

Оптимизация в механике и машиностроении.



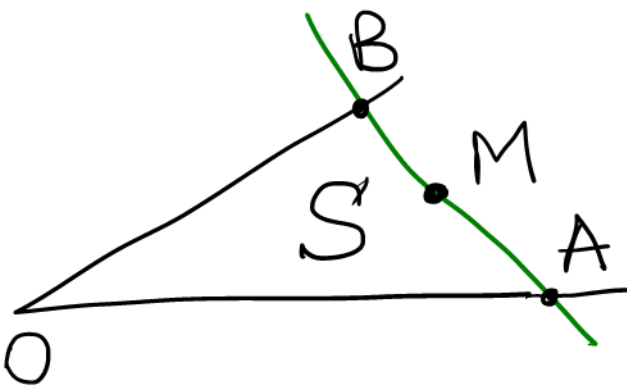
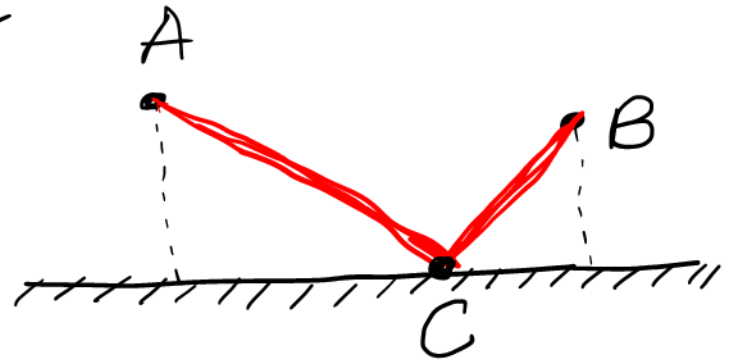
Оптимизация
в задачах
геометрии
(1)

Оптимизация
в аналитической
механике и
теории колебаний
(2)

Оптимизация
в строитель-
ной механике
(3)

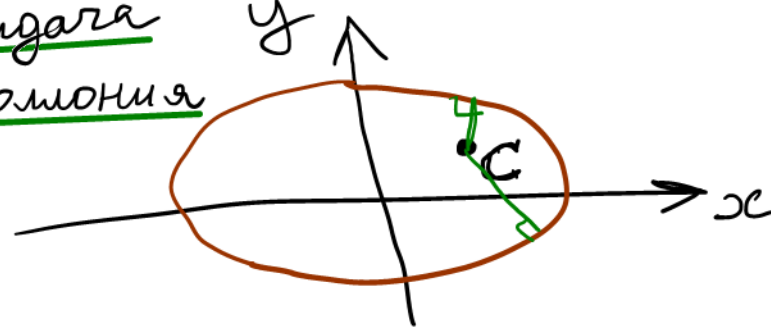
① Задача Герона

$$AC + BC = \min$$



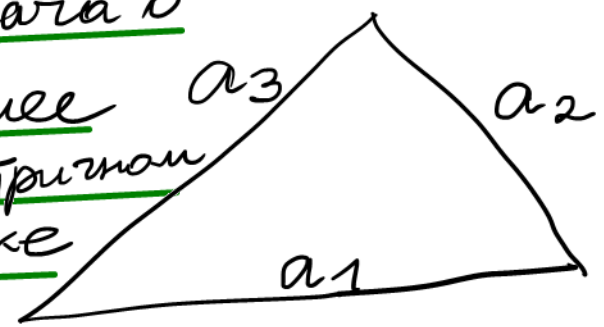
$$S_{OAB} = \min$$

Задача
Аполлония

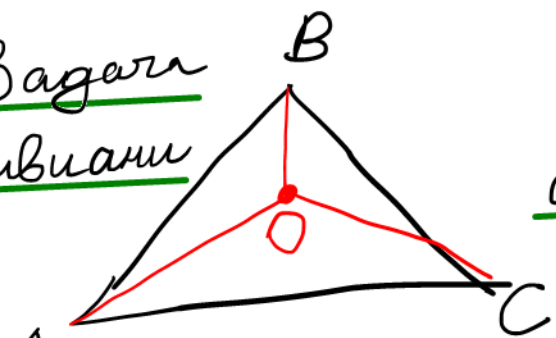


Задача о

Наиболее
асимметричной
треуголке



Задача
Вивiani

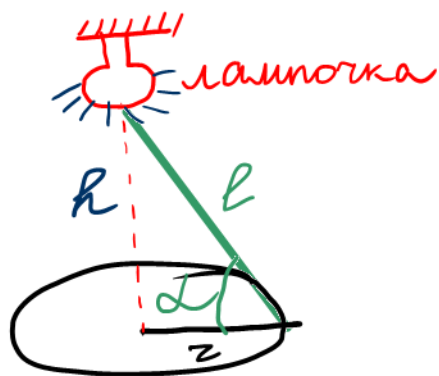


$$AO + CO + BO = \min$$

$$AO^2 + CO^2 + BO^2 = \min$$

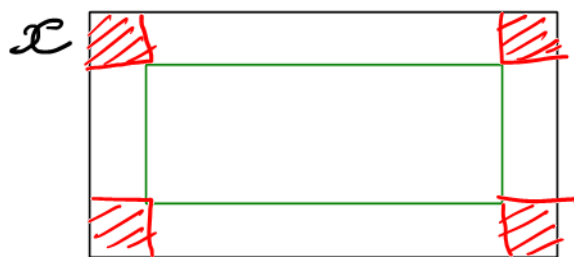
$$\begin{cases} |a_1 - a_2| = \max \\ |a_2 - a_3| = \max \\ |a_3 - a_1| = \max \end{cases}$$

Задача об освещенности



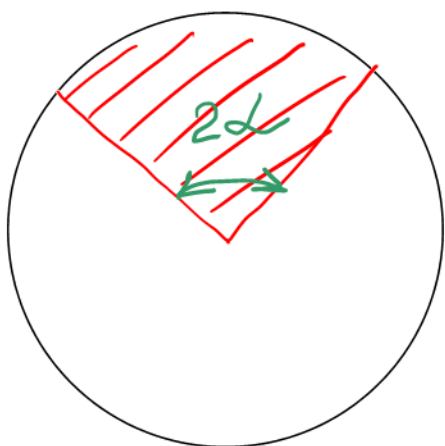
? α $I = \max$

Задача о коробке



? x $V = \max$

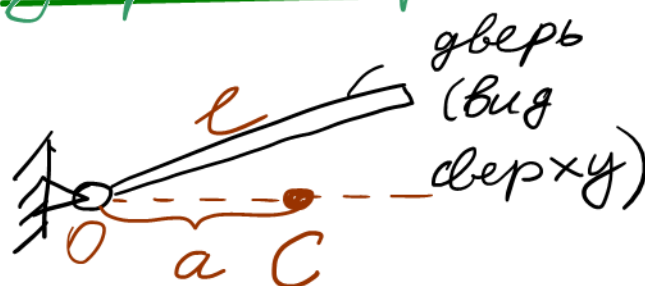
Задача о воронке



? L $V = \max$

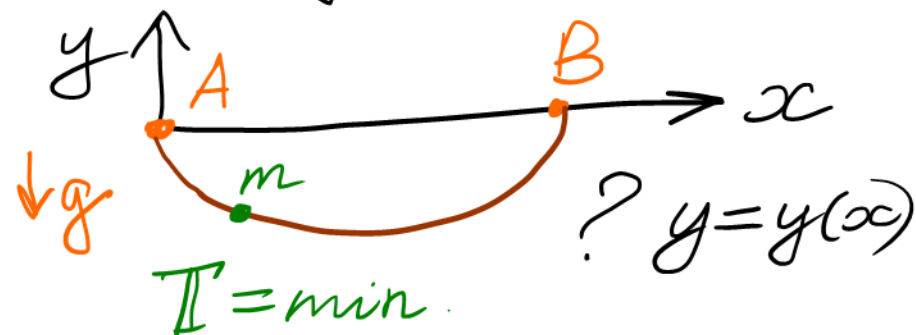
Задача о

дверном ограничителе



? a $S_0 = \min$

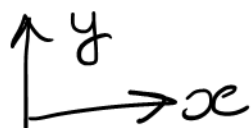
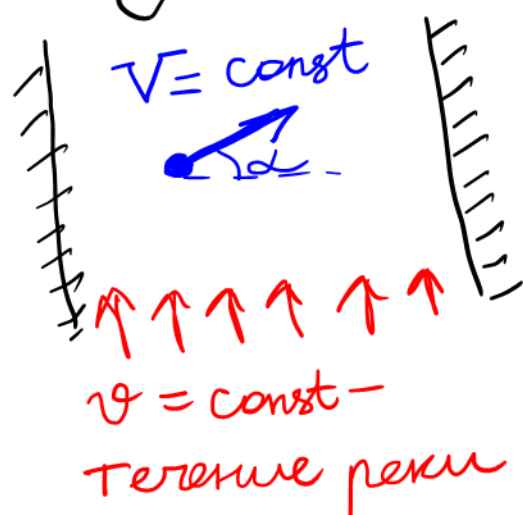
② Задача о брахистохроне



? $y = y(x)$

$T = \min$

Задача об оптимальной навигации.



? $y = y(x)$

$T = \min$

Задача Чатыкина о самолёте



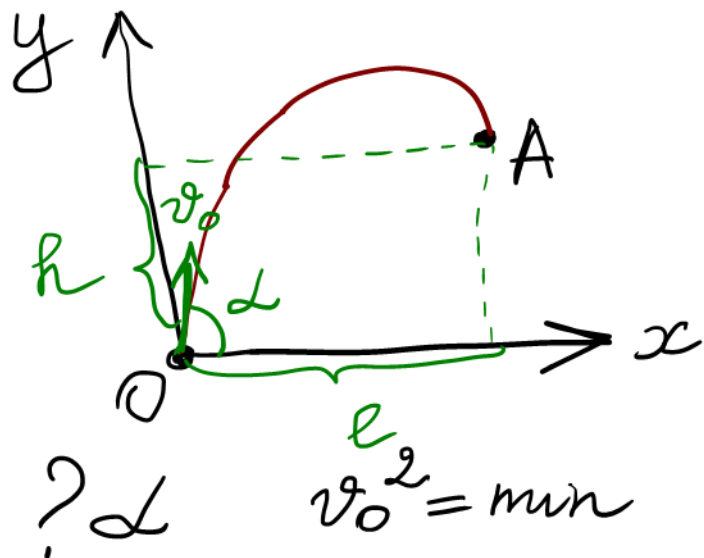
? $y = y(x)$

$T = \text{fix}$

$S = \max$

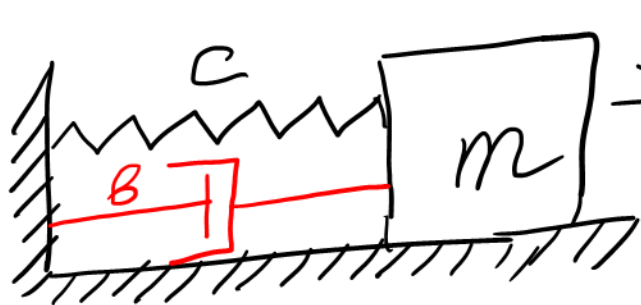
$v = \text{const}$

Задача о баллистических траекториях



Летит на дальность
? L $\ell = \max$
(задача Тартальи).

Оптимизация демпфирования линейного осциллятора.



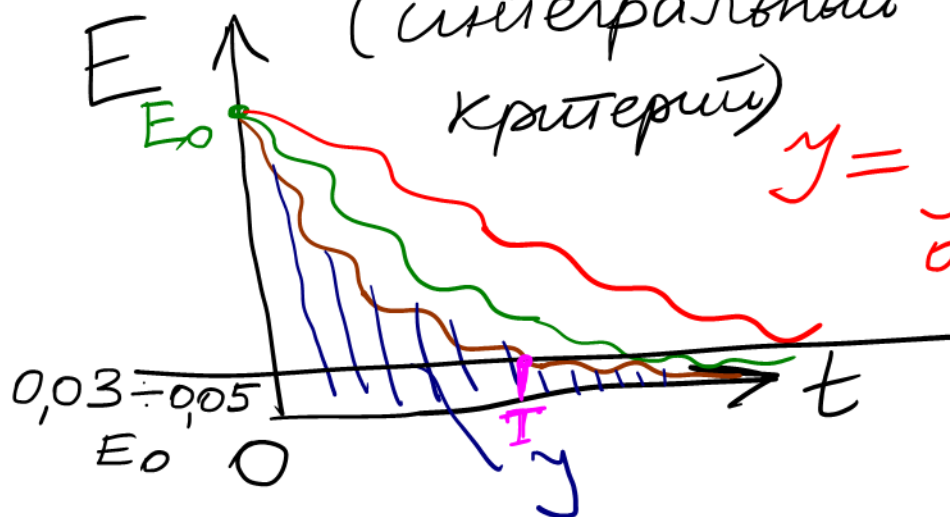
$$m\ddot{x} + cx = 0$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

? b — затухание
колебаний было бы
наиболее эффективным

а) Степень устойчивости $\Delta = \max_b$

б) Энерго-временной критерий (ЭВК)
(интегральный критерий)

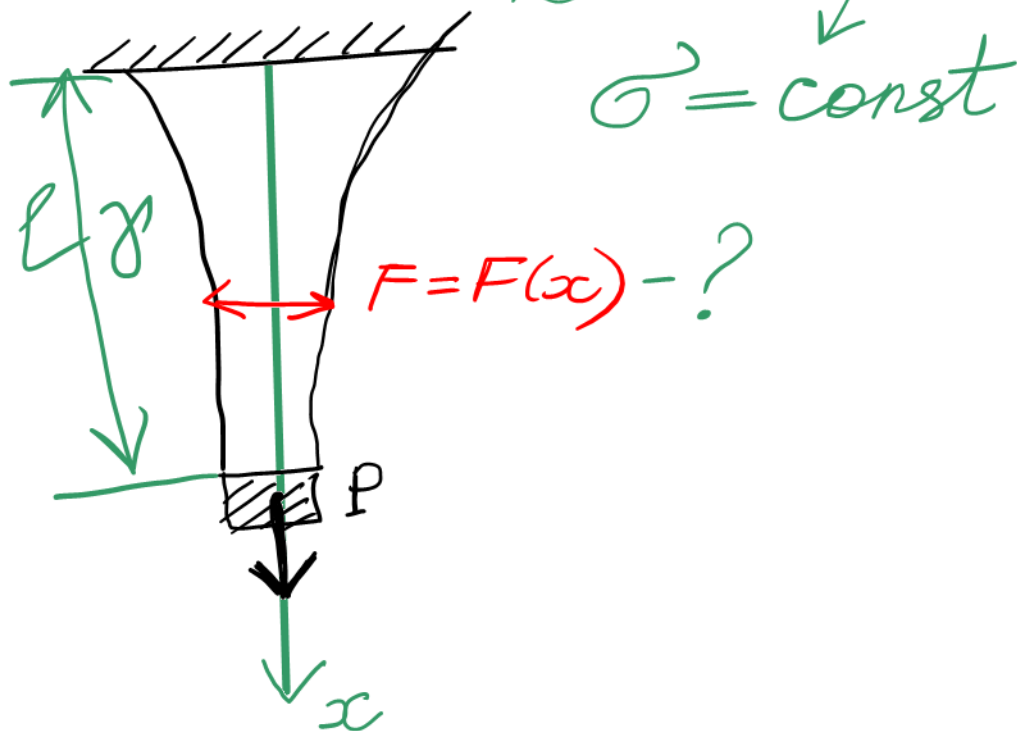


$$J = \int_0^{\infty} E(t) dt = \min_b$$

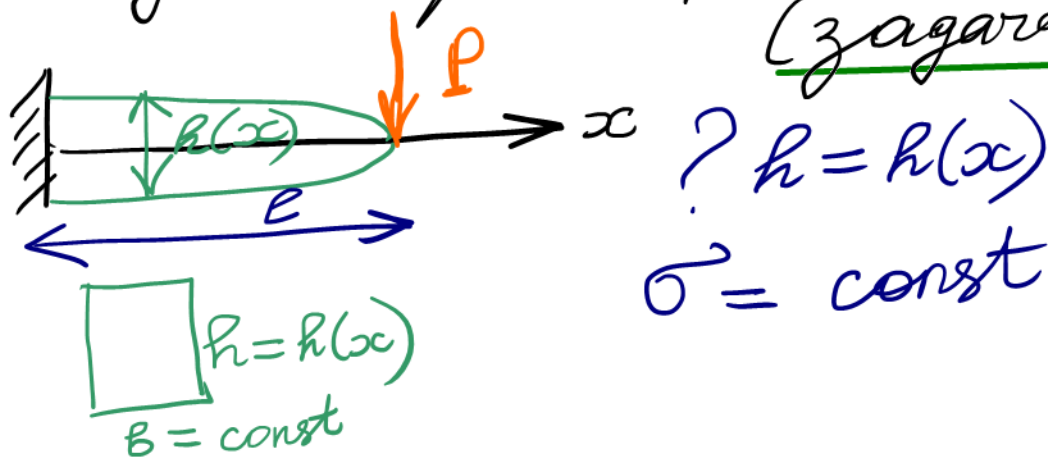
в) Средняя мощность потерь $\langle N \rangle = \max_b$
(локальный критерий)

г) Время входа в 3-5%-ный коридор
 $T = \min$

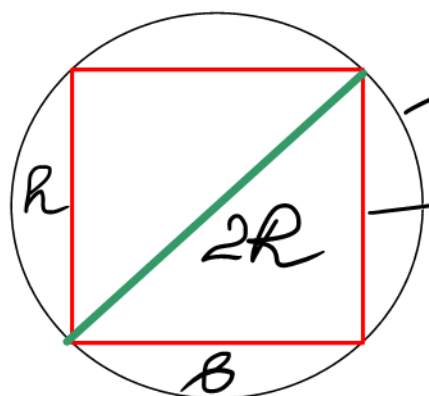
③ Задача о равнопрочном тросе



Задача о равнопрочной балке (задача Галлея)



Задача Парана



а) Брус

наибольшей
прочности при
изгибе.

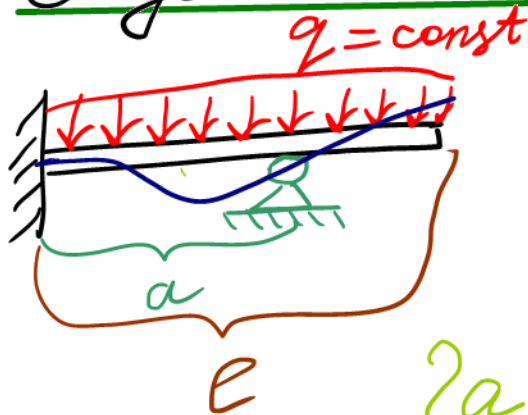
$$\sigma = \frac{M}{W} = \min \Rightarrow W = \max$$

$$W = \frac{bR^2}{6}$$

б) Брус наибольшей жесткости.

$$C = EI = \max \Rightarrow I = \max, I = \frac{bh^3}{12}$$

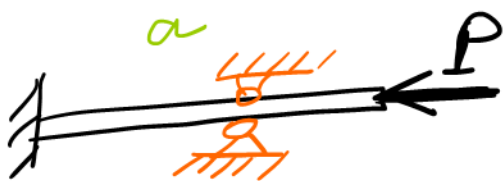
Задача об оптимальном размещении опор



? a $|\varphi|_{\max} = \min_a$
 $|M|_{\max} = \min_a$

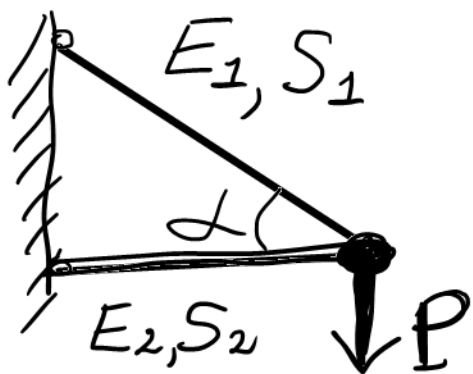


? a $K_1 = \max$
 первая частота колебаний



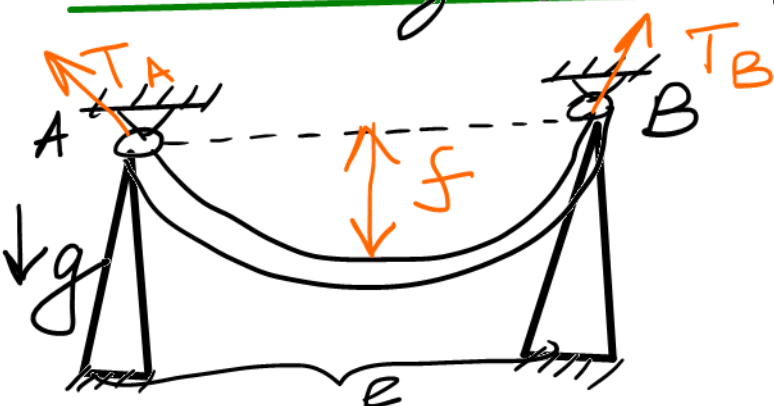
? a $P_{кр} = \max_a$

Оптимизация стержневых систем



Двухстержневая ферма
 ? L $y_P = \min$

Оптимизация цепной линии.



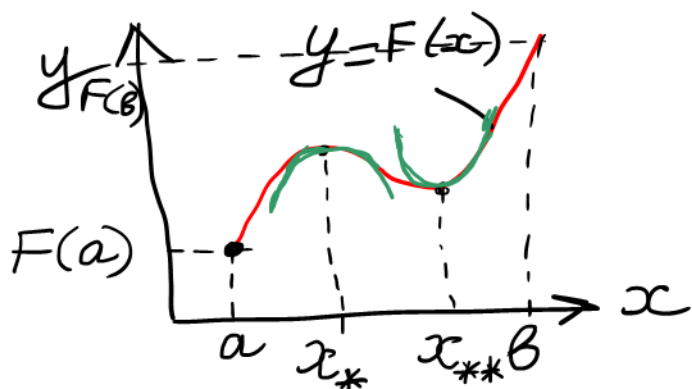
ЛЭП

? f $T_A = \min$

Методы решения

простейших экстремальных задач.

1) Функция одной переменной $y = F(x)$, $x \in [a, b]$



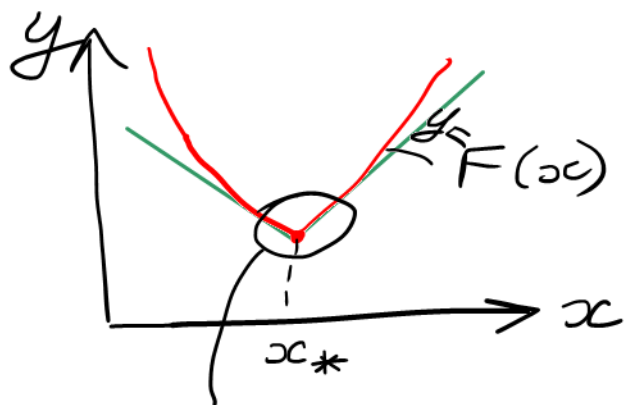
$$\frac{dF}{dx} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_* \\ x = x_{**} \end{cases}$$

$$\left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x_*} < 0 \rightarrow \text{max}$$

$$\left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x_{**}} > 0 \rightarrow \text{min}$$

Ряд Тейлора вблизи x_* . $\Delta x = x - x_*$

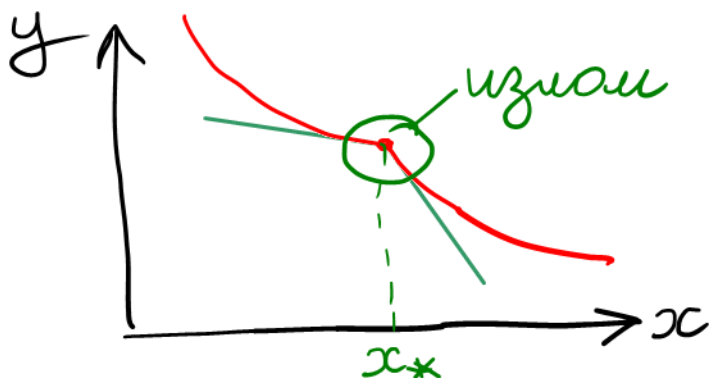
$$F(x) = \underbrace{F(x_*)}_{=\text{const}} + \underbrace{\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_*}}_{=0} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x_*} (\Delta x)^2 + \dots$$



острый экстремум.

$$\exists \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_*}$$

$$\left. \begin{aligned} \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_*-0} < 0 \\ \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_*+0} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &x_* - \text{точка} \\ &\text{минимума} \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_*-0} < 0 \\ \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_*+0} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{нет} \\ &\text{экстремума} \end{aligned}$$

2) Функции двух переменных.

$$z = F(x, y).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_* \\ y = y_* \end{cases}$$

Ряд Тейлора вблизи (x_*, y_*)

$$\Delta x = x - x_*$$

$$\Delta y = y - y_*$$

$$F(x, y) = F(x_*, y_*) + \frac{\partial F}{\partial x} \bigg|_{x_*, y_*} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \bigg|_{x_*, y_*} \Delta y + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \bigg|_{x_*, y_*} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \bigg|_{x_*, y_*} (\Delta x)(\Delta y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \bigg|_{x_*, y_*} (\Delta y)^2 \right] + \dots$$

$$* \approx \frac{1}{2} [A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2] = \tilde{F}(\Delta x, \Delta y)$$

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F} = 0 \text{ npu} \quad \Delta x = 0, \Delta y = 0.$$

$x = x_*, y = y_*$ — точка $\Rightarrow \tilde{F} > 0$
 $(\Delta x = 0, \Delta y = 0)$ — минимум где $\Delta x, \Delta y \neq 0$.

⇒ $G > 0$ — положит. определенность

Критерий Силвестра $\Delta_1 = A > 0$

$$\Delta_2 = \det G = AC - B^2 > 0$$

$$x = x_*, y = y_* \text{ — точка } \Rightarrow \tilde{F} < 0$$

$\Rightarrow G < 0$ - отриц. определённость.

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0.$$

3) Задача на условный экстремум

$F(x, y) = \text{extr}$ при условии связи
 $G(x, y) = \text{fix}$

$$\textcircled{H}(x, y) = F(x, y) + \textcircled{\lambda} G(x, y) = \text{extr}$$

функция

Лагранжа

множитель Лагранжа

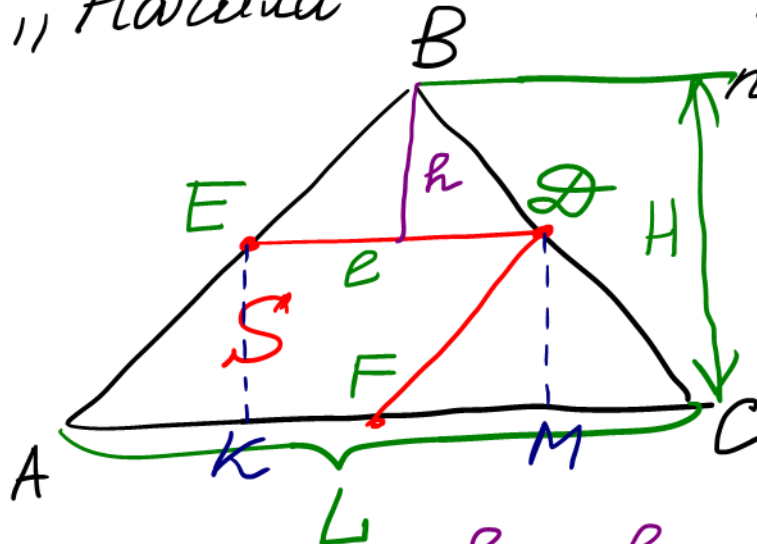
$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ G(x, y) = \text{fix} \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3 \text{ неизвестных} \\ x, y, \lambda \\ 3 \text{ уравнения} \end{array}$$

Примеры

① Задача Евклида (IV в. до н.э.)

„Нагача“

Вписать



параллелограмм
максимальной
площади

$$S = \max$$

$$\triangle ABC \sim \triangle BE\Phi$$

$$S = S_{AF\Phi E}, \quad \frac{h}{H} = \frac{l}{L} \Rightarrow l = \frac{hL}{H}$$

$$S = l(H - r) = \frac{rL}{H}(H - r) = L\left(r - \frac{r^2}{H}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{L, H - \text{заданы, } r = \text{вар}} \Rightarrow S(r) = \max_r$$

$$\frac{dS}{dr} = L\left(1 - \frac{2r}{H}\right) = 0 \Rightarrow r_* = \frac{H}{2}$$

$$l_* = \frac{\cancel{HL}}{2\cancel{H}} = \frac{L}{2}$$

$$S_* = l_*(H - r_*) = \frac{L}{2} \cdot \frac{H}{2} = \frac{LH}{4} = \frac{1}{2} S_{\Delta}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} LH$$

$S_{AE\Phi L} = S_{KE\Omega M} \Rightarrow$ задача о вписанном
в треугольник прямоугольнике
сводится к только что
решенной.