]. Предположим, что траектории синхронизируемых систем с управлением вида (5.56) при ограниченных $e(t)$, $\hat{\theta}_i(t)$ ограничены и линейная система с передаточной функцией $W(\lambda) = gC(\lambda I - A)^{-1}B$ гипер-минимально-фазовая. Тогда все траектории системы (5.55), (5.56), (5.59), (5.60) ограничены и выполнена цель синхронизации (5.54). Если, кроме того, условие ПВ выполнено для вектор-функции $(\varphi_1(x_1, x_2, t), \dots, \varphi_N(x_1, x_2, t))$, то настраиваемые параметры сходятся к своим идеальным значениям:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\theta}(t) - \theta) = 0. \quad (5.63)$$

Доказательство теоремы 5.1. Для доказательства рассмотрим

функцию Ляпунова вида

$$V(x, \hat{\theta}_0, \hat{\theta}) = \frac{1}{2} e^T P e + \sum_{i=0}^N \frac{1}{2\gamma_i} |\hat{\theta}_i - \theta_i|^2 + |\hat{\theta}_0 - \theta_{*0}|^2 / (2\gamma_0), \quad (5.64)$$

где матрица $P = P^T > 0$ и число θ_{*0} подлежат определению. Вычисление \dot{V} показывает, что соотношение $\dot{V} < 0$ при $e \neq 0$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_0 = -\gamma_0 e^T P B g C e, \\ \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i e^T P B \varphi_i(x_1, x_2, t), \end{cases} \quad (5.65)$$

причем матрица P удовлетворяет неравенству Ляпунова $PA_* + A_*P < 0$, где $A_* = A + B\theta_0 C$. Вспоминая, что измеряемость всех величин, входящих в алгоритм адаптации эквивалентна выполнению соотношения $PB = C^T g$, и применяя лемму 5.1, получим, что $\dot{V} < 0$ при $e \neq 0$ тогда и только тогда, когда алгоритм адаптации имеет вид (5.59), (5.60) и система $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = gCx$ является гиперминимально-фазовой, что, по условию, имеет место. Поэтому функция $V(t) = V(x(t), \hat{\theta}_0(t), \hat{\theta}(t))$ ограничена. Следовательно, ограничены также функции $e(t)$, $\hat{\theta}_i(t)$ (так как $\varphi_i(x_1, x_2, t)$, $i = 1, \dots, N$ ограничены). Из уравнений (5.65) следует, что $\dot{V} = e^T (PA_* + A_*^T P) e \leq -\mu |e(t)|^2$ для некоторого $\mu > 0$. Теперь мы находимся в условиях леммы о частичной аттрактивности п. 3.1, где функция V имеет вид (5.64). Поскольку из ограниченности функции $V(t)$ следует ограниченность всех переменных состояния системы. Из леммы следует, что $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Для доказательства (5.63) заметим сначала, что из (5.54) и (5.59) следует, что $\tilde{\theta}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Дифференцированием (5.55), из ограниченности функций e , $\tilde{\theta}$, φ_d , \tilde{y} , $\hat{\theta}_0$ и их производных по времени заключаем, что $\ddot{e}(t)$ ограничено. Из леммы Барбалата [61] следует, что $\dot{e}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда и из (5.59) получим, что $\tilde{\theta}(t)^T \varphi_d(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Наконец, (5.63) следует из условия ПВ и леммы 5.2. ■

З а м е ч а н и е 5.6. Теорема 5.1 фактически дает необходимое и достаточное условие существования функции Ляпунова вида (5.64)

со свойствами

$$\begin{cases} V(x, \hat{\theta}_0, \hat{\theta}, t) > 0 \text{ при } e \neq 0, \\ \dot{V}(x, \hat{\theta}_0, \hat{\theta}, t) < 0 \text{ при } e \neq 0. \end{cases} \quad (5.66)$$

Это означает, что нет другого алгоритма адаптации, основанного на функции Ляпунова (5.64) со свойствами (5.66). \square

5.3.4 Синхронизация и адаптивные наблюдатели

Аналогично задаче об адаптивном управлении синхронизацией рассматривается задача о синхронизации на основе адаптивного наблюдателя [6, 137], в которой модель неуправляемой системы (передатчика) имеет вид

$$\dot{x}_d = Ax_d + \varphi_0(y_d) + B \sum_{i=1}^N \theta_i \varphi_i(y_d), \quad y_d = Cx_d, \quad (5.67)$$

где $x_d \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния передатчика; $y_d \in \mathbb{R}^l$ – вектор выходов (передаваемых сигналов); $\theta = \text{col}(\theta_1, \dots, \theta_N)$ – вектор параметров передатчика. Предполагается, что нелинейности $\varphi_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots, N$, матрицы A, C и вектор B известны.

Задача состоит в построении адаптивного наблюдателя (приемника) — динамической системы с входом $y_d(t)$, вектор выходов которой $w(t)$ состоит из оценок состояния передатчика $\hat{x}(t)$ и оценок параметров передатчика $\hat{\theta}$, обеспечивающего *цель наблюдения* – сходимость к нулю ошибок оценивания:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x_d(t)) = 0, \quad (5.68)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\theta}(t) - \theta) = 0. \quad (5.69)$$

Адаптивный наблюдатель строится в виде

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + \varphi_0(y_d) + B \left(\sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i \varphi_i(y_d) + \hat{\theta}_0 G(y_d - y) \right), \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \psi_i(y_d, y), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (5.71)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y_d \in \mathbb{R}^l$, $\hat{\theta}_i \in \mathbb{R}$, а $G \in \mathbb{R}^l$ является вектором весовых коэффициентов. Алгоритм адаптации (5.71) подлежит определению. Хотя формально задача наблюдения не является задачей управления, уравнение ошибки имеет как и ранее, вид (5.55), если ввести обозначения

$$e = x_d - \hat{x}, \quad \varphi_i = \varphi_i(y_d), \quad u = -\theta_0(y_d - C\hat{x}) + \sum_{i=1}^N \theta_i \varphi_i(y_d).$$

Алгоритм адаптации, синтезированный методом скоростного градиента, имеет вид:

$$\dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i(y - y_d)\varphi_i(y_d), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.72)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_0 = -\gamma_0(y - y_d)^2, \quad (5.73)$$

где $\gamma_i > 0$.

Аналогично теореме 5.1 доказывается следующее утверждение, дающее условия адаптивной синхронизации:

Теорема 5.2 [6, 137]. *Предположим, что все траектории системы (5.67) ограничены и линейная система с передаточной функцией $W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B$ гипер-минимально-фазовая. Тогда все траектории системы (5.70), (5.72), (5.73), ограничены и выполнена цель наблюдения (5.68). Если, кроме того, условие ПВ выполнено для вектор-функции $(\varphi_1(y_d(t)), \dots, \varphi_N(y_d(t)))$, то выполнена цель наблюдения (5.69): настраиваемые параметры сходятся к своим идеальным значениям.*

В работах [6, 137] было предложено применять адаптивный наблюдатель для передачи информации на основе хаотического несущего сигнала. При этом передаваемое сообщение кодируется изменением параметров $\theta_i, i = 1, \dots, N$. Преимуществом адаптивного приемника перед приемником, описанным в примере 5.7 является потенциально бóльшая отказоустойчивость: отсеиваются нарушения синхронизации, не вызванные изменением параметров передатчика (например, внезапные сбои в передатчике или канале связи). Исследование точности передачи сообщений в условиях ограниченных помех проведено в [7, 137].

Отметим, наконец, что для работы описанных схем адаптивной синхронизации существенна возможность пассивации уравнения ошибки, а значит, условие равенства единице относительной степени линейной части $d = 1$. В работе [138] предложены и обоснованы новые схемы адаптивной синхронизации на основе концепций расширенной ошибки и тюнеров высших порядков, позволяющие снять условие $d = 1$ за счет введения в структуру наблюдателя вспомогательных динамических систем — фильтров.

5.4 Управление синхронизацией двух осцилляторов

Рассмотрим задачу синхронизации колебаний двух связанных одномерных осцилляторов с одной степенью свободы (например, математических маятников). Такая модель встречается при описании различных физических и механических систем (см., напр., [46]). В предположении линейности диссипации система из двух связанных осцилляторов описывается уравнениями

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1(t) + \rho\dot{\varphi}_1 + \omega_0^2\Pi'(\varphi_1(t)) = k(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) + u(t), \\ \ddot{\varphi}_2(t) + \rho\dot{\varphi}_2 + \omega_0^2\Pi'(\varphi_2(t)) = k(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)), \end{cases} \quad (5.74)$$

где $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2$) — обобщенная координата i -го осциллятора (например, угол поворота маятника); $u(t)$ — управляющее воздействие (например, приложенный к первому маятнику момент внешних сил, выраженный в единицах углового ускорения; ω_0 — частота малых собственных колебаний изолированных осцилляторов; ρ — коэффициент трения (диссипации); k — коэффициент связи (например, коэффициент жесткости пружины).

Введем вектор состояния системы $x(t) = \text{col} \{ \varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2 \} \in \mathbb{R}^4$. Полная энергия системы (5.74) $H(x)$ с учетом энергии связи определяется выражением

$$H(x) = 0.5(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + (\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2)) + 0.5k(\varphi_2 - \varphi_1)^2. \quad (5.75)$$

Рассмотрим задачу возбуждения синхронных антифазных колебаний осцилляторов с заданной амплитудой с помощью дополнительной ограниченной обратной связи. Эту задачу можно трактовать как достижение заданного уровня энергии системы с дополнительным требованием того, чтобы осцилляторы имели противоположные фазы

колебаний. Синтез алгоритма управления выполним по методу скоростного градиента.

Для применения процедуры метода скоростного градиента введем целевые функции

$$\begin{aligned} Q_\varphi(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) &= 0.5 \delta_\varphi^2, \\ Q_H(x) &= 0.5(H(x) - H^*)^2, \end{aligned} \quad (5.76)$$

где $\delta_\varphi = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$; $H(x(t))$ – полная энергия системы, H^* – ее заданное значение.

Минимальное значение функции Q_φ соответствует требованию противофазности колебаний (во всяком случае при малых начальных фазах $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$ тождество $Q_\varphi(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) \equiv 0$ выполняется только тогда, когда $\dot{\varphi}_1 \equiv -\dot{\varphi}_2$). Минимизация Q_H означает достижение желаемой амплитуды колебаний.

Для синтеза алгоритма управления введем целевую функцию $Q(x)$ как взвешенную сумму Q_φ и Q_H , а именно

$$Q(x) = \alpha Q_\varphi(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) + (1 - \alpha) Q_H(x), \quad (5.77)$$

где α ($0 \leq \alpha \leq 1$) – заданный весовой коэффициент.

Вычисляя скоростной градиент, получаем следующий алгоритм управления:

$$u(t) = -\gamma (\alpha \delta_\varphi(t) + (1 - \alpha) \delta_H(t)) \dot{\varphi}_1(t), \quad (5.78)$$

где $\delta_\varphi(t) = \dot{\varphi}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t)$, $\delta_H(t) = H_t - H^*$, $\gamma > 0$ – коэффициент усиления. Результаты [6, 140, 220] к данной задаче, к сожалению, непосредственно не применимы, поскольку величина δ_φ не является инвариантом системы даже при $\rho = 0$ (она сохраняет свое значение на движениях свободной системы только на целевом множестве). Поэтому проблема аналитического исследования достижения цели в системе (5.74), (5.78) остается открытым. В то же время вычислительные эксперименты убеждают в работоспособности алгоритма синхронизации (5.78).

Приведем некоторые результаты моделирования процесса возбуждения и синхронизации колебаний по алгоритму (5.78) в системе из двух одинаковых маятников. При моделировании использованы

следующие значения параметров: $k = 5$, $\omega_0 = 0.4\pi$, $\gamma = 0.8$, $\alpha = 0.7$, $H^* = 4.0$. Все начальные условия приняты нулевыми, за исключением $\varphi_2(0) = 0.05\pi$.

Рассмотрим сначала случай $\rho = 0$. Из приведенных на рис. 5.1—5.4 графиков видно, что после некоторого переходного процесса оба маятника совершают колебания с противоположными фазами и обе целевые функции приближаются к желаемым значениям. Время переходного процесса как для H_t , так и для Q_φ составляет около 20 ед. Соотношение между временем переходного процесса по H_t и по Q_φ можно изменить, изменяя коэффициент α . Амплитуда управляющего воздействия может быть произвольно уменьшена снижением коэффициента усиления γ .

При наличии диссипации также удастся достичь синхронизации маятников на заданном уровне энергии, но величина управления уже не может быть произвольно уменьшена. Из рис. 5.5, где представлены результаты моделирования для $\rho = 0.05$ видно, что при достижении того же уровня энергии $H^* = 4.0$ амплитуда управляющего воздействия устанавливается на уровне $u_\infty = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |u(t)| \approx 0.5$. Расчет по формуле (4.24) дает величину того же порядка, т. е. согласие теории и эксперимента достаточно хорошее.

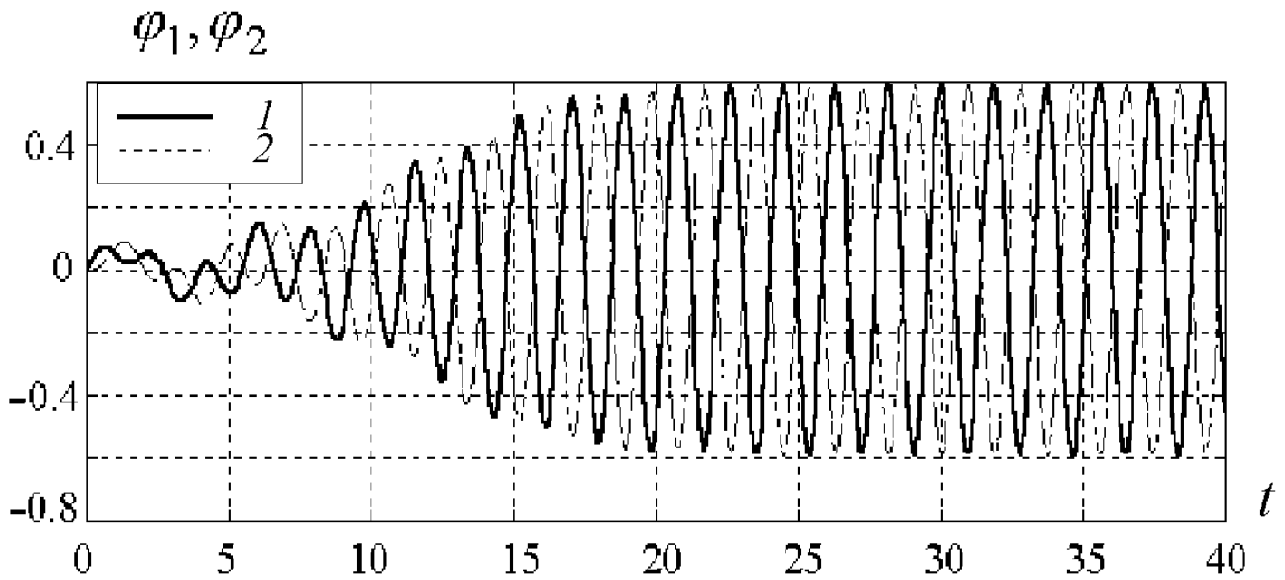


Рис. 5.1. Процесс возбуждения противофазных колебаний маятников.

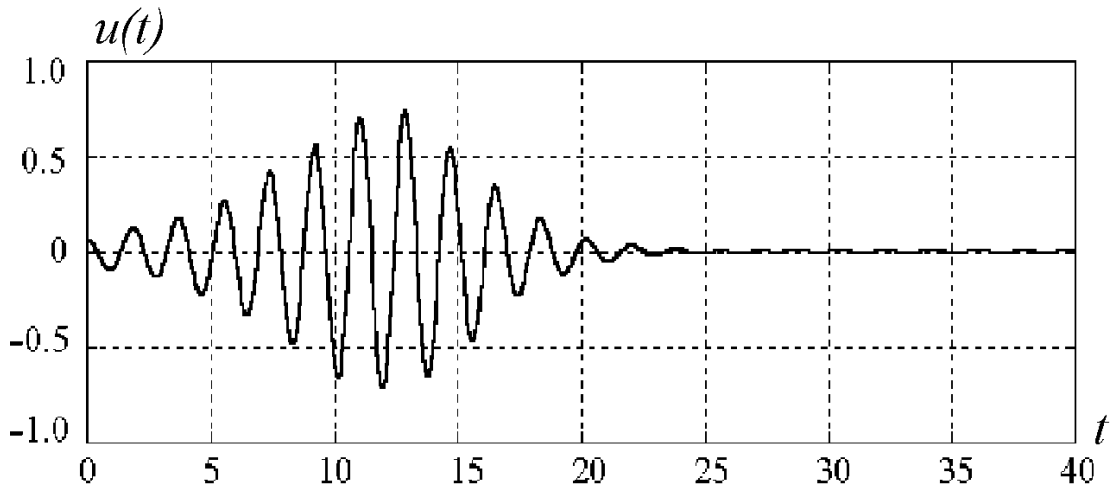


Рис. 5.2. Сигнал управления $u(t)$.

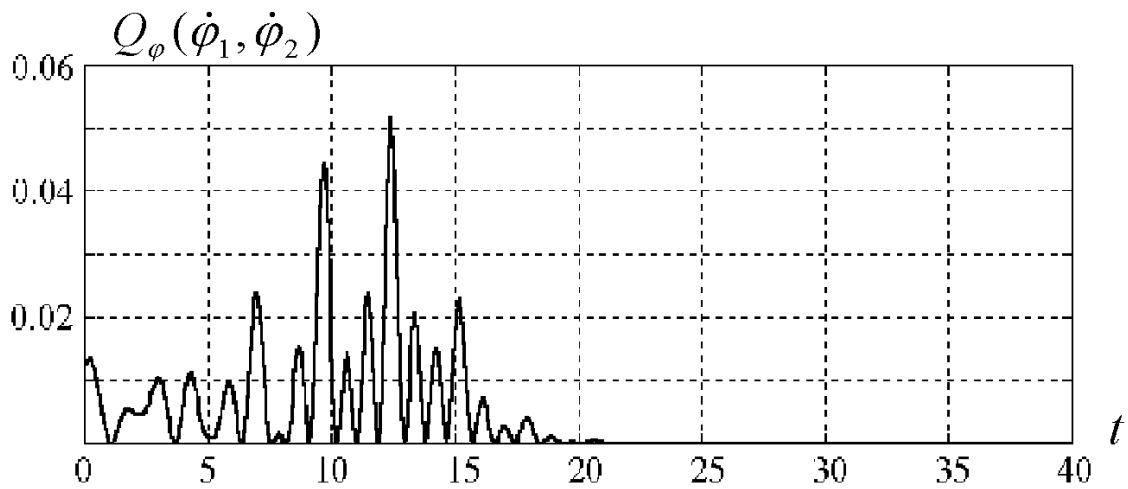


Рис. 5.3. Динамика целевой функции синхронизации $Q_\varphi(\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t))$.

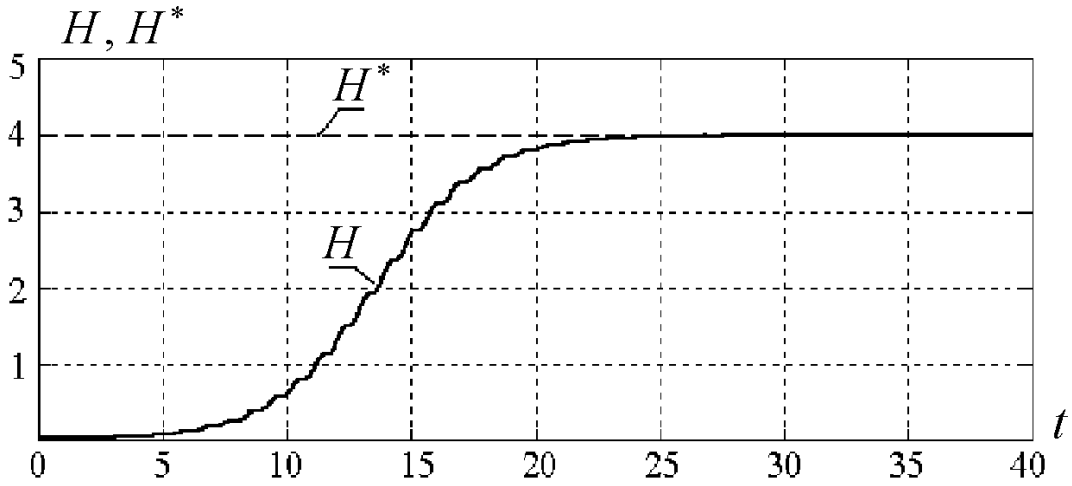


Рис. 5.4. Динамика энергии колебаний H_t .

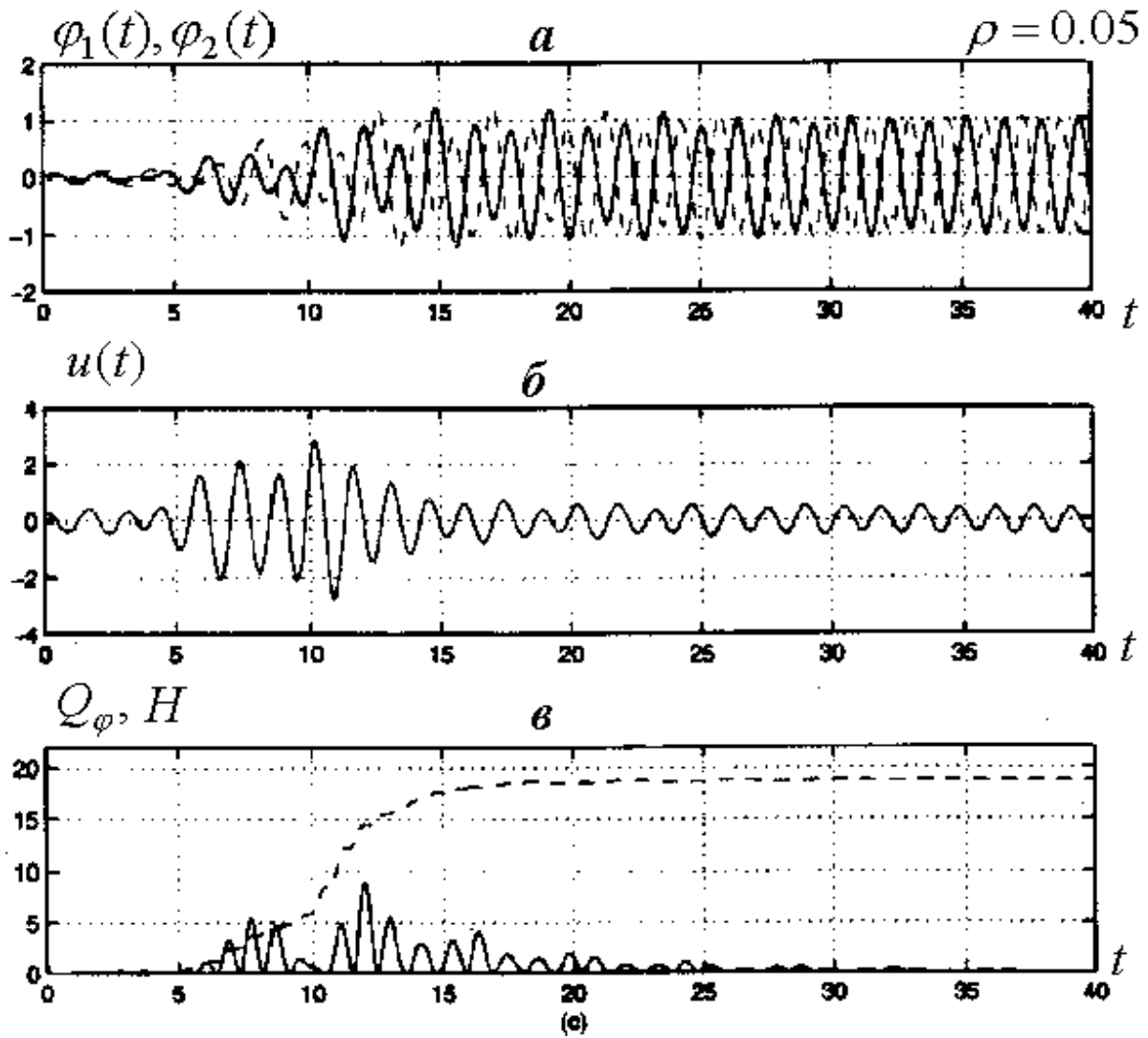


Рис. 5.5. Процессы синхронизации при наличии диссипации.

6 УПРАВЛЕНИЕ ХАОСОМ

Термин *хаос* происходит от греческого «*χάωσ*», означавшего в древнегреческой мифологии и философии беспорядочную смесь материальных элементов мира, из которой произошло все существующее. В современном языке термин употребляется для обозначения крайнего беспорядка, неразберихи, неорганизованности. Поэтому сочетание «управление хаосом» имеет интригующий смысл и вызывает дополнительный интерес к предмету.

В научной литературе термин «хаос», точнее — «детерминированный хаос», по-видимому, впервые был использован в 1975 г. в статье Т. Ли и Дж. Йорке «Период три рождает хаос» [175] и с тех пор широко употребляется. Известны различные математические определения хаоса, но все они выражают близкие по типу свойства динамических систем, связанные со «сверхчувствительностью» к начальным условиям: даже сколь угодно близкие траектории с течением времени расходятся на конечное расстояние, т. е. прогноз траектории на длительное время оказывается невозможен. При этом каждая траектория остается ограниченной, что противоречит интуитивному пониманию неустойчивости, основанному на опыте работы с линейными системами.

Тем не менее оказалось, что нелинейные детерминированные системы с подобными свойствами встречаются достаточно часто. Оказалось также, что модели, описывающие хаотическое поведение, встречаются во многих областях науки и техники, и в ряде случаев являются более подходящим инструментом описания нерегулярных колебаний и неопределенности, чем стохастические, вероятностные модели. Достаточно заметить, что широкий класс хаотических систем — это хорошо известные генераторы псевдослучайных чисел.

Тем более удивительной оказалась обнаруженная в 1990 г. тем же Дж. Йорке с соавторами [192] возможность существенного изменения свойств хаотической системы при помощи весьма малого изменения ее параметров. В частности, было показано путем компьютерного моделирования, что достаточно малым изменением параметра системы можно хаотическую траекторию преобразовать в периодическую и наоборот, если изменять параметр с учетом изменения текущего состояния системы, т. е. в контуре обратной связи.

В последующих публикациях эффект был подтвержден экспериментально [119] и указаны области его приложений: лазеры, системы связи, химические технологии, медицина (лечение аритмии и эпилепсии). Парадоксальность вывода (хаос нельзя прогнозировать, но им можно управлять) вызвала взрыв интереса исследователей и породила лавину публикаций, подтверждающих (как правило, путем компьютерного моделирования) возможность существенного изменения свойств разнообразных хаотических систем в природе и технике при помощи относительно небольших изменений параметров или внешних воздействий.

В настоящей главе приводятся краткие сведения об основных существующих методах управления хаотическими системами и о некоторых нерешенных задачах.

6.1 Что такое «детерминированный хаос»?

В течение нескольких десятилетий линейные модели колебаний и нелинейные модели с предельными циклами удовлетворяли потребности инженеров. Считалось, что они описывают все возможные типы колебаний детерминированных систем. Это убеждение поддерживалось и математическими результатами: например, известная теорема Пуанкаре–Бендиксона утверждает, что единственно возможные виды ограниченных установившихся движений в непрерывных системах второго порядка – это либо состояние равновесия, либо предельный цикл.

Однако в середине XX века сами математики обнаружили, что уже для систем третьего порядка это не так: в системе становятся возможными весьма сложные движения – ограниченные непериодические колебания. Настоящий переворот начался с работы физика Е. Лоренца [180], опубликованной в 1963 г., где было показано, что качественный характер явлений атмосферной турбулентности, описываемых сложными уравнениями в частных производных Навье–Стокса, может быть передан простой нелинейной моделью третьего порядка (*уравнение Лоренца*):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (6.1)$$

Решения системы (6.1) при некоторых значениях параметров (например, при $\sigma = 10$, $r = 97$, $b = 8/3$) выглядят как нерегулярные колебания. Траектории в пространстве состояний (фазовое пространство) могут приближаться к предельному множеству (*аттрактору*), имеющему весьма причудливое строение. Внимание физиков и математиков, а затем и инженеров к подобным моделям было привлечено после работы Д. Рюэля и Ф. Такенса [215], опубликованной в 1971 г., где такие аттракторы были названы «странными», а также работы Т. Ли и Дж. Йорке [175], где был введен термин «хаос» для обозначения подобных нерегулярных явлений в детерминированных системах. Основы математического аппарата для исследования хаотических явлений были заложены в 1960–1970-х годах отечественными научными школами: А.Н. Колмогоровым, В.И. Арнольдом, Д.В.Аносовым, В.К.Мельниковым, Я.Г. Синаем, Ю.И. Неймарком, Л.П. Шильниковым и их учениками.

В дальнейшем хаотическое поведение было обнаружено в огромном количестве систем в механике, лазерной физике и радиофизике, химии, биологии и медицине, в электронных цепях и т.д. Разработанные новые методы аналитического и численного исследования систем показали, что хаос – отнюдь не исключительный вид поведения нелинейной системы. Грубо говоря, хаотические движения возникают, когда траектории системы глобально ограничены и локально неустойчивы. В хаотической системе сколь угодно малое начальное расхождение траекторий не остается малым, а в течение некоторого времени растет экспоненциально. Частотный спектр хаотической траектории является непрерывным. Во многих случаях подобные нерегулярные, непериодические колебания лучше отражают свойства процессов, протекающих в реальных системах.

Свойство хаотичности движения по природе сложнее, чем, например, свойство устойчивости. Но даже для устойчивости существует несколько формально различных определений, каждое из которых подчеркивает какие-то свои особенности и оттенки. Это делает математическую теорию устойчивости содержательнее и ближе к практическим задачам. Неудивительно, что и для хаотических систем существует несколько различных определений. Приведем одно из простейших.

Рассмотрим динамическую систему в непрерывном времени

$$\dot{x} = F(x), \quad (6.2)$$

где $x = x(t) \in R^n$ – вектор состояния системы, $0 \leq t < \infty$.

О п р е д е л е н и е 6.1. Замкнутое множество $\Omega \subset R^n$ называется *аттрактором* системы (6.2), если Ω – минимальное притягивающее множество, а именно: а) существует открытое множество $\Omega_0 \supset \Omega$, такое что все траектории $x(t)$ системы (6.2), начинающиеся в Ω_0 , определены при всех $t \geq 0$ и стремятся к Ω при $t \rightarrow \infty$; б) никакое собственное подмножество Ω этим свойством не обладает. \square

О п р е д е л е н и е 6.2. Аттрактор называется *хаотическим*, если он ограничен и любая траектория, начинающаяся на нем, неустойчива по Ляпунову. \square

О п р е д е л е н и е 6.3. Система называется *хаотической*, если у нее существует хотя бы один хаотический аттрактор. \square

Аналогичные определения даются для систем, дискретных по времени:

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

Имеются и другие определения странных аттракторов и хаоса. Например, часто в определение странного аттрактора включают дополнительные требования: существование траекторий (или семейства периодических траекторий), всюду плотных в Ω , топологическую транзитивность и т.д., подчеркивающие наличие свойства «перемешивания» траекторий. Недавние результаты Г.А. Леонова [51] показывают, что вместо отсутствия устойчивости по Ляпунову при определении странного аттрактора целесообразно требовать отсутствия так называемой *устойчивости по Жуковскому*, допускающей разную скорость течения времени на разных траекториях системы. Однако строго доказать хаотичность системы непросто, даже пользуясь простейшим определением. Поэтому основным методом изучения хаотических систем остается численное исследование – имитационное моделирование и оценка различных характеристик.

Неустойчивость характеризует основное свойство хаотических колебаний, называемое «сверхчувствительностью», или «чувствительной зависимостью» от начальных условий: любые две сколь угодно

близкие траектории обязательно удаляются друг от друга на конечное расстояние.

Для задач управления могут оказаться существенными и другие свойства. В частности, важное значение имеет следующее свойство траекторий хаотических процессов, называемое *рекуррентностью*: со временем эти траектории попадают в сколь угодно малую окрестность своего положения в прошлом. Рассмотрим это свойство подробнее.

Определение 6.4. Функция $x : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *рекуррентной* (*recurrent*), если при любом $\epsilon > 0$ существует такое $T_\epsilon > 0$, что для любого $t \geq 0$ имеются $T(t, \epsilon)$, $0 < T(t, \epsilon) < T_\epsilon$ такие, что $|x(t + T(t, \epsilon)) - x(t)| < \epsilon$.

Хаотический аттрактор является замыканием всех содержащихся в нем периодических траекторий. Понятие аттрактора связано и со следующим сформулированным Г. Биркгоффом в 1927 г. критерием рекуррентности: любая траектория, принадлежащая компактному минимальному инвариантному множеству является рекуррентной; любое компактное инвариантное множество является замыканием некоторой рекуррентной траектории.

При исследовании хаотических процессов и решении задач управления ими широкое применение нашли «запаздывающие координаты» и отображение Пуанкаре. Коснемся этих понятий.

Пусть y системы (6.2) доступна измерению только скалярная выходная координата $y(t) = h(x(t))$. Вектором *запаздывающих координат* (*delayed coordinates*) называется вектор-функция $X(t) = [y(t), y(t - \tau), \dots, y(t - (N - 1)\tau)]^T \in \mathbb{R}^N$. Относительно этого вектора исходная модель системы (6.2) приводится к виду $\dot{X} = \bar{F}(X(t))$. Из *теоремы вложения* [29, 62, 64] следует, что если $N > 2n$, где n — порядок исходной системы (6.2), то в общем случае имеется диффеоморфизм между пространством состояний исходной системы и подпространством состояний преобразованной системы такой, что если исходная система имеет аттрактор некоторой размерности, то аттрактором такой же размерности будет обладать и преобразованная система.

Отображение Пуанкаре (*Poincaré map*), называемое также *точечное отображение*, *отображение последования* вводится в предположении, что имеется T -периодическое решение $\bar{x}(t)$ уравнения

(6.2), проходящее через некоторую точку x_0 (т. е. $\bar{x}(t+T) = x(t)$ для всех $t \geq t_0$ и $x(t_0) = x_0$). Пусть S — гладкая поверхность, определяемая уравнением $s(x) = 0$, где $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — гладкая скалярная функция. Предположим, что траектория трансверсально пересекает S в x_0 , т. е. выполнено $s(x_0) = 0, \nabla s(x_0)^T F(x_0) \neq 0$.

Можно показать, что решение, начинающееся в точке $x \in S = \{x : s(x) = 0\}$ поблизости от точки x_0 обязательно пересечет поверхность $s(x) = 0$ хотя бы еще один раз. Пусть $\tau = \tau(x)$ — время первого возврата и $x(\tau) \in S$ — точка первого возврата.

Перейдем к изложению методов управления хаотическими процессами, ограничиваясь процессами, протекающими непрерывно во времени.

6.2 Управление без обратной связи

Использование принципа управления без обратной связи, или «управления по программе», т. е. формирование сигнала управления в виде некоторой функции времени без учета значений управляемого процесса, основано на изменении поведения нелинейной системы под воздействием заранее выбранного внешнего сигнала $u(t)$. Этот сигнал может представлять собой либо определенное физическое воздействие на систему, например, внешнюю силу или поле, либо выражать изменение («модуляцию») некоторого параметра управляемой системы. Такой подход привлекателен простотой реализации, так как при нем не требуется проведения каких-либо измерений и установки датчиков. Данное обстоятельство имеет особенное значение при управлении сверхбыстрыми процессами, происходящими, например на молекулярном или атомном уровне, для которых отсутствует возможность проведения измерений состояния системы (по крайней мере — в режиме реального времени).

В механике возможность значительного изменения динамики системы при помощи периодического сигнала возбуждения известна давно (см. [38, 226] а также ссылки в [14, 15, 95]). В известных работах, однако, рассматривалась только задача стабилизации системы либо в заданном состоянии равновесия, либо относительно заданной («целевой», «опорной») траектории.

Обширная физическая литература посвящена исследованию влияния среднечастотных возбуждений, т. е. таких, частота которых близка к частоте собственных колебаний системы.¹ Еще в середине 1980-х годов была обнаружена возможность подавления хаоса путем подачи гармонического воздействия для системы Лоренца [33] и для системы четвертого порядка, служащей моделью динамики двух взаимодействующих популяций [2, 3].

Перечисленные результаты основаны на компьютерном моделировании. Первые попытки теоретического осмысления данного явления даны в работах [177, 200], в которых *метод Мельникова* применен к исследованию так называемого осциллятора Дуффинга–Холмса

$$\ddot{\varphi} - c\dot{\varphi} + b\varphi^3 = -a\dot{\varphi} + d \cos(\omega t). \quad (6.4)$$

С этой целью правая часть (6.4) рассматривалась как малое возмущение, действующее на невозмущенную гамильтонову систему. Аналитически вычислялась функция Мельникова, которая отражает скорость изменения расстояния между устойчивым и неустойчивым многообразиями при малых возмущениях. На ее основе получены значения параметров, при которых поведение системы становится хаотическим. Далее вводилось дополнительное возмущение, состоящее в изменении параметра нелинейности b , вместо которого взята функция $b(1 + \eta \cos \Omega t)$ и находилась новая функция Мельникова. Численные исследования этой функции показали, что хаотическое поведение можно подавить, если частоту Ω выбрать близкой к частоте исходного возбуждения ω . Этот эффект был подтвержден экспериментально с помощью установки, содержащей два постоянных магнита, электромагнитный вибратор и оптический датчик. Аналогичные и более точные результаты для осцилляторов с одной степенью свободы общего вида получены в [114, 115]. Развитие и аналитическое обоснование результатов [2, 3], а также обзор исследований по проблеме можно найти в [54].

Выбор функции возбуждения может быть связан с видом присущей системе нелинейности. Рассмотрим этот метод подробнее. Пусть

¹ Заметим, что для нелинейных систем понятие «частоты собственных колебаний» не имеет однозначного смысла, поскольку частота колебаний зависит от их амплитуды.

модель объекта управления имеет вид:

$$\dot{x} = f(x) + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m. \quad (6.5)$$

Положим, что $m = n$ и $\det B \neq 0$. Если $x_*(t)$ – желаемая траектория управляемого движения, то представляется разумным выбирать функцию возбуждения в виде: [154]

$$u_*(t) = B^{-1} (\dot{x}_*(t) - f(x_*(t))), \quad (6.6)$$

(так называемое «воздействие Хьюблера») поскольку при таком выборе функция $x_*(t)$ удовлетворяет уравнениям движения возбужденной системы. Уравнение ошибки $e = x - x_*(t)$ в этом случае имеет вид $\dot{e} = f(e + x_*(t)) - f(x_*(t))$. Поэтому, если линеаризованная система с матрицей $A(t) = \partial f(x_*(t))/\partial x$ равномерно устойчива в том смысле, что для некоторого $\lambda > 0$ и для всех $t \geq 0$ выполнено $A(t) + A(t)^T \leq -\lambda I_n$, то все решения (6.5), (6.6) сходятся к $x_*(t)$. Более общие условия сходимости приведены в монографии [140]. Если $m < n$ и матрица B – вырожденная, то аналогичный результат можно получить при выполнении следующего условия согласованности: значения вектор-функции $\dot{x}_*(t) - f(x_*(t))$ должны лежать в линейном подпространстве, порожденном столбцами матрицы B . Тогда соответствующее управление можно взять в виде $u_*(t) = B^+(\dot{x}_*(t) - f(x_*(t)))$, где B^+ есть псевдообратная к B матрица. Несмотря на то что выполнение условия равномерной устойчивости исключает возникновение хаотических (т. е. *неустойчивых*) траекторий, как отмечено в ряде статей, если области с неустойчивым поведением не являются доминирующими, то наблюдается некоторая локальная сходимость к хаотическим траекториям. Повысить степень устойчивости можно, вводя в (6.6) обратную связь по ошибке слежения (см. ниже п.6.5).

Обобщая, можно сказать, что к настоящему времени разработано множество методов хаотическими процессами в разомкнутом контуре (управления программным воздействием). Большинство из этих методов исследовано численно в частных случаях и для модельных задач. Однако общая задача возбуждения или подавления хаотических колебаний с помощью программного сигнала управления по-прежнему остается открытой.

6.3 Метод линеаризации отображения Пуанкаре (ОГУ-метод)

Как уже не раз отмечалось, взрыв интереса к управлению хаотическими процессами был вызван публикацией Е. Отта, С. Гребоджи и Дж. Йорке [192]. В их работе высказаны две ключевые идеи: использование при синтезе регулятора *дискретной* модели системы, основанной на линеаризации отображения Пуанкаре; использование *свойства рекуррентности* хаотических траекторий и применение управляющего воздействия только в моменты времени, когда траектория возвращается в некоторую окрестность требуемого состояния или заданной орбиты.

В основополагающей статье [192] метод, который теперь принято называть «ОГУ-методом» был описан для систем дискретного времени третьего порядка, а его реализация опиралась на текущее (в темпе с управляемым процессом) вычисление собственных векторов и собственных значений матрицы Якоби для отображения Пуанкаре. Позже были предложены многочисленные расширения и трактовки метода, который в современном изложении (см. напр., [107]) выглядит следующим образом.

Пусть управляемый процесс описывается уравнениями состояния

$$\dot{x} = F(x, u), \quad (6.7)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^1$. Под переменной u здесь, как правило, понимается изменяемый параметр системы, а не стандартная «входная» управляющая переменная, но для нелинейных систем эта разница не существенна с точки зрения задачи управления. Пусть требуемая (целевая) траектория $x_*(t)$ является одним из решений (6.7) при $u(t) \equiv 0$. Эта траектория может быть как периодической, так и хаотической, но в обоих случаях она рекуррентна. Построим поверхность (*сечение Пуанкаре*)

$$S = \{x : s(x) = 0\}, \quad (6.8)$$

проходящую через заданную точку $x_0 = x_*(0)$ трансверсально к траектории $x_*(t)$ и рассмотрим отображение $x \mapsto P(x, u)$, в котором $P(x, u)$ есть точка первого возвращения на поверхность S решения (6.7), начинающегося в точке x и полученного при постоянном входе u . Отображение $x \mapsto P(x, u)$ называется *управляемым отобра-*

жением Пуанкаре. Вследствие свойства рекуррентности $x_*(t)$ это отображение является вполне определенным, по крайней мере, для некоторой окрестности точки x_0 . (Строгое определение управляемого отображения Пуанкаре содержит ряд технических деталей [140]). Рассматривая последовательность таких отображений, получаем дискретную систему

$$x_{k+1} = P(x_k, u_k), \quad (6.9)$$

где $x_k = x(t_k)$, t_k – момент времени k -го пересечения поверхности S , а u_k – значение управления $u(t)$ на промежутке между t_k и t_{k+1} .

Следующий шаг синтеза закона управления состоит в замене исходной системы (6.7) линеаризованной дискретной системой

$$\tilde{x}_{k+1} = A\tilde{x}_k + Bu_k, \quad (6.10)$$

в которой $\tilde{x}_k = x_k - x_0$. Для полученной системы находится стабилизирующее управление, например в виде линейной обратной связи по состоянию $u_k = Cx_k$. Окончательно предлагаемый закон управления имеет вид

$$u_k = \begin{cases} C\tilde{x}_k, & \text{если } \|\tilde{x}_k\| \leq \Delta, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (6.11)$$

в котором $\Delta > 0$ – параметр алгоритма. Ключевой особенностью данного метода является приложение воздействия только в некоторой окрестности целевой траектории путем введения «внешней» зоны нечувствительности. Этим достигается малость управляющего воздействия, которое, согласно (6.11), по норме не превышает $\|C\tilde{x}_k\|$.

Результаты численных исследований подтверждают эффективность подхода. Часто, однако, отмечается низкая скорость сходимости процесса, что является платой за обеспечение глобальной стабилизации траекторий нелинейной системы с помощью малого управления.

Для того чтобы использовать OGY-метод, следует преодолеть два серьезных препятствия: неточность модели системы и неполноту измерений текущего состояния процесса. Второе из них можно устранить, если вместо используемого в исходном алгоритме вектора состояния x перейти к вектору запаздывающих координат, который вводится как $X(t) = [y(t), y(t - \tau), \dots, y(t - (N - 1)\tau)]^T \in \mathbb{R}^n$, где

$y = h(x)$ – измеряемый выход (например, одна из координат системы), а $\tau > 0$ – время запаздывания. Тогда закон управления принимает вид

$$u_k = \begin{cases} \mathcal{U}(y_k, y_{k,1}, \dots, y_{k,N-1}), & \text{если } |y_{k,i} - y_*| \leq \Delta, i = 1, \dots, N-1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (6.12)$$

где $y_{k,i} = y(t_k - i\tau)$.

Э. Хант [155] предложил использовать специальный класс алгоритмов (6.12), названный «эпизодической пропорциональной обратной связью» (*occasional proportional feedback*, ОРФ-алгоритм). ОРФ-алгоритм используется для стабилизации амплитуды предельного цикла. Он основан на измерении локального максимума (или минимума) выхода $y(t)$, т. е. для него сечение Пуанкаре определяется согласно (6.8), где $s(x) = \partial h / \partial x F(x, 0)$, что соответствует $\dot{y} = 0$. Если обозначить через y_k значение k -го локального максимума, то ОРФ-алгоритм примет вид

$$u_k = \begin{cases} K\tilde{y}_k, & \text{если } |\tilde{y}_k| \leq \Delta, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (6.13)$$

где $\tilde{y}_k = y_k - y_*$ и $y_* = h(x_0)$ – требуемая амплитуда (заданный уровень) колебаний.

Заметим, что пока не получено полного обоснования алгоритмов (6.12) и (6.13). Основная трудность состоит в оценке точности линеаризованного отображения Пуанкаре в запаздывающих координатах:

$$y_k + a_1 y_{k,1} + \dots + a_{N-1} y_{k,N-1} = b_1 u_k + \dots + b_{N-1} u_{k-N-1}. \quad (6.14)$$

Чтобы преодолеть первую из отмеченных выше проблем, связанную с неопределенностью линеаризованной модели объекта, в работе [192] и последующих публикациях предложено проводить оценку параметров модели в уравнениях состояния (6.10). Однако в работе [192] не был описан метод, позволяющий извлечь параметры модели (6.10) из результатов измерений выходного процесса. Эта проблема хорошо известна в теории идентификации, и она не простая, поскольку при идентификации в замкнутом контуре «хорошее» управление может привести к «плохому» оцениванию.

В работах [6, 27, 131, 132, 140] алгоритм OGY-метода модифицирован и обоснован для класса задач, когда $y_{k,i} = y_{k-i}$, $i = 1, \dots, n$. При этом измерение выходов и изменение управления происходит только в моменты пересечения с поверхностью сечения, $y_{k,i}^* = y^* = h(x_0)$. При синтезе регулятора использована модель вход-выход (6.14), имеющая меньше коэффициентов, чем модель (6.10). Для оценки параметров применен метод *рекуррентных целевых неравенств* В.А. Якубовича, позволяющий разрешить проблему идентификации в замкнутом контуре. Именно, предложено в закон управления ввести *внутреннюю* зону нечувствительности (inner deadzone). Алгоритм управления описывается условиями (6.12) и следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} &= \begin{cases} 1, & \text{если } |y_{k+1} - y_*| > \Delta_y \text{ и} \\ & |y_{k-i} - \bar{y}(t_{k-i})| < \bar{\Delta}, \quad i = 0, \dots, N-1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \\ \vartheta'_{k+1} &= \begin{cases} \vartheta_k - \gamma \operatorname{sign} b_0(y_{k+1} - y_*) \omega_k / \|\omega_k\|^2, & \text{если } \mu_{k+1} = 1, \\ \vartheta_k & \text{иначе;} \end{cases} \\ u'_{k+1} &= \vartheta_{k+1}^T \omega_{k+1} \\ \vartheta_{k+1} &= \begin{cases} \vartheta'_{k+1} & \text{если } |u'_{k+1}| \leq \bar{u} \text{ и } \mu_{k+1} = 1, \\ \vartheta'_{k+1} - (u'_{k+1} - \bar{u}) / \|\omega_k\|^2, & \text{если } u'_{k+1} > \bar{u} \text{ и } \mu_{k+1} = 1, \\ \vartheta'_{k+1} - (u'_{k+1} + \bar{u}) / \|\omega_k\|^2, & \text{если } u'_{k+1} < -\bar{u} \text{ и } \mu_{k+1} = 1, \\ \vartheta_k, & \text{если } \mu_{k+1} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.15)$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент усиления адаптации, \bar{u} – максимальное абсолютное значение управления; $\bar{\Delta}$ связано с размером «трубки» в пространстве состояния около базовой траектории $\bar{x}(t)$, где определена модель вход-выход (6.14).

Сочетание этой внутренней зоны нечувствительности с внешней, которая свойственна OGY-методу, приводит к робастности управления, основанного на идентификации по отношению как к неточности модели, так и к ошибкам измерения.

6.4 Метод обратной связи с запаздыванием (метод Пирагаса)

В последние годы возрос интерес к методу *обратной связи с запаздыванием* (*time-delayed feedback*), предложенному литовским физиком К.Пирагасом [206]. Им рассматривалась задача стабилизации τ -периодической орбиты нелинейной системы (2.1) с помощью простого закона обратной связи:

$$u(t) = K(x(t) - x(t - \tau)), \quad (6.16)$$

где K – коэффициент передачи, τ – время запаздывания. Если τ равно периоду существующего периодического решения $\bar{x}(t)$ уравнения (2.1) при $u = 0$ и решение $x(t)$ уравнения замкнутой системы (2.1), (6.16) начинается в точке $\Gamma = \{\bar{x}(t)\}$, то оно остается в Γ для всех $t \geq 0$. Удивительным, однако, является то, что $x(t)$ может сходиться к Γ , даже если $x(0) \notin \Gamma$.

Закон обратной связи (6.16) используется также для стабилизации периодического возбужденного процесса в системе (2.1) с T -периодической правой частью. Тогда τ следует брать равным T . Естественным образом метод распространяется на задачи стабилизации состояний равновесия и периодических траекторий дискретных систем.

Позже был предложен «расширенный метод Пирагаса», при котором управление имеет вид

$$u(t) = K \sum_{k=0}^M r_k (y(t - k\tau) - y(t - (k + 1)\tau)), \quad (6.17)$$

где $y(t) = h(x(t)) \in \mathbb{R}^1$ – измеряемый выход; r_k , $k = 1, \dots, M$ – настраиваемые параметры. При $r_k = r^k$, $|r| < 1$ и $M \rightarrow \infty$ алгоритм (6.17) принимает вид

$$u(t) = K(y(t) - y(t - \tau)) + Kru(t - \tau). \quad (6.18)$$

Несмотря на простой вид алгоритмов (6.16) – (6.18), аналитическое исследование замкнутой системы оказалось сложной задачей.

В работах М.Бассо, Р.Женезио и А. Тези [93, 94] исследована устойчивость возбужденного T -периодического решения системы Лурье с «обобщенным регулятором Пирагаса»

$$u(t) = G(p)(y(t) - y(t - \tau)), \quad (6.19)$$

где $G(p)$ ($p = d/dt$) – передаточная функция фильтра. С использованием методов теории абсолютной устойчивости (см., напр., [50]) в этих работах получены достаточные условия, которым должна удовлетворять передаточная функция линейной части управляемой системы, а также условия на крутизну нелинейной характеристики, которые должны быть выполнены, чтобы фильтр $G(p)$ был стабилизирующим. В работе [94] предложена процедура синтеза «оптимального» регулятора, максимизирующего размер области устойчивости.

В работе [229] получено простое необходимое условие стабилизируемости с помощью алгоритма Пирагаса (6.16) для одного класса дискретных систем («ограничение нечетности»). Условие распространено на более общий случай, а также на системы непрерывного времени независимо в работах [163, 183] на основе теории Флоке. Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица линеаризованной системы относительно заданного τ -периодического решения (матрица монодромии). Как известно, собственные числа матрицы $\Phi(\tau)$ (мультипликаторы) μ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ связаны с показателями Ляпунова τ -периодического решения ρ_i соотношениями $\rho_i = \tau^{-1} \ln |\lambda_i|$. Указанное необходимое условие заключается в том, что число вещественных собственных чисел матрицы $\Phi(\tau)$, больших единицы, не должно быть нечетным. Позже некоторые авторы получали и уточняли приближенные оценки границ значений коэффициента обратной связи K , обеспечивающих стабилизацию периодического решения (см. ссылки в [8]). Интересно, что полученная в [163] область значений K , обеспечивающих стабилизацию, включает сколь угодно малые значения K при малой степени неустойчивости $\max \rho_i$, и становится пустой (исчезает) при достаточно большом $\max \rho_i$.

Если в соотношении (6.18) выбрать $|r| > 1$, то получаемый алгоритм также можно применять, хотя получаемый регулятор становится неустойчивым. В работе [207] показано, что использование неустойчивого регулятора позволяет существенно ослабить ограничения на матрицу объекта $\Phi(t)$ и, в частности, снять «ограничение

нечетности».

Несмотря на существенную информацию о свойствах метода Пирагаса, полученную в последние годы, проблема нахождения достаточных условий, гарантирующих применимость исходного алгоритма (6.16), до сих пор остается нерешенной.

Недостатком закона управления (6.16) является его чувствительность к выбору параметров, особенно – к выбору времени запаздывания τ . Очевидно, если система T -периодическая и цель управления состоит в стабилизации вынужденного T -периодического решения, то обязательно следует выбирать $\tau = T$. Альтернативным эвристическим приемом является моделирование собственных процессов в системе при начальных условиях $x(0)$ до тех пор, пока текущее состояние $x(t)$ не приблизится к $x(s)$ при некотором $s < t$, т. е. пока не выполнится условие $|x(t) - x(s)| < \varepsilon$. Тогда выбор $\tau = t - s$ даст разумную оценку периода, а вектор $x(t)$ будет тем исходным состоянием, при котором начинается управление процессом. Этот подход, однако, часто приводит к завышенным значениям периода. Так как хаотические аттракторы имеют периодические решения с разными периодами, то важно найти и стабилизировать (с помощью малого управления) движение с наименьшим периодом. Эта проблема пока также остается открытой.

6.5 Методы линейного и нелинейного управления

Многие статьи посвящены применению к задачам управления хаосом традиционных подходов и методов автоматического управления. Иногда желаемой цели можно достичь даже с помощью простого пропорционального закона управления. Например, как показано на ряде примеров в работе [161], метод *комбинированного управления* (*open-plus-closed-loop*, OPCL) применим к системам вида $\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu$ при $m = n$, $\det B \neq 0$, т. е. когда число управлений равно числу состояний системы. Предлагаемый закон управления имеет вид

$$u(t) = B^{-1} (\dot{x}_*(t) - f(x_*(t)) - K(x - x_*(t))), \quad (6.20)$$

где K – квадратная матрица коэффициентов усиления и в ряде случаев обеспечивает стабилизацию движения относительно желаемой

траектории $x_*(t)$. С точки зрения теории управления случай $m = n$, $\det B \neq 0$ тривиален. Действительно, для сходимости решений системы (6.5), (6.20) к желаемой траектории $x_*(t)$ достаточно, чтобы K было выбрано в виде $K = \kappa I_n$, где $\kappa > \sup_t \|A(t)\|$, $A(t) = \partial f(x_*(t)) / \partial x$. Такой выбор всегда возможен, если вектор-функция $x_*(t)$ ограничена, в частности, для периодических и хаотических траекторий $x_*(t)$.

Для решения более сложных задач при неполном управлении и измерении в теории нелинейного управления разработан целый ряд методов. Один из наиболее развитых – *линеаризация обратной связью* (feedback linearization) (подробнее см., напр., [61]). К хаотическим системам он применялся в работах [87, 90] и др. Поясним идею метода для систем, аффинных по управлению

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (6.21)$$

Система (6.21) называется *линеаризуемой обратной связью в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если существуют гладкое обратимое преобразование координат $z = \Phi(x)$, $x \in \Omega$, и гладкое преобразование обратной связи

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad x \in \Omega, \quad (6.22)$$

где $v \in \mathbb{R}^m$ – новое управление, такое, что преобразованная система линейна, т. е. ее уравнение в новых координатах имеет вид

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (6.23)$$

для некоторых постоянных матриц A, B .

Критерий линеаризуемости обратной связью имеет простой вид для систем с одним входом ($m = 1$). Именно, система (6.21) линеаризуема обратной связью в окрестности некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда существует гладкая скалярная функция $h(x)$ такая, что система имеет в точке x_0 относительную степень n по отношению к выходу $y = h(x)$. Напомним, что относительная степень нелинейной системы в точке по определению равна r , если последовательное дифференцирование выходной функции $y = h(x)$ в силу системы (6.21) дает выражение, содержащее вход точно на r -м шаге. Более формально:

$$L_g L_f^k h(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r-2, \quad L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0, \quad (6.24)$$

где через $L_\Psi \Phi(x)$ обозначается *производная Ли* вектор-функции $\Phi(x)$ вдоль векторного поля Ψ : $L_\Psi \Phi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Psi_i(x)$.

Если критерий линеаризуемости выполняется, то система может быть приведена к так называемой *канонической форме Бруновского* (цепи интеграторов) в результате следующих преобразований:

$$\begin{aligned} z &= \Phi(x) = \text{col} (h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{n-1} h(x)), \\ u &= \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \left(-L_f^n h(x) + v \right). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Пример 6.1. Рассмотрим систему Лоренца со скалярным управлением в третьем уравнении:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= r x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2 + u. \end{cases} \quad (6.26)$$

Выберем $y = x_1$. Тогда $L_f y = \dot{y} = \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1)$, $L_f^2 y = L_f(L_f y) = \dot{\dot{x}}_1 = \sigma(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = \sigma((r+1)x_1 - 2x_2 + x_1 x_3)$. Очевидно, относительная степень $r = 3$ всюду, кроме плоскости $x_1 = 0$. Замену координат можно задать соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1, \\ x_2 &= \frac{1}{\sigma} z_2 + z_1, \\ x_3 &= \frac{1}{z_1} \left(\frac{1}{\sigma} z_3 - (r-1)z_1 - \frac{2}{\sigma} z_2 \right), \end{aligned}$$

т. е. система линеаризуема обратной связью при $x_1 \neq 0$. Таким образом, система (6.26) эквивалентна линейной в каждом из полупространств $\{x_1 < 0\}$, $\{x_1 > 0\}$. Поскольку линейная система в форме Бруновского вполне управляема, с помощью методов теории линейных систем можно обеспечить любую заданную динамику замкнутой системы. К недостаткам полученного решения относится то, что оно не является глобальным. Другой существенный недостаток в том, что подобный подход полностью игнорирует собственную динамику

системы. Произвольная желаемая динамика достигается ценой большой мощности управления, требуемой при значительных начальных условиях и при слежении за быстро меняющимся программным движением. К сожалению, неприменимость к задачам со слабым (маломощным) управлением является типичным недостатком многих работ, использующих традиционные методы нелинейного и адаптивного управления.

В работах [55, 237] исследованы пропорциональные законы управления в *расширенном пространстве* (x, u) (т. е. динамические обратные связи) в задаче достижения заданной динамики замкнутой системы. Метод [55] распространен на системы с запаздыванием и распределенные системы [56].

Возможности динамических обратных связей могут быть полнее реализованы путем применения наблюдающих устройств (наблюдателей), см. п.5.2. Такой подход дает методическую основу для управления по неполным измерениям. Обзор методов построения нелинейных наблюдателей применительно к задачам управления хаосом дан в [185]. В работе [176] приводятся условия применимости линейных наблюдателей с большим коэффициентом усиления для управления системами с нелинейностями, удовлетворяющими глобальному условию Липшица.

Заметим, что для хаотических моделей глобальное условие Липшица зачастую не выполнено из-за наличия полиномиальных членов, таких как x_1x_2 , x^2 и т. д. Это приводит к тому, что ограниченность траекторий хаотических систем, имеющая место в собственном движении, под воздействием управления может нарушаться. Поэтому при выборе управления особое внимание должно быть уделено обеспечению ограниченности решений. В противном случае решение может «уйти на бесконечность» за конечное время — «сорваться», что делает бессмысленным обсуждение вопросов устойчивости и сходимости.

Ряд методов основывается на изменении текущего значения некоторой *целевой функции* $Q(x(t), t)$. Значение $Q(x(t), t)$ может соответствовать расстоянию между состоянием системы в данный момент времени $x(t)$ и текущей точкой $x_*(t)$ на заданной траектории, например, $Q(x, t) = |x - x_*(t)|^2$. В качестве целевой функции может быть также выбрана какая-либо мера отклонения текущего положе-

ния системы $x(t)$ от заданной *целевой поверхности* $h(x) = 0$, например, $Q(x) = |h(x)|^2$. Для систем непрерывного времени значение $Q(x)$ не зависит непосредственно (в тот же момент времени) от сигнала управления u , поэтому вместо $Q(x)$ можно использовать новую непосредственно возникающую целевую функцию $\dot{Q}(x) = \partial Q / \partial x F(x, u)$, т. е. вместо уменьшения значений исходной целевой функции, уменьшать скорость изменения этой функции по времени. Эта идея приводит к методу скоростного градиента (см. п.2.4.2), использование которого для управления хаотическими системами было предложено в [124, 139].

При решении задач стабилизации относительного заданного состояния, или целевого многообразия, использовались различные методы теории нелинейного управления: *линеаризация обратной связью* (*feedback linearization*); теория *центрального многообразия* (*centre manifold*); процедуры *бэкстеппинга* (*backstepping*) и *итеративный синтез* (*iterative design*); метод *пассификации* метод *систем с переменной структурой* (СПС); теория *абсолютной устойчивости*; H_∞ -оптимальный синтез и т.д., см. ссылки в [8]. Заметим, что СПС-алгоритмы с поверхностью переключения $h(x) = 0$ совпадают с алгоритмами скоростного градиента, для которых целевая функция взята в виде $Q(x) = |h(x)|$.

Анализ методов нелинейного управления применительно к задачам управления хаосом показывает, что большинство из них относится к одному из двух подходов: ляпуновскому (метод СГ, методы пассификации) и «компенсационному» (линеаризация обратной связью, геометрические методы и т. д.). Соотношение между этими двумя подходами можно проиллюстрировать следующим образом.

Пусть цель управления заключается в стабилизации нулевого значения некоторой выходной переменной $y = h(x)$ для аффинной системы $\dot{x} = f(x) + g(x)u$. Ляпуновские методы (в том числе метод скоростного градиента) используют целевую функцию вида $Q(x) = |h(x)|^2$ и производят уменьшение ее производной \dot{Q} согласно условию $h^T \partial h / \partial x (f + gu) < 0$, осуществляя движение вдоль градиента скорости $Q(x)$ по управлению (т. е. по антиградиенту от \dot{Q}):

$$u = -\gamma g^T (\nabla h) h. \quad (6.27)$$

Видно, что условие «малости управления» можно выполнить, если коэффициент усиления $\gamma > 0$ достаточно мал.

Компенсационный подход основан на задании предписанной (желаемой) динамики либо для всего состояния системы, либо для какой-нибудь функции ее состояния. Например, для синтеза алгоритма управления вводится макропеременная $\alpha(x) = \dot{y} + \rho y$, где $\rho > 0$, значение которой затем обнуляется выбором управления в виде:

$$u = -\frac{f^T(\nabla h) + \rho h}{g^T(\nabla h)} \quad (6.28)$$

При этом $\alpha = 0$, если и только если $\dot{Q} = -2\rho Q$, т. е. компенсация эквивалентна заданию фиксированной скорости убывания $Q(x)$. В результате ценой уменьшения гибкости и отказа от свойства малости управления достигается любая желаемая «мгновенная» скорость протекания переходных процессов. Заметим, что, в отличие от (6.27), в алгоритме (6.28) присутствует сингулярность (знаменатель в (6.28) может обращаться в нуль), борьба с которой вносит дополнительные осложнения. Подобные недостатки свойственны также некоторым методам инверсной динамики [44] и синергетического управления [42], разработанным для управления нелинейными (не обязательно хаотическими) системами.

В заключение еще раз отметим, что, поскольку хаотические системы составляют подкласс класса всех нелинейных систем, методы, разработанные для управления нелинейными системами, обычно применимы и к хаотическим системам. Однако в работах, использующих методы современной линейной и нелинейной теории управления, не всегда уделяется достаточное внимание специфическим свойствам хаотических процессов. Это обычно выражается в том, что опускается требование малости управления. С другой стороны, мощный инструментарий современной теории управления не полностью используется в работах, в которых данное требование учитывается. В ряде публикаций вводятся нереалистичные допущения (например, считается, что число управляющих воздействий равно размерности вектора состояния системы).

7 УПРАВЛЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

7.1 Задачи и методы управления в распределенных системах

Методы управления колебаниями в пространственно-распределенных (distributed, spatio-temporal) системах во многом опираются на идеи, развитые для сосредоточенных (lumped) систем. Более того, в значительной части работ для синтеза управления используются конечномерные модели объекта управления в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Такие модели могут либо быть получены путем дискретизации по пространству распределенных моделей, описываемых уравнениями в частных производных, либо представлять собой набор ОДУ, описывающих отдельные пространственные элементы (ячейки, клетки), либо получаться отбрасыванием «хвоста» в разложении по базису в исходном бесконечномерном пространстве состояний (методы Бубнова–Галеркина). В этой главе остановимся на двух первых вариантах, считая, что ячейки взаимодействуют между собой при помощи связей, отражающих пространственную структуру всей системы, называемой часто массивом (array) или решеткой (lattice).

Типичным классом моделей физико-химических процессов являются так называемые уравнения «реакция–диффузия»

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \varepsilon \Delta x + F(x, u), \quad (7.1)$$

где $x = x(r, t)$ — функция пространственных переменных $r \in D \subset \mathbb{R}^n$ и времени t (возможно, векторнозначная), определяющая состояние системы; $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial r_i^2}$ — оператор Лапласа, задающий диффузионный тип пространственного взаимодействия элементов. Граничные условия обычно задаются либо периодические: $x(a, t) = x(b, t)$ при $D = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$, либо как отсутствие потока через границы $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\Big|_{r=b} = 0$. При дискретизации уравнения (7.1) по пространству множество D заменяется конечным числом точек-узлов

r_i ,
 $i = 1, 2, \dots, N$, каждому из которых сопоставляется переменная состояния $x_i(t)$. Динамика величин $x_i(t)$ определяется как собственной динамикой $F(x_i, u_i)$ так и взаимосвязями с соседними узлами. Например, если пространство одномерно: $r \in [a, b]$, а связи имеют диффузионный характер, получаем систему

$$\dot{x}_i = \varepsilon(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) + F(x_i, u_i), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (7.2)$$

Если граничные условия периодические, то дополнительно задается связь $x_0(t) = x_N(t)$, а при отсутствии потока через границы накладываются связи $x_0(t) = x_1(t)$, $x_{N-1}(t) = x_N(t)$. Часто отдельно рассматривают случай нулевых условий на границах: $x_i(t) = 0$ при $i \leq 0$ и при $i \geq N$. Во многих работах системы дискретизируются также по времени, что приводит к так называемым *моделям связанных отображений (coupled maps)*, или клеточных автоматов (cellular automata):

$$x_i(n+1) = x_i(n) + \varepsilon[x_{i-1}(n) - 2x_i(n) + x_{i+1}(n)] + hF(x_i(n), u_i(n)), \\ i = 1, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

В моделях (7.1), (7.3) управление влияет на динамику каждой ячейки, что соответствует случаю пространственного (полевого) управления. Другой класс задач (*граничное управление*) возникает, когда правые части в (7.2), (7.3) не зависят от управления, т. е. $F(x, u) \equiv F(x)$, а управление входит в уравнения граничных ячеек, например

$$\dot{x}_0 = \varepsilon(x_1 - x_0) + F_0(x, u) \quad (7.4)$$

(при периодическом граничном условии). Наибольшей общностью обладают пространственно-неоднородные системы, описываемые (для пространственно-одномерного случая) моделью

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i(x_i, x_{i-1}, x_{i+1}, u), & i = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \dot{x}_0 = F_0(x_0, x_1, u), \\ \dot{x}_N = F_N(x_N, x_{N-1}, u). \end{cases} \quad (7.5)$$

В качестве целей управления, в дополнение к обычным целям в сосредоточенных системах, рассматриваются различные виды взаимосвязи колебаний в соседних ячейках. Как и в сосредоточенных системах, достижение цели не определяет процесс в системе полностью.

Интерес для исследования представляет определение возможных видов поведения системы с управлением и без него.

К специфическим целям управления в распределенных системах относятся:

- стабилизация заданного равномерного (однородного) или пространственно-периодического стационарного поля (стоячей волны);
- стабилизация заданного пространственно-периодического нестационарного поля (бегущей волны);
- создание или уничтожение спиральной волны (при пространственной размерности не менее двух);
- создание или уничтожение заданного неравномерного поля (контрастной структуры, кластеров, паттернов);
- управление самоорганизацией и дезорганизацией систем.

Задачи управления распределенными системами систематически рассматривались в теории управления еще в 1960-х годах (см. напр. [17, 18]). Однако интерес физиков к этой тематике, судя по публикациям в физических журналах, существенно вырос лишь в середине 1990-х в связи с интересом к управлению хаосом в распределенных системах. В первых работах по управлению хаосом в распределенных системах в основном повторялись методы, развитые для сосредоточенных систем: метод OGY, запаздывающая обратная связь и т. д. [151]. В последующих работах исследовались (как правило, численно) и другие подходы.

Например, в работе [194] рассматривается одномерный массив из $N = 100$ ячеек, описываемых логистическим отображением при $F(x, u) = 1 - \alpha x^2 + u$, где параметр α задан так, чтобы колебания в каждой ячейке при $u \equiv 0$ были хаотическими. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что локальная обратная связь

$$u_i(n) = \gamma \left[x_i(n) - \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N x_j(n-1) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.6)$$

при достаточно большом коэффициенте усиления γ стабилизирует пространственно-однородное распределение $x_i \equiv x_*$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$. При меньших γ стабилизируется неоднородное распределение, состоящее из нескольких кластеров однородности, причем каждая ячейка

колеблется в периодическом режиме. Аналогичное поведение системы наблюдалось при локальной обратной связи по ошибке

$$u_i(n) = \gamma [x_i(n) - x_*], \quad (7.7)$$

а также при введении более соответствующих реальности «глобальных» обратных связей, зависящих от наблюдаемых средних значений переменных:

$$u_i(n) = -\frac{\gamma}{N+1} \sum_{j=0}^N [x_j(n) - x_j(n-1)] \quad (7.8)$$

или

$$u_i(n) = -\gamma \left[\frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N x_j(n) - x_* \right]. \quad (7.9)$$

Эти результаты получили обоснование в [142].

В работе [167] рассмотрен случай «игольчатого» управления (pinning control) одномерной решеткой, когда управление действует лишь на каждую p -ю ячейку, описываемую системой Лоренца. Продемонстрирована возможность стабилизации к пространственно однородному (когерентному), но хаотическому во времени движению, если управление изменяется дискретно во времени по закону (7.7) при $\gamma = 1$ и приложено к первому уравнению системы Лоренца. Этот результат распространен на двумерную решетку из систем Лоренца в работе [223] с использованием интегральной обратной связи, названной в работе «адаптивной». Аналогичные результаты получены также для комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау

$$\dot{A} = A + (1 + i\mu_1) \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - (1 + i\mu_2) |A| \quad (7.10)$$

[182] и для уравнения Свифта–Хоэнберга (Swift–Hohenberg), описывающего динамику лазеров [100]. Уравнение Гинзбурга–Ландау с игольчатым управлением, приложенным в конечном числе точек изучалось в [106, 234]. Уравнение Гинзбурга–Ландау описывает целый ряд явлений в лазерной физике, гидродинамике, химической турбулентности и др., и может представлять разнообразные виды сложного поведения, включая бифуркацию Андронова–Хопфа, хаотические

турбулентные режимы, контрастные структуры и т.д. При помощи вычислительного эксперимента в работе [106] найдено наибольшее расстояние между точками приложения управления, обеспечивающее достижение цели управления. Аналогичный результат получен при граничном управлении [234].

В работе [218] показана возможность стабилизации решений уравнения Курамото–Сивашинского

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} = u \quad (7.11)$$

периодической запаздывающей обратной связью по скорости

$$u = \varepsilon^t \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t - \tau),$$

где τ — время запаздывания.

Игольчатое управление (local injections) применялось в работе [152] к задаче стабилизации нулевого решения ($x_i(t) \equiv 0$) системы связанных осцилляторов с диффузионно-градиентными связями

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2}(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) + \frac{\rho}{2}(x_{i-1} - x_{i+1}) + u_i, \quad (7.12)$$

а также к уравнению Гинзбурга–Ландау, находящемуся первоначально в хаотическом режиме. Использовалась линейная обратная связь с большим коэффициентом усиления в каждом l -м осцилляторе. Анализ устойчивости замкнутой системы проводился по линеаризованным вблизи целевого решения моделям.

Минимальная плотность точек локального управления и их оптимальное расположение определены в [146] для одномерного массива связанных логистических систем: $f(x) = ax(1 - x)$ в (7.12) при стабилизации линейной обратной связью. Метод стабилизации неустойчивого пространственного однородного решения уравнения реакции-диффузии предложен в работе [56] на примере комплексного уравнения Курамото–Цузуки. В работе [232] предложен метод подавления хаоса и спиральных волн в уравнении Максвелла–Блоха с дифракционными связями слабым пространственным возмущением.

Интересные задачи «кластерной синхронизации» в двух- и трехмерных массивах нелинейных осцилляторов рассматривались в работах [96, 97, 98, 201]. На основе функций Ляпунова специального вида найдены условия разбиения массива на заданное число

компактных кластеров осцилляторов, колеблющихся синхронно. Показано, что с ростом степени взаимосвязи число кластеров уменьшается, вплоть до полной синхронизации. Хотя в перечисленных работах управление в явном виде не присутствует, их результаты можно интерпретировать как выбор коэффициента связи k , обеспечивающего заданную степень кластеризации в системе. В развитие этого направления можно поставить задачу адаптивного управления коэффициентом связи, осуществляемого в ходе экспериментов с системой.

7.2 Управление энергией в моделях синус–Гордона и Френкеля–Конторовой

Продemonстрируем возможность применения метода скоростного градиента для управления системами типа синус–Гордона по энергетическим критериям. Введем обозначения $x_t = \frac{\partial x}{\partial t}$, $x_{tt} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $x_{r_i} = \frac{\partial x}{\partial r_i}$, $x_{r_i t} = \frac{\partial^2 x}{\partial r_i \partial t}$, $x_{r_i r_i} = \frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2}$ и рассмотрим систему, описываемую уравнением синус–Гордона с диссипацией

$$Jx_{tt} = k\Delta x - E \sin x - \rho x_t, \quad (7.13)$$

где $x = x(r, t)$ – функция состояния системы; $r \in X \subset \mathbb{R}^n$ – пространственная переменная, изменяющаяся на множестве X ; Δ – оператор Лапласа: $\Delta x = \sum_{i=1}^n x_{r_i r_i}$; J, k, ρ – параметры системы; $E = E(t)$ – внешнее воздействие (например, напряженность внешнего электрического поля). Будем считать, что $E = E_0 + u(t)$, где E_0 – базовый уровень поля, $u(t)$ – управляющее воздействие. Систему (7.13) можно рассматривать как модель массива диффузионно связанных осцилляторов (например, маятников, жидких кристаллов и т.д.), каждый из которых размещен в точке r . Тогда $x(r, t)$ – угол поворота осциллятора. Система относится к классу моделей «реакция–диффузия», но имеет важное самостоятельное значение.

Поставим задачу вывода энергии свободной системы

$$H = \frac{1}{2} \int_X \left(J \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + k |\nabla_r x|^2 + 2E_0 (1 - \cos x) \right) dr \quad (7.14)$$

на заданный уровень H_* , т. е. введем цель управления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = H_*. \quad (7.15)$$

Положим сначала $\rho = 0$ и вычислим скорость изменения энергии вдоль движений системы (7.13), считая $u(t) = u$ постоянным

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \int_X Jx_t \cdot x_{tt} - k\Delta x x_t + E_0 \sin x \cdot x_t dr = \\ &= \int_X x_t (-E \sin x + E_0 \sin x) dr = -u(t) \int_X x_t \sin x dr. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Видно, что если выбрать управление в виде

$$u(t) = -\gamma \int_X x_t \sin x dr, \quad (7.17)$$

где $\gamma > 0$, то энергия $H(t)$ будет неубывающей функцией времени.

Если же ввести функцию $V(t) = \frac{1}{2}(H(t) - H_*)^2$, то, рассматривая величину

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = -u(t)(H(t) - H_*) \int_X x_t \sin x dr, \quad (7.18)$$

получим, что $\dot{V} \leq 0$ при

$$u(t) = \gamma(H(t) - H_*) \int_X x_t \sin x dr, \quad (7.19)$$

т. е. воздействие (7.19) приближает систему к достижению цели.

Рассмотрим пространственно-одномерный, пространственно-дискретный вариант задачи

$$J\ddot{x}_j = \frac{k}{h^2}(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) - (E_0 + u(t)) \sin x_j - \rho\dot{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (7.20)$$

соответствующий непрерывной системе

$$Jx_{tt} = kx_{rr} - (E_0 + u(t)) \sin x - \rho x_t \quad (7.21)$$

на множестве $X = [a, b]$, где $x_j = x(jh/b - a)$.

Система (7.20) есть не что иное как управляемая версия классической модели Френкеля-Конторовой, (см., напр., [46]), предложенной в 1939 году, исследованию свойств которой посвящено много работ.

Обычно при исследовании системы без управления выбирают в (7.21) либо нулевые граничные условия $x(a, t) = x(b, t) = 0$, соответствующие в дискретной модели (7.20) соотношениям

$$x_0(t) \equiv x_{N+1}(t) \equiv 0, \quad (7.22)$$

либо периодические условия $x_r|_{r=a} = x_r|_{r=b} = 0$, соответствующие

$$x_0 = x_1, \quad x_N = x_{N+1}. \quad (7.23)$$

Задача управления энергией цепочки может быть решена на основе результатов гл. 3. Алгоритм управления энергией, полученный методом скоростного градиента имеет вид

$$u(t) = \gamma(H(t) - H_*) \sum_{j=1}^N \dot{x}_j \sin x_j, \quad (7.24)$$

где $\gamma > 0$. Из теоремы 3.1 следует, что цель управления (7.15) в системе (7.20), (7.24) при $\rho = 0$ достигается, если энергетический слой между уровнями $H(0)$ и H_* не содержит равновесий системы, удовлетворяющих условиям $\sin x_j = 0, j = 1, \dots, N$.

Отметим, что в частном случае $N = 2$ при граничных условиях (7.23) система приобретает вид

$$\begin{cases} J\ddot{x}_1 = \frac{2k}{h^2}(x_2 - x_1) - (E_0 + u(t)) \sin x_1 - \rho\dot{x}_1, \\ J\ddot{x}_2 = \frac{2k}{h^2}(x_1 - x_2) - (E_0 + u(t)) \sin x_2 - \rho\dot{x}_2. \end{cases} \quad (7.25)$$

В этом частном случае задача управления энергией близка к задаче о синхронизации двух маятников, рассматривавшейся в п. 5.4.

Дискретный вариант алгоритма управления (7.19) имеет вид

$$u(t) = \gamma(H(t) - H_*)(x_2 - x_1)(\sin x_1 - \sin x_2), \quad (7.26)$$

где $H(t)$ определяется дискретным вариантом (7.14)

$$H = \frac{J}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 + E_0(2 - \cos x_1 - \cos x_2). \quad (7.27)$$

Построенные алгоритмы управления можно применять для исследования свойств нелинейных колебательных систем в различных задачах. В частности, в ряде практических задач необходимо управлять колебаниями осциллирующих частиц: например, ориентировать частицы в заданном направлении, менять ориентацию частиц в жидких кристаллах с продольной на поперечную и т. п. с *а)* на *б)*:

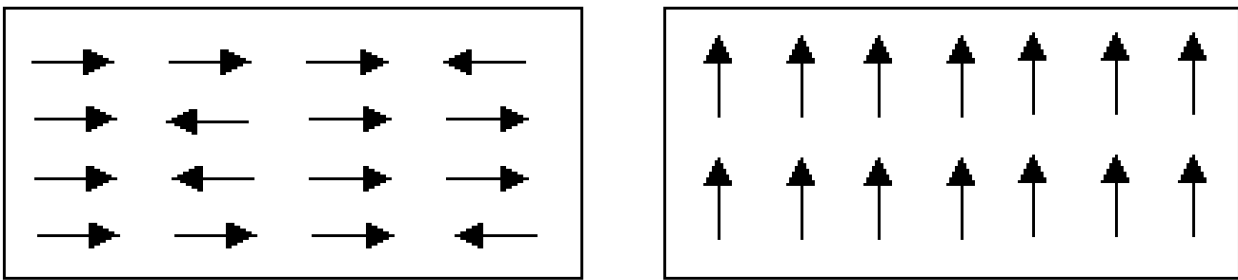


Рис. 7.1. Непрозрачная (*а*) и прозрачная (*б*) структуры.

Если принять, что угол $x(r, t)$ ориентации частиц подчиняется уравнению (7.13), то добиться перехода из структуры с продольной ориентацией *а)* в структуру с поперечной ориентацией *б)* можно, меняя ориентацию (поляризацию) постоянного внешнего поля E . Однако, для этого изменение поля δE должно быть значительным и, по крайней мере, превосходить начальное поле E_0 .

В то же время, используя алгоритм управления с обратной связью типа (7.19), можно заставить ориентацию кристаллов изменяться наподобие колебаний маятников. При этом, если в качестве H_* выбрать величину, близкую к $\bar{H} = E_0(b - a)$ – энергии состояния, соответствующего конфигурации *б)* и если степень диссипации $\rho > 0$ мала, то алгоритм (7.19) при весьма малом γ , т. е. при *маломощном дополнительном управляющем воздействии*, сможет заставить частицы значительную часть времени проводить вблизи конфигурации *б)*, т. е. сделать кристалл *высокопрозрачным*.

7.3 Управление волновым движением в цепочке маятников

Модель цепочки маятников. Рассмотрим, следуя [75], задачу управления возбуждением колебаний в цепочке из N последовательно соединенных математических маятников. Такая модель встречается при описании различных физических и механических систем (см., напр., [46, 160]). При отсутствии трения система связанных маятников описывается уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\varphi}_1(t) + \omega_0^2 \sin \varphi_1(t) = k(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) + u(t), \\ \dots\dots\dots \\ \ddot{\varphi}_i(t) + \omega_0^2 \sin \varphi_i(t) = k(\varphi_{i+1}(t) - 2\varphi_i(t) + \varphi_{i+1}(t)), \\ \qquad\qquad\qquad (i = 2, 3, \dots, N - 1), \\ \dots\dots\dots \\ \ddot{\varphi}_N(t) + \omega_0^2 \sin \varphi_N(t) = k(\varphi_{N-1}(t) - \varphi_N(t)), \end{array} \right. \quad (7.28)$$

где $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) – углы поворота маятников; $u(t)$ – приложенный к первому маятнику момент внешних сил, выраженный в единицах углового ускорения (управляющее воздействие); ω, k – параметры системы: ω_0 – собственная частота малых колебаний изолированных маятников, k – параметр взаимодействия маятников (например, коэффициент упругости пружин).

Введем вектор состояния системы $x(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ как $x(t) = \text{col} \{ \varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \dots, \varphi_N, \dot{\varphi}_N \}$. Полная энергия системы (7.28) $H(x)$ определяется выражением

$$H(x) = \sum_{i=1}^N H_i(x), \quad \text{где}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_i(x) = 0.5\dot{\varphi}_i^2 + \omega_0^2(1 - \cos \varphi_i) + 0.5k(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \\ \qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \dots, N - 1), \\ H_N(x) = 0.5\dot{\varphi}_1^2 + \omega_0^2(1 - \cos \varphi_N). \end{array} \right. \quad (7.29)$$

При отсутствии управления рассматриваемая модель совпадает с моделью цепочки Френкеля–Конторовой, в которой пренебрегли трением. Главное отличие от задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе — характер вхождения управления. В отличие от задачи, рассмотренной ранее, в данном параграфе изучается случай, когда управление локализовано и воздействует только на один маятник. На

где $\delta_\varphi = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$; $H(x(t))$ – полная энергия системы; H^* – ее заданное значение.

Минимальное значение функции Q_φ соответствует требованию противофазности колебаний первого и второго маятников (во всяком случае при малых начальных фазах $\varphi_1(0), \varphi_2(0)$ тождество $Q_\varphi(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) \equiv 0$ выполняется только тогда, когда $\dot{\varphi}_1 \equiv -\dot{\varphi}_2$). Минимизация Q_H означает достижение желаемой амплитуды колебаний.

Введем общую целевую функцию $Q(x)$ как взвешенную сумму Q_φ и Q_H , а именно

$$Q(x) = \alpha Q_\varphi(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) + (1 - \alpha) Q_H(x), \quad (7.33)$$

где α ($0 \leq \alpha \leq 1$) – заданный весовой коэффициент.

Выполнение процедуры метода скоростного градиента с целевой функцией $Q(x)$ приводит к закону управления в конечной форме, имеющему вид

$$\begin{aligned} u(t) &= -\gamma (\alpha \delta_\varphi(t) + (1 - \alpha) \delta_H(t) \dot{\varphi}_1(t)), \\ \delta_\varphi(t) &= \dot{\varphi}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t), \\ \delta_H(t) &= H_t - H^*. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Отметим, что вычисление управляющего воздействия требует измерения угловых скоростей первого и второго маятников, а также полной энергии всей системы маятников.

Результаты моделирования процесса возбуждения и синхронизации колебаний. Приведем некоторые результаты моделирования процесса возбуждения колебаний по алгоритму (7.34).

Для определенности при экспериментальном исследовании рассмотрим цепочку из $N = 50$ маятников.

На графиках показаны результаты моделирования системы (7.28) с алгоритмом управления (7.34) при $\gamma = 0.8$ и различных значениях параметра α . Рис. 7.2 – 7.4 относятся к случаю $\alpha = 0$, в котором целью управления является обеспечение заданного уровня полной энергии системы.

Как видно из графиков, данная цель управления достигается, $H_t \rightarrow H^*$ ($H^* = 4$), но движение маятников носит нерегулярный (хаотический) характер и вторая цель управления не достигается (см.

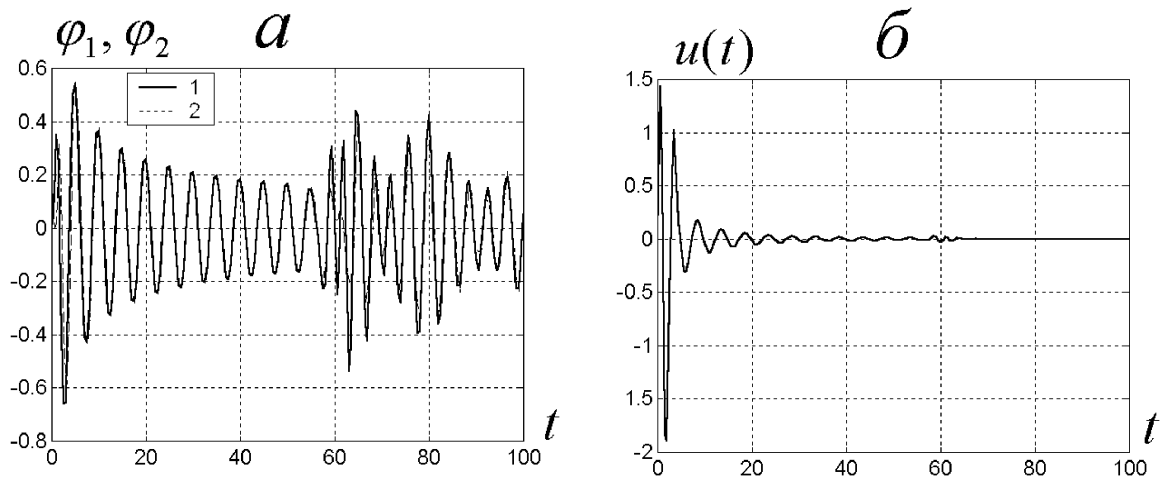


Рис. 7.2. Переходные процессы по φ_1, φ_2 и сигнал управления. $N=50, \alpha=0$.

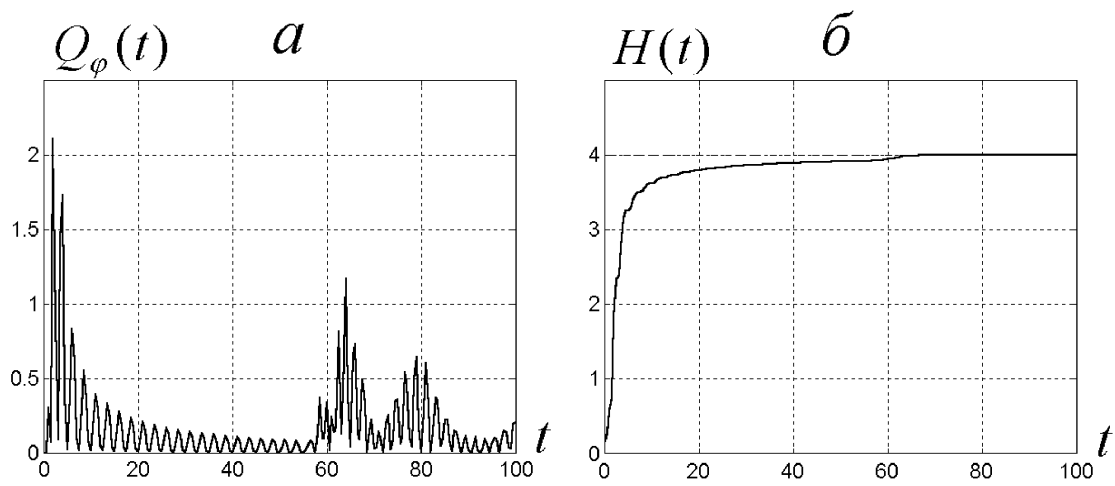


Рис. 7.3. Целевые функции Q_φ и H_t . $N=50, \alpha=0$.

рис. 7.3). Видно также, что по мере достижения требуемой энергии сигнал управления затухает.

Причина нерегулярного поведения маятников проясняется из рис. 7.4. На данном рисунке видно, как «прямая» волна колебаний распространяется: при $t \approx 30$ она достигает последнего маятника, после чего навстречу распространяется «обратная» волна. Наложение волн создает сложную картину колебаний. Процесс возбуждения колебаний при $\alpha = 1$ показан на рис. 7.5, 7.6. Как видно их представленных графиков, здесь также не удастся обеспечить противофазного движения маятников. При промежуточных значениях $0 < \alpha < 1$ характер процессов качественно не меняется по сравнению с рис. 7.2 – 7.4).

Причина неудовлетворительного поведения системы по отношению к цели Q_φ по-видимому, в том, что противофазное движение маятников без управления не является инвариантным, т. е. при $u(t) \equiv 0$ это движение, возникнув, не будет сохраняться в дальнейшем. Для подтверждения этой гипотезы рассмотрим рис. 7.7, на котором отражены свободные колебания системы из 50 маятников, все начальные условия в которых выбраны в противофазе ($\varphi_{i+1}(0) = -\varphi_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$). Возникающие на границах эффекты «отражения волн» приводят через некоторое время к искажению картины колебаний, причем в первую очередь – для маятников, находящихся вблизи от граничных (первого и последнего).

Причина появления отраженной волны колебаний видится в асимметрии уравнений (7.28): сила упругости, действующая на крайние маятники, отличается от силы, действующей на внутренние маятники.

Обратимся теперь к системе из циклически соединенных маятников. Отсутствие краевых эффектов в этой системе демонстрируется рис. 7.8, который получен в условиях, совпадающих с условиями получения рис. 7.7, но для системы (7.30).

На рис. 7.9, 7.10 показаны некоторые результаты применения алгоритма (7.34) к системе (7.30). Приняты значения $\gamma = 0.8$, $\alpha = 0.7$. Как видно из графиков, при циклическом соединении маятников поставленная «комбинированная» цель управления достигается.

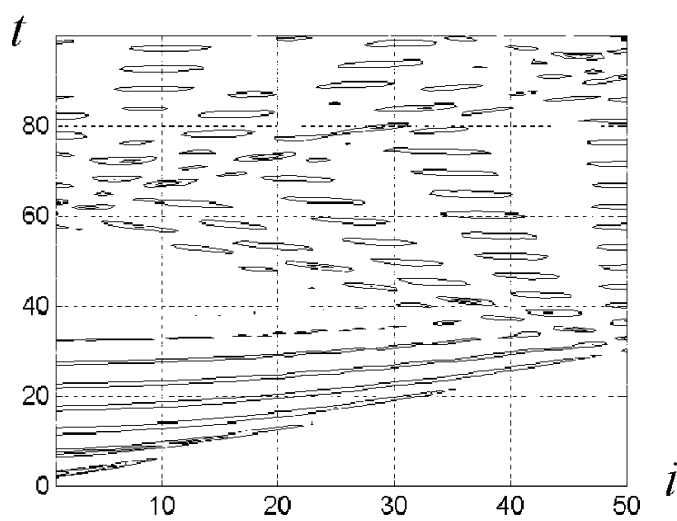
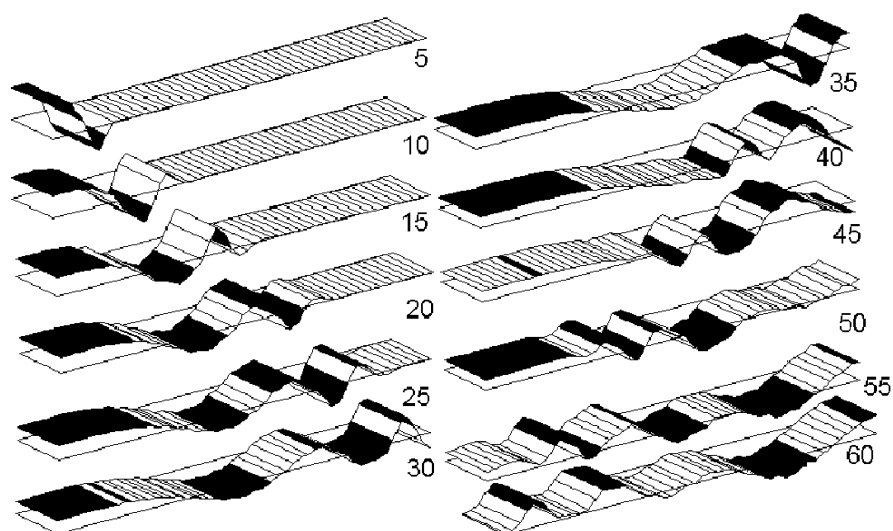


Рис. 7.4. Волна колебаний. $N=50$, $\alpha=0$.

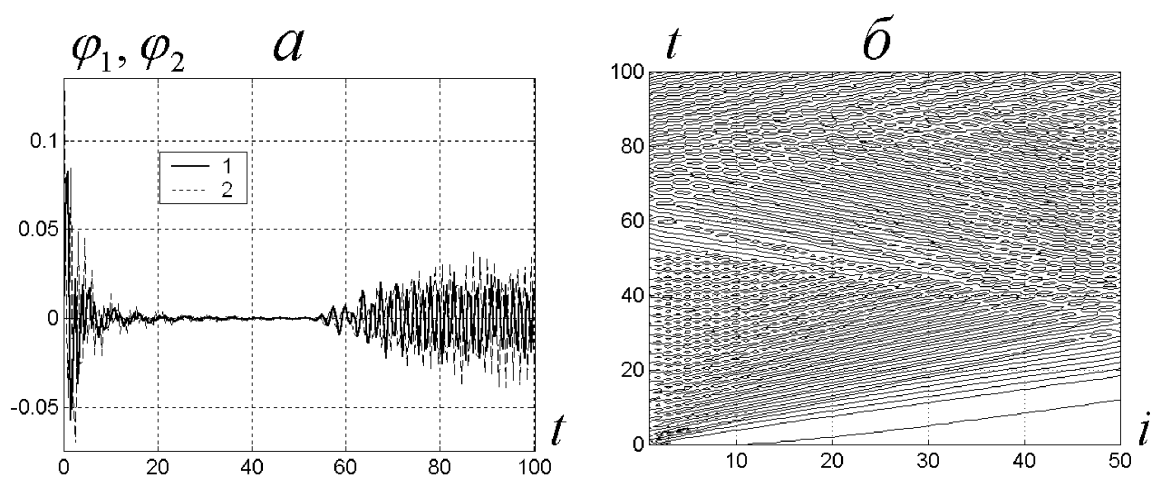


Рис. 7.5. Возбуждение колебаний. $N=50$, $\alpha=1$.

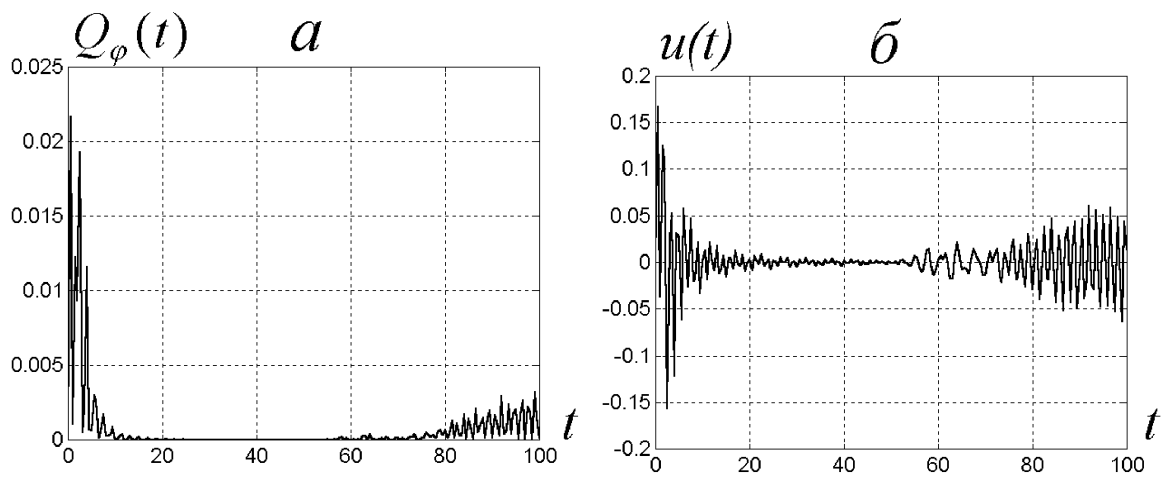


Рис. 7.6. Целевая функция Q_φ и сигнал управления. $N=50$, $\alpha=1$.

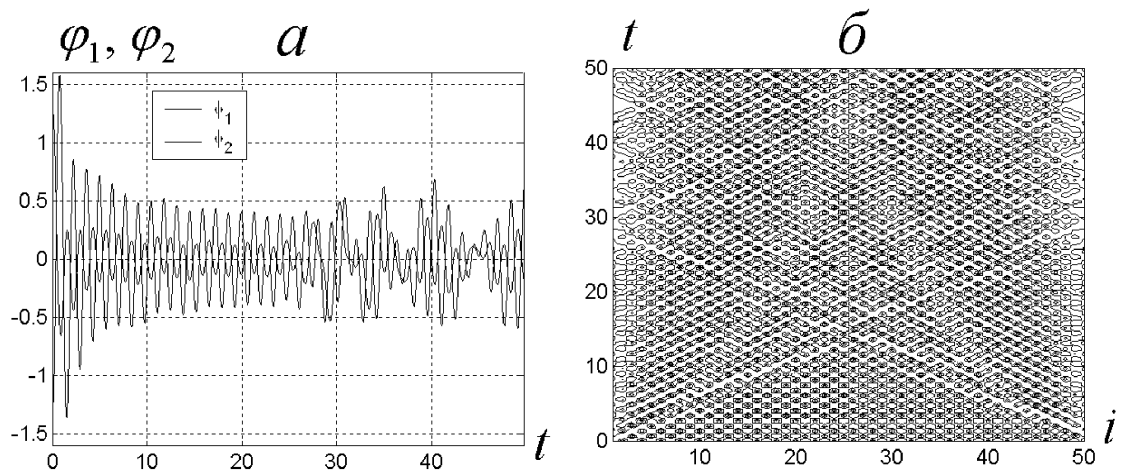


Рис. 7.7. Свободные колебания. $N=50$, $u(t) \equiv 0$.

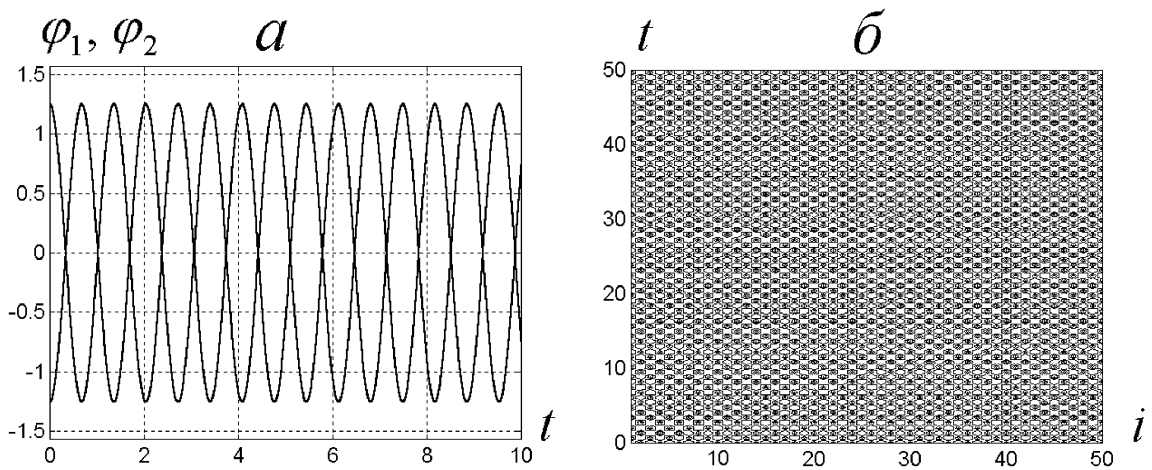


Рис. 7.8. Свободные колебания при циклическом соединении маятников. $N=50$.

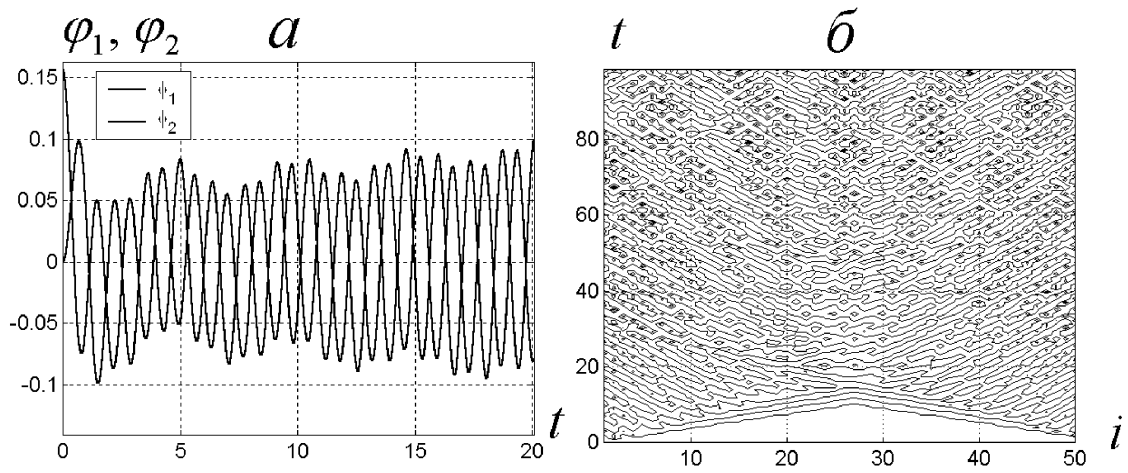


Рис. 7.9. Возбуждение колебаний при циклическом соединении маятников.

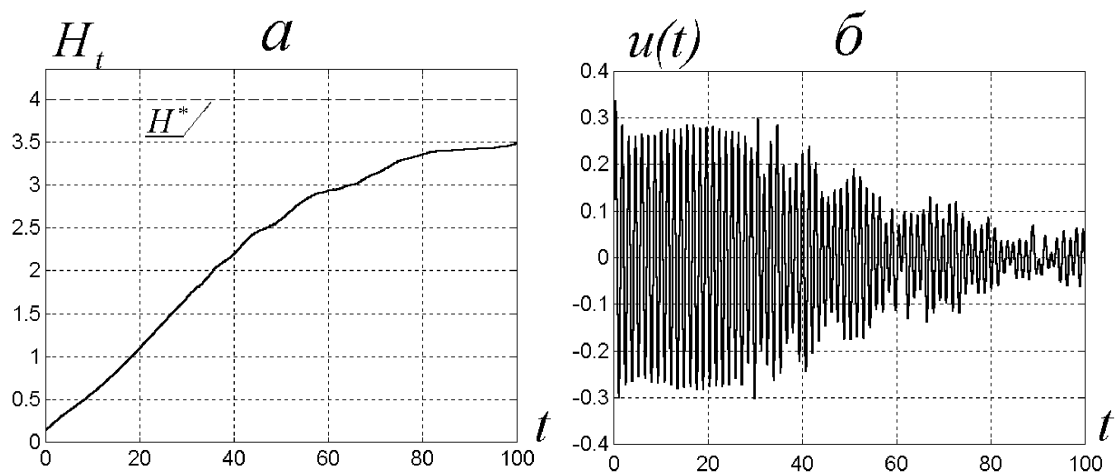


Рис. 7.10. Полная энергия и управление при циклическом соединении маятников.

8 ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ И ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В настоящей главе исследуются связи между законами управления в технических системах и законами динамики физических систем. Показывается, что методы синтеза алгоритмов управления позволяют выводить законы динамики физических систем. В частности, модели динамики ряда физических систем могут быть выведены на основе метода скоростного градиента при соответствующем выборе целевой функции. Изложение в основном следует [80, 134].

8.1 Вариационные принципы. Принцип скоростного градиента

Рассмотрим класс открытых физических систем, модели динамики которых описываются системами дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (8.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, u — вектор входных (свободных) переменных, $t \geq 0$. Задача моделирования (построения модели) системы может быть поставлена как нахождение закона изменения (эволюции) $u(t)$, удовлетворяющего некоторому критерию «естественности» ее поведения и придающего создаваемой модели свойства, наблюдаемые у реальной физической системы.

В физике подобные постановки хорошо известны. Давно получили признание вариационные принципы построения моделей систем. Вариационный принцип обычно предполагает задание некоторого интегрального функционала (например, функционал действия в принципе наименьшего действия [47, 49]), характеризующего поведение системы. Минимизация функционала определяет реально возможные траектории системы $\{x(t), u(t)\}$ как точки в соответствующем функциональном пространстве. Для явного определения закона динамики системы используется развитый аппарат вариационного исчисления.

Интересно, что вариационный подход лег в основу целого направления в теории управления: *теории оптимального управления*,

в которой минимизация функционала используется для нахождения подходящего в заданном смысле закона управления технической системой. В свою очередь, методы оптимального управления (динамическое программирование Беллмана, принцип максимума Понтрягина и др.), являющиеся развитием методов классического вариационного исчисления, могут быть применены к построению моделей динамики механических [13], термодинамических [58] и других систем в природе и обществе.

Кроме интегральных были предложены и дифференциальные (локальные по времени) принципы, такие как принцип наименьшего принуждения Гаусса, принцип минимальной диссипации энергии и др. Как отмечал М. Планк [67], локальные принципы имеют некоторое преимущество перед интегральными, поскольку они не ставят в зависимость текущее состояние и движение системы от ее позднейших состояний и движений. Следуя [80], сформулируем еще один локальный вариационный принцип, основанный на методе скоростного градиента.

Принцип скоростного градиента: *среди всех возможных движений в системе реализуются лишь те, для которых входные переменные изменяются пропорционально скоростному градиенту от некоторого «целевого» функционала Q_t .*

Принцип скоростного градиента предлагает исследователю на выбор два типа моделей динамики систем: А) модели, следующие из алгоритмов скоростного градиента в дифференциальной форме

$$\dot{u} = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}_t; \quad (8.2)$$

В) модели, следующие из алгоритмов скоростного градиента в конечной форме

$$u = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}_t. \quad (8.3)$$

Здесь \dot{Q}_t — скорость изменения целевого функционала вдоль траектории системы (8.1). Опишем схему применения принципа в простейшем (но и важнейшем) случае, когда класс моделей динамики (8.1) задан соотношением

$$\dot{x} = u. \quad (8.4)$$

Соотношение (8.4) означает всего лишь, что мы ищем закон изменения скоростей переменных состояния системы. В соответствии с

принципом скоростного градиента прежде всего нужно ввести целевой функционал (функцию) $Q(x)$. Выбор $Q(x)$ должен быть основан на физике реальной системы и отражать наличие в ней тенденции к уменьшению текущего значения $Q(x(t))$. После этого закон динамики может быть немедленно выписан в виде (8.2) или (8.3).

При этом задание закона динамики в виде (8.2) порождает дифференциальные уравнения движения второго порядка, которые инвариантны относительно замены времени t на $(-t)$, т. е. соответствуют обратимым процессам. Напротив, выбор конечной формы (8.3) соответствует, как правило, необратимым процессам.

В следующем параграфе введенный принцип будет проиллюстрирован примерами.

8.2 Примеры скоростно-градиентных законов динамики

Пример 8.1. Движение материальной точки в потенциальном поле. В качестве первого примера рассмотрим задачу описания движения материальной точки в потенциальном поле. Переменными состояния здесь являются координаты точки, т. е. $x = \text{col}\{x_1, x_2, x_3\}$. Выберем в качестве целевой функции потенциал поля $Q(x)$ и выведем скоростно-градиентный закон движения в дифференциальной форме. Вычислим скоростной градиент:

$$\dot{Q} = [\nabla_x Q(x)]^T u, \quad \nabla_u \dot{Q} = \nabla_x Q(x).$$

Выбирая диагональную положительно-определенную матрицу Γ в виде $\Gamma = m^{-1}I_3$, где $m > 0$ — параметр, I_3 — единичная 3×3 матрица, приходим к классическому закону динамики Ньютона: $\dot{u} = -m^{-1}\nabla_x Q(x)$, или

$$m\ddot{x} = -\nabla_x Q(x). \quad (8.5)$$

При этом параметр m интерпретируется как масса точки. \square

Пример допускает далеко идущие обобщения. Для систем, движущихся под действием потенциальных сил потенциал поля может играть роль целевой функции $Q(x)$, а матрица инерции определяет матрицу коэффициентов усиления в алгоритме. При этом если

инерционные свойства системы различны в различных точках конфигурационного пространства, то метрика в пространстве скоростей (управляющих переменных) будет переменной. Таким образом можно строить модели динамики сложных механических систем, описываемых уравнениями Лагранжа 2-го рода.

Принцип скоростного градиента применим и к построению моделей динамики распределенных систем, описываемых в бесконечномерных пространствах состояний. В частности, x может быть вектором гильбертова пространства \mathcal{X} , а $f(x, u, t)$ — нелинейным оператором, определенным на плотном множестве $D_F \subset \mathcal{X}$ (при этом решения уравнения (8.1) понимаются как обобщенные решения).

Пример 8.2. Волновое уравнение и уравнение теплопроводности. Пусть $x = x(r)$, $r = \text{col}(r_1, r_2, r_3) \in \Omega$ — поле температур или концентраций вещества, определенное в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Выберем в качестве целевого функционала меру неоднородности поля:

$$Q_t(x) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla_r x(r, t)|^2 dr, \quad (8.6)$$

где $\nabla_r x(r, t)$ — пространственный градиент поля $x = x(r)$. Полагая для простоты граничные условия нулевыми, вычислим скоростной градиент функционала (8.6). Из формулы Грина с учетом нулевых граничных условий имеем

$$\dot{Q}_t = \int_{\Omega} (\nabla_r x(r, t))^T \nabla_r u(r, t) dr = - \int_{\Omega} \Delta x(r, t) u(r, t) dr, \quad (8.7)$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial r_i^2}$ — оператор Лапласа. Учитывая, что градиент от скалярного произведения по одному сомножителю равен другому сомножителю,¹ получаем, что оператор скоростного градиента в данном случае — не что иное как оператор Лапласа: $\nabla_u \dot{Q}_t = -\Delta x(r, t)$. Следовательно, скоростно-градиентный закон эволюции системы в

¹Для корректности этого рассуждения следует считать, что обе подынтегральные функции принадлежат какому-то гильбертову пространству, например, $L_2(\Omega)$, что, впрочем, не накладывает серьезных ограничений на общность рассуждений.

дифференциальной форме (8.2) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} x(r, t) = \gamma \Delta x(r, t), \quad (8.8)$$

что соответствует волновому уравнению. Если же выбрать алгоритм в конечной форме (8.3), то уравнение динамики примет вид

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t) = \gamma \Delta x(r, t), \quad (8.9)$$

что совпадает с простейшим уравнением теплопроводности, описывающим процессы теплопередачи и диффузии. \square

Пример 8.3. Динамика вязкой жидкости. Пусть бесконечномерный вектор состояния системы образован из двух функций: $x = \text{col}(v(\cdot, t), p(\cdot, t))$, где $v(r, t) \in \mathbb{R}^3$ — поле скоростей трехмерного течения жидкости, $p(r, t)$ — поле давлений. Введем целевой функционал следующим образом

$$Q_t = \int_{\Omega} p(r, t) dr + \nu_0 \int_{\Omega} |\nabla_r v(r, t)|^2 dr, \quad (8.10)$$

где $\nu_0 > 0$ — весовой коэффициент. Вычисление скоростного градиента функционала (8.10) по отношению к (8.4) дает $\nabla_u \dot{Q}_t = \nabla_r p - \nu_0 \Delta v$. Поэтому дифференциальная форма закона скоростного градиента — не что иное как уравнение Навье–Стокса, описывающее движение вязкой жидкости:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t}(r, t) = -\nabla_r p(r, t) + \nu_0 \Delta v(r, t), \quad (8.11)$$

где $\nu = \nu_0 \gamma^{-1}$ — коэффициент вязкости, $\rho = \gamma^{-1}$ — плотность жидкости. \square

Другие примеры вывода уравнений динамики механических, электрических и других систем можно найти в [80]. Принцип скоростного градиента применим к описанию широкого класса физических систем, находящихся под действием потенциальных или диссипативных сил. С другой стороны, к системам, совершающим вихревые

движения, например, к механическим системам, находящимся под действием гироскопических сил, принцип скоростного градиента, по видимому, не применим.

Еще раз подчеркнем, что принцип носит двойственный характер: дифференциальная форма закона скоростного градиента соответствует обратимым, тогда как конечная форма — необратимым процессам. Выбор между ними, так же как и выбор цели и целевого функционала целиком лежит в области физики. В каких-то случаях этот выбор не однозначен: например, процесс, обратимый на одних масштабах времени может быть необратимым на других масштабах. Таким образом, принцип не решает за физика вопрос о построении модели системы, а лишь помогает сузить множество вариантов при принятии решения и выявить целенаправленность в поведении системы.

8.3 Соотношения Онсагера

Принцип скоростного градиента позволяет по-новому взглянуть на некоторые известные физические факты и явления. Выведем, например, обобщенный вариант известного принципа симметрии кинетических коэффициентов (принцип Онсагера) в термодинамике [48, 65, 188]. Рассмотрим изолированную физическую систему, состояние которой характеризуется набором термодинамических переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Обозначим через $x_i = \xi_i - \xi_i^*$ отклонения переменных от своих равновесных значений $\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*$. Пусть динамика величин x_1, x_2, \dots, x_n описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.12)$$

Линеаризуем уравнения (8.12) вблизи равновесия:

$$\dot{x}_i = - \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.13)$$

Принцип Онсагера [24, 65, 188] состоит в том, что величины λ_{ik} (так называемые кинетические коэффициенты) удовлетворяют соотношениям симметрии

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (8.14)$$

Принцип Онсагера верен не для всех систем. Существующие его доказательства (см., напр., [48]) опираются на дополнительные постулаты. Ниже дается новое доказательство, которое показывает, что для скоростно-градиентных систем обобщенный вариант принципа Онсагера верен без дополнительных предположений и не требует предварительной линеаризации модели системы.

Прежде всего необходимо сформулировать этот вариант. Легко видеть, что для линейной модели системы (8.13) соотношения (8.14) равносильны следующим тождествам:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (8.15)$$

Будем называть *обобщенным принципом Онсагера* выполнение соотношений (8.15) для систем, описываемых нелинейными уравнениями (8.12).

Теорема 8.1. *Предположим, что существует гладкая функция $Q(x)$ такая, что уравнения динамики системы (8.12) получаются по принципу скоростного градиента в конечной форме при целевой функции $Q(x)$.*

Тогда для всех x_1, x_2, \dots, x_n справедливы тождества (8.15), т. е. обобщенный принцип Онсагера.

Доказательство теоремы 8.1. Доказательство весьма простое. Поскольку (8.12) есть закон скоростного градиента для $Q(x)$, правые части могут быть представлены в форме

$$u_i = -\gamma \frac{\partial \dot{Q}}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, $u_i = -\gamma(\partial Q/\partial x_i)$ (в силу $\dot{Q} = (\nabla_x Q)^T u$) и

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i},$$

что влечет справедливость тождеств (8.15). ■

Очевидно, соотношения (8.14) являются частным случаем (8.15) для линейных уравнений динамики. Таким образом, для систем, под-

чиняющихся принципу скоростного градиента обобщенные соотношения Онсагера (8.15) справедливы без предположения о линейности уравнений динамики, т. е. не только вблизи равновесия.

З а м е ч а н и е 8.1. Приведенный выше вывод справедлив в предположении гладкости правых частей (8.12), поскольку основан на дифференцировании. На первый взгляд, это исключает из рассмотрения задачи с негладкими и разрывными функциями, например, задачи о движении ударных волн. Однако в этих случаях можно использовать варианты алгоритмов скоростного градиента, специально разработанные для негладких задач, в которых градиент уступает место *субградиенту* [80].

8.4 Динамика и цель

Интересно сравнить описанный выше подход с результатами известного английского специалиста в области кибернетики Г. Розенброка [213, 214], который продемонстрировал вывод основных уравнений квантовой механики на основе принципов оптимального управления. В [213, 214] показано, что уравнение Шредингера оказывается непосредственным следствием принципа оптимальности Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Хотя подход к построению уравнений динамики физических систем на основе экстремальных принципов хорошо известен, он обычно не увязывается в физике с понятием цели, поставленной как достижение экстремума целевого функционала. В этом проявляется различие подходов в физике и инженерных науках, где оптимальность как цель создания искусственной (технической) системы обычно ставится во главу угла. В физике же и в других естественных науках использование понятий цели и целесообразности поведения системы, наоборот, подвергалось сомнению рядом ученых. Наиболее ярко такие взгляды выразил А. Эйнштейн [121]:

«... Для ученого есть только “существующее”, но нет желаемого, нет оценивающего, нет добра, нет зла, нет цели».

Г. Розенброк критикует позицию А. Эйнштейна, приводя аргументы в пользу того, что понятие цели естественно как для жи-

вой, так и для неживой природы. Он отмечает, что неприятие цели является реакцией на конфликт XVII столетия между церковью и зарождающейся наукой и на сегодняшний день не является актуальной. В XX — XXI столетиях машины, действующие целенаправленно и воплощающие цели, заложенные в них человеком, распространились повсеместно и уже стали частью окружающей нас среды! Это заставляет придавать более серьезное значение понятию цели и в физике как науке о наиболее общих закономерностях систем окружающей среды: живых, неживых и искусственных, созданных человеком. Г. Розенброк пишет:

«... Живые организмы, очевидно, имеют свои цели, и, если субстрат квантово-механических частиц, из которых состоит все живое, описывается как не имеющий целей, то возникает вопрос: как может цель возникнуть из бесцельного субстрата?»

Описанный выше локальный принцип эволюции на основе скоростного градиента опирается на понятие цели еще в большей степени, чем интегральные экстремальные принципы. Поэтому в тех случаях, когда понятия цели и целевой функции возникают естественным образом, он может оказаться более удобным и полезным для построения моделей динамики систем. Кстати, принцип скоростного градиента согласуется и с известным биологическим принципом, по которому организмы и популяции развиваются так, чтобы обеспечить максимальный прирост своей биомассы [73, 80].

9 ПРИМЕРЫ

9.1 Управляемый маятник Капицы

В 1940-х годах академик, впоследствии лауреат Нобелевской премии по физике П.Л. Капица провел эксперимент, демонстрирующий, что верхнее, неустойчивое положение равновесия маятника становится устойчивым, если ось подвеса маятника вибрирует в вертикальном направлении с достаточно большой частотой [38] (см. также [14, 15]). Этот эксперимент был объяснен П.Л.Капицей на основе введения так называемого «эффективного потенциала», что соответствует варианту метода усреднения. Работа П.Л.Капицы дала толчок к развитию нового раздела механики — вибрационной механики [14, 15]. Аналогичные идеи легли и в основу соответствующего раздела теории управления: вибрационного управления [95, 181].

Математическая модель маятника Капицы имеет вид (рис. 9.1)

$$J\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = mlu \sin \varphi, \quad (9.1)$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего вертикального положения; $u = u(t)$ — вертикальное ускорение оси подвеса, являющееся управляющим воздействием; $J = ml^2$ — момент инерции маятника; $\rho \geq 0$ — коэффициент трения. П.Л. Капица рассматривал гармонический закон перемещения оси подвеса с частотой ω и амплитудой A , при котором $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = A\omega^2 \sin \omega t, \quad (9.2)$$

и экспериментально обнаружил эффект стабилизации маятника вблизи верхнего, неустойчивого равновесия. Многочисленные теоретические исследования (проводившиеся как до, так и после экспериментов П.Л. Капицы) [15, 226] показывают, что стабилизация неустойчивого равновесия наступает при достаточно большом ω , т.е. если входное воздействие в (9.1) достаточно велико [15, 38, 51] (точнее, при выполнении условия $A\omega > J\omega_0^2$, где $\omega_0 = \sqrt{2g/l}$ — частота малых колебаний маятника вблизи нижнего положения равновесия). При этом перемещение точки подвеса может оставаться малым, что усиливает парадоксальность эффекта. Таким образом, стабилизация

неустойчивого равновесия высокочастотным гармоническим воздействием возможна. При этом, однако, требуется приложение значительных сил.

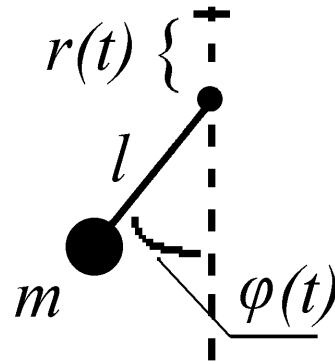


Рис. 9.1. Маятник с вибрирующей точкой подвеса.

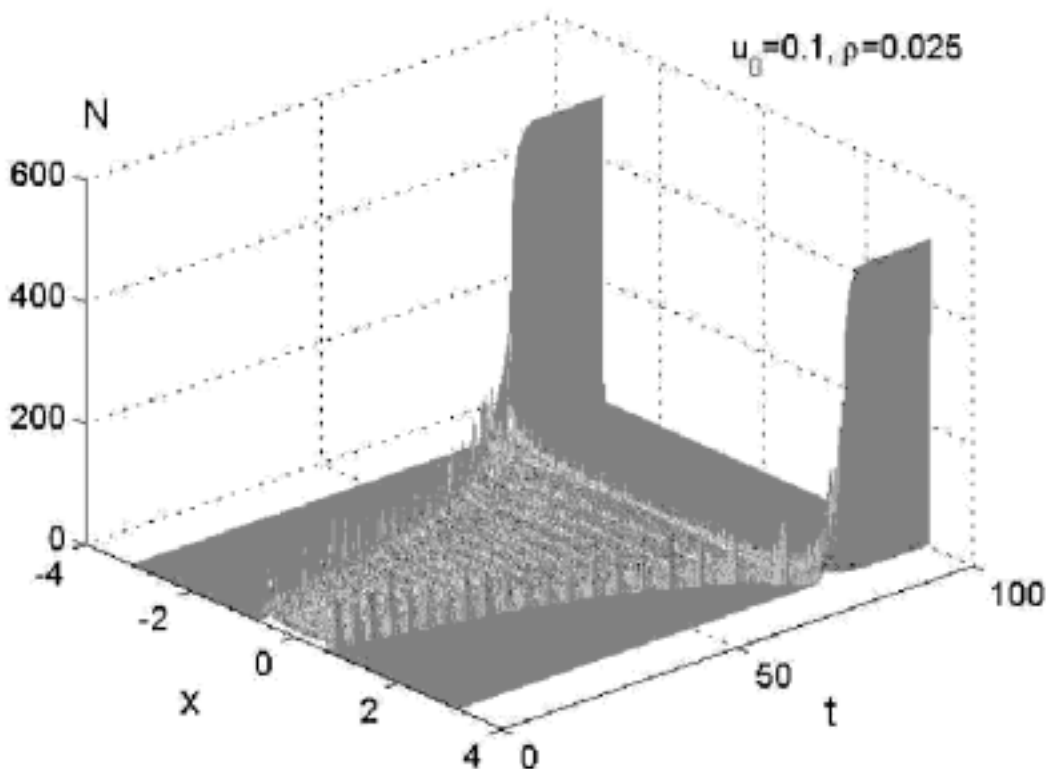


Рис. 9.2. Распределение угла отклонения маятника (9.1) с управлением (9.2) при $J = 1$, $\rho = 0.025$, $m = 1$, $l = 1$ м, $\gamma = 0.1$.

Поставим вопрос: можно ли добиться аналогичного поведения маятника Капицы при меньшей амплитуде $u(t)$, если в законе вибрации оси подвеса используется обратная связь?

Традиционный для теории автоматического управления подход, основанный на линеаризации модели объекта, в данном случае не проходит. Действительно, линеаризация дает хорошее приближение

лишь вблизи положения равновесия или некоторой траектории, а нас интересует глобальное решение, работающее во всем пространстве состояний маятника.

Поставим вспомогательную цель управления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = H_*, \quad (9.3)$$

где

$$H = \frac{J}{2}(\dot{\varphi})^2 + mgl(1 - \cos \varphi) \quad (9.4)$$

– полная энергия маятника. Цель (9.3) несколько отличается от традиционных для теории управления целей — регулирования и слежения. Скорее, она выглядит как цель человека, раскачивающегося на качелях. Аналогичная задача может возникнуть при запуске вибрационной установки, проектирования шагающего робота, в маятниковых часах и т. д.

Здравый смысл подсказывает, что раскачивание требует значительно меньше усилий, чем удержание маятника (или руки робота) в некоторой фиксированной позиции. Можно ли раскачать качели до верхнего положения маломощным воздействием?

Обратимся к методу скоростного градиента, задав в качестве целевой функции величину $Q = (H - H_*)^2/2$ — отклонение полной энергии маятника от желаемого значения H_* . Вычисляя скорость изменения функции Q вдоль траекторий системы (9.1) с фиксированным u , а затем градиент (в данном случае — частную производную) от скорости по управлению, приходим к простым алгоритмам:

$$u = -\gamma(H - H_*)\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad (9.5)$$

$$u = -\gamma \operatorname{sign} [(H - H_*)\dot{\varphi} \sin \varphi]. \quad (9.6)$$

Остановимся на алгоритме (9.6) и выберем в качестве желаемого уровня энергии энергию маятника в верхнем равновесии: $H_* = 2mgl$. Тогда из теоремы 4.2 (см. пример 4.1) следует, что в системе (9.1), (9.6) достигается уровень энергии не меньший, чем

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^2 \quad (9.7)$$

и, следовательно, уровень $H_* = 2mgl$ будет обеспечен при $\gamma > 2\rho\omega_0$ (рис. 9.2). В частности, при $\rho = 0$ стабилизация поверхности уровня энергии $H = H_*$ достигается при сколь угодно малой амплитуде управления γ . При малом демпфировании ρ амплитуда управления γ также может быть выбрана малой.

Достижение требуемого уровня энергии еще не означает стабилизации равновесия, лежащего на этом уровне. Однако в работах [83, 221, 222] показано, что если $\rho = 0$, то несколько модифицированный алгоритм (9.6) при $H_* = 2mgl$ обеспечивает сходимость $H(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \rightarrow H_*$ и сходимость $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \rightarrow (\pi, 0)$ при $t \rightarrow \infty$ при любых начальных условиях. При этом величина $\gamma > 0$ может быть сколь угодно малой.

Задача об управлении маятником путем перемещения точки подвеса имеет интересную особенность. Поскольку управляющим воздействием $u(t)$ является ускорение, из общих свойств алгоритмов скоростного градиента следует, что $u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Однако при этом остается неясным, что будет происходить со скоростью и положением точки подвеса. Формальная модель допускает, что скорость и отклонение положения точки подвеса от начального не стремятся к нулю и могут даже неограниченно возрастать, что лишает решение практической значимости.

Опишем, следуя [83], модификацию алгоритмов управления, свободную от указанного недостатка. Для этого введем расширенную целевую функцию

$$Q_1 = Q + \frac{1}{2}z^T P z, \quad (9.8)$$

где $z = \text{col}(\zeta, \dot{\zeta})$, $P = P^T \geq 0$ – положительно полуопределенная весовая матрица и $\zeta, \dot{\zeta}$ – соответственно, высота и скорость точки подвеса. Тогда соотношение $\ddot{\zeta} = u$ можно рассматривать как дополнительное уравнение движения, т. е. система превращается в систему с двумя степенями свободы и состоянием $x = \text{col}(q, \dot{q}, \zeta, \dot{\zeta})$.

В соответствии с методом скоростного градиента вычислим

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q} + z^T P \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ 0 \end{bmatrix} + z^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (9.9)$$

где $\nabla_u \dot{Q}_1 = (H_0 - H_*)\dot{q} \sin q + p_{22}\dot{\zeta} + p_{12}\zeta$, p_{11}, p_{22} – элементы второго

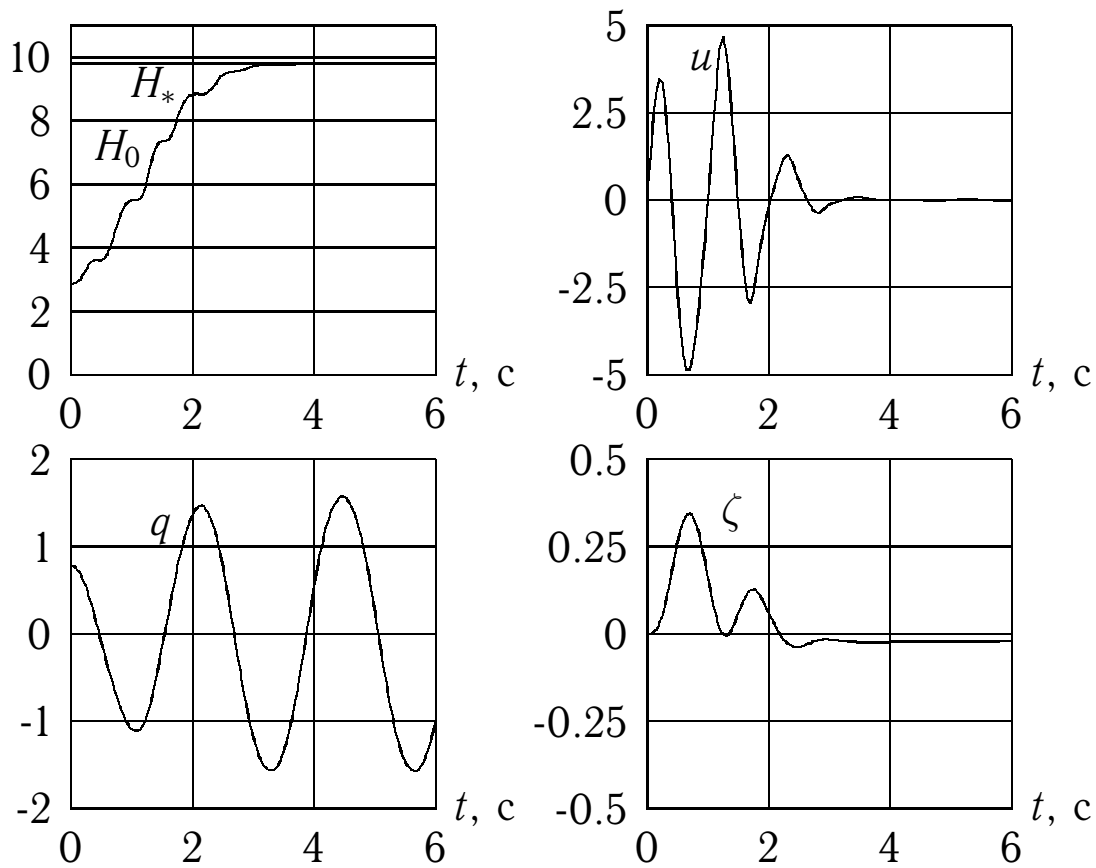


Рис. 9.3. Моделирование маятника с алгоритмом (9.10) при $\mu = 2$ и $\nu = 0$.

столбца матрицы P . Модифицированный алгоритм управления задается выражением

$$u = -\gamma(H_0 - H_*)\dot{q} \sin q - \mu\dot{\zeta} - \nu\zeta, \quad (9.10)$$

где $\gamma > 0, \mu > 0, \nu > 0$ – коэффициенты усиления.

Результаты гл. 3 для исследования полученной системы не применимы, поскольку исходная система не является гамильтоновой. Тем не менее, используя более общие результаты [61, 82], можно показать, что новая цель управления достигается и $\zeta(t) \rightarrow \text{const}$ для почти всех начальных условий при $\nu = 0$. Результаты моделирования с законом управления (9.10) и $m = 1, l = 1, \gamma = 0.7, \mu = 2, \nu = 0$ представлены на рис. 9.3.

Если же $\mu > 0, \nu > 0$ то в системе обеспечивается более сильное свойство $\zeta(t) \rightarrow 0$, т. е., отклонение точки подвеса от начального положения асимптотически исчезает. Этот факт иллюстрируется результатами моделирования рис. 9.4, где $\nu = 2$, а остальные параметры те же, что и в предыдущем случае.

Аналогичным образом может быть получен алгоритм раскачки

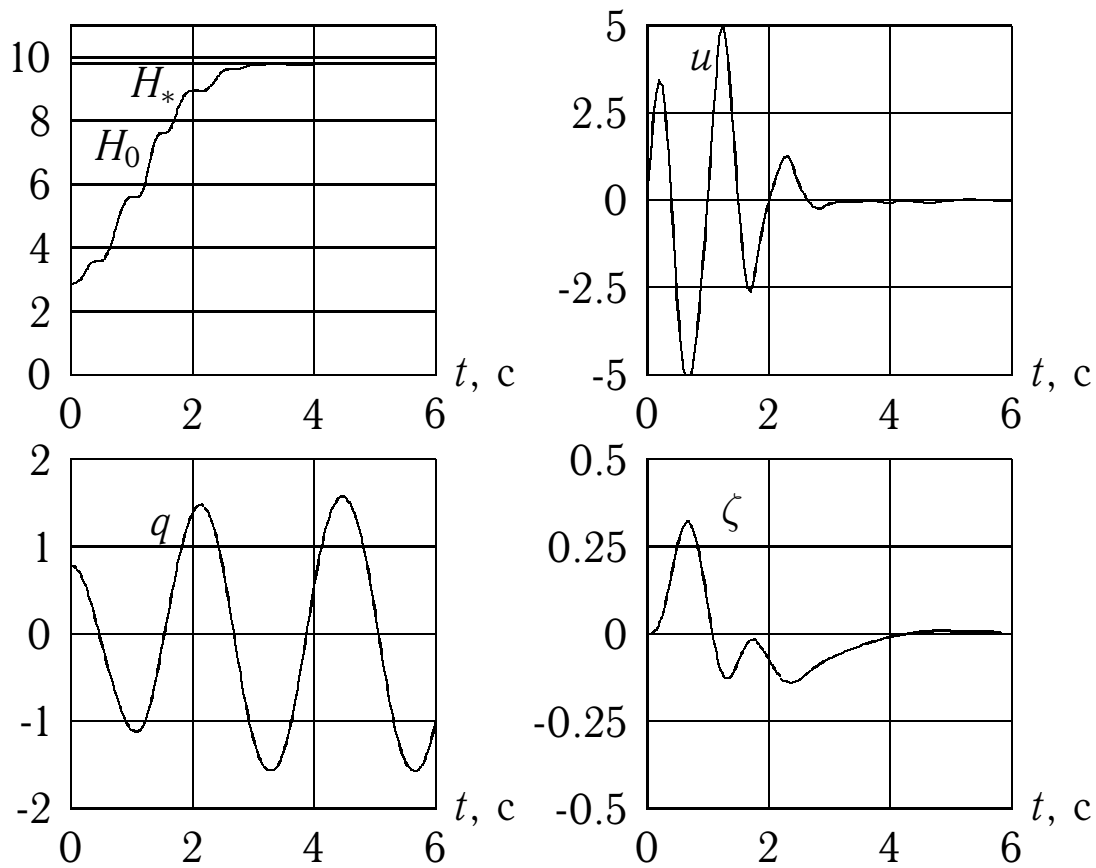


Рис. 9.4. Моделирование маятника с алгоритмом (9.10) при $\mu = 2$ и $\nu = 2$.

и для случая, когда точка подвеса перемещается горизонтально или наклонно. Дополнительные трудности могут возникнуть из-за неполноты или неточности измерений, например, если недоступна измерению угловая скорость $\dot{\varphi}(t)$. Может помешать неполнота управления, например, когда нельзя пренебречь инерционностью двигателя, вращающего маятник, и динамика управляемой системы описывается уравнениями

$$J\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = mlu \sin \varphi, \quad T\dot{u} + u = v, \quad (9.11)$$

где $v = v(t)$ — новый сигнал управления. Действительно, управляющее воздействие $v(t)$ не входит в правую часть первого уравнения (9.11) и скоростной градиент оказывается равным нулю.

Современная теория нелинейного и адаптивного управления предлагает широкий арсенал подходов к преодолению указанных трудностей [6, 61, 75].

9.2 Задача о выбросе из потенциальной ямы

Задача о выбросе из потенциальной ямы (или о преодолении потенциального барьера) под воздействием внешних сил встречается во многих областях физики и механики [35, 230]. Иногда выброс — явление нежелательное («прощелкивание» мембран и оболочек, опрокидывание судов или экипажей), в других случаях выброс необходим. Часто переход через потенциальный барьер соответствует фазовому переходу в физической системе. Во всех случаях нужны условия, гарантирующие наличие перехода через барьер или его отсутствие. Обычно исследуется случай типового гармонического внешнего воздействия [35, 230]. При этом представляет интерес, насколько мала может быть амплитуда воздействия, вызывающая выброс.

Во многих работах явление исследуется для нелинейных осцилляторов с одной степенью свободы, описываемых уравнением

$$\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + \Pi'(\varphi) = u, \quad (9.12)$$

где $\rho > 0$ — коэффициент диссипации. Например, в работе [227] минимальная амплитуда гармонического воздействия

$$u(t) = \gamma \sin \omega t, \quad (9.13)$$

вызывающая выброс решения (9.12) из потенциальной ямы определена путем компьютерного моделирования для двух типовых потенциалов: $\Pi(\varphi) = \varphi^2/2 - \varphi^3/3$ (иногда называемого потенциалом Гельмгольца), и $\Pi(\varphi) = \varphi^2/2 - \varphi^4/4$ (соответствующего уравнению Дуффинга и имеющего две потенциальные ямы, симметричные относительно нуля).

В частности, показано, что для потенциала Дуффинга в системе (9.12), (9.13) при $\rho = 0.25$ выброс неизбежен, если $\gamma > 0.212$, $\omega \approx 1.07$, тогда как при $\gamma < 0.212$ и любых значениях частоты внешнего воздействия выброса не происходит (рис. 9.5 вверху, где $\gamma = 0.211$, $\omega = 1.08$).

Как следует из результатов гл. 4, воздействие с обратной связью вызывает выброс при существенно меньших амплитудах. Действительно, выбирая в качестве \bar{H} высоту потенциального барьера и разрешая соотношение (4.31) относительно γ , получаем величину воздействия типа (4.25), гарантирующую выброс. Для уравнения

Дуффинга, например, $\bar{N} = 0.25$, откуда $\gamma = 0.1767$, что составляет 83% от величины, найденной в [227]. При этом в законе (4.25) величина N_* может быть произвольной, большей, чем 0.25, и закон (4.25) может быть упрощен:

$$u(t) = \gamma \operatorname{sign} \dot{\varphi}. \quad (9.14)$$

Отметим, что как закон (9.14) так и закон (4.25) не зависят от вида потенциала $\Pi(\varphi)$, и, следовательно, пригодны для создания резонансного режима в любом осцилляторе, описываемом моделью (9.12).

Моделирование показывает, что выброс наступает при еще меньших значениях амплитуды входного сигнала (9.14) (см., напр., рис. 9.5 внизу при $\gamma = 0.125$). Причина этого, по-видимому, в том, что оценки достижимого уровня энергии в замкнутой системе верны не только при выполнении условий приведенных выше теорем, гарантирующих пассивность свободной системы во всем начальном энергетическом слое, но и при некоторых ослабленных условиях, гарантирующих лишь пассивность «в среднем» (так называемая *квазипассивность* [61, 68]). Для рассмотренного случая реально достижимая величина энергии удваивается по сравнению с (4.31). В общем случае выигрыш в мощности, получаемый при возбуждении системы обратной связью зависит, как показывает теорема 4.1, от степени диссипации и растет для слабодемпфированных систем. На рис. 9.6 показано сравнение уровней возбуждения, требуемых для преодоления потенциального барьера в зависимости от степени диссипации.

9.3 Управление химической реакцией с фазовым переходом

Открытие колебательной реакции Белоусова–Жаботинского в 1950-х годах пробудило интерес к колебательным режимам химических реакций. Новые возможности в физико-химических исследованиях и технологиях связаны с управлением колебательными и хаотическими режимами. Целый ряд интересных явлений? в частности возникновение автоколебаний, имеет место при нелинейном взаимодействии химической реакции в исходной фазе с фазовым переходом, который испытывает продукт реакции. Действительно, с одной стороны химическая реакция поставляет вещество в исходную фазу и тем са-

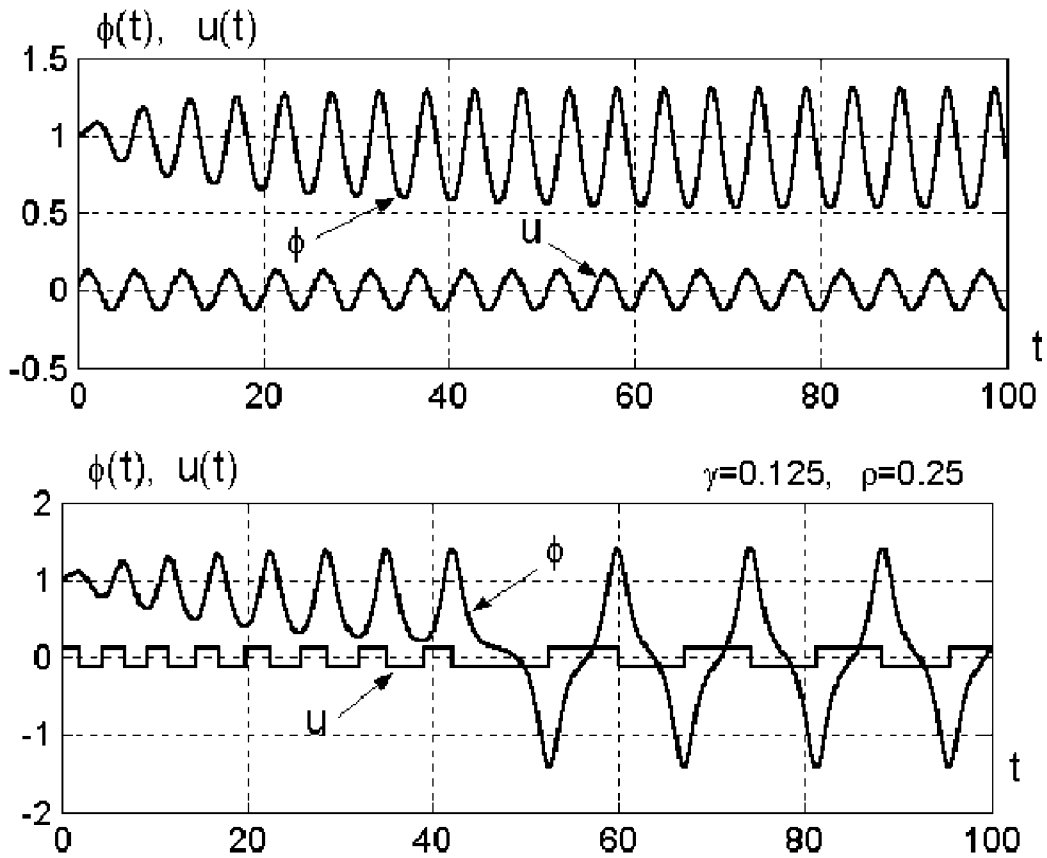


Рис. 9.5. Выброс из потенциальной ямы для системы Дуффинга (вверху — гармоническое возбуждение; внизу — возбуждение по алгоритму скоростного градиента).

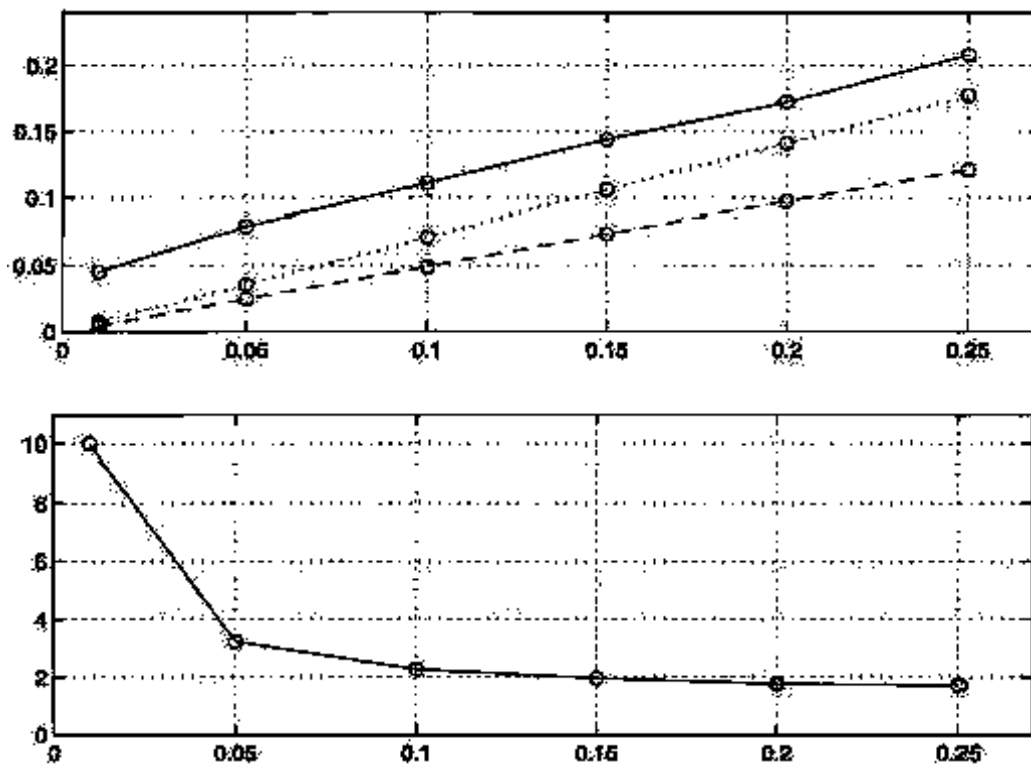


Рис. 9.6. Зависимость эффективности обратной связи от степени диссипации при выбросе из потенциальной ямы для системы Дуффинга. Вверху — уровень управляющего воздействия, требуемого для преодоления потенциального барьера (А — гармоническое возбуждение; В — возбуждение с обратной связью по алгоритму скоростного градиента, оценка из вычислительного эксперимента; С — возбуждение по алгоритму скоростного градиента, теоретическая оценка из теоремы 4.1). Внизу — эффективность обратной связи: отношение значения (А) к значению (С).

мым ускоряет фазовый переход, с другой — новая фаза потребляет продукт реакции, который является катализатором и, следовательно, замедляет химическую реакцию. Такая ситуация характерна для многих методов выращивания тонких пленок, использующих химические реакции, в частности для МOCVD-метода [45, 170].

Ниже, следуя [28], строится алгоритм управления модельной системой, описывающей процесс зарождения тонких пленок из многокомпонентного пара с учетом химических реакций между различными компонентами в исходной фазе. Метод управления основан на линеаризации отображения Пуанкаре (см. гл.6).

9.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим химическую реакцию типа $A+B \leftrightarrow C$. Будем считать, что концентрация веществ A и B достаточно низка для конденсации их смеси и тем более конденсации A и B по отдельности, но продукта реакции C образуется больше равновесной концентрации C_e , вследствие чего продукт реакции испытывает фазовый переход первого рода [170]. Если C не образует твердых растворов с A и B , то будет расти пленка вещества C стехиометрического состава. Для определенности предположим, что вещества B на подложке так много, что лимитирует протекание химической реакции только вещество A . Пусть A и C — концентрации соответствующих веществ, φ — скорость химической реакции, $\Psi(C-C_e)$ — скорость образования островков новой фазы, N — их концентрация, $\Phi(N, C)$ — скорость убыли продукта реакции C в островки новой фазы. Тогда, следуя [170], можно описать кинетику химической реакции и фазового превращения следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} dA/dt = J_0 - \varphi(A, C), \\ dC/dt = \varphi(A, C) - \Phi(N, C), \\ dN/dt = \Psi(C - C_e), \end{cases} \quad (9.15)$$

где t — время, J_0 — скорость поступления на подложку вещества A . При наиболее часто встречающемся диффузионном режиме роста все островки новой фазы потребляют одинаковое число молекул C , т.е. $\Phi(N, C) = \gamma NC$, где γ — коэффициент пропорциональности. Зависимость Ψ от $C - C_e$ является очень сложной [170]; однако,

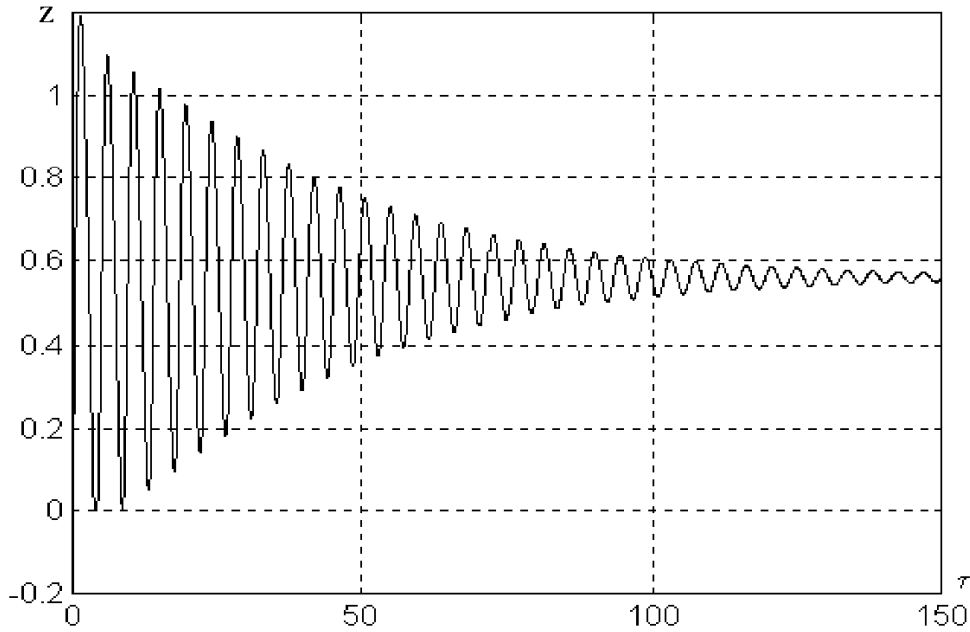


Рис. 9.7. Зависимость концентрации островков новой фазы z от времени τ при режиме роста пленок ($J = 0.7$).

учитывая, что анализ особых точек все равно проводится в линейном приближении и что $\Psi(0) = 0$, ограничимся линейной зависимостью $\Psi = \beta_0(C - C_e)$, где β_0 – соответствующий коэффициент пропорциональности. В качестве скорости реакции φ , следуя [170], выберем простейшую функцию с положительной обратной связью: $\varphi = k_0AC^2$, где k_0 – константа реакции. Такая ситуация реализуется, например, когда вещество C является катализатором в реакции между A и B . В этих предположениях система (9.15) примет вид

$$\begin{cases} dA/dt = J_0 - kAC^2, \\ dC/dt = kAC^2 - \gamma NC, \\ dN/dt = \beta_0(C - C_e). \end{cases} \quad (9.16)$$

Данная модельная система, а также ей подобные часто используются для описания различных нелинейных физико-химических явлений, возникающих в дисперсных системах с химическими реакциями: массовая кристаллизация из сложных растворов, осаждение многокомпонентных пленок газовой фазой методами (в частности, МOCVD-методом [25]), электролиз и т.д. Введением безразмерных переменных: $x = Ak^{2/3}\beta_0^{-1/3}\gamma^{-1/3}$, $y = Ck^{2/3}\beta_0^{-1/3}\gamma^{-1/3}$, $z = Nk^{1/3}\beta_0^{-2/3}\gamma^{1/3}$, $\tau = tk^{-1/3}\beta_0^{2/3}\gamma^{2/3}$ и безразмерных констант: $J = kJ_0/\beta_0\gamma$, $y_0 = C_e k^{2/3}\beta_0^{-1/3}\gamma^{-1/3}$. система (9.16) приводится к следующему виду,

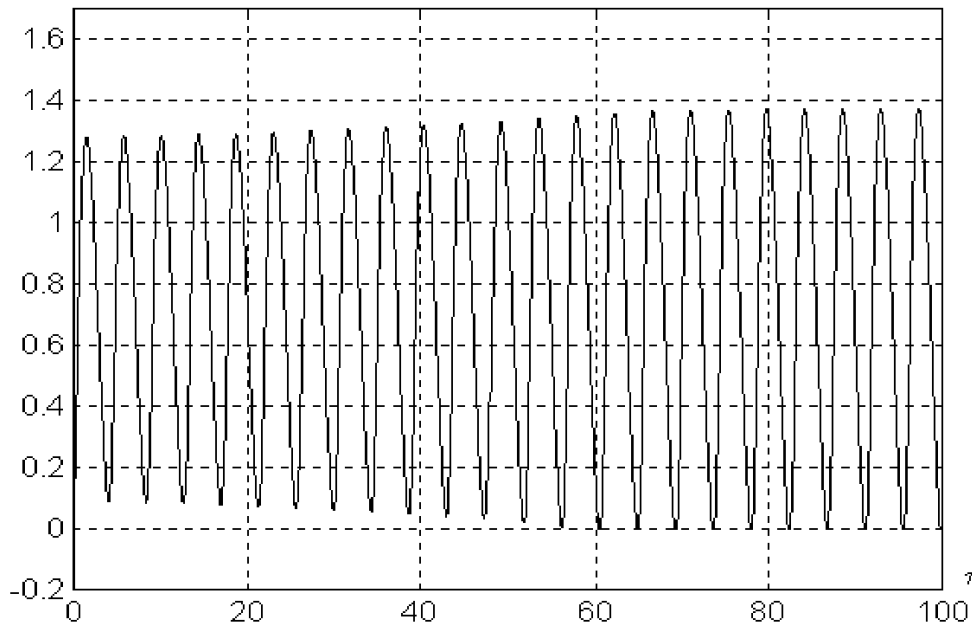


Рис. 9.8. Зависимость концентрации островков новой фазы z от τ при устойчивом колебательном режиме роста пленок ($J = 0.9$).

известному как модель Кукушкина—Осипова [171]:

$$\begin{cases} dx/d\tau = J - xy^2, \\ dy/d\tau = xy^2 - yz, \\ dz/d\tau = y - y_0 \quad (z \geq 0). \end{cases} \quad (9.17)$$

Анализ особых точек этой системы в линейном приближении показывает, что точка $J = y_0^3 - 1$ является точкой бифуркации, приводящей к образованию устойчивого предельного цикла. Выберем для определенности значение y_0 , равное $5/4$; тогда бифуркация будет иметь место в точке $J_1 \approx (5/4)^3 - 1 \approx 0.95$. Уточненное значение этой величины, найденное в результате компьютерного моделирования нелинейной системы (9.17), равно $J_1 \approx 0.888$ (с точностью 0.0002), т.е. при постоянных потоках J , меньших J_1 , система стремится к равновесию (рис.9.7), а при $J_1 < J < J_2 \approx 1.049$ система испытывает незатухающие колебания, соответствующие устойчивому предельному циклу (рис.9.8). И, наконец, при $J > J_2$ данный цикл разрушается и рост пленки осуществляется в неустойчивом «накопительном» режиме (рис.9.9).

В такой ситуации актуальной задачей является управление колебаниями в системе, поскольку структура и свойства пленок зависят

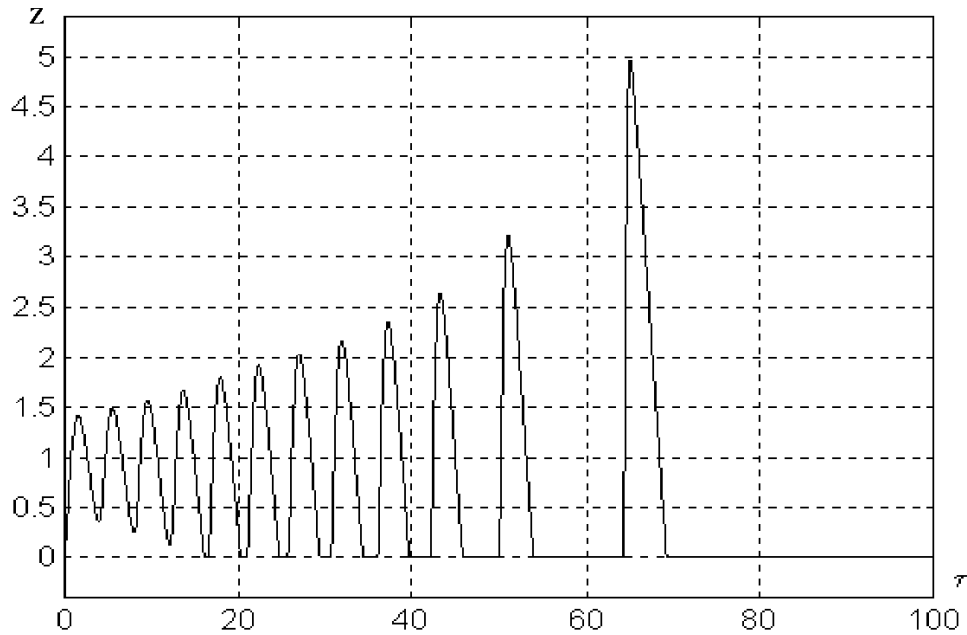


Рис. 9.9. Зависимость концентрации островков новой фазы z от времени τ при неустойчивом «накопительном» режиме роста ($J = 1.2$).

от амплитуды и периода колебаний. В частности, возникает вопрос: как нужно изменять во времени внешний поток J , чтобы максимальное значение концентрации островков новой фазы z_{max} приближалось со временем к заданному значению z_* ? Для решения этой задачи в [28] был применен метод адаптивного управления на основе управляемого отображения Пуанкаре [6, 27, 140].

9.3.2 Алгоритм адаптивного управления

Задача управления системой (9.17) ставится как задача поддержания на заданном уровне значений локальных максимумов величины $z(\tau)$ путем изменения функции $J(\tau) = J_0 + u(\tau)$, где J_0 — неизвестное значение внешнего потока вещества A , а $u(\tau)$ подлежит определению. Таким образом, управлением является функция $u(\tau)$, измеряемой переменной является $z(\tau)$, а цель управления записывается в виде

$$|z_k - z_*| \leq \Delta, \quad \Delta > 0, \quad (9.18)$$

где $z_k = z(\tau_k)$, τ_k — время достижения переменной $z(\tau)$ своего k -го локального максимума, Δ — заданная точность. Величина управляющего воздействия $u(\tau)$ меняется в моменты τ_k с учетом измерений величин z_k , причем закон изменения $u_k = u(\tau_k)$ также изменяется в

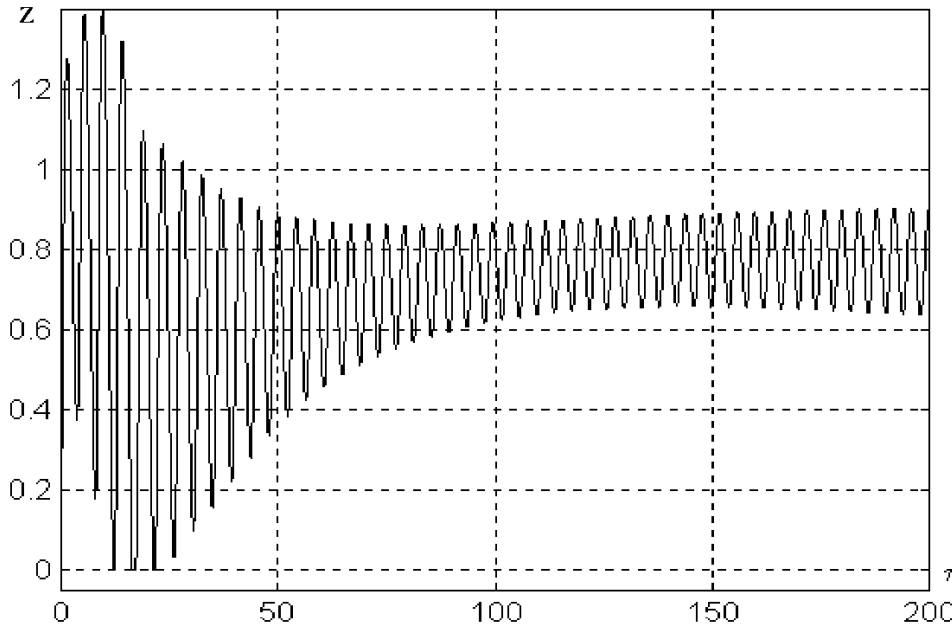


Рис. 9.10. Зависимость концентрации островков новой фазы z от времени τ в системе с управлением при $z_* = 0.9$.

ходе процесса по мере уточнения оценок параметров модели объекта управления, вычисляемых алгоритмом адаптации. Особенностью предлагаемого алгоритма является переход от непрерывной нелинейной модели объекта (9.17) к линейной дискретной модели, получаемой путем линеаризации отображения Пуанкаре в точках последовательных локальных максимумов $z(\tau)$ и перехода к разностному уравнению

$$z_{k+1} + a_1 z_k + a_2 z_{k-1} + a_3 z_{k-2} = b_1 u_k + b_2 u_{k-1} + b_3 u_{k-2} + \varphi_k \quad (9.19)$$

относительно измеряемых величин z_k и управляющих воздействий u_k . В уравнении (9.19) $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ – неизвестные коэффициенты, φ_k – ограниченное возмущение (погрешность модели).

Алгоритм адаптивного управления включает алгоритм основного контура, вычисляющий новое значение управляющего воздействия u_k , и алгоритм адаптации, уточняющий оценки $\hat{a}_{1k}, \hat{a}_{2k}, \hat{a}_{3k}, \hat{b}_{1k}, \hat{b}_{2k}, \hat{b}_{3k}$ параметров модели (9.19). Алгоритм основного контура

$$u_k = [z_* + \hat{a}_{1k} z_k + \hat{a}_{2k} z_{k-1} + \hat{a}_{3k} z_{k-2} - \hat{b}_{2k} u_{k-1} - \hat{b}_{3k} u_{k-2}] / \hat{b}_{1k} \quad (9.20)$$

выбран таким образом, чтобы обеспечить достижение цели (9.18) за один шаг, если оценки совпадают с истинными параметрами модели объекта. Алгоритм адаптации выбирается по методу рекуррентных

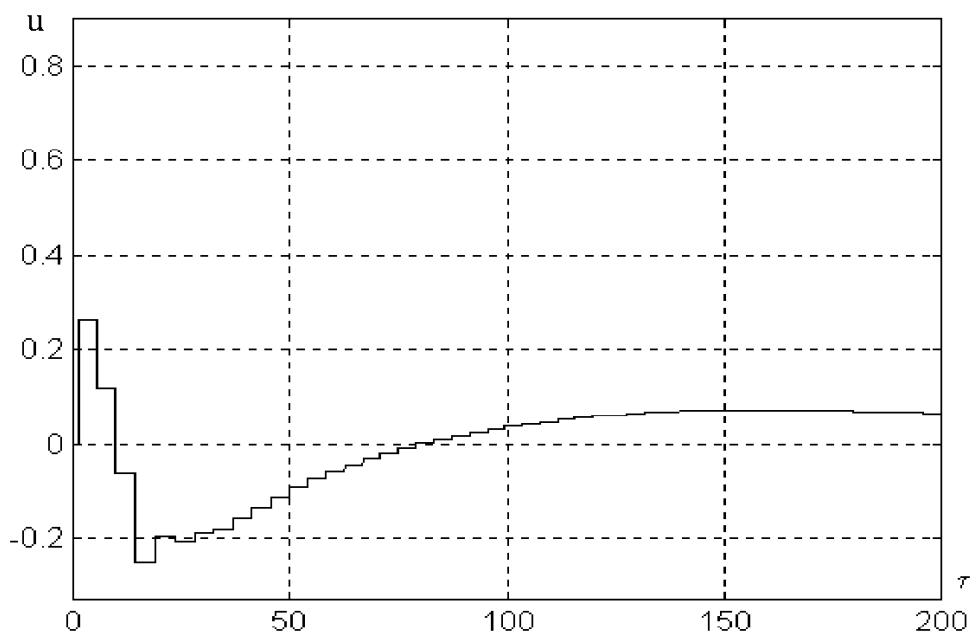


Рис. 9.11. Зависимость управляющего потока u от времени τ в системе с управлением при $z_* = 0.9$.

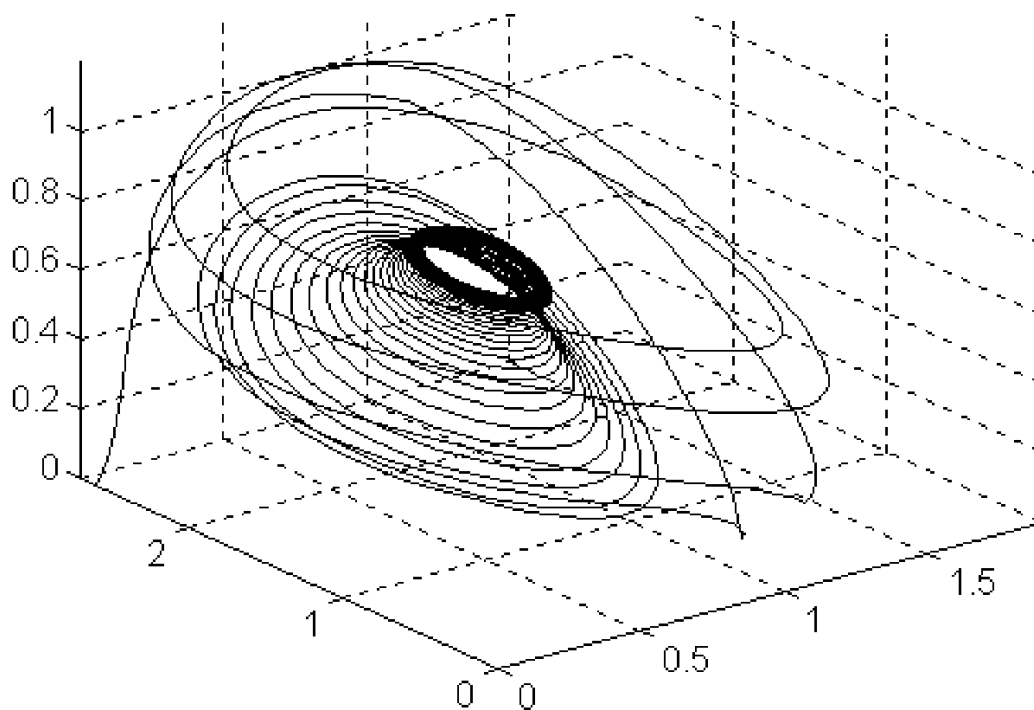


Рис. 9.12. Фазовый портрет управляемой системы в задаче управления $z_* = 0.9$.

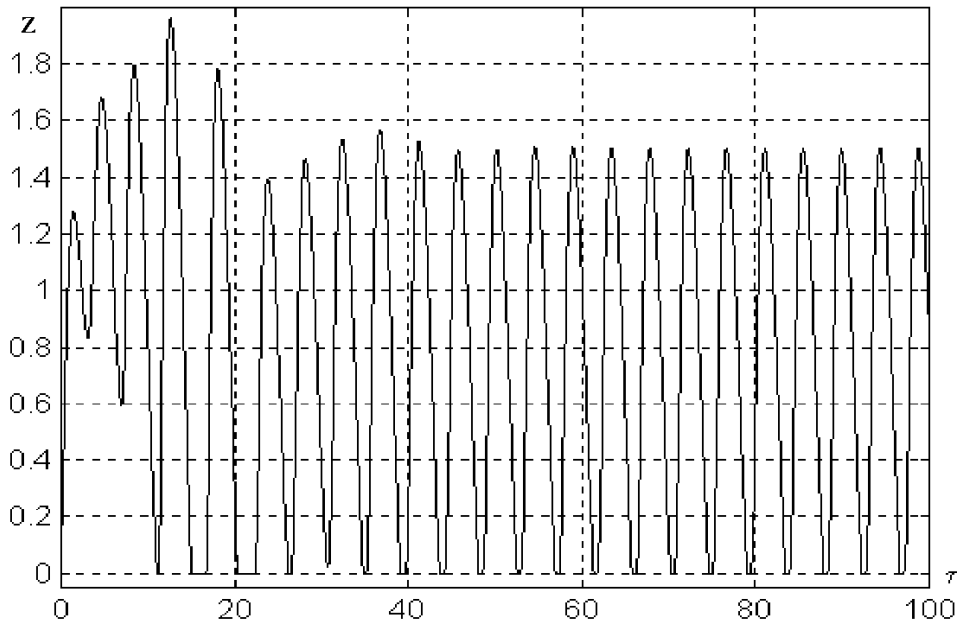


Рис. 9.13. Зависимость концентрации z от времени τ при $z_* = 1.5$.

целевых неравенств [78, 80] в виде

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_{i,k+1} &= \hat{a}_{i,k} - \alpha \vartheta_k z_{k-i+1}, & i &= 1, 2, 3, \\
 \hat{b}_{i,k+1} &= \hat{b}_{i,k} - \alpha \vartheta_k u_{k-i}, & i &= 1, 2, 3, \\
 \vartheta_k &= \begin{cases} z_{k+1} - z_*, & |z_{k+1} - z_*| > \Delta, \\ 0, & |z_{k+1} - z_*| \leq \Delta, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

где $\alpha > 0$ – коэффициент усиления. На основании результатов [6, 27, 140], можно утверждать, что при выполнении некоторых ограничений на погрешность модели и при достаточно малой величине α цель (9.18) достигается за конечное число шагов, т.е. неравенство (9.18) выполнено для $k > k_*$ при некотором k_* . Это доказывает принципиальную работоспособность предложенного метода. Отметим, что явный вид правых частей модели (9.17) в алгоритме не используется, т.е. метод применим для широкого класса функций φ , Ψ и Φ .

9.3.3 Результаты моделирования

Исследование точности и скорости сходимости алгоритма (9.20), (9.21) было проведено путем компьютерного моделирования. На рис.9.10 и 9.11 приведены зависимости $z(\tau)$ и $u(\tau)$, полученные для цели

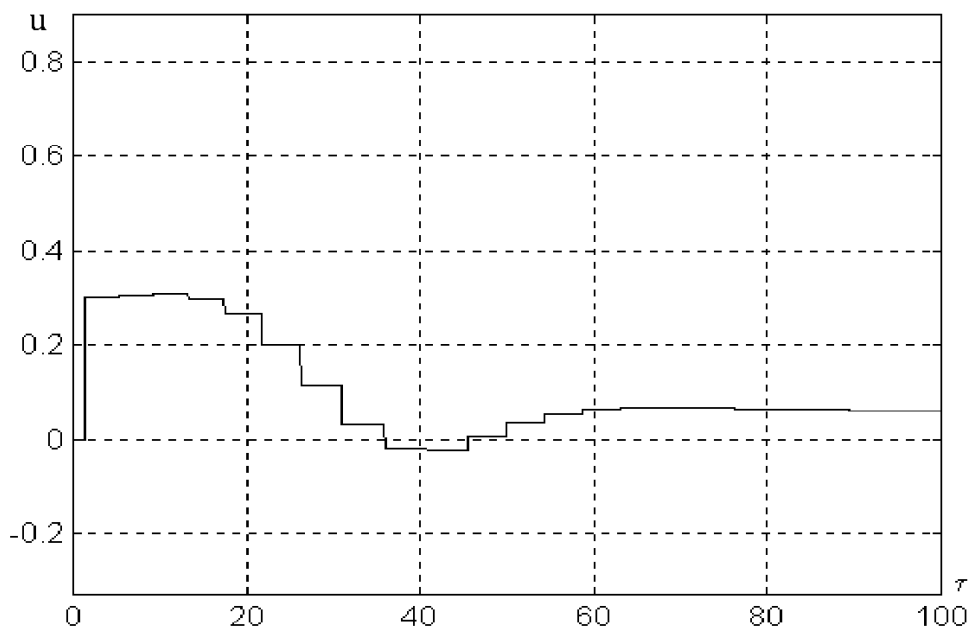


Рис. 9.14. Зависимость управляющего потока u от τ при $z_* = 1.5$.

(9.18) при $z_* = 0.9$; соответствующий фазовый портрет изображен на рис.9.12. Были выбраны следующие начальные условия и параметры: $J_0 = 0.9$, $x(0) = 0$, $y(0) = 2.6$, $z(0) = 0$, $y_0 = 5/4$. Видно, что при больших временах $u(\tau) \rightarrow 0.06$ (что соответствует $J(\tau) \rightarrow 0.96$), причем амплитуда колебаний концентрации островков новой фазы существенно уменьшается и становится примерно в два раза меньше, чем амплитуда колебаний при постоянном $u \equiv 0.06$ (что соответствует $J \equiv 0.96$). На рис. 9.13–9.15 приведены те же зависимости, но для ЦУ $z_* = 1.5$. Как и следовало ожидать, амплитуда колебаний $z(\tau)$ в этом случае увеличивается, причем при $t \rightarrow \infty$ управление $u(\tau) \rightarrow 0.06$ (что соответствует $J(\tau) \rightarrow 0.96$). На рис.9.16 показан процесс настройки коэффициентов модели (9.19).

Из теоретических результатов [27, 140] следует, что порядок модели «вход—выход» (9.19) должен быть на единицу меньше порядка неуправляемой системы. Представляет интерес вопрос о влиянии порядка этой модели на сходимость и скорость сходимости алгоритма управления. Компьютерное моделирование показало, что для системы (9.17) сходимость и скорость сходимости слабо зависят от числа коэффициентов модели (9.19). Некоторое уменьшение скорости сходимости обнаружено лишь для адаптивной модели с одним настраиваемым коэффициентом, для которой достижение цели управления

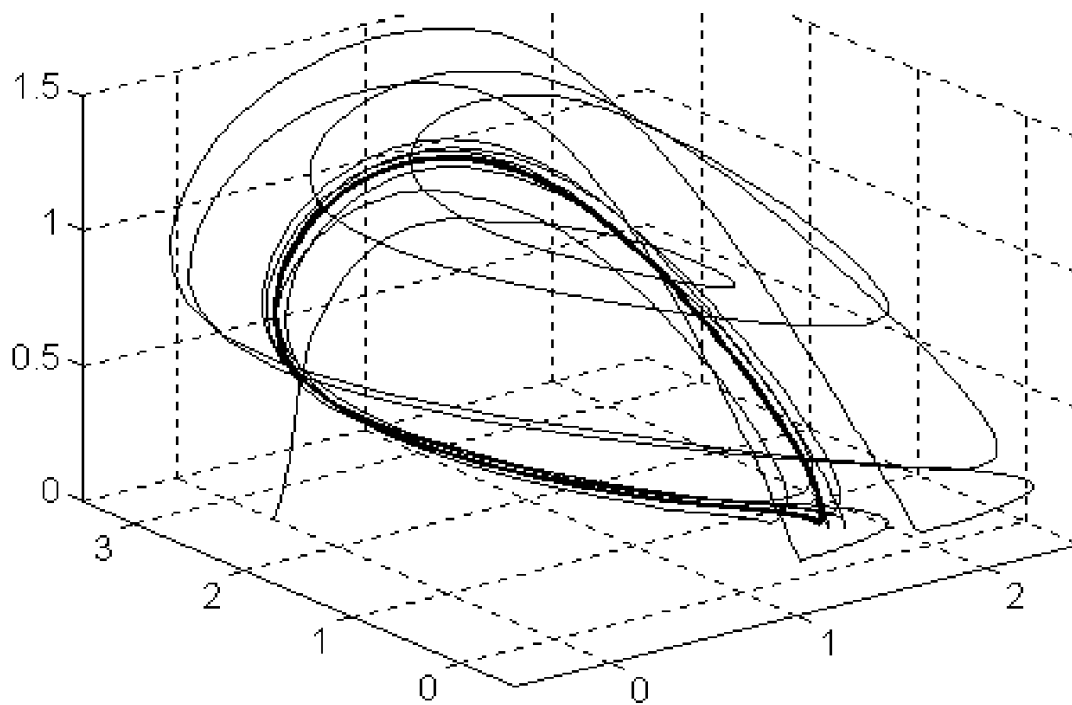


Рис. 9.15. Фазовый портрет управляемой системы при $z_* = 1.5$.

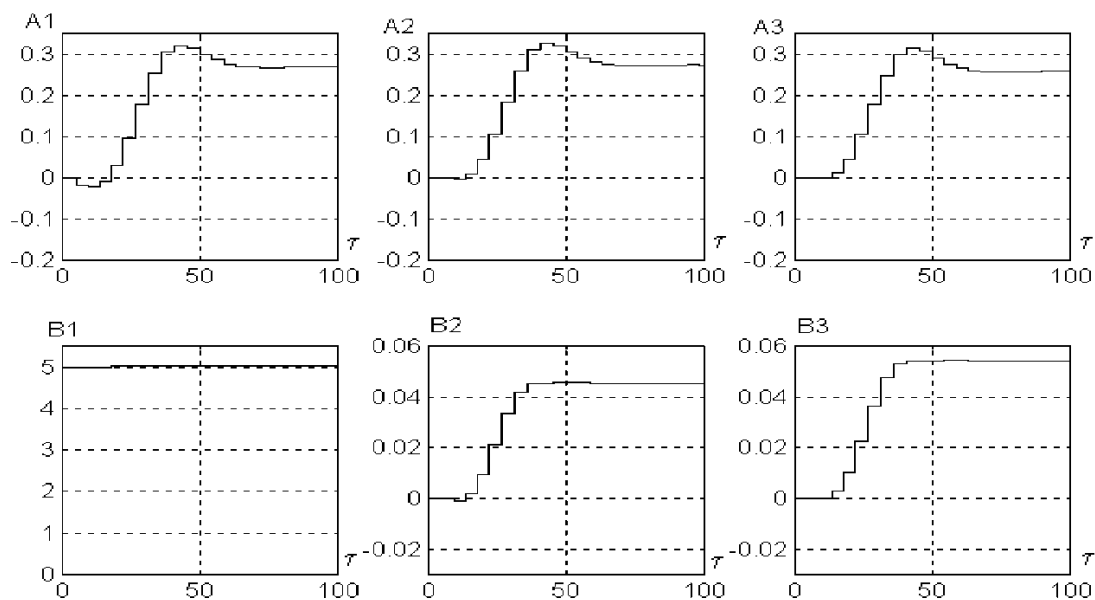


Рис. 9.16. Настройка адаптивной модели третьего порядка

не гарантируется теоремами, доказанными в [27, 140].

Интересно, что поведение системы на больших временах определяется не только асимптотическими значениями внешних параметров задачи, но и тем, каким образом они изменялись в начальные моменты времени, что свидетельствует об эффектах памяти систем, претерпевающих фазовый переход первого рода с химическими реакциями. По-видимому, именно эти эффекты приводят к тому, что многие соответствующие эксперименты, в частности, по выращиванию ВТСП-пленок методом МОСVD, имеют слабую воспроизводимость. Указанный эффект аналогичен явлению затягивания в колебательных системах с двумя степенями свободы, хорошо известному в теории колебаний [46]. Не менее, а, может быть и более необычные эффекты возникают при управлении фазовыми переходами и самоорганизацией систем с учетом пространственной распределенности, см. [26].

9.4 Управление диссоциацией двухатомных молекул

9.4.1 Лазерное управление молекулярной динамикой

Задачи управления процессами микромира, в том числе управления движением атомов и молекул имеют богатую историю. Демон Максвелла уже обсуждался во вводной главе. В XX веке были хорошо изучены разнообразные задачи управления процессами химической технологии (в рамках бурно развивавшейся в 1960–1970-х годах «химической кибернетики» [39, 63]), задачи управления ядерными реакторами [34, 80], задачи управления пучками частиц [66] задачи лазерного управления процессами в твердом теле [57] и др. В традиционных подходах и системах целью управления обычно является регулирование интенсивности процессов, которые могут протекать и без приложения управляющего воздействия. Однако со времен средневековых алхимиков у людей возникало желание научиться направлять природные процессы по путям, природой не предусмотренным, вмешиваясь в движение отдельных атомов и молекул, разрывая имеющиеся и создавая новые химические связи. В XX веке с изобретением такого тонкого инструмента как лазер, практическая реализация подобных идей стала обсуждаться всерьез.

Главными трудностями при управлении процессами на атомно-молекулярном уровне являются малые пространственные размеры управляемых объектов и большая скорость протекания процессов в них. Средний размер молекул химических веществ (мономеров) имеет порядок 10^{-8} м = 10 нм. Среднее расстояние между атомами в молекуле имеет порядок 1 нм, средняя скорость движения атомов и молекул при комнатной температуре $10^2 - 10^3$ м/с, а период собственных колебаний атомов в молекуле составляет 10–100 фс (1 фс = 10^{-15} с). Создание приборов для измерения и управления в таких пространственно-временных масштабах представляет собой сложнейшую научно-техническую проблему. Отметим, что существующие химические и ядерные реакторы основаны на использовании естественного замедления быстропротекающих процессов. Например, реализация систем управления ядерными реакциями возможна лишь потому, что динамика нейтронно-физических процессов существенно замедляется из-за наличия так называемых запаздывающих нейтронов, движение которых имеет постоянные времени порядка единиц и десятков секунд. Динамика молекул, вступающих в химические реакции, замедляется за счет диффузии, что создает предпосылки для управления процессами химической технологии. Однако для «тонких» задач управления, например для разрыва сильной химической связи при сохранении более слабой (так называемая *селективная химия*) необходимо избирательно вмешиваться в процессы с характерными временами в пределах фемтосекундного диапазона. Технических возможностей для управления столь быстро протекающими процессами до последнего времени не существовало.

Положение изменилось в конце 1980-х годов с появлением сверхбыстродействующих, фемтосекундных лазеров, генерирующих импульсы длительностью порядка десятков, а в настоящее время и единиц фемтосекунд, а также способов компьютерного управления формой лазерных импульсов. Возникло новое направление в химии — фемтохимия, за успехи в котором в 1999 г. была присуждена Нобелевская премия по химии А. Зивейлю [236]. С развитием других способов использования фемтосекундных лазеров возник термин «фемтосекундные технологии», или «фемтотехнологии».

Предложено несколько подходов к управлению молекулярными системами. В подходе П. Брюмера и М. Шапиро [216] управление

основано на интерференции двух лазерных пучков с различными частотами, амплитудами и фазами (схема накачки-гашения — *rimpr-dump scheme*). Д.Таннор и С.Райс [228] предложили двухимпульсные схемы накачки-гашения во временной области. Для оптимизации импульсов впоследствии были использованы методы оптимального управления, в частности на основе метода В.Ф. Кротова [168]. Х. Рабиц с соавторами [118, 162, 197, 209] исследовали различные варианты оптимального управления при классическом и квантовом описании динамики молекулярного движения. В работе [162] была выдвинута идея реализации адаптивного лазерного управления химическими реакциями с применением методов поисковой оптимизации (генетических алгоритмов), впоследствии неоднократно подтвержденная экспериментами [89, 92, 195]. О современном состоянии проблемы можно судить по статьям, представленным в сборниках [173, 204], а также в сборнике переводов [76].

Одной из простейших задач этого класса является задача о диссоциации двухатомной молекулы [144, 145, 178, 235]. В то же время эта задача является типичной, на которой удобно сравнивать достоинства и недостатки различных методов. В работе [144] численно были исследованы возможности диссоциации молекулы фтористого водорода (HF) при воздействии периодически меняющегося поля (монохроматического лазерного излучения). Аналогичным методом в [145] была исследована диссоциация двухчастотным (бихроматическим) воздействием и показано, что интенсивность диссоциирующего поля может быть существенно снижена. В работе [178] получена оценка интенсивности диссоциирующего поля путем *чирпирования* — равномерного изменения частоты внешнего воздействия. Показана возможность дальнейшего снижения интенсивности поля, требуемой для диссоциации.

Новые возможности для изменения физико-химического состояния вещества возникают при непериодическом воздействии в виде обратной связи. В предыдущем разделе на примере задачи о выбросе из потенциальной ямы показано, что обратная связь позволяет на несколько порядков снизить интенсивность воздействия, требуемую для преодоления потенциального барьера. При выборе воздействия методом скоростного градиента интенсивность, требуемая для достижения заданного уровня энергии, оказывается обратно пропорци-

ональной степени диссипации системы (см. теорему 4.1), а для консервативных систем соответствующий эффект теоретически может быть достигнут при сколь угодно малой интенсивности возбуждения. Поэтому представляет интерес применение обратной связи для синтеза управления молекулярными системами.

Главные проблемы при управлении с обратной связью — это измерение состояния системы и реализация управляющего воздействия на промежутках времени, сравнимых с периодом собственных колебаний молекулы.

В работах [197, 209, 235] и других предложены различные алгоритмы управления с обратной связью, в том числе алгоритмы оптимального управления. Общей их особенностью является то, что они используются для синтеза управляющего воздействия как функции времени по заданной модели молекулярной системы. В вычислительных экспериментах можно считать, что все нужные сигналы измеряются, а синтезированный алгоритм реализуется в вычислительной машине. В результате будет сгенерирован управляющий сигнал как функция времени, а его реализация на объекте выполняется уже без измерений и без обратной связи. Практическому применению такого подхода мешает значительное число неопределенностей: не точно известно начальное состояние системы, построенная управляющая функция не точно вычисляется и реализуется с погрешностью. Наконец, сама модель молекулы не точна, поскольку не точно известны ее параметры, да и выбор между классическим и квантовым описанием часто вызывает дискуссии.

Ниже описывается новый подход к задаче о диссоциации двухатомной молекулы [88, 122, 133], основанный на методе скоростного градиента с энергетической целевой функцией. Получаемые алгоритмы отличаются робастностью, поскольку не зависят от формы потенциала межмолекулярного взаимодействия. Они позволяют достигать диссоциации при меньшей интенсивности управляющего поля по сравнению с чирпингом и более просты для синтеза и расчета по сравнению с методами оптимального управления.

9.4.2 Синтез алгоритмов управления диссоциацией

Идея подхода состоит в том, что задача управления диссоциацией ставится как задача достижения заданного уровня энергии молекулы (порог диссоциации). Для упрощения исследования будем считать, что заданный уровень энергии несколько меньше порога диссоциации, т.е. будем рассматривать задачу *преддиссоциации*. Затем формируется целевая функция как квадрат отклонения текущей энергии от заданной, строится алгоритм управления по стандартной схеме скоростного градиента (см. гл. 3) и подается на динамическую модель молекулы («эталонная молекула») в течение времени T_1 , достаточного для ее диссоциации. Если сгенерированный таким образом управляющий сигнал как функцию времени подать на реальную молекулярную систему, то его воздействие приведет к диссоциации лишь тех молекул, начальное состояние которых находится в некоторой окрестности начального состояния эталонной молекулы x_0 («зона диссоциации»). Однако если управление подается импульсами продолжительностью T_1 а промежутки между ними достаточно велики, то за время паузы между импульсами в ходе хаотического теплового движения некоторые молекулы приблизятся к состоянию x_0 , войдут в зону диссоциации и будут диссоциированы следующим управляющим импульсом. Если алгоритм достаточно грубый, робастный, то можно ожидать, что доля молекул, находящихся в зоне диссоциации, будет не слишком мала и процесс пойдет достаточно быстро. Рассмотрим описанный подход более детально, следуя [88].

Примем классическое описание динамики отдельной молекулы в виде гамильтоновой модели (3.1). Роль координаты в (3.1) играет межатомное расстояние $r(t)$, а гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + \Pi(r) - \mu(r) u, \quad (9.22)$$

где m — масса молекулы, $\Pi(r)$ — потенциал межатомного взаимодействия, $\mu(r)$ — дипольный момент молекулы, $u = u(t)$ — внешнее управляющее поле. Для описания межатомного взаимодействия будем использовать потенциал Морзе

$$\Pi(r) = D (1 - e^{-\alpha(r-a)})^2 - D = D (e^{-2\alpha(r-a)} - 2e^{-\alpha(r-a)}) , \quad (9.23)$$

где D - энергия связи, a - равновесное межатомное расстояние. Дипольный момент часто задают в форме [147, 235]

$$\mu(r) = A r e^{-\xi r^4} \quad \mu'(r) = A (1 - 4\xi r^4) e^{-\xi r^4}, \quad (9.24)$$

где A , ξ - постоянные параметры. Если величина ξa^4 мала по сравнению с единицей, то дипольный момент можно аппроксимировать линейной функцией: $\mu(r) = Ar$, $\mu'(r) = A$. При этом уравнения управляемой системы в лагранжевой форме примут вид

$$m\ddot{r} = 2\alpha D (e^{-2\alpha(r-a)} - e^{-\alpha(r-a)}) + Au(t). \quad (9.25)$$

Такое описание предполагает, что движение молекулы одномерно, а ее ось ориентирована вдоль силовых линий управляющего внешнего поля, т.е. эффектами изменения ориентации и вращения молекулы пренебрегается.

Для формулировки цели управления заметим, что если полная энергия молекулы приближается к уровню $\Pi_* = \lim_{r \rightarrow \infty} \Pi(r)$, то диссоциация становится все более вероятной. Очевидно, в случае потенциала Морзе (9.27) имеем $\Pi_* = 0$.

Выберем в качестве целевой функции квадрат отклонения энергии от желаемого значения $Q(q, p) = 0.5(H_0(q, p) - H_*)^2$, где

$$H_0(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \Pi(r)$$

– энергия свободной молекулы, H_* – заданная величина, близкая к порогу диссоциации Π_* . Вычислив скоростной градиент, как и ранее, придем к простым законам обратной связи

$$u = -E (H_0(q, p) - H_*) \dot{r}, \quad (9.26)$$

$$u = -E \operatorname{sign}(H_0(q, p) - H_*) \operatorname{sign} \dot{r}, \quad (9.27)$$

где $E > 0$; $\operatorname{sign}(H) = 1$ при $H > 0$, $\operatorname{sign}(H) = -1$ при $H < 0$ и $\operatorname{sign}(0) = 0$.

В дальнейшем будем использовать упрощенный вариант алгоритма (9.27), полученный в предположении, что энергия молекулы всегда меньше порога диссоциации H_* :

$$u = E \operatorname{sign} \dot{r}. \quad (9.28)$$

Алгоритм (9.28) не требует точного знания порога диссоциации H_* и может применяться и для других задач, например для локализации молекулы в области повышенной энергии, так называемой *преддиссоциации*.

9.4.3 Результаты моделирования при классическом описании молекул

Вычислительные эксперименты с системой (9.25), (9.28) проводились для числовых значений параметров, соответствующих молекуле фтористого водорода (HF) [147, 235]: $m = 1732$, $D = 0.2101$, $\alpha = 1.22$, $a = 1.75$, $A = 0.4541$, $\xi = 0.0064$, $E = 0.1$. Значения указаны в атомных единицах Хартри (а.е.). Для расчета управляющего воздействия выбирались начальные условия вблизи равновесного состояния $r = a$, $\dot{r} = 0$ («эталонная молекула»). Интенсивность поля задавалась достаточно низкая: $E = 0.005$ а.е. Результатом расчета являлась функция $u(t)$, $0 \leq t \leq T_1$.

Рассчитанное управляющее воздействие $u(t)$ подавалось на модель ансамбля, состоящего из $N = 1000$ молекул. Предполагалось, что молекулы не взаимодействуют друг с другом и с границей. Начальные условия для молекул ансамбля брались случайно и были распределены равномерно на поверхности заданного уровня энергии $H_0 = -0.8689D$. Управление подавалось в виде повторяющихся импульсов с периодом повторения T_2 , достаточно большим, чтобы дать возможность молекулам «перемешаться» за время паузы между импульсами. В экспериментах выбиралось $T_2 = 200 T_0$, где T_0 — период малых колебаний молекулы вблизи равновесного положения. Мерой эффективности управления являлась доля диссоциировавших молекул (в процентах к общему числу молекул). Под диссоциацией понималось превышение молекулой уровня энергии $H_* = -0.1185D$. Поскольку значение H_* занижено по сравнению с порогом диссоциации $H_* = 0$, точнее называть это состояние *преддиссоциацией*. Однако, учитывая, что целью исследования являлась принципиальная проверка работоспособности подхода, мы не будем в дальнейшем акцентировать на этом внимание.

Предложенный алгоритм сравнивался по эффективности со стан-

дартным алгоритмом чирпинга

$$u(t) = E \cos(\phi_0 + \Omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}) \quad (9.29)$$

На рис. 9.17, а представлена зависимость доли диссоциировавших молекул от времени при управлении линейно чирпированным полем. Скорость чирпа ε (скорость изменения несущей частоты импульсов) подбиралась экспериментально для достижения наибольшей доли диссоциировавших молекул и в эксперименте была $\varepsilon = 0.01\Omega_0/T_0$. На рис. 9.17, б представлена аналогичная зависимость для алгоритма скоростного градиента. Из рисунков видно, что эффективность последнего в несколько раз выше эффективности линейного чирпинга. Важно, что система с чирпингом весьма чувствительна к величине скорости чирпа ε . Подбор параметра ε требует значительного объема вычислений и значительно более точного знания параметров молекулярного гамильтониана и дипольного момента, чем требуется для эффективной работы алгоритма (9.28).

9.4.4 Сравнение классического и квантово-механического подходов

Интересным и до сих пор вызывающим дискуссии является вопрос о правомерности использования классических представлений при моделировании и управлении молекулярными процессами. Динамика двухатомной молекулы более адекватно описывается вместо классической модели (9.25) квантово-механической (точнее, полуклассической) моделью, представленной нестационарным уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \Pi(r)\Psi + A r u(t)\Psi, \quad (9.30)$$

где $\Psi = \Psi(t, r)$ — волновая функция, квадрат модуля которой определяет плотность вероятности нахождения молекулы в данном состоянии; $\Pi(r)$ — потенциал Морзе (9.23). Вероятность диссоциации (доля диссоциировавших молекул) определяется как вероятность состояний с энергией, превышающей порог диссоциации H_* .

Однако классические вычисления во многих случаях дают результат, достаточно близкий к реальности. Поэтому было проведено

численное сравнение результатов моделирования процессов управляемой диссоциации в классической и квантовой постановках.

Для численного анализа квантовой модели (9.30) была построена конечно-уровневая аппроксимация модели путем разложения решения по собственным функциям невозмущенного уравнения Шредингера. Собственные значения и собственные функции невозмущенного оператора Шредингера для потенциала Морзе могут быть вычислены аналитически [77]. Управляющее воздействие и время моделирования были взяты такими же, как и в классическом случае. Начальное состояние системы было выбрано как чистое состояние с энергией, равной второму энергетическому уровню, а порог диссоциации H_* соответствовал пятнадцатому энергетическому уровню молекулы HF, что также соответствует классическому случаю.

Результаты квантово-механического моделирования представлены на рис. 9.18. Видно, что алгоритм скоростного градиента обеспечивает вероятность диссоциации 14% после 5 импульсов, что существенно превышает вероятность диссоциации для chirпированного импульса и согласуется с результатами для классического случая (10 – 12%).

9.5 Обратная связь в спектроскопии

В основе традиционного спектроскопического исследования лежит воздействие на исследуемую систему гармоническим внешним сигналом (монохроматическим излучением). Оценка возможных энергетических уровней и выбор вектора состояния модели процесса делается на основе квантово-механических представлений (например, в лазерной спектроскопии используются модели динамики матрицы плотностей состояний квантового ансамбля [52]). Однако при расчете динамики резонансного взаимодействия вещества и излучения используется, как правило, классическая модель гармонического осциллятора [52]). Реальная система имеет много степеней свободы и, соответственно, множество собственных режимов с различными собственными частотами и различными коэффициентами затухания (поглощения). Интерес представляют резонансные режимы, для которых поглощение мало. Воздействие с частотой, близкой к резонансной, соответствует пику (линии) спектрограммы.

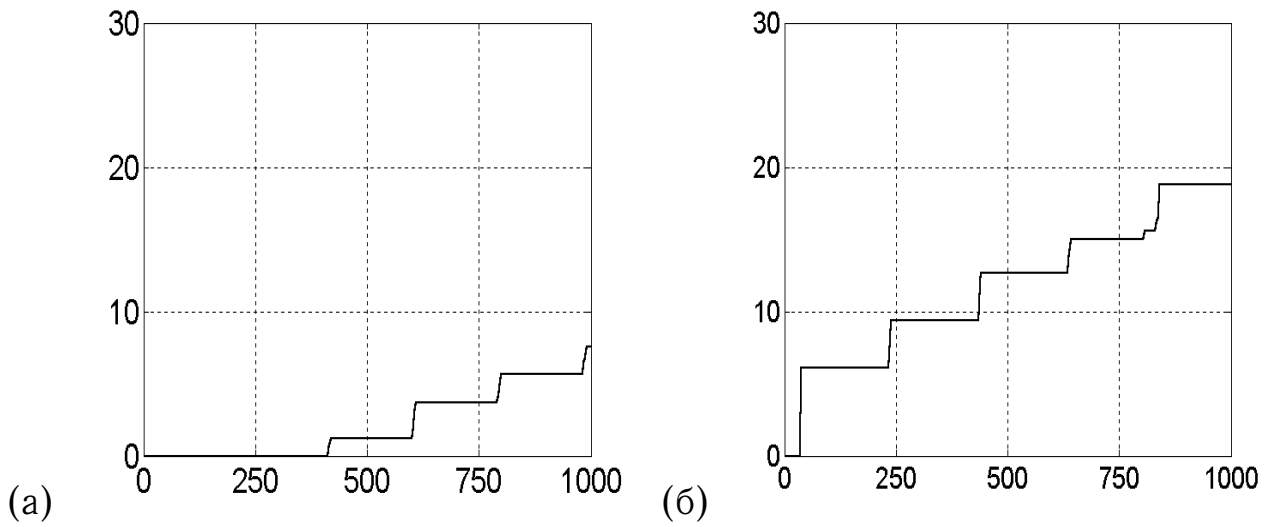


Рис. 9.17. Управляемая диссоциация в классическом ансамбле *a)* — линейно чирпированные импульсы, *б)* — импульсы, рассчитанные по методу скоростного градиента. Доля диссоциировавших молекул указана в процентах, время — в единицах T_0 .

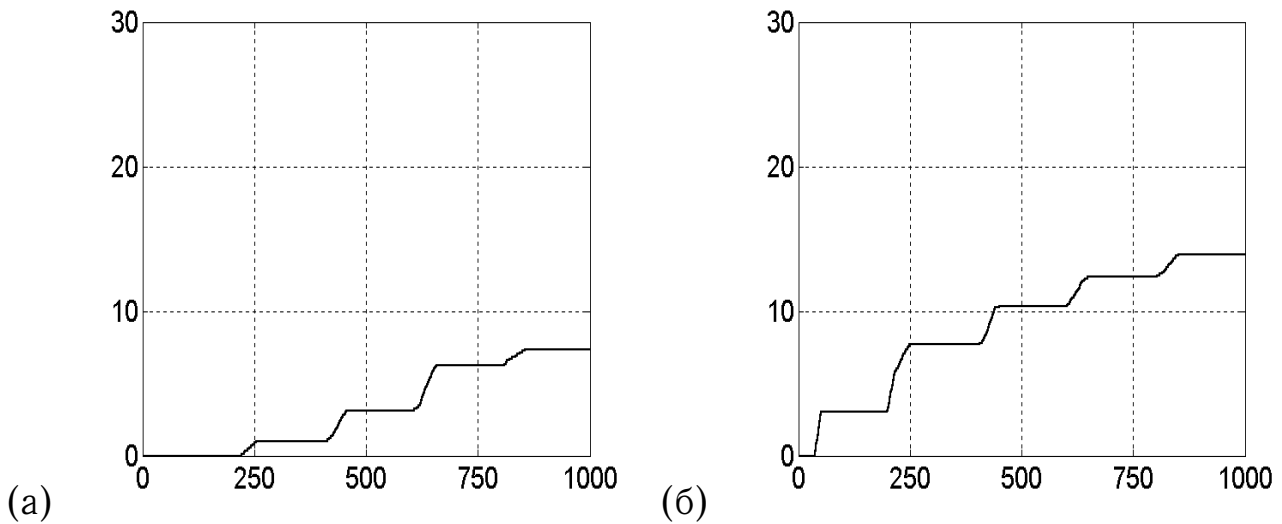


Рис. 9.18. Вероятность диссоциации при квантово-механическом моделировании для $E = 0.005$ а.е.: *a)* — линейно чирпированные импульсы, *б)* — импульсы, рассчитанные по методу скоростного градиента. Вероятность диссоциации указана в процентах, время — в единицах T_0 .

Нелинейность динамики отклика системы обычно трактуется как возмущение модели (ангармоничность), меняющее условия резонанса. Если амплитуда колебаний возрастает и влияние нелинейности становится существенным, то часть энергии излучения не поглощается системой, а отражается или рассеивается. В результате уровень энергии (4.30), соответствующий резонансу в линейном приближении в системе не достигается.

Ситуация меняется, если предположить, что внешнее воздействие может зависеть от состояния системы, т.е. может включать обратную связь. Даже если нелинейность существенна, воздействие вида (4.25) выводит систему на уровень энергии, не меньший, чем (4.31), порядок которого для слабодемпфированных систем совпадает с (4.30). Таким образом, возникает возможность более полного возбуждения системы и оценивания ее способности поглощать энергию на более высоких энергетических уровнях, а значит, повышения чувствительности метода. Понятно, что нелинейность играет существенную роль лишь при значительной амплитуде выходного сигнала. Это условие выполняется в современной лазерной спектроскопии, где расчеты ведутся на основе нелинейных моделей, хотя и без учета обратных связей. Методы спектроскопического исследования, основанные на обратной связи, должны включать в себя традиционные методы, роль которых заключается в определении окolorезонансных областей и начальном возбуждении системы. В качестве обратной связи можно использовать простой закон (9.14), не требующий измерения энергии и не зависящий от формы потенциала, т.е. от формы ангармоничности.

Конечно, проблема реализации закона возбуждения с обратной связью далеко не проста, поскольку требуется измерение не только интенсивности, но и фазы возбуждаемых колебаний. Однако появление высокоскоростных управляемых лазеров, рост быстродействия и точности измерительной аппаратуры дают перспективу экспериментальной проверки подхода. Реализация обратной связи упрощается в областях, где частоты возбуждения сравнительно низки, например в виброакустике, ультразвуковой дефектоскопии. В более высокочастотных диапазонах можно использовать частотно-модулированный тестовый сигнал, сравнение его с эталонным и введение обратной связи в диапазоне частот биений [82].

10 ЗАКЛЮЧЕНИЕ. НЕМНОГО О БУДУЩЕМ

Современные физические исследования становятся все более ориентированы на запросы практики. Как следствие, понятие цели все чаще играет в них существенную роль. Этому способствует и грантовая система финансирования: для получения грантов нужна сильная мотивация; редкое исследование нынче выполняется из чистого любопытства. Наряду с прямыми задачами (задачами анализа) все чаще ставятся и задачи обратные (задачи синтеза), решение которых определяет, **как** достичь того или иного состояния системы. Признаком этой тенденции является то, что термин «управление» все чаще появляется на страницах физических журналов. Неудивительно поэтому, что все чаще в физических работах применяются и методы современной теории управления, создавшей за полвека интенсивного развития мощный инструментарий для аналитического и численного решения задач синтеза в самых разнообразных ситуациях.

Выше были проанализированы основные особенности задач управления в физических системах и представлены общие подходы к решению задач управления фундаментальной характеристикой систем — энергией. Установлены законы преобразования энергии для основных классов систем: консервативных и диссипативных. Рассмотрен ряд других классов задач управления физическими системами. Новые постановки потребовали введения новых понятий (индекс возбудимости) и привели к описанию новых эффектов (резонанс с обратной связью). Приведенные примеры показывают плодотворность новых подходов в исследовании и управлении явлениями макро- и микромира.

Из-за пространственно-временных ограничений в книге не представлен целый ряд важных применений методов теории управления в физике. По мнению автора, будущий курс кибернетической физики не может не включать такие главы как оптимизационная термодинамика [99, 85], управление пучками частиц [66], теорию динамических материалов [101], исследование универсальных структурных свойств и робастности сложных физических систем [113] и ряд других. Нельзя не упомянуть о недавних работах по применению теории управления в других естественных науках (химия, биология), открывающих и в них новые горизонты [224, 225], а также о приме-

нениях других методов кибернетики (идентификация, распознавание образов, нейронные сети, оптимизация), которым посвящается все большее число статей в международных научных журналах. К области кибернетической физики относится и одна из крупнейших нерешенных проблем, которые XX-й век передал веку XXI-му: проблема управляемого термоядерного синтеза. В целом, взгляд в будущее внушает оптимизм.

Интерес к новой области велик. Велика и тяга к общению работающих в ней исследователей, представляющих различные науки. Это показал успех прошедшей в Санкт-Петербурге в августе 2003 г. международной конференции «Физика и управление 2003 (Physcon 2003)», в которой приняло участие около 250 специалистов из 32 стран. Материалы конференции, в том числе новые результаты лидеров мировой науки представлены в четырех томах трудов [202] — [205] общим объемом около 1500 стр.

Автор надеется, что данная публикация также послужит дальнейшему развитию и признанию новой научной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акуленко Л.Д.* Гашение колебаний системы, содержащий неуравновешенный ротор // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. С. 110–118.
2. *Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю.* Дестохастизация системы со странным аттрактором посредством параметрического воздействия // Вестн. МГУ. сер.3, Физика, астрономия. 1985, Т. 26, № 3, С. 40–44.
3. *Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю.* Управление системой со странным аттрактором посредством периодического параметрического воздействия // ДАН СССР, 1987, Т. 293, № 6, С. 1346–1348.
4. *Андриевский Б.Р., Гузенко П.Ю., Фрадков А.Л.* Управление колебаниями механических систем методом скоростного градиента // Автоматика и телемеханика. 1996. № 4. С. 4–17.
5. *Андриевский Б.Р., Стоцкий А.А., Фрадков А.Л.* Алгоритмы скоростного градиента в задачах адаптации и управления // Автоматика и телемеханика. 1988. № 12. С. 3–39.
6. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 1999. 467 с.
7. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. СПб.: Наука, 2001.
8. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: Методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 3–45.
9. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: Методы и приложения. II. Приложения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 4.
10. *Афанасьев М.М., Блехман И.И., Макаров В.А., Печенев А.В.* Динамика системы принудительной синхронизации механических вибровозбудителей с асинхронным приводом // Машиноведение. 1983. № 4, С. 3–11.
11. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 9, С. 1050–1060.
12. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959.
13. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные методы динамического программирования. М.: Физматлит, 1965.

14. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.
15. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
16. *Бриллюэн Л.* Наука и теория информации. М.: Физматгиз, 1960.
17. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
18. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
19. *Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И.* Управление квантово-механическими процессами. М.: Наука, 1984, 256с. (English translation: Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990).
20. *Валиев К.А., Кокин А.А.* Квантовый компьютер: мечта или реальность? Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
21. *Винер Н.* Кибернетика. 2-е изд. М.: Сов. радио, 1968.
22. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
23. *Галилей Г.* Избранные труды, т. 1-2, М.: Физматгиз, 1964.
24. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.
25. *Гольман Е.К., Гольдрин В.И., Плоткин Д.А., Разумов С.В., Кукушкин С.А., Осипов А.В.* Самоорганизация при зарождении пленок в системе высокотемпературного сверхпроводника Y-Ba-Cu-O // Физика твердого тела. 1997. Т. 39, № 2. С. 216–219.
26. *Гордеев С.К., Гузенко П.Ю., Кукушкин С.А., Осипов А.В., Фрадков А.Л.* Влияние нелинейных реакций синтеза углерода на зарождение пор в углеродных наноматериалах // Журнал физической химии. 2003. Т. 77, № 10, С. 1893–1895.
27. *Гузенко П.Ю.* Дискретное управление непрерывными хаотическими системами // Анализ и управление нелинейными колебательными системами / Под ред. Г.А. Леонова, А.Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 1998. С. 53–84.
28. *Гузенко П.Ю., Кукушкин С.А., Осипов А.В., Фрадков А.Л.* Автоколебательные режимы роста тонких пленок из многокомпонентного пара: динамика и управление // Журнал технической физики. 1997. Т. 67. № 9. С. 47–51.
29. *Гукенхеймер Дж., Ф. Холмс.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.: Изд-во УРСС, 2002.
30. *Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И.* О синхронизации динамических систем // Прикл. матем. механика. 1974. Т. 38, № 5. С. 799–809.

31. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967; 2-е изд. МГУ, 1998.
32. Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О. Динамический хаос как парадигма современных систем связи //Зарубежная радиоэлектроника. 1997. № 10. С. 4 – 26.
33. Дудник Е.Н., Кузнецов Ю.И., Минакова И.И., Романовский Ю.М. Синхронизация в системах со странным аттрактором // Вестн. МГУ. Сер. 3: Физика. Астрономия. 1983. Т. 24, № 4. С. 84–87.
34. Емельянов И.Я., Ефанов А.И., Константинов Л.В. Научно-технические основы управления ядерными реакторами. М.: Энергоатомиздат, 1981.
35. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
36. Кадомцев Б.Б. Динамика и информация. 2-е изд. М.: Редакция журнала «Успехи физ.наук». 1999.
37. Калман Р. Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
38. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т.21. N 5.
39. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии. М.: Химия. 1976. (4-е изд. 1985. 448с.)
40. Квантовый компьютер и квантовые вычисления. Т. 2. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 1999.
41. Ковалева А.С. Асимптотическое решение задачи оптимального управления нелинейными колебаниями в окрестности резонанса // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 6. С. 913–922.
42. Колесников А.А. Основы теории синергетического управления. М.: Испо-Сервис, 2000.
43. Красносельский А.М. О возникновении колебаний с большой амплитудой в системах с насыщением // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 4. С. 844–848.
44. Крутько П.Д. Управление колебаниями. Синтез алгоритмов на основе обращения прямого метода Ляпунова // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 2.
45. Кукушкин С.А., Осипов А.В. Самоорганизация при зарождении многокомпонентных пленок //Физика твердого тела. 1995. Т. 37, № 7. С.2127-2132.
46. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, Физматлит, 1997. 496 с.
47. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука.

48. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука.
49. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М.: Физматлит, 1965.
50. *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000.
51. *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: СПбГУ, 2002.
52. *Летохов В.С., Чеботаев В.П.* Нелинейная лазерная спектроскопия сверхвысокого разрешения. М.: Наука, 1990.
53. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Мир, 1978.
54. *Лоскутов А.Ю.* Проблемы нелинейной динамики. II. Подавление хаоса и управление динамическими системами // Вестн. МГУ. 2001. № 2. С. 3–21.
55. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Управление хаосом в нелинейных динамических системах // Дифференциальные уравнения. 1998. № 11. С. 1501–1509.
56. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Некоторые подходы к управлению диффузионным хаосом // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 5. С. 669–674.
57. *Мирзоев Ф.Х., Панченко В.Я., Шелепин Л.А.* Лазерное управление процессами в твердом теле // Успехи физ. наук. Т. 166, 1. С. 3–32.
58. *Миронова В.А., Амелькин С.А., Цирлин А.М.* Математические методы термодинамики при конечном времени. М.: Химия, 2000.
59. *Мирошник И.В., Ушаков А.В.* Синтез алгоритма синхронного управления квазиподобными системами // Автоматика и телемеханика. 1977, № 11. С. 22–29.
60. *Мирошник И.В.* Согласованное управление многоканальными системами. Л.: Энергоатомиздат, 1990.
61. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
62. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
63. *Налимов В.В., Маркова Е.В.* Химическая кибернетика // Информационные материалы Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. 1970. № 11–12. С. 105–127.
64. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
65. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.

66. *Овсянников Д.А.* Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
67. *Планк М.* Принцип наименьшего действия // Единство физической картины мира. М.: Наука, 1966.
68. *Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.* Пассивность и пассивфикация в теории нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 2000. № 3. С. 3–37.
69. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления: Учебное пособие. М.: Наука, 1986. 615 с.
70. *Пиковский А.Б., Розенблюм М.Б., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
71. *Поплавский Р.П.* Термодинамика информационных процессов. М.: Наука, 1981.
72. *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т. 34, вып. 3. С. 440–456.
73. *Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука. 1978. 352 с.
74. *Турчин В.Ф.* Феномен науки: Кибернетический подход к эволюции // Изд. 2-е. М.: ЭТС. 2000. 368 с.
75. Управление мехатронными вибрационными установками / Под ред. И.И. Блехмана, А.Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 2001. 278 с.
76. Управление молекулярными и квантовыми системами / Под ред. А.Л. Фрадкова, О.А.Якубовского. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003. 410 с.
77. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. т. I,II. М.: Мир, 1974.
78. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
79. *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика, 1979. № 9. С. 90–101.
80. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990.
81. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление нелинейными колебаниями. Алгоритмическое обеспечение процессов управления в механике и машиностроении: Тез. докл. М., 1994. С. 29 – 30.
82. *Фрадков А.Л.* Исследование физических систем при помощи обратных связей // Автоматика и телемеханика. 1999. № 3. С. 213–230.
83. *Фрадков А.Л. Шиегин В.С.* Стабилизация энергии колебаний с применением к маятнику с управляемой точкой подвеса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2, С. 19–24.

84. Черноусько Ф.Л. Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром // Прикладная математика и механика, 1968, Т. 32, вып.1. С. 15–26.
85. Цирлин А.М. Методы оптимизации в необратимой термодинамике и микроэкономике. М.: Физматлит. 2003. 416 с.
86. Abed E.H., Fu J.-H. Local feedback stabilization and bifurcation control. Systems & Control Lett., Part I. Hopf bifurcation, V. 7, 1986, P. 11–17; Part II. Stationary bifurcation, V. 8, 1987, P. 467–473.
87. Alvarez-Gallegos J. Nonlinear regulation of a Lorenz system by feedback linearization technique // J. Dynamics and Control. 1994. № 4. P. 277–298.
88. Ananjevsky M., Efimov A., Fradkov A., Krivtsov A. Resonance and Speed-Gradient Design of Control Algorithms for Dissociation of Diatomic Molecule Ensembles. Proc. Intern.Conf. “Physics and Control 2003”, St.Petersburg, Aug. 20–22, 2003, P. 867–878.
89. Assion A., Baumert T., Bergt M., Brixner T., Kiefer B., Seyfried V., Strehle M., Gerber G. Control of chemical reactions by feedback-optimized phase-shaped femtosecond laser pulses // Science. 1998. 282: 919.
90. Babloyantz A., Krishchenko A.P., Nosov A. Analysis and stabilization of nonlinear chaotic systems // Computers and Mathematics With Applications. 1997. V. 34. P. 355–368.
91. Bak P.E., Yoshino R. A Dynamical Model of Maxwell’s Demon and confinement systems // Contrib. Plasma Phys. 2000. V. 40, № 3–4. P. 227–232.
92. Bardeen C.J., Yakovlev V.V., Wilson K.R., Carpenter S.D., Weber P.M., Warren W.S. Feedback quantum control of molecular electronic population transfer // Chem. Phys. Lett. 1997. 280:151.
93. Basso M., Genesio R., Tesi A. Stabilizing periodic orbits of forced systems via generalized Pyragas controllers // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. 1997. V. 44. P. 1023–1027.
94. Basso M., Genesio R., Giovanardi L. et al. On optimal stabilization of periodic orbits via time delayed feedback control // Int. J. Bifurcation Chaos. 1998. V. 8. P. 1699–1706.
95. Bellman R., Bentsman J., Meerkov S. Vibrational control of nonlinear systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. V. AC-31. № 8. P. 710–724.
96. Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M. Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems // Phys. Rev. E 2000. V. 62, № 5. 6332–6345.

97. *Belykh V.N., Belykh I.V., Mosekilde E.* Cluster synchronization modes in an ensemble of coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 63. 036216.
98. *Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M., Nevidin K.V.* Cluster synchronization in three-dimensional lattices of diffusively coupled oscillators // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 2003. V. 13, 4. P. 755–779.
99. *Berry R.S., Kazakov V.A., Sieniutycz S., Szwast Z., Tsirlin A.M.* Thermodynamic Optimization of Finite Time Processes. Wiley. N.Y., 2000.
100. *Bleich M.E., Hochheiser D., Moloney J.V., Socolar J.E.S.* Controlling extended systems with spatially filtered, time-delayed feedback // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 55. P. 2119–2126.
101. *I.Blekhman.* Vibrational mechanics. Singapore: World Scientific, 2000.
102. *Blekhman I.I., Fradkov A.L.* On the general definitions of synchronization. In: *Selected Topics in Vibrational Mechanics* // Ed. by I. Blekhman. Singapore: World Scientific, 2003.
103. *Blekhman, I.I., Fradkov A.L., Nijmeijer H., Pogromsky A.Yu.* On self-synchronization and controlled synchronization // *Systems & Control Letters.* 1997. V. 31. P. 299–305.
104. *Blekhman I.I., Fradkov A.L., Tomchina O.P., Bogdanov D.E.* Self-synchronization and controlled synchronization: general definition and example design // *Mathematics and Computers in Simulation.* 2002. V. 58, Issue 4–6. P. 367–384.
105. *Bliman P.-A., Krasnosel'skii A.M., Sorine M., Vladimirov A.A.* Nonlinear resonance in systems with hysteresis // *Nonlinear Analysis: Theory & Applications.* 1996. V. 27. № 5. P. 561–577.
106. *Boccaletti S., Bragard J., Arecchi F.T.* Controlling and synchronizing space time chaos // *Phys. Rev. E.* 1999. V. 59. P. 6574–6578.
107. *Boccaletti S., Grebogi C., Lai Y.C., et al.* The control of chaos: theory and applications // *Physics Reports.* 2000. V. 329. P. 103–197.
108. *Boccaletti S., Pecora L., Pelaez A.* Unifying framework for synchronization of coupled systems. *Phys. Rev. E.* 2001, V. 63. 066219.
109. *Brandt, M.E, Shih, H.T, Chen, G.R.* Linear time-delay feedback control of a pathological rhythm in a cardiac conduction model // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 56, R1334–R1337.
110. *Brockett R.W.* Control theory and analytical mechanics // *Geometric Control Theory, Lie Groups.* V. VII / Eds. C. Martin, R. Hermann. Mat. Sci. Press, Brookline, MA, 1977. P. 1–48.
111. *Brown R., Kocarev L.* A unifying definition of synchronization for dynamical systems // *Chaos.* 2000. V. 10, № 2. P. 344–349.

112. *Byrnes C., Isidori A., Willems I.C.* Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* V. AC-36, No. 11, P. 1228–1240.
113. *Carlson J.M., Doyle J.* Highly optimized tolerance: A mechanism for power laws in designed systems // *Phys. Rev. E.* 1999. 60. P. 1412–1427.
114. *Chacón R.* Maintenance and Suppression of Chaos by Weak Harmonic Perturbations: A Unified View // *Phys. Rev. E.* 2001. 9. P. 1737–1430.
115. *Chacón R.* Control of Homoclinic Chaos by Weak Periodic Perturbations / *World Scientific Series on Nonlinear Science. Ser. A.* Singapore: World Scientific, 2002.
116. *Chen, G., and X. Dong.* From chaos to order: perspectives, methodologies and applications. World Scientific. Singapore, 1998.
117. *Cuomo K.M., Oppenheim A.V., Strogatz S.H.* Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with application to communications // *IEEE Trans. Circ. Syst. – II.* 1993. V. 40. № 10. P. 626–633.
118. *Dahleh M., A. Pierce, H.Rabitz and V.Ramakrishna.* Control of molecular motion // *Proc. IEEE.* 1996. V.84, № 1. P. 7–15.
119. *Ditto W.L., Rauseo S.N., Spano M.L.* Experimental control of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1990. V. 65. P. 3211–3214.
120. *DiVincenzo D.P.* Quantum computation // *Science.* 1996. V. 270, P. 255–261.
121. *Einstein A.* Out of my later years. N.Y.: Thames and Hudson. 1950. P. 114.
122. *Efimov A.A., Fradkov A.L., Krivtsov A.M.* Feedback design of control algorithms for dissociation of diatomic molecules // *Proc. Europ. Contr. Conf. Cambridge, UK, 1–4 Sept. 2003.*
123. *Fradkov, A.L.* Speed-gradient laws of control and evolution // *Prepr. 1st European Control Conf., Grenoble. 1991. P. 1865–1870.*
124. *Fradkov A.L.* Nonlinear adaptive control: regulation, tracking, oscillations // *Proc. 1st IFAC Workshop “New trends in design of control systems”.* Smolenice, 1994. P. 426–431.
125. *Fradkov A.L.* Swinging control of nonlinear oscillations // *Intern. J. Control.* 1996. V. 64, № 6. P. 1189 – 1202.
126. *Fradkov A.L.* Exploring nonlinearity by feedback. Memorandum No 1447, Faculty of Mathematical Sciences, University of Twente, June, 1998.
127. *Fradkov A.L.* Exploring nonlinearity by feedback // *Physica D.* 1999, V. 128, № 2–4. P. 159–168.

128. *Fradkov A.L.* Feedback resonance in nonlinear oscillators // Proc. 5th Europ. Contr. Conf. Karlsruhe, 1999.
129. *Fradkov A.L.* A nonlinear philosophy for nonlinear systems // Proc. 39th IEEE Conf. Decisions and Control. Sydney, 12–15 Dec. 2000. P. 4397–4402.
130. *Fradkov A.L.* Physics and control: exploring physical systems by feedback // Prepr. 5th IFAC Symp. “Nonlinear Control Systems” (NOLCOS’01), St.Petersburg, 4-6 July, 2001, P. 1503-1509.
131. *Fradkov A.L., Guzenko P.Yu.* Adaptive control of oscillatory and chaotic systems based on linearization of Poincaré map // Proc. 4th Europ. Contr. Conf. Brussels, 1997.
132. *Fradkov A., Guzenko P., Pavlov A.* Adaptive control of recurrent trajectories based on linearization of Poincare map // Int. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10. P. 621–637.
133. *Fradkov A.L., Krivtsov A.M., Efimov A.A.* Dissociation of diatomic molecule by speed-gradient feedback control // Differential Equations and Control Processes. 2001, № 4. P. 36–46, <http://www.neva.ru/journal/>.
134. *Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O.* Nonlinear and adaptive control of complex systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
135. *Fradkov A.L., Makarov I.A., Shiriaev A.S., Tomchina O.P.* Control of oscillations in Hamiltonian systems // 4th European Contr. Conf. (ECC’97). Brussels, 1997.
136. *Fradkov A.L., Markov A.Yu.* Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method and passification //IEEE Trans. Circ. Syst, Part I. 1997, № 10. P. 905–912.
137. *Fradkov A.L., Nijmeijer H., Markov A.Yu.* Adaptive observer-based synchronization for communication // Int. J. Bifurcations and Chaos. 2000. 10. № 12. P. 2807–2813.
138. *Fradkov A.L., Nikiforov V.O., Andrievsky B.R.* Adaptive observers for nonlinear nonpassifiable systems with application to signal transmission // Proc. 41th IEEE Conf. Dec. Contr. Las Vegas, 2002, P. 4706–4711.
139. *Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu.* Methods of adaptive control of chaotic systems // Proc. of 12th IFAC World Congress. San Francisco, 1996. V. K, P. 185–190.
140. *Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu.* Introduction to control of oscillations and chaos. Singapore: World Scientific, 1998.
141. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Prog. Theor. Phys. V. 69, 1983, P. 32–47.

142. *Gade P.M.* Feedback control in coupled map lattices. *Phys. Rev. E.* 1998. V. 57, 7309–7312.
143. *Garfinkel, A., Spano M.L., Ditto W.L., Weiss J.N.* Controlling cardiac chaos // *Science.* 1992. V. 257, Aug. P. 1230–1235.
144. *Goggin M.E., Milonni P.W.* Driven Morse oscillator: Classical chaos, quantum theory and photodissociation // *Phys. Rev. A.* 1988. V. 37. № 3. P. 796.
145. *Goggin M.E., Milonni P.W.* Driven Morse oscillator: Classical chaos and quantum theory for two-frequency dissociation // *Phys. Rev. A.* 1988. V. 38, № 10. P. 5174.
146. *Grigoriev R.O., Cross M.C., Schuster H.G.* Pinning control of spatiotemporal chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V.79, P. 2795–2798.
147. *Guldberg A., Billing G. D.* Laser-induced dissociation of hydrogen fluoride // *Chem. Phys. Lett.* 1991. V. 186, № 2–3. P. 229.
148. *Grössing G.* Quantum Cybernetics. N.Y.: Springer-Verlag, 2000.
149. *Hangos K.M., Bokor J. and G. Szederkenyia.* Hamiltonian view on process systems // *AIChE J.* 2001. V. 47 (8). P. 1819–1831.
150. *Helmke U., Pratzelwolters D., Schmid S.* Adaptive synchronization of interconnected linear systems. *IMA J Math.Control.* 1991. V. 8(4). P. 397–408.
151. *Hu G, Qu Z., He K.* Feedback control of chaos in spatiotemporal systems // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 1995. V. 5. P. 901–936.
152. *Hu G., Xiao J.H., Gao J.H., Li X.M., Yao Y.G., Hu B.B.* Analytical study of spatiotemporal chaos control by applying local injections // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 62. R3043–R3046.
153. *Huang G.M., Tarn T.J., Clark J.W.* On the controllability of quantum-mechanical systems // *J. Math. Phys.* 1983. V.24. P. 2608.
154. *Hubler A., Lusher E.* Resonant stimulation and control of nonlinear oscillators // *Naturwissenschaft.* 1989. V. 76. P. 67–72.
155. *Hunt E.R.* Stabilizing high-period orbits in a chaotic system – the diode resonator // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 67. P. 1953–1955.
156. *IEEE Trans. on Circuits and Systems (2001).* V.48. No.12. Special issue on applications of chaos in modern communication systems / Eds. L.Kocarev, G.M.Maggio, M.Ogorzalek, L.Pecora, K.Yao.
157. *IEEE Trans. on Circuits and Systems (1997).* V.44. No.10. Special issue “Chaos control and synchronization”/ Eds. M.Kennedy, M.Ogorzalek.
158. *International Journal of Circuit Theory and Applications (1999)* Special issue: Communications, Information Processing and Control Using Chaos/ Eds. M.Hasler, J.Vandewalle. V. 27, № 6.
159. *Isidori A.* Nonlinear control systems. 3rd edition. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.

160. *Jackson E.A.* Perspectives of nonlinear dynamics. V. 1, 2. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990.
161. *Jackson E.A., Grosu I.* An OPCL control of complex dynamic systems // *Physica D.* 1995. V. 85. P. 1–9.
162. *Judson R.S., H. Rabitz.* Teaching Lasers to Control Molecules // *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 68.
163. *Just W., Bernard T., Ostheimer M., Reibold E., Benner H.* Mechanism of time-delayed feedback control // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78. P. 203–206.
164. *Josić K.* Invariant manifolds and synchronization of coupled dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. P. 3053–3056.
165. *Kapitaniak T.* Controlling Chaos. N.Y.: Academic Press, 1996.
166. *Khryashchev S.M.* Estimation of Transport Times for Chaotic Dynamical Control Systems // *Proc. Intern.Conf. "Physics and Control"*, Eds. A.L. Fradkov, A.N. Churilov. V.2. Control of Oscillations and Chaos. St.Petersburg, 2003, P. 528–533.
167. *Kocarev L., Tasev Z., Parlitz U.* Synchronizing spatiotemporal chaos of partial differential equations // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V.79, P. 51–54.
168. *Kosloff R., Rice S.A., Gaspard P., Tersigni S., Tannor D.J.* Wavepacket dancing: Achieving chemical selectivity by shaping light-pulses // *Chem. Phys.* 1989. 139: 201.
169. *Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V.* Nonlinear and Adaptive Control Design. N.Y., Wiley, 1995.
170. *Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Kinetics of thin film nucleation from multicomponent vapor. // *J.Ph.Chem.Solids.* 1995. V. 56(6). P. 831–838.
171. *Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Morphological stability of islands upon thin film condensation // // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 53. P.4964–4968.
172. *Landa P.S., Rosenblum M.G.* Synchronization and chaotization of oscillations in coupled self-oscillating systems // *Appl. Mech. Rev.* 1993. V. 46 (7). P. 414–426.
173. *Laser Control and Manipulation of Molecules.* Bandrauk A.D., Fujimura Y., Gordon R.J. (Eds). Oxford Univ. Press 2002.
174. *Leff H.S. and A.F.Rex (Eds).* Maxwell's Demon – Entropy, Information, Computing. N.Y.: Random House, 1990.
175. *Li T., Yorke J.A.* Period three implies chaos // *Amer. Math. Monthly.* 1975. V. 82. P. 985–992.
176. *Liao T.L.* Observer-based approach for controlling chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 57. P. 1604–1610.
177. *Lima R., Pettini M.* Suppression of chaos by resonant parametric perturbations // *Phys. Rev. A.* 1990. V. 41. P. 726–733.

178. *Liu W.K., B. Wu, J. M. Yuan.* Nonlinear dynamics of chirped pulse excitation and dissociation of diatomic molecules // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75, № 7. P. 1292.
179. *Lloyd S.* Quantum-mechanical Maxwell's Demon // *Phys. Rev.* 1997. A56, № 5. P. 3374–3382.
180. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmospheric Sci.* 1963. V. 20. № 2. P. 130–141. (В кн.: Странные аттракторы: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. С. 88–116).
181. *Meerkov S.M.* Principle of vibrational control: theory and applications // *IEEE Trans. Aut. Contr.* 1980. V. AC-25. P. 755–762.
182. *Montagne R., Colet P.* Nonlinear diffusion control of spatiotemporal chaos in the complex Ginzburg-Landau equation /// *Phys. Rev. E.* 1997. V.56, P. 4017–4024.
183. *Nakajima H.* On analytical properties of delayed feedback control of chaos // *Phys. Lett. A.* 1997. V. 232, P. 207–210.
184. *Nakar E., Friedland L.* Passage through resonance and autoresonance in x^{2n} -type potentials // *Phys. Rev. E.* 1999. V. 60, № 5. P. 5479–5485.
185. *Nijmeijer H., Mareels I.M.Y.* An observer looks at synchronization // *IEEE Trans. Circ. Syst. I,* V. 44, 1997. P. 882–890.
186. *Nijmeijer H., van der Schaft A.J.* Nonlinear dynamical control systems. N.Y.: Springer-Verlag, 1990.
187. *Ogorzalek, M.J.* Taming chaos – part I: synchronization; part II: control // *IEEE Trans. Circ. & Syst. Part I.* 1993. V. 40. P. 639–706.
188. *Onsager L.* Reciprocal relations in irreversible processes // *Phys.Rev.* 1931. V. 37. P. 405–426.
189. *Ortega R., Loria A., Nicklasson P.J., Sira-Ramirez H.* Passivity-based control of Euler-Lagrange systems. Berlin:Springer, 1998.
190. *Ortega R., van der Schaft A., Mareels I., Maschke B.* Putting energy back in control // *IEEE Control Systems Magazine.* 2001. V. 21 (2), P. 18–33.
191. *Ortega R., van der Schaft A.J., Maschke B., Escobar G.* Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems // *Automatica.* 2002. 38. P. 585–596.
192. *Ott T., Grebogi C., Yorke G.* Controlling chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1990. V. 64. № 11. P. 1196–1199.
193. *Ott E., Sauer T., Yorke J.* Coping with Chaos. N.Y.: Wiley, 1994.
194. *Parmananda P, Hildebrand M, Eiswirth, M.* Controlling turbulence in coupled map lattice systems using feedback techniques // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 56, P. 239–244.

195. *Pearson B.J., J. L. White, T. C. Weinacht, and P. H. Bucksbaum.* Coherent control using adaptive learning algorithms // *Phys. Rev. A.* 2001. V. 63, 063412.
196. *Pecora, L.M. and T.L. Carroll.* Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1990. V. 64. P. 821–823.
197. *Peirce A., Dahleh M., Rabitz H.* Optimal Control of Quantum Mechanical Systems: Existence, Numerical Approximations, and Applications // *Phys. Rev. A.* 1988. 37, 4950.
198. *Petrov B.N., Ulanov G.M., Goldenblatt I.I., Ulyanov S.V.* Control problems for relativistic and quantum dynamical systems. M.: Nauka, 1982.
199. *Petrov V., Gaspar V., Masere J., Showalter K.* Controlling chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction // *Nature.* 1993. V. 361. P. 240–243.
200. *Pettini M.* Controlling chaos through parametric excitations / *Dynamics and Stochastic Processes*, Eds. Lima R., Streit L., and Vilela-Mendes, R.V. Springer-Verlag, N.Y., 1988. P. 242–250.
201. *Pogromsky A., Santoboni G., Nijmeijer H.* Partial synchronization: from symmetry towards stability // *Physica D.* 2002. V.172. P.65–87.
202. Proc. Intern. Conf. “Physics and Control”, Eds. A.L. Fradkov, A.N. Churilov. V.1 Physics and Control: General Problems and Applications. IEEE, St.Petersburg, Aug. 2003.
203. Proc. Intern. Conf. “Physics and Control”, Eds. A.L. Fradkov, A.N. Churilov. V.2. Control of Oscillations and Chaos. IEEE, St.Petersburg, Aug. 2003.
204. Proc. Intern. Conf. “Physics and Control”, Eds. A.L. Fradkov, A.N. Churilov. V.3. Control of Microworld Processes. Nano- and Femtotechnologies. IEEE, St.Petersburg, Aug. 2003.
205. Proc. Intern. Conf. “Physics and Control”, Eds. A.L. Fradkov, A.N. Churilov. V.4. Nonlinear Dynamics and Control. IEEE, St.Petersburg, Aug. 2003.
206. *Pyragas K.* Continuous control of chaos by self-controlling feedback // *Phys. Lett. A.* 1992. V. 170. P. 421–428.
207. *Pyragas K.* Control of chaos via an unstable delayed feedback controller // *Phys. Rev. Lett.* 2001, V. 86, P. 2265–2268.
208. *Rabinovich M.I., Abarbanel H.D.I., Huerta R., Elson R., Selverston A.I.* Self-regularization of chaos in neural systems: Experimental and theoretical results // *IEEE Transactions On Circuits And Systems – I.* V.44, 1997. P. 997–1005.
209. *Rabitz H.* Algorithms for closed loop control of quantum dynamics // Proc. 39th IEEE Conf. Decisions and Control. Sydney, 12–15 Dec. 2000, P. 937–942.

210. *Rabitz H.* Controlling Quantum Phenomena: The Dream is Becoming a Reality // Preprints of the 5th IFAC Symp. Nonlin. Contr. Systems (NOLCOS'01). St.Petersburg, 4–6 July, 2001.
211. *Rosenblum M G, Pikovsky A S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett., 1996, 76. 1804-7.
212. *Rulkov N.F., Sushchik M, Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 980.
213. *Rosenbrock H.H.* A stochastic variational principle for quantum mechanics // Phys. Lett. A. 1986. V. 110, P. 343–346.
214. *Rosenbrock H.H.* Doing quantum mechanics with control theory // IEEE Trans. Aut.Contr. 2000. V. AC-45, № 1, P. 73–77.
215. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence //Comm. Math. Physics. 1971. V. 20, № 2. P. 167–192. (В кн.: Странные аттракторы: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. С. 116–151).
216. *Shapiro M. Brumer P.* Laser control of product quantum state populations in unimolecular reactions // J. Chem. Phys. 1986. V. 84. P. 4103–4110.
217. *Van der Schaft A.J.* L^2 – gain and passivity techniques in nonlinear control. Berlin:Springer, 1999.
218. *Schuster H.G, Stemmler M.B.* Control of chaos by oscillating feedback// Phys. Rev. E. 1997, V.56, 6410–6417.
219. *Shinbrot T., Grebogi C. Ott E., Yorke J.A.* Using small perturbations to control chaos // Nature. 1993. V. 363. P. 411–417.
220. *Shiriaev A.S., Fradkov A.L.* Stabilization of invariant sets for nonaffine nonlinear systems // Automatica. 2000. V.36, № 11. P. 1709-1715.
221. *Shiriaev A.S., Fradkov A.L.* Stabilization of invariant sets for nonlinear systems with application to control of oscillations // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. 2001. V. 11. P. 215–240.
222. *Shiriaev A.S., O. Egeland, H. Ludvigsen, A.L. Fradkov.* VSS-version of energy-based control for swinging up a pendulum // Systems & Contr. Lett. 2001. V. 44 (1). P. 45–56.
223. *Sinha, S. Gupte N.* Adaptive control of spatially extended systems: Targeting spatiotemporal patterns and chaos // Phys. Rev. E. V. 1998. 58 (5), R5221–R5224.
224. *Sontag E.* Structure and stability of certain chemical networks and applications to the kinetic proofreading model of T-cell receptor signal transduction // IEEE Trans. Autom. Control. 2001, V. 46. P. 1028–1047.

225. *Sontag E., Kholodenko B.N., Kiyatkin A., Bruggeman F., Westerhoff H. and J. Hoek.* Untangling the wires: a novel strategy to trace functional interactions in signaling and gene networks // *Proc. National Acad. Sci. USA.* 2002. 99. P. 12841–12846.
226. *Stephenson A.* “On a new type of dynamical stability.” *Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Soc.*, 1908, V. 52, 1–10; “On induced stability,” *Phil. Mag.* 1909, 15, 233–236.
227. *Stewart H.B., Thompson J.M.T., Ueda U., Lansbury A.N.* Optimal escape from potential wells — patterns of regular and chaotic bifurcations // *Physica D.* 1995. V. 85. P. 259–295.
228. *Tannor D.J., Rice S.A.* Control of selectivity of chemical reaction via control of wave packet evolution // *J. Chem. Phys.* 1985. V.83. 5013.
229. *Ushio T.* Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems // *IEEE Trans. Circ. Sys., I.* 1996. V. 43, P. 815–816.
230. *Virgin L.N., Cartee L.A.* A note on the escape from a potential well // *Int. J. Nonlin. Mech.* 1991. V. 26. P. 449–458.
231. *Wang H.O., Abed E.H.* Bifurcation control of a chaotic system // *Automatica.* 1995. V.31. P. 1213–1226.
232. *Wang, P.Y., Xie, P.* Eliminating spatiotemporal chaos and spiral waves by weak spatial perturbations // *Phys. Rev. E.* 2000, V.61, P. 5120–5123.
233. *Willems J.C.* Dissipative dynamical systems. Part I: General theory // *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 1972. V. 45. № 5. P. 321–351.
234. *Xiao J.H., Hu G. Gao J.H.* Turbulence control and synchronization and controllable pattern formation // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 2000. V. 10 (3), P. 655–660.
235. *Yu C., Gross P., Ramakrishna V., Rabitz H., Mease K., Singh H.* Control of classical regime molecular objectives – applications of tracking and variations of the theme // *Automatica.* 1997. № 9. P. 1617–1633.
236. *Zewail A.* Femtochemistry: Atomic-Scale dynamics of the chemical bond. (Adapted from the Nobel Lecture) // *J. Phys. Chemistry. A,* 2000, 104, P. 5660–5694.
237. *Zhao H., Wang Y.H., Zhang Z.B.* Extended pole placement technique and its applications for targeting unstable periodic orbit // *Phys. Rev. E,* V. 57, 1998, P. 5358–5365.